

Propriétés spectrales des grands graphes géométriques

Pierre-Loïc Méliot

9 janvier 2019

Université Paris-Sud (Orsay)

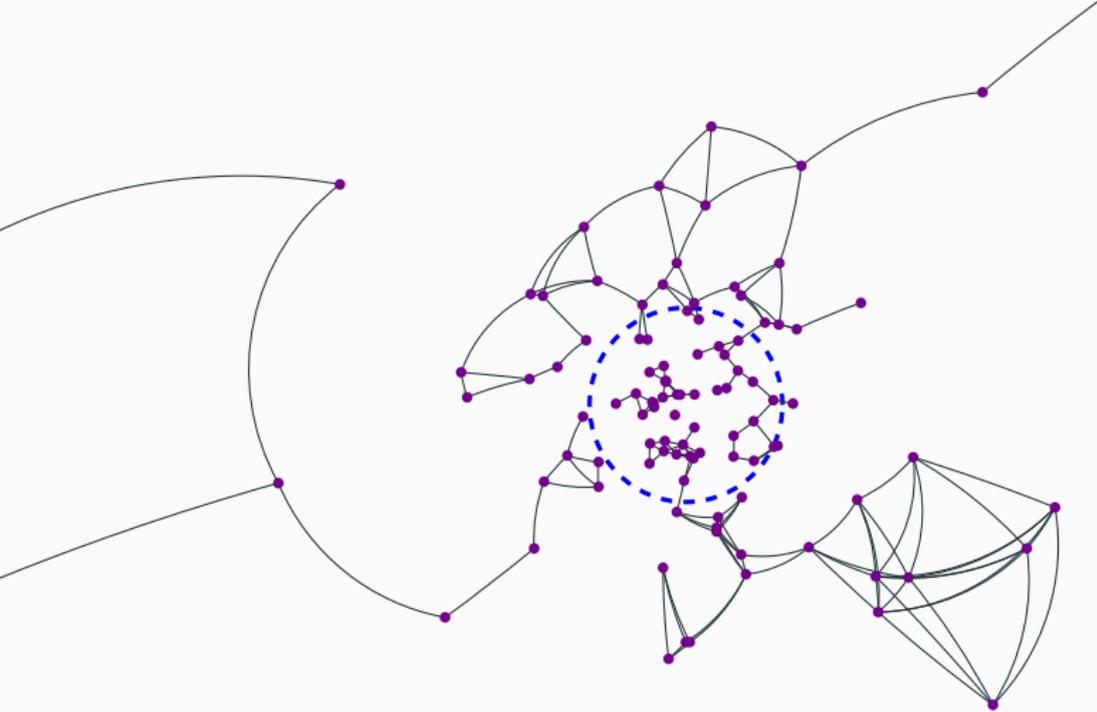
Soit (X, d) un espace métrique compact, par exemple $X = \mathbb{S}^2$ ou $X = \text{SU}(2)$. On se donne une probabilité m sur X , et des points v_1, v_2, \dots, v_N indépendants de loi m . Le **graphe aléatoire géométrique d'ordre N et de niveau L** sur (X, d, m) est le graphe $\Gamma_{\text{geom}}(N, L) = (V, E)$ avec :

- ▶ $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$;
- ▶ $E = \{\{v_i, v_j\} \mid d(v_i, v_j) \leq L\}$.

On s'intéresse à la matrice d'adjacence $A(N, L) = (1_{d(v_i, v_j) \leq L})_{1 \leq i, j \leq N}$ de ce graphe, et à son spectre (réel)

$$e_1(N, L) \geq e_2(N, L) \geq \dots \geq e_N(N, L).$$

Objectif : comprendre le comportement asymptotique de ce spectre, lorsque $N \rightarrow +\infty$ et l'espace (X, d, m) a suffisamment de symétries.



Graphe aléatoire géométrique sur la sphère S^2 , avec $N = 100$ points et niveau $L = \frac{\pi}{8}$ (projection stéréographique).

