# Modèles intégrables de spins, vertex et boucles

Paul Melotti

sous la direction de Cédric Boutillier et Béatrice de Tilière

LPSM – Sorbonne Université

28/06/2019

# Plan

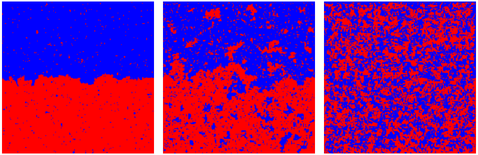
1. Introduction
2. Modèle à huit sommets
3. Récurrence de Kashaev
4. « Triangle-étoile » et géométrie discrète

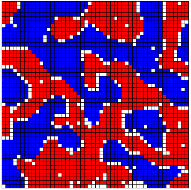
# « Modèles » : la mécanique statistique

But : décrire un système possédant un grand nombre de degrés de liberté.

Boltzmann : état aléatoire $\sigma$, à la température inverse $\beta = \frac{1}{k_B T}$ et pour l'**énergie** $E(\sigma)$, donné par :

$$\mathbb{P}(\sigma) = \frac{1}{Z} \exp\left[-\beta E(\sigma)\right].$$





# « Intégrables » ?

Liouville :
$N$ constantes du mouvement
$\{f_i, f_j\} = 0$

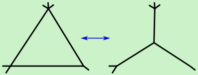
Paire de Lax
$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = [P, L]$

...

Matrices de transfert
$[T(u), T(v)] = 0$

Dynamique conjuguée à une translation sur $S^1 \times \cdots \times S^1$

Yang-Baxter



Modèles "exactement solubles"

"Existence de structures algébriques"

# « Intégrables » ?

Liouville :
$N$ constantes du mouvement
$\{f_i, f_j\} = 0$

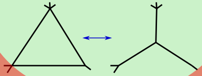
Paire de Lax
$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = [P, L]$

…

Matrices de transfert
$[T(u), T(v)] = 0$

Dynamique conjuguée à une translation sur $S^1 \times \cdots \times S^1$

Yang-Baxter

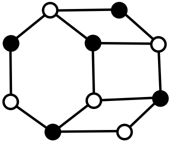


Modèles "exactement solubles"

"Existence de structures algébriques"

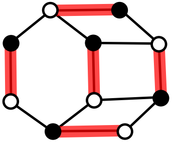
# Modèle de dimères

$G = (V, E)$ un graphe planaire, muni des poids positifs $(\nu_e)_{e \in E}$.



# Modèle de dimères

$G = (V, E)$ un graphe planaire,
muni des poids positifs $(\nu_e)_{e \in E}$.



**Configuration de dimères :**
sous-ensemble d'arêtes $m \subset E$ tel que tout sommet touche une et une seule arête de $m$. Poids d'une configuration :

$$w_{\text{dim}}(m) = \prod_{e \in m} \nu_e.$$

Probabilité de Boltzmann :

$$\mathbb{P}(m) = \frac{w_{\text{dim}}(m)}{Z_{dim}(G; \nu)}.$$

Fonction de partition :

$$Z_{dim}(G; \nu) = \sum_m \prod_{e \in m} \nu_e.$$

# Théorème de Kasteleyn

On suppose $G$ planaire et **biparti** ; $V = W \sqcup B$. Si on oriente les arêtes de $G$, on peut définir une matrice d'adjacence orientée et pondérée $K = (K_{w,b})_{w \in W, b \in B}$ :

$$K_{w,b} = \begin{cases} \nu_e & \text{si } \overset{w}{\circ}\xrightarrow{\;e\;}\overset{b}{\bullet}, \\ -\nu_e & \text{si } \overset{w}{\circ}\xleftarrow{\;e\;}\overset{b}{\bullet}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

# Théorème de Kasteleyn

On suppose $G$ planaire et **biparti** ; $V = W \sqcup B$. Si on oriente les arêtes de $G$, on peut définir une matrice d'adjacence orientée et pondérée $K = (K_{w,b})_{w \in W, b \in B}$ :

$$K_{w,b} = \begin{cases} \nu_e & \text{si } \overset{w}{\circ} \xrightarrow{\;e\;} \overset{b}{\bullet}, \\ -\nu_e & \text{si } \overset{w}{\circ} \xleftarrow{\;e\;} \overset{b}{\bullet}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Théorème** *[Kasteleyn, Temperley-Fisher ; 1961]*

Il existe une orientation telle que

$$Z_{dim}(G; \nu) = \det K.$$

# Théorème de Kasteleyn

On suppose $G$ planaire et **biparti** ; $V = W \sqcup B$. Si on oriente les arêtes de $G$, on peut définir une matrice d'adjacence orientée et pondérée $K = (K_{w,b})_{w \in W, b \in B}$ :

$$K_{w,b} = \begin{cases} \nu_e & \text{si } \overset{w}{\circ}\overset{e}{\longrightarrow}\overset{b}{\bullet}, \\ -\nu_e & \text{si } \overset{w}{\circ}\overset{e}{\longleftarrow}\overset{b}{\bullet}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Théorème** *[Kasteleyn, Temperley-Fisher ; 1961]*

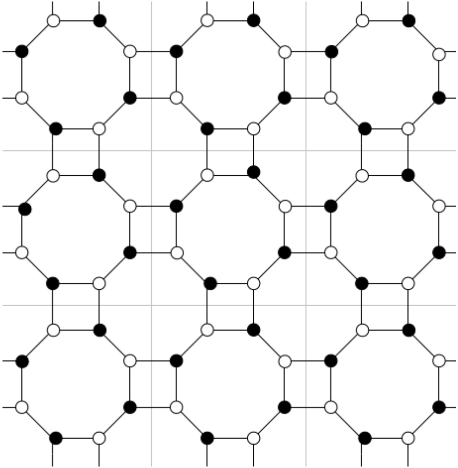
Il existe une orientation telle que

$$Z_{dim}(G;\nu) = \det K.$$

Et si « $G \to \infty$ » ?
**Énergie libre :** $\lim_{G\to\infty} -\frac{1}{|G|} \log\left[Z_{dim}(G;\nu)\right]$ ?

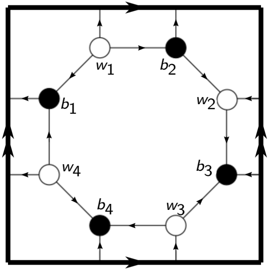
# Limite thermodynamique des dimères bipartis

$G$ est planaire, biparti, $\mathbb{Z}^2$-périodique.



# Limite thermodynamique des dimères bipartis

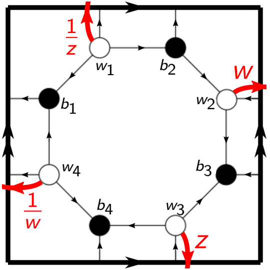
$G$ est planaire, biparti, $\mathbb{Z}^2$-périodique.
$G_1 = G/\mathbb{Z}^2$, et $K_1$ sa matrice d'adjacence pondérée orientée.




$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Limite thermodynamique des dimères bipartis

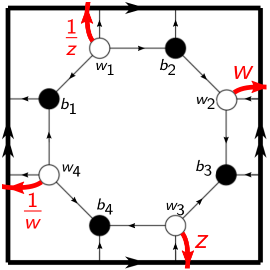
$G$ est planaire, biparti, $\mathbb{Z}^2$-périodique.
$G_1 = G/\mathbb{Z}^2$, et $K_1$ sa matrice d'adjacence pondérée orientée.
Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, $K_1(z,w)$ une matrice modifiée selon l'homologie.




$$K_1(z,w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1/z \\ -1 \times w & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 \times z & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/w & 1 \end{pmatrix}$$

# Limite thermodynamique des dimères bipartis

$G$ est planaire, biparti, $\mathbb{Z}^2$-périodique.
$G_1 = G/\mathbb{Z}^2$, et $K_1$ sa matrice d'adjacence pondérée orientée.
Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, $K_1(z, w)$ une matrice modifiée selon l'homologie.
$P(z, w) = \det K_1(z, w)$ est le **polynôme caractéristique**.




$$P(z, w) = 5 - z - \frac{1}{z} - w - \frac{1}{w}.$$

# Limite thermodynamique des dimères bipartis

$G$ est planaire, biparti, $\mathbb{Z}^2$-périodique.
$G_1 = G/\mathbb{Z}^2$, et $K_1$ sa matrice d'adjacence pondérée orientée.
Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, $K_1(z, w)$ une matrice modifiée selon l'homologie.
$P(z, w) = \det K_1(z, w)$ est le **polynôme caractéristique**.

