Les Automates de Büchi

Jérémy Ledent

1 Préliminaires

Soit Σ un alphabet fini.
On va s'intéresser à des langages de mots *infinis* sur Σ. On note Σ^ω l'ensemble de tous les mots infinis sur l'alphabet Σ.

Si L est un langage de mots finis, on note L^ω le langage de mots infinis défini par :

$$L^\omega = \{u_0 u_1 u_2 \dots u_n \dots \mid \forall i, u_i \in L\}$$

On étend la grammaire des expressions rationnelles en ajoutant cet opérateur ω aux opérateurs déjà présents (union, concaténation, étoile). Cela définit récursivement l'ensemble des *ω-expressions*, qui est une extension des expressions régulières (ou langages rationnels).

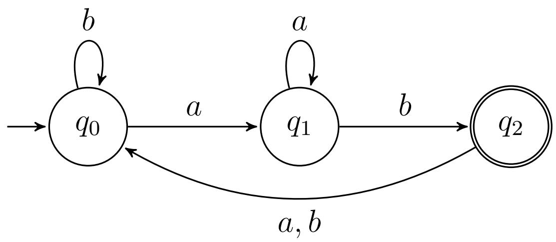
1. Donner une ω-expression désignant le langage des mots infinis sur $\Sigma = \{a, b\}$ qui ne contiennent qu'un nombre fini de a.

Un *Automate de Büchi Déterministe (DBA)* est donné par un quintuplet $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ où :

- Q est un ensemble fini d'états
- Σ est un alphabet fini
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ est la fonction de transition
- q_0 est un état initial
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux

Syntaxiquement, un automate de Büchi est identique à un automate fini. La différence réside dans la condition d'acceptation : on dit que $\mathcal{A}$ accepte un mot infini u si l'on passe une infinité de fois par un état de F sur l'entrée u. On note $L(\mathcal{A})$ le langage de tous les mots infinis reconnus par $\mathcal{A}$.

2. Quel est le langage reconnu par l'automate suivant ?



Comme pour les automates finis, on définit un *Automate de Büchi Non-déterministe (NBA)* en remplaçant la fonction $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ par une relation $\Delta : Q \times \Sigma \times Q$, et on remplace l'état initial q_0 par un ensemble d'états initiaux I.

3. Donner un NBA reconnaissant le langage $(a+b)^* a^\omega$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de DBA reconnaissant ce langage.

2 Langages ω-rationnels

Ainsi, contrairement au cas des automates finis, les NBA sont strictement plus puissants que les DBA. On va maintenant s'intéresser à la classe de langages reconnue par les NBA.

Un *ω-rationnels* est un langage de mots infinis de la forme :

$$L = \cup_{i=0}^{n} U_i (V_i)^\omega, \text{ où } U_i, V_i \text{ sont des langages rationnels.}$$

L'objectif de cette partie est de montrer que les langages reconnus par les NBA sont exactement les langages ω-rationnels.

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ un NBA, pour $q, q' \in Q$ on appelle $L_{q,q'}$ le langage *rationnel* reconnu par l'automate fini $(Q, \Sigma, \Delta, \{q\}, \{q'\})$.

5. Montrer que
$$L(\mathcal{A}) = \cup_{q \in I, q' \in F} L_{q,q'} (L_{q',q'} \setminus \epsilon)^\omega.$$
6. Soient $\mathcal{A} = (Q_A, \Sigma, \Delta_A, I_A, F_A)$ et $\mathcal{B} = (Q_B, \Sigma, \Delta_B, I_B, F_B)$ deux NBA, et $\mathcal{C} = (Q_C, \Sigma, \Delta_C, I_C, F_C)$ un automate *fini*. On suppose que Q_A, Q_B et Q_C sont disjoints. Montrer que les langages suivants sont reconnus par des NBA :
   - $L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$
   - $L(\mathcal{C}).L(\mathcal{A})$

– $L(\mathcal{C})^\omega$ si $\epsilon \notin L(\mathcal{C})$ *(on pourra supposer d'abord qu'aucune transition de Δ_C n'arrive sur un état initial de $\mathcal{C}$).*

7. Conclure.

3 Clôture par complémentation

L'objectif est maintenant montrer que l'ensemble des langages reconnus par les NBA est clos par complémentation.

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ un NBA, il faut donc maintenant montrer que le langage $\Sigma^\omega \setminus L(\mathcal{A})$ est reconnu par un NBA. En fait, on ne va pas construire directement d'automate le reconnaissant : on va montrer qu'il est ω-rationnel.

Soit la relation $\sim_\mathcal{A}$ entre les mots **finis** de Σ^+ définie comme suit :

$$u \sim_\mathcal{A} v \text{ ssi } \forall p, q \in Q, \begin{cases} p \to^u q \Leftrightarrow p \to^v q \\ p \to^u_F q \Leftrightarrow p \to^v_F q \end{cases}$$

où on note :

- $p \to^u q$: il existe un chemin de p à q dans $\mathcal{A}$ sur l'entrée u ;
- $p \to^u_F q$: il existe un chemin de p à q dans $\mathcal{A}$ sur l'entrée u passant par un état de F.

8. Montrer que $\sim_\mathcal{A}$ est bien une relation d'équivalence, et caractériser ses classes d'équivalences en fonction des $L_{q,q'}$ définis plus tôt.
9. Montrer que $\sim_\mathcal{A}$ a un nombre fini de classes d'équivalences, et que celles-ci sont des langages rationnels.

On va maintenant montrer le lemme suivant :

Lemme 1. *Tout mot infini $u \in \Sigma^\omega$ appartient à un $U.V^\omega$, où U et V sont des classes d'équivalence de $\sim_\mathcal{A}$.*

On admettra le théorème suivant :

Théorème 2 (Ramsay)**.** *Dans un graphe complet infini où on colore chaque arête avec un ensemble fini de couleurs, il existe un graphe complet infini monochromatique.*

10. Démontrer le lemme.
    (indice : considérer les classe d'équivalence comme des "couleurs")
11. Montrer que pour toutes classes U et V, le langage $U.V^\omega$ est soit inclus dans $L(\mathcal{A})$, soit disjoint de $L(\mathcal{A})$.
12. Conclure.