On suppose que $X = G$ est un **groupe de Lie compact (simple, simplement connexe)**; m est sa mesure de Haar et d est la distance géodésique associée à une structure riemannienne bi-invariante sur $X = G$. De nombreux résultats vrais dans ce cadre s'étendent aux quotients symétriques $X = G/K$.

Exemple : $G = \text{SU}(n)$.

Il y a deux régimes intéressants pour l'asymptotique du spectre :

- ▶ **régime gaussien :** $N \rightarrow +\infty$ et $L > 0$ est fixé.
- ▶ **régime poissonnien :** $N \rightarrow +\infty$ et $L = L_N = \left(\frac{\ell}{N}\right)^{\frac{1}{\dim G}}$, de sorte que le nombre moyen de voisins d'un sommet de $\Gamma_{\text{geom}}(N, L_N)$ reste un $O(1)$.

Idée : utiliser les représentations du groupe G pour comprendre les deux asymptotiques et leurs liens.

**Régime poissonnier et
convergence au sens de
Benjamini–Schramm**

Convergence locale au sens de Benjamini–Schramm

Le régime poissonnien peut être traité par des arguments géométriques. On considère le graphe $\Gamma_N = \Gamma_{\text{geom}}(N, L_N)$ et on l'enracine en un sommet aléatoire $r_N \in \{v_1, \dots, v_N\}$ choisi uniformément. Chaque (Γ_N, r_N) est un élément aléatoire de \mathfrak{G}_\bullet , l'ensemble des **graphes enracinés connexes localement finis** (Γ, r) .

Définition (Convergence locale)

Une suite de lois $(\mathbb{P}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ sur \mathfrak{G}_\bullet converge au sens local si, pour tout $k \geq 0$, les lois des k -voisinages de la racine ont une limite faible :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_N[V_k(\Gamma, r) = \gamma_k] = L[V_k(\Gamma, r) = \gamma_k]$$

pour tout graphe enraciné fini γ_k dont tous les sommets sont à distance inférieure à k de la racine, et pour une certaine loi L sur \mathfrak{G}_\bullet .

Convergence locale et convergence spectrale

Si $(\Gamma, r) \in \mathfrak{G}_\bullet$, son **opérateur d'adjacence** est

$$A_\Gamma : \ell_c^2(V_\Gamma) \rightarrow \ell_c^2(V_\Gamma)$$
$$f \mapsto \left(A_\Gamma f : w \mapsto \sum_{(v,w) \in E_\Gamma} f(v) \right).$$

Dans les bons cas, A_Γ s'étend de manière unique en un opérateur auto-adjoint $A_\Gamma : \ell^2(V_\Gamma) \rightarrow \ell^2(V_\Gamma)$ (graphe essentiellement auto-adjoint). La **mesure spectrale** de (Γ, r) est alors définie par

$$\langle 1_r | (A_\Gamma - z)^{-1} 1_r \rangle_{\ell^2(V_\Gamma)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x - z} \mu_{(\Gamma, r)}(dx)$$

pour $z \in \mathbb{C}_+$.

La mesure spectrale d'une loi L sur \mathfrak{G}_\bullet est $\mu_L = \mathbb{E}[\mu_{(\Gamma,r)}]$. Si Γ est un graphe fini et si $L = U(\Gamma)$ est la loi uniforme sur les choix possibles de racines, alors on retrouve

$$\mu_{U(\Gamma)} = \nu_\Gamma = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{e_i}$$

où les e_i sont les valeurs propres de la matrice d'adjacence de Γ .

Théorème (Bordenave, 2016)

La restriction de $L \mapsto \mu_L$ à la clôture des combinaisons convexes de lois $U(\Gamma)$ (ou plus généralement les **lois unimodulaires**) est continue pour les topologies :

- ▶ de la convergence locale de graphes ;
- ▶ de la convergence faible de mesures de probabilités.