**Théorème** *[Cohn-Kenyon-Propp 2001, Kenyon-Okounkov-Sheffield 2006]*

Soit $G_n = G/\left(n\mathbb{Z}\right)^2$.

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2}\log\left(Z_{\mathrm{dim}}(G_n, \mu)\right) = \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\mathbb{T}^2} \log|P(z, w)| \frac{\mathrm{d}z}{z}\frac{\mathrm{d}w}{w}.$$

# Corrélations

Cas infini : si $G$ est planaire, biparti, $\mathbb{Z}^2$-périodique :
Lorsque $n \to \infty$, les mesures de Boltzmann sur $G_n$ ont une limite : c'est une **mesure de Gibbs ergodique** sur le graphe infini $G$.

# Corrélations

Cas infini : si $G$ est planaire, biparti, $\mathbb{Z}^2$-périodique :
Lorsque $n \to \infty$, les mesures de Boltzmann sur $G_n$ ont une limite : c'est une **mesure de Gibbs ergodique** sur le graphe infini $G$.

**Théorème** *[Cohn-Kenyon-Propp 2001, Kenyon-Okounkov-Sheffield 2006]*

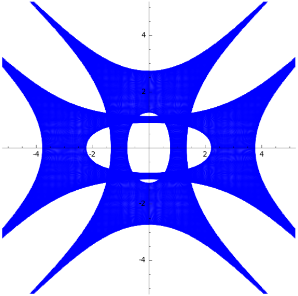
Soient $e_1 = \{w_1 b_1\}, \ldots, e_k = \{w_k, b_k\}$ des arêtes de $G$. La probabilités qu'elles soient toutes présentes est

$$\mathbb{P}(e_1, \ldots, e_k \in m) = \left( \prod_{i=1}^{k} K_{w_i, b_i} \right) \det \left( K^{-1}_{b_i, w_j} \right)_{1 \leq i,j \leq k}$$

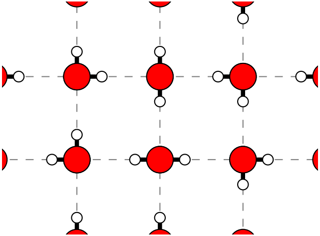
où

$$K^{-1}_{b, w+(n,m)} = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\left[ {}^t\mathrm{Com}\, K_1(z,w) \right]_{b,w}}{P(z,w)} z^n w^m \frac{dz}{z} \frac{dw}{w}.$$

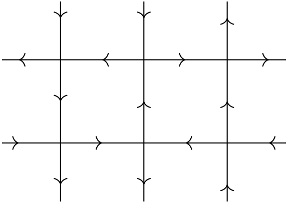
# I - Le modèle à huit sommets « free-fermion »



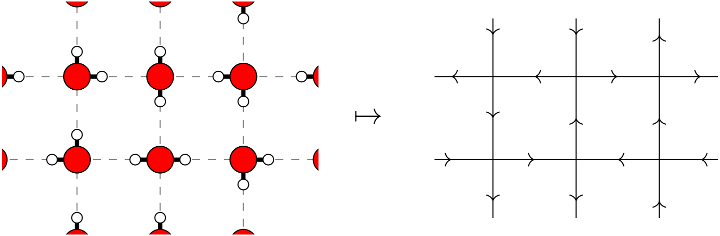
# Un modèle de glace : le modèle à six sommets



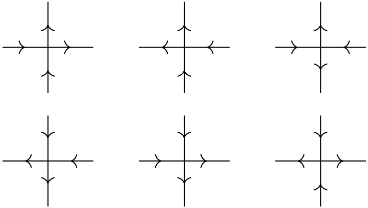
$\mapsto$



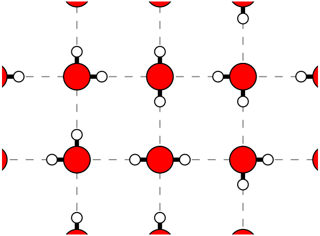
# Un modèle de glace : le modèle à six sommets



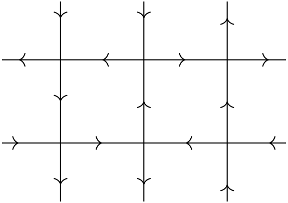
Six configurations locales ou « sommets » :



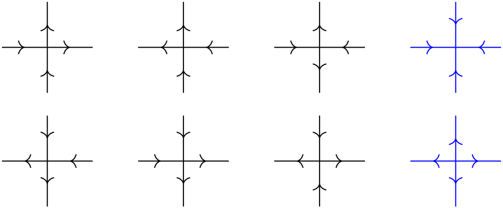
# Un modèle de glace : le modèle à huit sommets



$\mapsto$

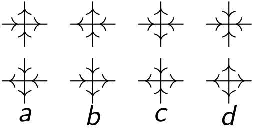


Six configurations locales ou « sommets » :



...huit sommets si on introduit des défauts.

On fixe $a, b, c, d > 0$ les poids locaux des six configurations :

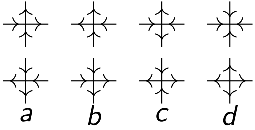



Sur une portion finie $G$ de $\mathbb{Z}^2$, une orientation $\tau$ qui satisfait ces règles a pour *poids*

$$w(\tau) = a^{N_a} b^{N_b} c^{N_c} d^{N_d}.$$

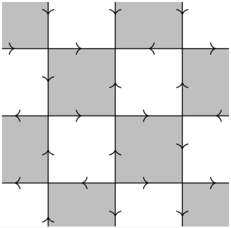
# Le modèle à huit sommets (*eight-vertex*)

On fixe $a, b, c, d > 0$ les poids locaux des six configurations :




Sur une portion finie $G$ de $\mathbb{Z}^2$, une orientation $\tau$ qui satisfait ces règles a pour *poids*

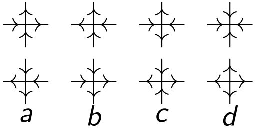
$$w(\tau) = a^{N_a} b^{N_b} c^{N_c} d^{N_d}.$$



$$\rightarrow \quad w(\tau) = ab^3c^4d.$$

# Le modèle à huit sommets (*eight-vertex*)

On fixe $a, b, c, d > 0$ les poids locaux des six configurations :




Sur une portion finie $G$ de $\mathbb{Z}^2$, une orientation $\tau$ qui satisfait ces règles a pour *poids*

$$w(\tau) = a^{N_a} b^{N_b} c^{N_c} d^{N_d}.$$

$$\mathbb{P}(\tau) = \frac{w(\tau)}{Z(G; a, b, c, d)},$$

$$Z_{8V}(G; a, b, c, d) = \sum_{\tau} w(\tau).$$

# Questions

- Énergie libre :

$$\lim_{G \to \mathbb{Z}^2} -\frac{1}{|G|} \log \left[ Z_{8V}(G; a, b, c, d) \right] \ ?$$

- Corrélations : Pour deux arêtes $e, e'$ verticales « loin » dans $G$,

$$\mathrm{Cov}\left(1_{e\uparrow \text{ dans } \tau}, 1_{e'\uparrow \text{ dans } \tau}\right) \sim \exp\left(-\frac{|e-e'|}{\xi}\right) ?$$

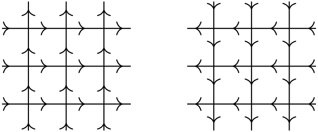
  Si c'est le cas $\xi$ est une **longueur typique** de corrélation.

- Généralité du modèle :
  extension à des graphes 4-réguliers,
  avec des poids $a, b, c, d$ locaux ;
  sur la sphère, le plan ou le tore.