Convergence locale des graphes poissonniens

Pour un graphe géométrique poissonnien de paramètres N et $L_N = \left(\frac{\ell}{N}\right)^{\frac{1}{\dim G}}$, une petite boule $B^G(r_N, \alpha L_N)$ est *quasiment* isométrique à la boule euclidienne $B^{\mathbb{R}^{\dim G}}(0, \alpha L_N)$. Il existe donc une application bijective

$$\psi_{(N,\alpha)} : B^G(r_N, \alpha L_N) \rightarrow B^{\mathbb{R}^{\dim G}}(0, \alpha)$$

- ▶ qui multiplie *quasiment* les distances par $\frac{1}{L_N}$;
- ▶ qui fait *quasiment* correspondre le αL_N -voisinage de r_N dans Γ_N avec le α -voisinage de 0 dans le graphe construit comme suit :
 1. On lance un processus ponctuel de Poisson \mathcal{P} d'intensité $\frac{\ell}{\text{vol}(G)} \text{Leb}$ sur $\mathbb{R}^{\dim G}$.
 2. On relie les points à distance inférieure à 1 dans $\mathcal{P} \sqcup \{0\}$.

Ce graphe $(\Gamma_\infty, r = 0)$ est le **graphe booléen-poissonnien** enraciné en 0, de dimension $\dim G$ et de paramètre $\frac{\ell}{\text{vol}(G)}$.

En faisant très attention, on peut quantifier les *quasiment* et établir :

Théorème

Le graphe géométrique poissonnien (Γ_N, r_N) enraciné en un sommet aléatoire uniforme converge au sens de Benjamini–Schramm vers $(\Gamma_\infty, 0)$.

Le résultat de Bordenave implique que les espérances de mesures spectrales $\mathbb{E}[\nu_{\Gamma_N}]$ convergent faiblement vers une limite ν_∞ , qui est la mesure spectrale du graphe booléen-poissonnien. On a même :

Théorème

On a la convergence en probabilité $\nu_{\Gamma_N} \rightarrow_{\mathbb{P}} \nu_\infty$ dans l'espace des mesures de probabilité sur \mathbb{R} .

Question : que peut-on dire de ν_∞ ?

Régime gaussien et spectre de l'opérateur de convolution

Matrices à noyau de carré intégrable

Si L est fixé, la matrice d'adjacence $A(N, L)$ est une **matrice à noyau** du type $(K(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq N}$, avec les v_i variables i.i.d. dans G et K noyau tel que

$$\int_{G^2} (K(x, y))^2 dx dy < +\infty.$$

L'opérateur $\mathcal{H} : L^2(G) \rightarrow L^2(G)$ de convolution par K est de type Hilbert–Schmidt, et les plus grandes valeurs propres de $\frac{A(N, L)}{N}$ tendent vers celles de \mathcal{H} .

$$\text{Spec}(A(N, L)) = e_{-1}(N, L) \leq \dots \leq 0 \leq \dots \leq e_1(N, L) \leq e_0(N, L);$$

$$\text{Spec}(\mathcal{H}) = e_{-1} \leq e_{-2} \leq \dots \leq 0 \leq \dots \leq e_1 \leq e_0.$$

Théorème (Giné–Koltchinskii, 2000)

On a presque sûrement $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{e_k(N, L)}{N} - e_k \right|^2 \rightarrow 0$.

Convolution sur un groupe compact

Question : quel est le spectre de l'opérateur \mathcal{H} si $K(x, y) = 1_{d(x, y) \leq L}$?

Notons pour commencer que

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}f)(x) &= \int_G 1_{d(x, y) \leq L} f(y) dy = \int_G 1_{d(xy^{-1}, e_G) \leq L} f(y) dy \\ &= (Z_L * f)(x) \quad \text{avec } Z_L(g) = 1_{d(g, e_G) \leq L}.\end{aligned}$$

La convolution de fonctions d'une variable sur un groupe compact G est décrite par le théorème de Peter–Weyl. On note :

$(V, \rho : G \rightarrow \text{GL}(V))$	une représentation de G sur un espace vectoriel complexe de dimension finie ;
$\widehat{G} = \{\lambda = (V^\lambda, \rho^\lambda)\}$	l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de G ;
$\langle \cdot \cdot \rangle_\lambda$	un produit scalaire G -invariant sur V^λ ;
d_λ	la dimension complexe de V^λ .

Si $f \in L^2(G)$, sa **transformée de Fourier** est

$$\widehat{f}(\lambda) = \left(\int_G f(g) \rho^\lambda(g) dg \right) \in \text{End}(V^\lambda).$$

On peut voir \widehat{f} comme un élément de $L^2(\widehat{G}) = \bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}}^\perp \text{End}(V^\lambda)$, chaque espace d'endomorphismes étant muni du produit scalaire

$$\langle u | v \rangle_{\text{End}(V^\lambda)} = d_\lambda \text{tr}(u^* v).$$

Théorème (Peter–Weyl, 1927)

L'application $f \in L^2(G) \mapsto \widehat{f} \in L^2(\widehat{G})$ est une isométrie et un isomorphisme d'algèbres.

Si f est invariante par conjugaison, alors $\widehat{f} \in Z(L^2(\widehat{G})) = \bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}}^\perp \text{Cid}_{V^\lambda}$.
Les valeurs propres de la convolution par f sont alors

$$c_\lambda = \int_G f(g) \text{ch}_{\text{norm}}^\lambda(g) dg, \quad \text{avec multiplicité } (d_\lambda)^2.$$

Calcul explicite du spectre

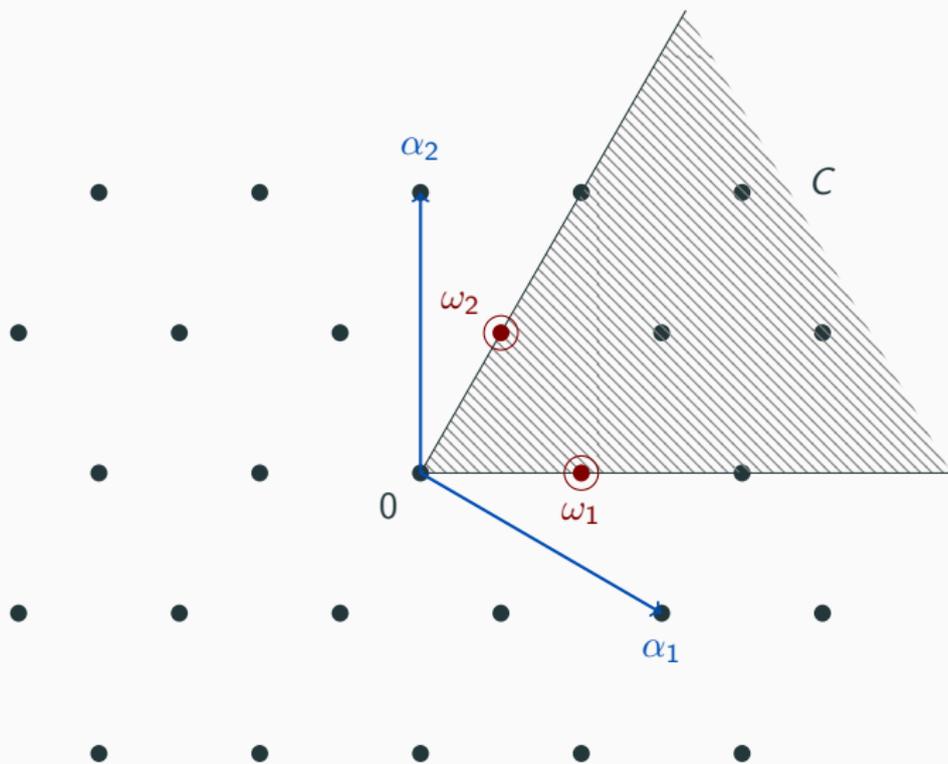
Technique : utiliser les formules de Weyl pour décrire \widehat{G} et calculer les valeurs propres c_λ .