# Diagramme des phases

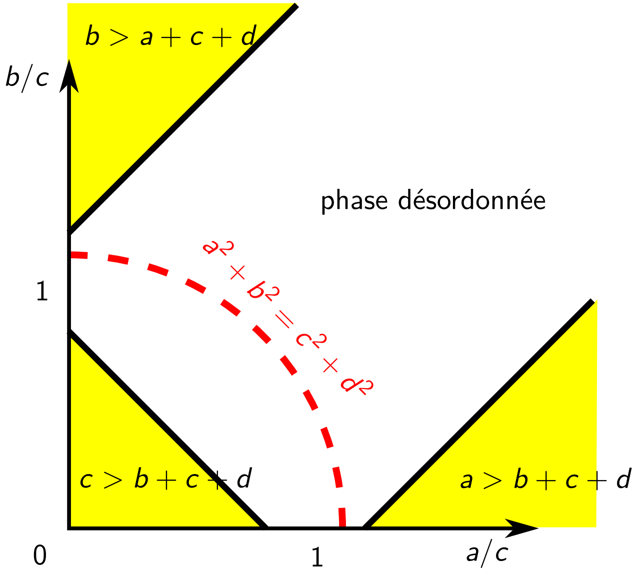
Comportement prédit par les physicien·ne·s dans les années 70-80 (Baxter, Fan, Lieb, Sutherland, Wu,...) :

- Si $a \geq b + c + d$, la probabilité sur $\mathbb{Z}^2$ se concentre sur deux configurations :



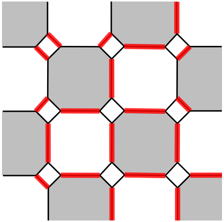
- Idem pour $b \geq a + c + d$, etc.
- Si chaque poids est inférieur à la somme des trois autres, alors toutes les configurations locales apparaissent avec densité $> 0$.
- Dans le cas $d = 0$, le modèle est « dégénéré » : les corrélations décroissent en loi puissance.

# Diagramme des phases ($d < c$)



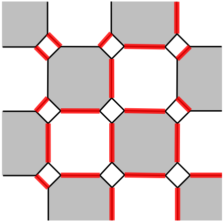
# Décorations

Idée : dimères bipartis $m \mapsto$ modèle à *six* sommets $\tau$.

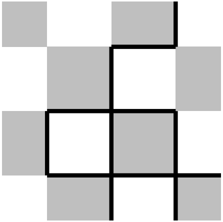


# Décorations

Idée : dimères bipartis $m \mapsto$ modèle à *six* sommets $\tau$.

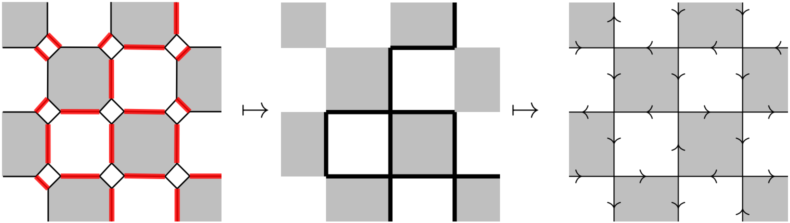


$\mapsto$



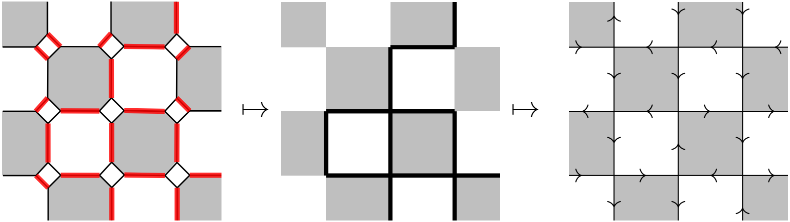
# Décorations

Idée : dimères bipartis $m \mapsto$ modèle à *six* sommets $\tau$.



# Décorations

Idée : dimères bipartis $m \mapsto$ modèle à *six* sommets $\tau$.



**Proposition** *[Fan, Lin, Wu 1970s]*

Si le modèle à *six sommets* ($d = 0$) satisfait $a^2 + b^2 = c^2$, il existe des poids sur le graphe de dimères tels que

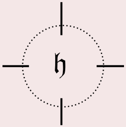
$$\sum_{m \mapsto \tau} w_{\text{dim}}(m) = w(\tau).$$

# Existence de décorations

## Question

Autres décorations $\mathfrak{h}$ plus générales telles que

$$\sum_{\color{red}{m}\mapsto\tau} w_{\mathrm{dim}}(\color{red}{m}) = w(\tau)?$$

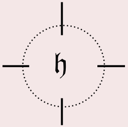


# Existence de décorations

## Question

Autres décorations $\mathfrak{h}$ plus générales telles que

$$\sum_{m \mapsto \tau} w_{\mathrm{dim}}(m) = w(\tau)?$$




## Lemme

Si une décoration $\mathfrak{h}$ **planaire** existe,

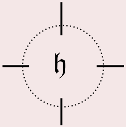
$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

# Existence de décorations

### Question

Autres décorations $\mathfrak{h}$ plus générales telles que

$$\sum_{m \mapsto \tau} w_{\mathrm{dim}}(m) = w(\tau)?$$




### Lemme

Si une décoration $\mathfrak{h}$ **planaire** existe,

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

### Lemme

Si une décoration $\mathfrak{h}$ **planaire bipartie** existe,

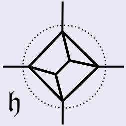
$$abcd = 0 \text{ et } a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

# Existence de décorations

**Proposition** *[Hsue, Lin, Wu 1970s]*

Si le modèle à huit sommets satisfait

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2,$$




il existe des poids sur le graphe de dimères $\mathfrak{h}$-décoré (non biparti) tels que

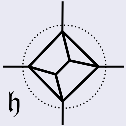
$$\sum_{m \mapsto \tau} w_{\mathrm{dim}}(m) = w(\tau).$$

# Existence de décorations

**Proposition** *[Hsue, Lin, Wu 1970s]*

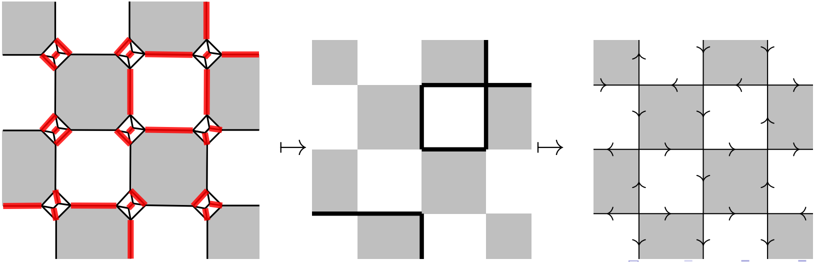
Si le modèle à huit sommets satisfait

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2,$$

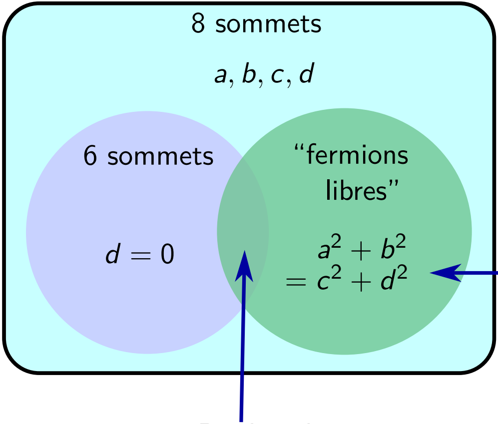



il existe des poids sur le graphe de dimères $\mathfrak{h}$-décoré (non biparti) tels que

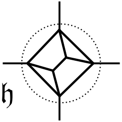
$$\sum_{m \mapsto \tau} w_{\text{dim}}(m) = w(\tau).$$

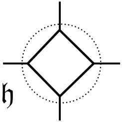


# Résumé




Dimères non bipartis




Dimères bipartis
- Énergie libre
- Corrélations
- Mesures de Gibbs ergodiques...

# Du non-biparti au biparti

**Théorème** *[M. 2018]*

Pour tout modèle à huit sommets « fermions libres » ($a^2 + b^2 = c^2 + d^2$) sur un graphe planaire fini, il existe deux modèles à six sommets « fermions libres » $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$ avec $a_i^2 + b_i^2 = c_i^2$ tels que :

$$Z_{8V}(a, b, c, d)^2 = Z_{6V}(a_1, b_1, c_1)\ Z_{6V}(a_2, b_2, c_2).$$

# Du non-biparti au biparti

**Théorème** *[M. 2018]*

Pour tout modèle à huit sommets « fermions libres » ($a^2 + b^2 = c^2 + d^2$) sur un graphe planaire fini, il existe deux modèles à six sommets « fermions libres » $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$ avec $a_i^2 + b_i^2 = c_i^2$ tels que :

$$Z_{8V}(a, b, c, d)^2 = Z_{6V}(a_1, b_1, c_1)\ Z_{6V}(a_2, b_2, c_2).$$

$$\begin{aligned}
&\left[a : b : c : d\right] = \left[\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right) : \cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right) : \cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) : \sin\left(\tfrac{-\alpha+\beta}{2}\right)\right] \\
&\mapsto \left[a_1 : b_1 : c_1\right] = \left[\sin\alpha : \cos\alpha : 1\right], \\
&\quad\ \left[a_2 : b_2 : c_2\right] = \left[\sin\beta : \cos\beta : 1\right].
\end{aligned}$$

# Éléments de preuve

*Trouver suffisamment de symétries sur $Z_{8V}(a, b, c, d)$.*

- $Z_{8V}(a, b, c, d) = Z_{8V}(a, b, c, -d)$.

# Éléments de preuve

*Trouver suffisamment de symétries sur $Z_{8V}(a,b,c,d)$.*

- $Z_{8V}(a,b,c,d) = Z_{8V}(a,b,c,-d)$.
- Dualité *abélienne* (Wu) : $Z_{8V}(a,b,c,d) = Z_{8V}(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d})$ où

$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{c} \\ \bar{d} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

# Éléments de preuve

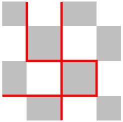
*Trouver suffisamment de symétries sur* $Z_{8V}(a, b, c, d)$.

- $Z_{8V}(a, b, c, d) = Z_{8V}(a, b, c, -d)$.
- Dualité *abélienne* (Wu) : $Z_{8V}(a, b, c, d) = Z_{8V}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ où

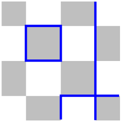
$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{c} \\ \bar{d} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

- Échange de spins :

$\tau$



$\tau'$



# Éléments de preuve

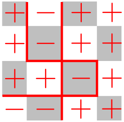
*Trouver suffisamment de symétries sur* $Z_{8V}(a,b,c,d)$.

- $Z_{8V}(a,b,c,d) = Z_{8V}(a,b,c,-d)$.
- Dualité *abélienne* (Wu) : $Z_{8V}(a,b,c,d) = Z_{8V}(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d})$ où

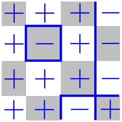
$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{c} \\ \bar{d} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

- Échange de spins :

$\tau$




$\tau'$



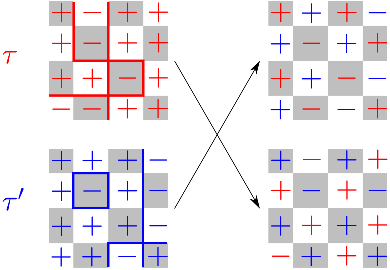
# Éléments de preuve

*Trouver suffisamment de symétries sur $Z_{8V}(a, b, c, d)$.*

- $Z_{8V}(a, b, c, d) = Z_{8V}(a, b, c, -d)$.
- Dualité *abélienne* (Wu) : $Z_{8V}(a, b, c, d) = Z_{8V}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ où

$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{c} \\ \bar{d} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

- Échange de spins :



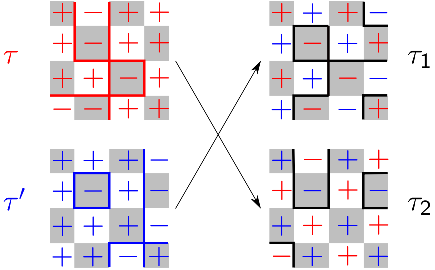
# Éléments de preuve

*Trouver suffisamment de symétries sur $Z_{8V}(a,b,c,d)$.*

- $Z_{8V}(a,b,c,d) = Z_{8V}(a,b,c,-d)$.
- Dualité *abélienne* (Wu) : $Z_{8V}(a,b,c,d) = Z_{8V}(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d})$ où

$$\begin{pmatrix}\bar{a}\\ \bar{b}\\ \bar{c}\\ \bar{d}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}.$$

- Échange de spins :



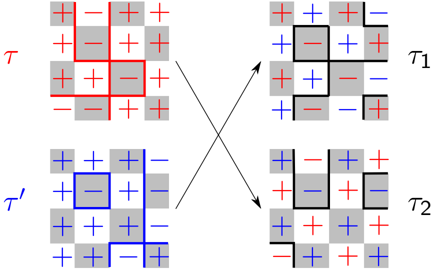
# Éléments de preuve

*Trouver suffisamment de symétries sur* $Z_{8V}(a,b,c,d)$*.*

- $Z_{8V}(a,b,c,d) = Z_{8V}(a,b,c,-d)$.
- Dualité *abélienne* (Wu) : $Z_{8V}(a,b,c,d) = Z_{8V}(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d})$ où

$$\begin{pmatrix}\bar{a}\\ \bar{b}\\ \bar{c}\\ \bar{d}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}.$$

- Échange de spins :



Si $ab = cd$ et $a'b' = c'd'$,

$$\begin{aligned} & Z_{8V}(a,b,c,d) \\ & \times Z_{8V}(a',b',c',d') \\ = \; & Z_{8V}(a_1,b_1,c_1,d_1) \\ & \times Z_{8V}(a_2,b_2,c_2,d_2) \end{aligned}$$

# Couplage 1

**Question**

L'identité

$$Z_{8V}(a,b,c,d)^2 = Z_{6V}(a_1,b_1,c_1)\ Z_{6V}(a_2,b_2,c_2)$$

cache-t-elle un couplage probabiliste ?

# Couplage 1

**Question**

L'identité

$$Z_{8V}(a,b,c,d)^2 = Z_{6V}(a_1,b_1,c_1)\ Z_{6V}(a_2,b_2,c_2)$$

cache-t-elle un couplage probabiliste ?

**Théorème** *[M. 2018]*

Sur un graphe planaire fini, soient $\tau, \tau'$ des configurations tirées selon la mesure de Boltzmann de $(a,b,c,d)$, et $\tau_1, \tau_2$ selon celles de $(a_1,b_1,c_1,0)$ et $(a_2,b_2,c_2,0)$, toutes indépendantes. Alors

$$\tau \triangle \tau' \stackrel{d}{=} \tau_1 \triangle \tau_2.$$

# Couplage 1

## Question

L'identité

$$Z_{8V}(a,b,c,d)^2 = Z_{6V}(a_1,b_1,c_1)\ Z_{6V}(a_2,b_2,c_2)$$

cache-t-elle un couplage probabiliste ?

## Théorème *[M. 2018]*

Sur un graphe planaire fini, soient $\tau, \tau'$ des configurations tirées selon la mesure de Boltzmann de $(a,b,c,d)$, et $\tau_1, \tau_2$ selon celles de $(a_1,b_1,c_1,0)$ et $(a_2,b_2,c_2,0)$, toutes indépendantes. Alors

$$\tau \triangle \tau' \overset{d}{=} \tau_1 \triangle \tau_2.$$

Formalisme des **opérateurs d'ordre et désordre** (Kadanoff Ceva 1971, Dubédat 2011) + transformée de Fourier discrète.

# Couplage 2

**Question**

L'identité

$$Z_{8V}(a,b,c,d)^2 = Z_{6V}(a_1,b_1,c_1)\ Z_{6V}(a_2,b_2,c_2)$$

s'étend-elle pour des graphes sur le tore ?

# Couplage 2

**Question**

L'identité

$$Z_{8V}(a,b,c,d)^2 = Z_{6V}(a_1,b_1,c_1)\ Z_{6V}(a_2,b_2,c_2)$$

s'étend-elle pour des graphes sur le tore ?

**Théorème** *[M. 2018]*

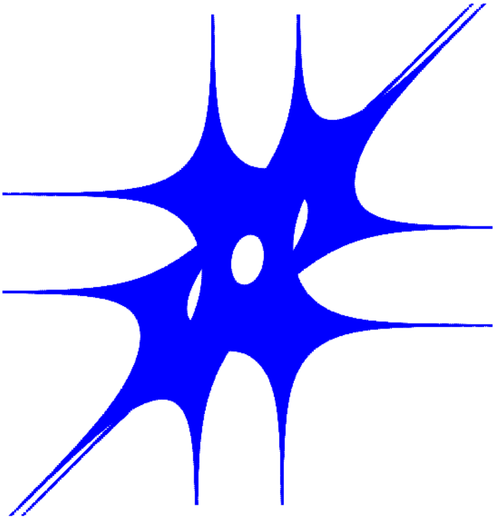
Pour un graphe fini sur le tore, soient

- $P(z,w)$ le polynôme caractéristique des dimères (non-bipartis) associés à $(a,b,c,d)$,
- $P_1(z,w), P_2(z,w)$ ceux des dimères (bipartis) associés à $(a_1,b_1,c_1)$ et $(a_2,b_2,c_2)$.

Alors

$$P(z,w) = P_1(z,w)P_2(z,w).$$

$$P(z,w) = P_1(z,w)P_2(z,w).$$



*Amibe* : image du lieu des zéros de $P$ par $(z,w) \mapsto (\log|z|, \log|w|)$.

# Couplage 3

**Question**

Ces identités s'interprètent-elles « localement » sur les matrices de Kasteleyn ?