Exemple : $G = \mathrm{SU}(n)$. On fixe $T = \{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}), \det = 1\}$ un tore maximal, de rang $d = n - 1$. Il existe un réseau $\mathbb{Z}\Omega$ de caractères de T (**réseau des poids**) tel que, si $W = \mathrm{Norm}(T)/T = \mathfrak{S}(n)$ est le **groupe de Weyl** de G , et si C est un domaine fondamental pour l'action de W sur $\mathbb{R}\Omega = \mathbb{Z}\Omega \otimes \mathbb{R}$ (**chambre de Weyl**), alors

$$\widehat{G} = \mathbb{Z}\Omega \cap C.$$

De plus, si $\widehat{G} = \bigoplus_{i=1}^d \mathbb{N}\omega_i$ et $\rho = \sum_{i=1}^d \omega_i$, alors

$$\mathrm{ch}^\lambda(t) = \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) (\rho + \lambda)(t^w)}{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) \rho(t^w)} \quad ; \quad d_\lambda = \frac{\prod_{\alpha \in \Phi_+} \langle \alpha | \rho + \lambda \rangle}{\prod_{\alpha \in \Phi_+} \langle \alpha | \rho \rangle}.$$



Réseau des poids et représentations irréductibles de $G = \text{SU}(3)$.

Pour $G = \mathrm{SU}(n)$, $\widehat{G} = \{(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq 0) \in \mathbb{N}^{n-1}\}$, et

$$d_\lambda = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}.$$

En utilisant la formule d'intégration de Weyl, on obtient :

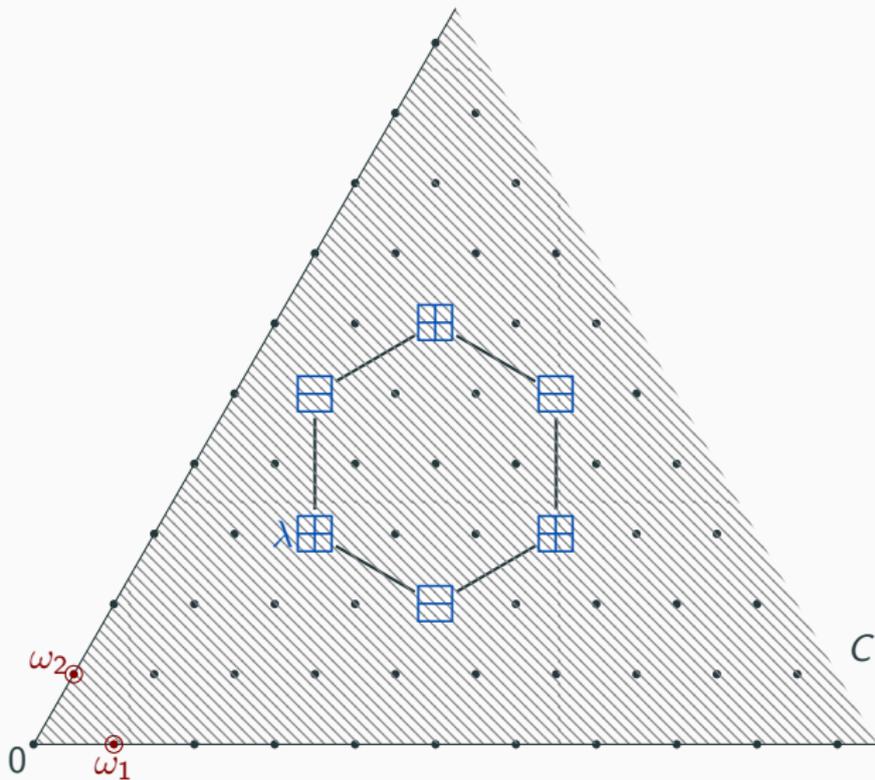
Théorème

Les valeurs propres limites de $\frac{A(N,L)}{N}$ lorsque $N \rightarrow +\infty$ sont :