# Couplage 3

**Question**

Ces identités s'interprètent-elles « localement » sur les matrices de Kasteleyn ?

**Théorème** *[M. 2018]*

Pour tout graphe fini ou infini, sur la sphère, le plan ou le tore, il existe un opérateur local $T$ tel que, si

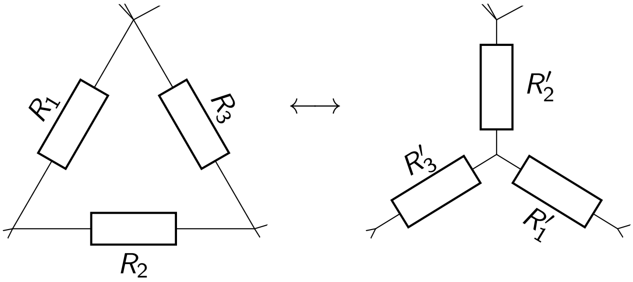
- $K$ est la matrice de Kasteleyn des dimères (non-bipartis) associés à $(a, b, c, d)$,
- $K_1, K_2$ sont celles des dimères (bipartis) associés à $(a_1, b_1, c_1)$ et $(a_2, b_2, c_2)$,

alors

$$K^{-1} = \frac{1}{2}\left(K_1^{-1} + K_2^{-1} + T(K_1^{-1} - K_2^{-1})\right).$$

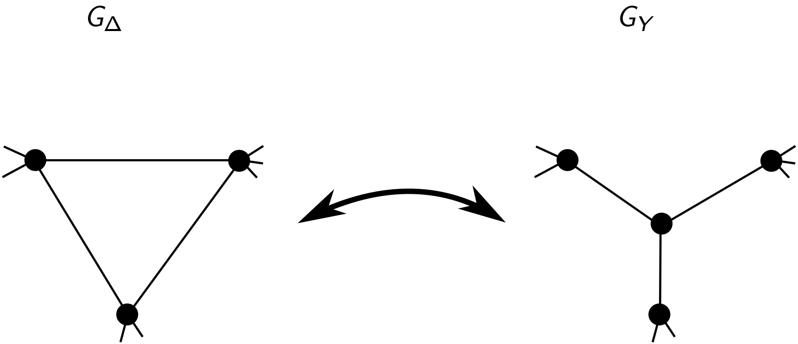
# La transformation « Triangle-Étoile »

*[Kennelly, 1899]*



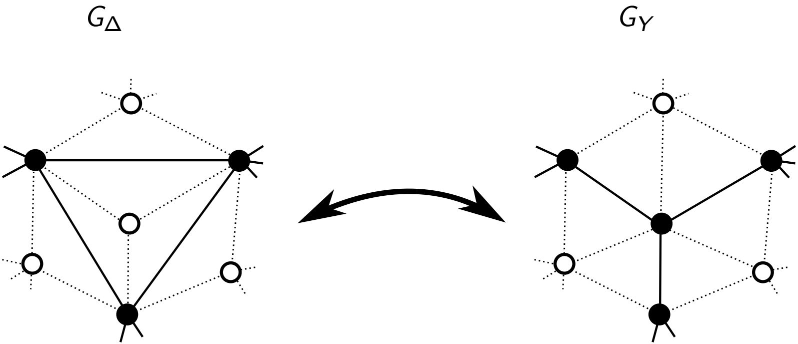

$$R_1' = \frac{R_2 R_3}{R_1+R_2+R_3} \qquad R_2' = \frac{R_1 R_3}{R_1+R_2+R_3} \qquad R_3' = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2+R_3}$$

# La transformation « Triangle-Étoile »



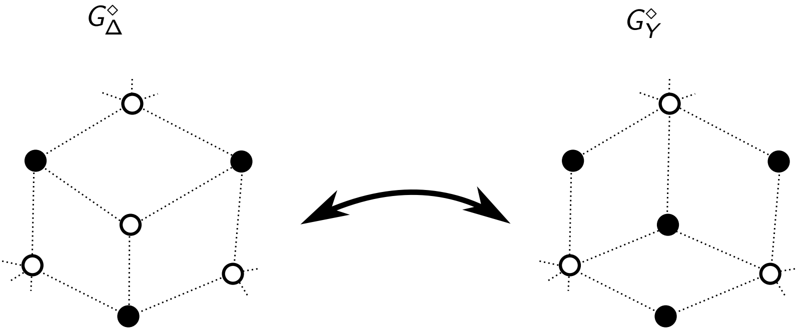

Équations de *Yang-Baxter* : relations de couplage entre un modèle de mécanique statistique sur $G_\Delta$ et $G_Y$.

# La transformation « Triangle-Étoile »




Équations de *Yang-Baxter* : relations de couplage entre un modèle de mécanique statistique sur $G_\Delta$ et $G_Y$.

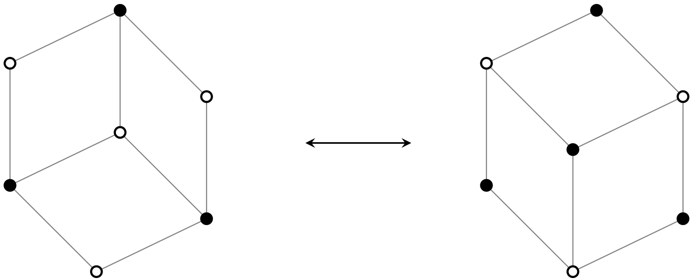
# La transformation « Triangle-Étoile »




Équations de *Yang-Baxter* : relations de couplage entre un modèle de mécanique statistique sur $G_\Delta^\diamond$ et $G_Y^\diamond$.

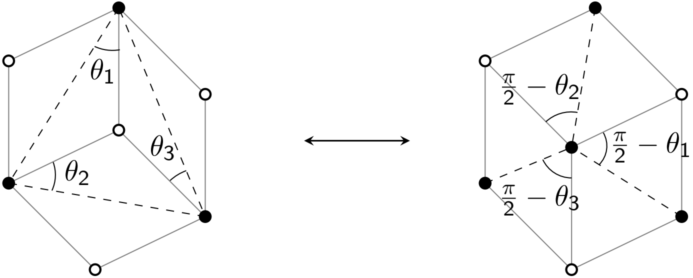
# « Triangle-Étoile » sur un graphe de losanges

Si $G$ est un graphe (fini ou infini) formé de losanges de même taille, il existe une transformation géométrique :

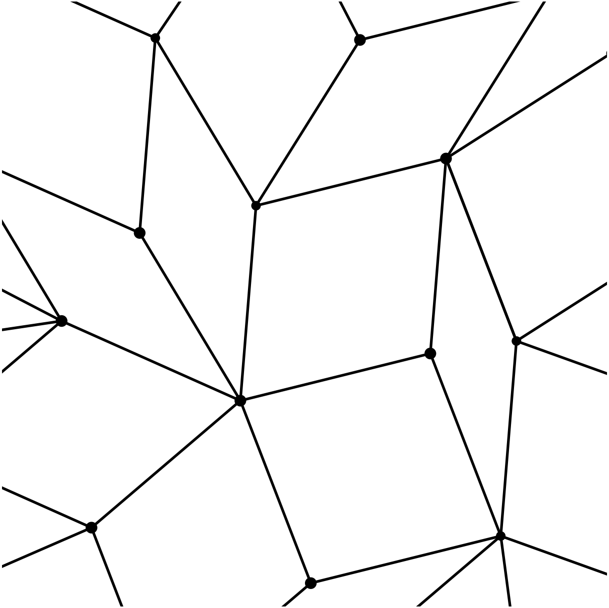


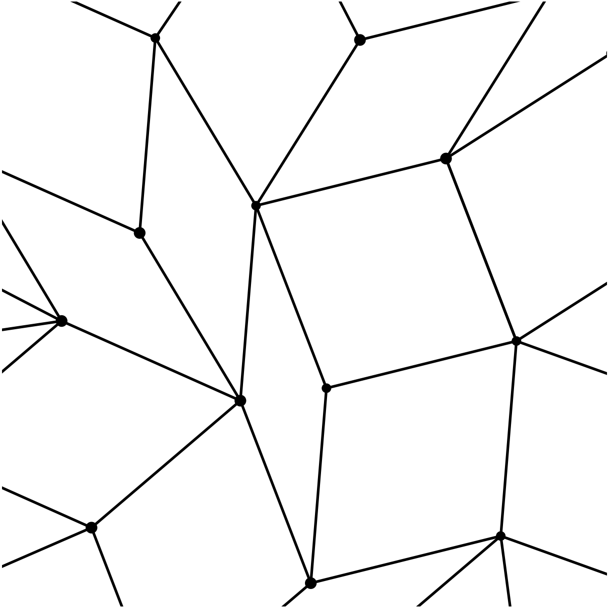
# « Triangle-Étoile » sur un graphe de losanges

Si $G$ est un graphe (fini ou infini) formé de losanges de même taille, il existe une transformation géométrique :



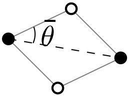

Le dual $G^*$ étant 4-régulier, on peut définir un modèle 8V dessus.