$$c_\lambda = \frac{\mathrm{vol}(\mathbb{R}\Omega/\mathbb{Z}\Omega)}{d_\lambda} \left(\frac{L}{\sqrt{2\pi}} \right)^d \sum_{w \in W} \varepsilon(w) J_{\mathbb{R}\Omega}(L(\lambda + \rho - w(\rho))),$$

où $J_{\mathbb{R}\Omega}$ est la fonction de Bessel sur l'espace des poids $\mathbb{R}\Omega$, définie par

$$J_{\mathbb{R}\Omega}(x) = \frac{1}{2^{\frac{d}{2}}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \frac{d}{2} + 1)} \left(\frac{\|x\|^2}{4} \right)^m.$$



Poids dominants mis en jeu dans le calcul de c_λ .

Lien entre les deux régimes

Développement combinatoire des moments

On peut comprendre comment le régime gaussien dégénère en le régime poissonnien en tentant de calculer les moments

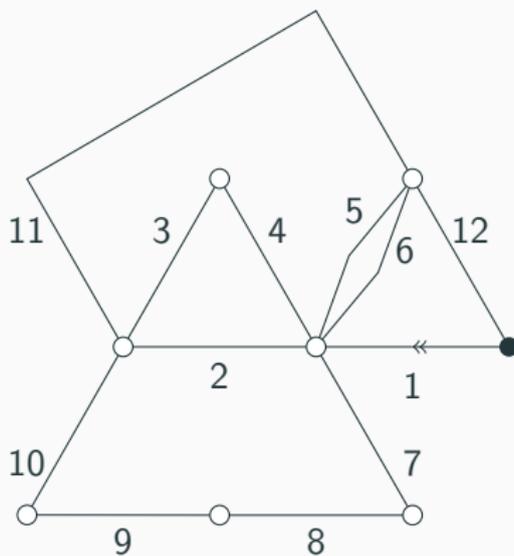
$$M_s = \int_{\mathbb{R}} x^s \nu_{\infty}(dx);$$
$$M_{s,N} = \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}} x^s \nu_{\Gamma_N}(dx) \right] = \frac{1}{N} \mathbb{E}[\text{tr}(A(N, L_N))^s].$$

Lorsqu'on développe la trace de la puissance de la matrice d'adjacence, la valeur de

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{d(v_{i_1}, v_{i_2}) \leq L_N} \mathbf{1}_{d(v_{i_2}, v_{i_3}) \leq L_N} \cdots \mathbf{1}_{d(v_{i_s}, v_{i_1}) \leq L_N}]$$

ne dépend que des éventuelles identités d'indices $i_j = i_k$. Ceci mène au **développement sur les circuits**.

Un circuit est un graphe $H = (V, E)$, éventuellement avec des boucles et des arêtes multiples, et muni d'un parcours T de ses sommets qui boucle et qui fait apparaître chaque arête une fois.



Circuit de longueur $s = 12$ sur $k = 8$ sommets, associé aux identités $\{i_2 = i_5 = i_7, i_3 = i_{11}, i_6 = i_{12}\}$.

Étant donné un circuit (H, T) , on note

$$E_{H,T,N} = \mathbb{E} \left[\prod_{(a,b) \in T} 1_{d(v_a, v_b) \leq L_N} \right].$$

On a alors :

$$M_{s,N} = \sum_{(H,T) \text{ circuit de longueur } s} (N-1)^{\downarrow |H|-1} E_{H,T,N}.$$

Par ailleurs, chaque $E_{H,T,N}$ ne dépend que du **circuit réduit** $R(H, T)$ obtenu à partir de H par l'algorithme suivant :

- ▶ remplacer les arêtes multiples par des arêtes simples ;
- ▶ placer une étiquette 1 sur chaque arête ;
- ▶ couper le graphe en ses composantes 2-connexes ;

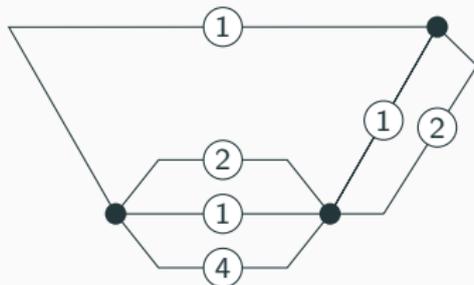
- retirer récursivement tous les sommets de valence 2, en remplaçant



par



- remplacer les composantes $\bullet - \textcircled{1} - \bullet$ par des boucles $\bullet - \textcircled{2} - \bullet$.



Théorème

Pour tout circuit (H, T) sur k sommets, il existe une limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{k-1} E_{H,T,N} = e_{R(H,T)}^{(\ell)} = e_R \left(\frac{\ell}{\text{vol}(G)} \right)^{k-1}.$$

On a donc $M_s = \sum_{(H,T) \text{ circuit de longueur } s} e_{R(H,T)}^{(\ell)} \left(\frac{\ell}{\text{vol}(G)} \right)^{|H|-1}$.

Exemple :

$$M_6 = e^{(\ell)} + 6 e^{(\ell)} + 3 e^{(\ell)} + 6 e^{(\ell)} + 6 e^{(\ell)} + 9 e^{(\ell)} + 6 e^{(\ell)} + 4 e^{(\ell)} + e^{(\ell)}.$$

Une conjecture en théorie des représentations

Observations :

- ▶ Chaque $E_{H,T,N}$ peut s'écrire comme une série indicée par le réseau $(L_N \widehat{G})^{\text{nombre de sommets de } R(H,T)}$. Les termes de ces séries mettent en jeu des puissances des valeurs propres c_λ .
- ▶ Lorsque N tend vers l'infini, le pas L_N du réseau tend vers 0 et les séries deviennent des sommes de Riemann d'intégrales. Les sommes alternées dans les c_λ deviennent des dérivées partielles.
- ▶ Il y a aussi d'autres termes plus compliqués, qui mènent à une conjecture intéressante sur des fonctionnelles des représentations irréductibles de G .

Exemple :

$$M_3 = e^{\binom{\ell}{3}} = \left(\int_C \left(\frac{(\partial_{\Phi_-} J_{\mathbb{R}\Omega})(x)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \right)^3 \frac{dx}{\prod_{\alpha \in \Phi_-} \frac{\langle x | \alpha \rangle}{\langle \rho | \alpha \rangle}} \right) (\ell \text{ vol}(\mathbb{R}\Omega / \mathbb{Z}\Omega))^2.$$


Soit S un graphe fini avec k sommets et r arêtes, $a \rightarrow b$ une orientation arbitraire des arêtes de S . On note

$$\mathrm{GF}_S((\lambda_e)_{e \in E(S)}) = \int_{G^k} \left(\prod_{(a \rightarrow b) \in E(S)} \mathrm{ch}^{\lambda_e}(g_a(g_b)^{-1}) \right) dg_1 \cdots dg_k$$

la **fonctionnelle de graphes** des représentations irréductibles λ_e .

Conjecture

Il existe un polytope $\mathcal{P}((\lambda_e)_{e \in E(S)})$ génériquement de dimension

$$\left(\frac{\dim G - \mathrm{rang}(G)}{2} \right) r - (\dim G)(k - 1)$$

tel que $\mathrm{GF}_S((\lambda_e)_{e \in E(S)})$ soit le nombre de points entiers dans ce polytope. Les équations déterminant $\mathcal{P}((\lambda_e)_{e \in E(S)})$ dépendent des représentations $\lambda_e \in \widehat{G}$ de façon affine.

The end