# « Triangle-Étoile » sur un graphe de losanges

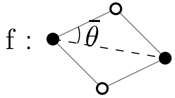
Poids sur les faces du graphe de losanges ($k, \ell \in [0, 1)$) :

f : 


$$
\begin{aligned}
a(\mathrm{f}) &= \mathrm{sn}\,(\theta|k) + \mathrm{sn}\,(\theta|\ell) \\
b(\mathrm{f}) &= \mathrm{cn}\,(\theta|k) + \mathrm{cn}\,(\theta|\ell) \\
c(\mathrm{f}) &= 1 + \mathrm{sn}\,(\theta|k)\,\mathrm{sn}\,(\theta|\ell) + \mathrm{cn}\,(\theta|k)\,\mathrm{cn}\,(\theta|\ell) \\
d(\mathrm{f}) &= \mathrm{cn}\,(\theta|k)\,\mathrm{sn}\,(\theta|\ell) - \mathrm{sn}\,(\theta|k)\,\mathrm{cn}\,(\theta|\ell)\,.
\end{aligned}
$$

# « Triangle-Étoile » sur un graphe de losanges

Poids sur les faces du graphe de losanges ($k, \ell \in [0, 1)$) :



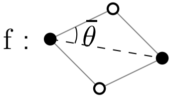

$$
\begin{aligned}
a(\mathrm{f}) &= \mathrm{sn}\,(\theta|k) + \mathrm{sn}\,(\theta|\ell) \\
b(\mathrm{f}) &= \mathrm{cn}\,(\theta|k) + \mathrm{cn}\,(\theta|\ell) \\
c(\mathrm{f}) &= 1 + \mathrm{sn}\,(\theta|k)\,\mathrm{sn}\,(\theta|\ell) + \mathrm{cn}\,(\theta|k)\,\mathrm{cn}\,(\theta|\ell) \\
d(\mathrm{f}) &= \mathrm{cn}\,(\theta|k)\,\mathrm{sn}\,(\theta|\ell) - \mathrm{sn}\,(\theta|k)\,\mathrm{cn}\,(\theta|\ell)\,.
\end{aligned}
$$

**Proposition** *[M. 2018]*

Pour ces poids, le modèle à huit sommet « free-fermion » est invariant en loi sous la transformation triangle-étoile.

# « Triangle-Étoile » sur un graphe de losanges

Poids sur les faces du graphe de losanges ($k, \ell \in [0, 1)$) :




$$
\begin{aligned}
a(\mathrm{f}) &= \mathrm{sn}\,(\theta|k) + \mathrm{sn}\,(\theta|\ell) \\
b(\mathrm{f}) &= \mathrm{cn}\,(\theta|k) + \mathrm{cn}\,(\theta|\ell) \\
c(\mathrm{f}) &= 1 + \mathrm{sn}\,(\theta|k)\,\mathrm{sn}\,(\theta|\ell) + \mathrm{cn}\,(\theta|k)\,\mathrm{cn}\,(\theta|\ell) \\
d(\mathrm{f}) &= \mathrm{cn}\,(\theta|k)\,\mathrm{sn}\,(\theta|\ell) - \mathrm{sn}\,(\theta|k)\,\mathrm{cn}\,(\theta|\ell)\,.
\end{aligned}
$$

**Proposition** *[M. 2018]*

Pour ces poids, le modèle à huit sommet « free-fermion » est invariant en loi sous la transformation triangle-étoile.

Régime $Z$-**invariant** (Baxter) sur un graphe **isoradial** (Kenyon ; Boutillier, de Tilière, Raschel ; Grimmett, Manolescu, Duminil-Copin, Li,...)

# Conséquences

- Énergie libre :

$$\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\mathbb{T}^2}\log|P(z,w)|\frac{\mathrm{d}z}{z}\frac{\mathrm{d}w}{w}$$

Dans le cas $Z$-invariant sur un graphe de losanges,

- Existence d'une mesure de Gibbs ergodique.

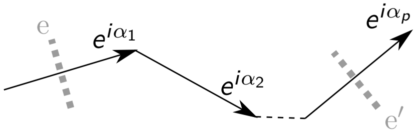
- Énergie libre :

$$\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\mathbb{T}^2}\log|P(z,w)|\frac{\mathrm{d}z}{z}\frac{\mathrm{d}w}{w}$$

Dans le cas $Z$-invariant sur un graphe de losanges,

- Existence d'une mesure de Gibbs ergodique.
- Formule exacte, **locale** pour les corrélations (*via* les dimères de Boutillier, de Tilière, Raschel 2017) :

$$\mathrm{Cov}\left(1_{\mathrm{e}\in\tau},1_{\mathrm{e}'\in\tau}\right)=g(\alpha_1,\dots,\alpha_p).$$



# Conséquences

- Énergie libre :

$$\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\mathbb{T}^2}\log|P(z,w)|\frac{\mathrm{d}z}{z}\frac{\mathrm{d}w}{w}$$

Dans le cas $Z$-invariant sur un graphe de losanges,

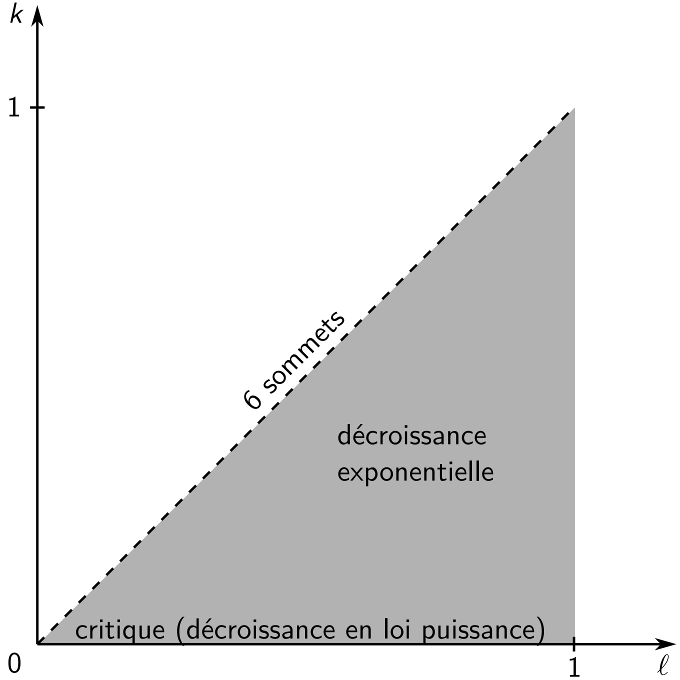
- Existence d'une mesure de Gibbs ergodique.
- Formule exacte, **locale** pour les corrélations (*via* les dimères de Boutillier, de Tilière, Raschel 2017) :

$$\mathrm{Cov}\left(1_{\mathrm{e}\in\tau}, 1_{\mathrm{e}'\in\tau}\right) = g(\alpha_1,\ldots,\alpha_p).$$

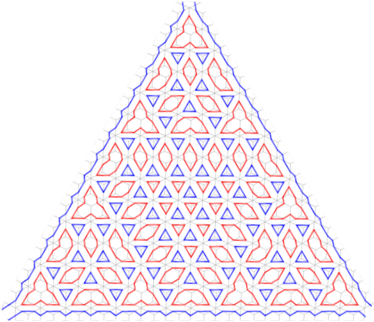
- Ordre des corrélations : si $0 < k < \ell < 1$, quand $|x-y| \to \infty$, sous des conditions naturelles,

$$K^{-1}[x,y] \sim |x-y|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{|x-y|}{\xi}\right).$$

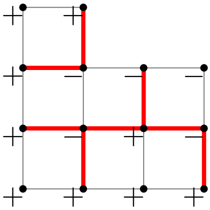
Quand $k \to 0$, $\xi = \Theta\left(k^{-2}\right) = \Theta\left((\beta-\beta_c)^{-1}\right)$.


k
1
6 sommets
décroissance
exponentielle
critique (décroissance en loi puissance)
0
1
ℓ

# II - La récurrence de Kashaev et un modèle de boucles intégrable

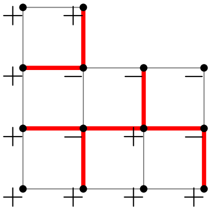


$G = (V, E)$ un graphe planaire, muni de constantes $(x_e)_{e \in E}$ sur les arêtes.
**Configurations de spins** : $\sigma : V \to \{-1, +1\}$.



# Modèle d'Ising

$G = (V, E)$ un graphe planaire, muni de constantes $(x_e)_{e \in E}$ sur les arêtes.
**Configurations de spins** : $\sigma : V \to \{-1, +1\}$. On note $E_\sigma$ les arêtes dont les extrêmités n'ont pas le même spin.



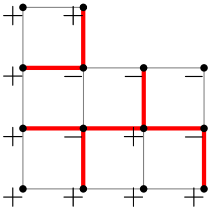
# Modèle d'Ising

$G = (V, E)$ un graphe planaire, muni de constantes $(x_e)_{e \in E}$ sur les arêtes.
**Configurations de spins** : $\sigma : V \to \{-1, +1\}$. On note $E_\sigma$ les arêtes dont les extrêmités n'ont pas le même spin.

$$\mathbb{P}(\sigma) = \frac{1}{Z_{\text{Ising}}(G, x)} \prod_{e \in E_\sigma} x_e,$$

Fonction de partition :

$$Z_{\text{Ising}}(G, x) = \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^V} \prod_{e \in E_\sigma} x_e.$$

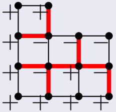


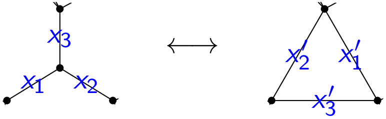
# « Triangle/Étoile » pour le modèle d'Ising *[Wannier]*

## Rappels

$$\mathbb{P}(\sigma) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \prod_{e \in E_\sigma} x_e,$$

$$Z_{\text{Ising}}(G, x) = \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^V} \prod_{e \in E_\sigma} x_e.$$






Le modèle d'Ising est préservé en loi *ssi*

$$x_1' = \sqrt{\frac{(x_2+x_1x_3)(x_3+x_1x_2)}{(x_1x_2x_3+1)(x_1+x_2x_3)}}$$

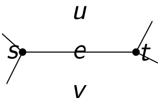
$$x_2' = \sqrt{\frac{(x_1+x_2x_3)(x_3+x_1x_2)}{(x_1x_2x_3+1)(x_2+x_1x_2)}}$$

$$x_3' = \sqrt{\frac{(x_1+x_2x_3)(x_2+x_1x_3)}{(x_1x_2x_3+1)(x_3+x_1x_2)}}$$

# « Triangle/Étoile » pour le modèle d'Ising *[Kashaev]*

Supposons que

$$\left(\frac{x_e - x_e^{-1}}{2}\right)^2 = \frac{g_s g_t}{g_u g_v}$$

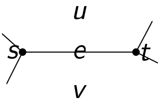



avec $(g_i)_{i \in V \cup F}$ des variables sur les sommets et les faces de $G$.

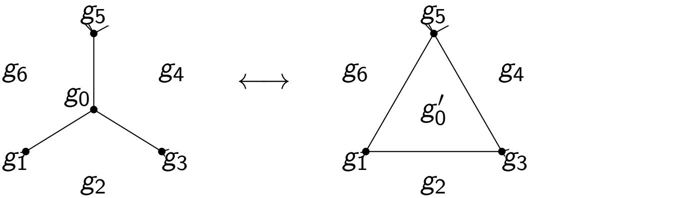
# « Triangle/Étoile » pour le modèle d'Ising *[Kashaev]*

Supposons que

$$\left(\frac{x_e - x_e^{-1}}{2}\right)^2 = \frac{g_s g_t}{g_u g_v}$$




avec $(g_i)_{i \in V \cup F}$ des variables sur les sommets et les faces de $G$.




*[Kashaev, 1995]* Le modèle d'Ising est préservé en loi *ssi*

$$g_0^2 g_0'^2 + g_1^2 g_4^2 + g_2^2 g_5^2 + g_3^2 g_6^2 - 2(g_1 g_3 g_4 g_6 + g_2 g_3 g_5 g_6 + g_1 g_2 g_4 g_5) \\ -2 g_0 g_0'(g_1 g_4 + g_2 g_5 + g_3 g_6) - 4(g_0 g_2 g_4 g_6 + g_0' g_1 g_3 g_5) = 0$$

# Mineurs principaux

$M$ une matrice de taille $n$.
Pour $I \subset [n]$, $a_I = \det\left(M_I^I\right)$ est appelé **mineur principal**.

Relations entre les $a_I$ ? Quels sont les polynômes dans $\mathbb{C}\left[(a_I)_{I \subset [n]}\right]$ qui s'annulent toujours ?

# Mineurs principaux

$M$ une matrice de taille $n$.
Pour $I \subset [n]$, $a_I = \det\left(M_I^I\right)$ est appelé **mineur principal**.

Relations entre les $a_I$ ? Quels sont les polynômes dans $\mathbb{C}\left[(a_I)_{I\subset[n]}\right]$ qui s'annulent toujours ?

**Théorème** *[Holtz & Sturmfels 2006 ; Oeding 2011]*

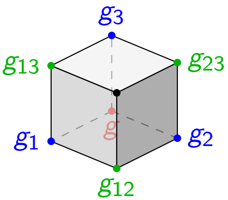
**Lorsque $M$ est symétrique**,

$$\begin{aligned} a_\emptyset^2 a_{123}^2 + a_3^2 a_{12}^2 + a_2^2 a_{13}^2 + a_1^2 a_{23}^2 \\ -2a_\emptyset a_3 a_{12} a_{123} - 2a_\emptyset a_2 a_{13} a_{123} - 2a_\emptyset a_{23} a_1 a_{123} \\ -2a_3 a_2 a_{13} a_{12} - 2a_3 a_{23} a_{12} a_1 - 2a_2 a_{23} a_{13} a_1 \\ +4a_\emptyset a_{23} a_{13} a_{12} + 4a_3 a_2 a_1 a_{123} = 0 \end{aligned}$$

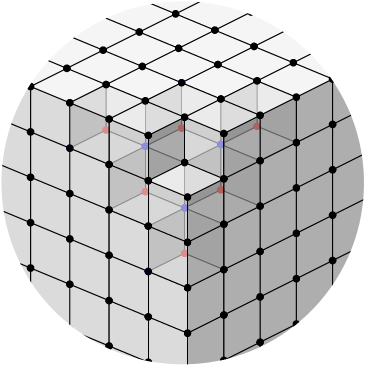
et toutes les relations entre les $a_I$ sont « générées » par celle-ci.

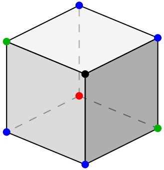
# Récurrence de Kashaev

$$
\begin{aligned}
&g^2 g_{123}^2 + g_1^2 g_{23}^2 + g_2^2 g_{13}^2 + g_3^2 g_{12}^2 \\
&-2(g_2 g_3 g_{13} g_{12} + g_1 g_3 g_{23} g_{12} + g_1 g_2 g_{23} g_{13}) \\
&-2 g g_{123}(g_1 g_{23} + g_2 g_{13} + g_3 g_{12}) \\
&-4(g g_{23} g_{13} g_{12} + g_{123} g_1 g_2 g_3) = 0
\end{aligned}
$$

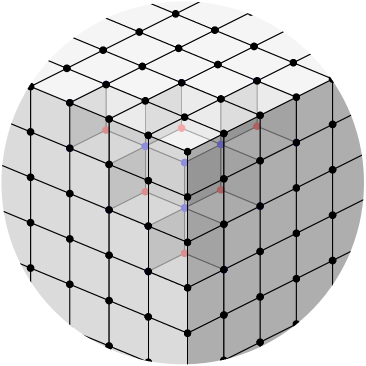


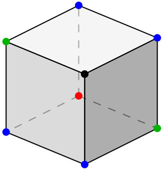
# Récurrence de Kashaev



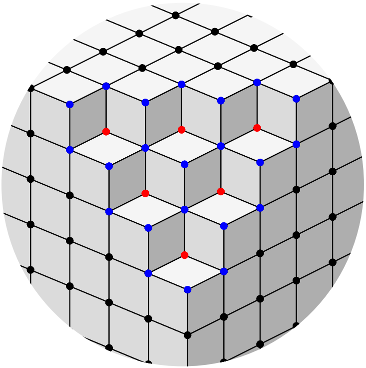


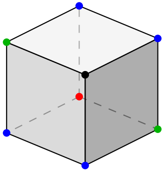
# Récurrence de Kashaev



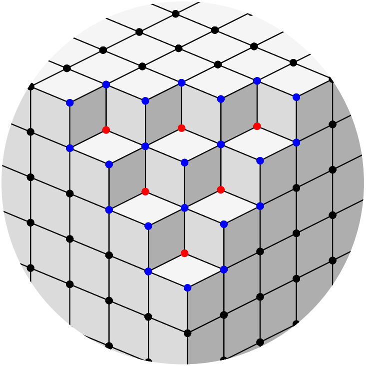


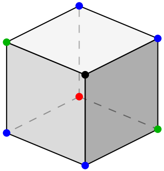
# Récurrence de Kashaev



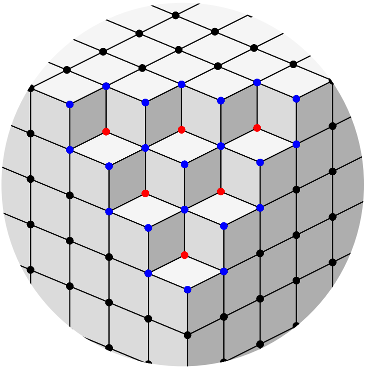


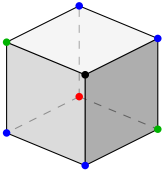
# Récurrence de Kashaev



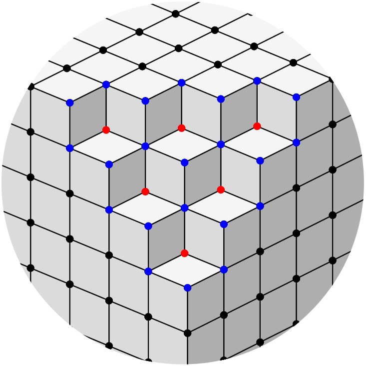


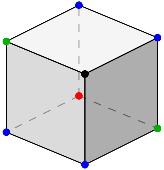
# Récurrence de Kashaev



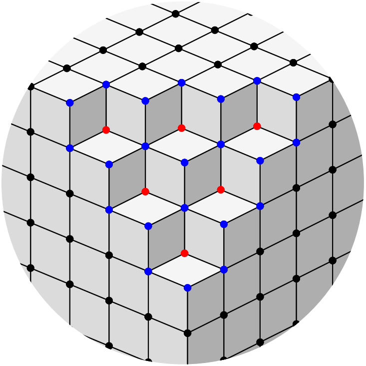


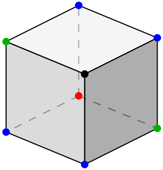
# Récurrence de Kashaev

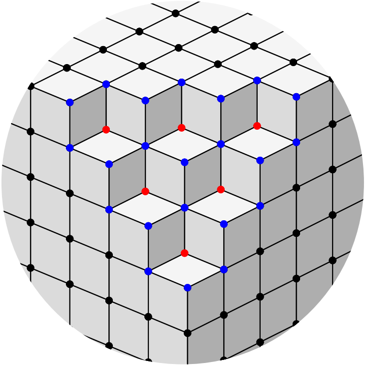


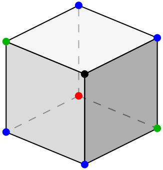


# Récurrence de Kashaev









**Polynôme de Laurent** en les conditions initiales !

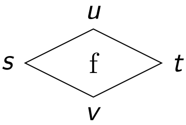
**Question** *[Kenyon, Pemantle 2016]*

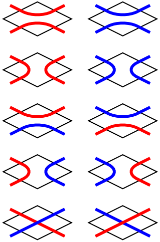
La solution s'exprime-t-elle comme la fonction de partition d'un modèle ?

# Boucles bicolores « $C_2^{(1)}$ » *[Warnaar, Nienhuis 1993]*

Sur un empilement de cubes $I$,
avec poids $(g_i)_{i \in I}$ sur les sommets,

configurations et poids des faces :



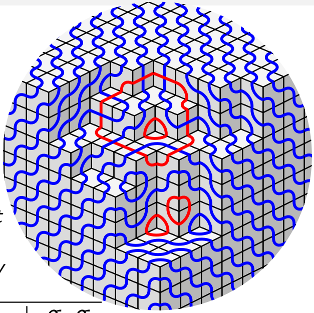
$g_s g_t$

$g_u g_v$

$\sqrt{g_s g_t}\sqrt{g_s g_t + g_u g_v}$

$\sqrt{g_u g_v}\sqrt{g_s g_t + g_u g_v}$

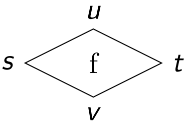
$\sqrt{g_s g_t g_u g_v}$

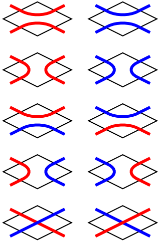


# Boucles bicolores « $C_2^{(1)}$ » *[Warnaar, Nienhuis 1993]*

Sur un empilement de cubes $I$,
avec poids $(g_i)_{i \in I}$ sur les sommets,

configurations et poids des faces :



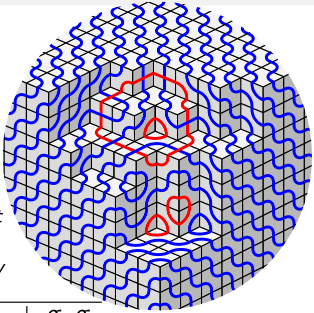
$g_s g_t$

$g_u g_v$

$\sqrt{g_s g_t}\sqrt{g_s g_t + g_u g_v}$

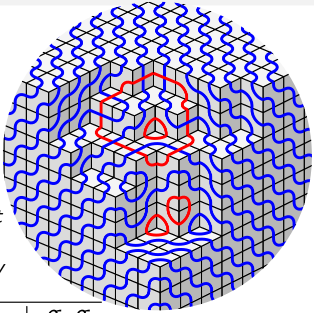
$\sqrt{g_u g_v}\sqrt{g_s g_t + g_u g_v}$

$\sqrt{g_s g_t g_u g_v}$

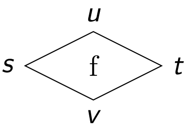


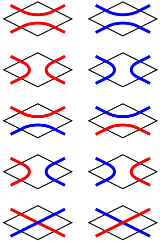
# Boucles bicolores « $C_2^{(1)}$ » *[Warnaar, Nienhuis 1993]*

Sur un empilement de cubes $I$,
avec poids $(g_i)_{i\in I}$ sur les sommets,



configurations et poids des faces :



$g_s g_t$

$g_u g_v$

$\sqrt{g_s g_t}\sqrt{g_s g_t + g_u g_v}$

$\sqrt{g_u g_v}\sqrt{g_s g_t + g_u g_v}$

$\sqrt{g_s g_t g_u g_v}$

Poids d'une configuration :

$$2^N \prod_{\mathrm{f}} \mathrm{poids}(\mathrm{f})$$

où $N$ est le nombre de boucles finies.

# Solution de la récurrence de Kashaev

**Théorème** *[M. 2018]*

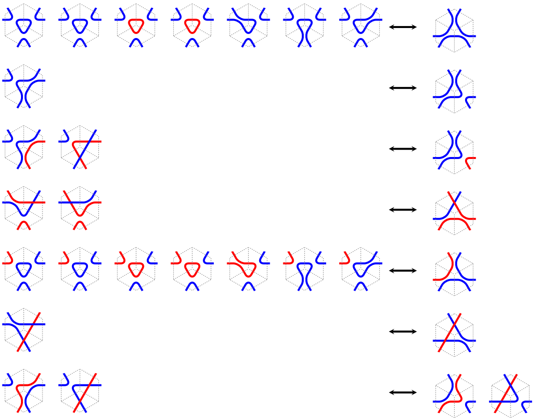
La fonction de partition

$$Z_{C_2^{(1)}}(I,g) = \sum_{conf.de\ \ boucles} \left( 2^N \prod_{\mathrm{f}} \mathrm{poids}(\mathrm{f}) \prod_{i \in I} g_i^{-2} \right)$$

est la solution de la récurrence de Kashaev avec conditions initiales $(g_i)_{i\in I}$. Il y a une bijection entre configurations de boucles et monômes.

# Solution de la récurrence de Kashaev

Idée de la preuve :



+ algorithme de reconstruction d'une configuration à partir de son poids.

# Solution de la récurrence de Kashaev

## Théorème *[M. 2018]*

La fonction de partition

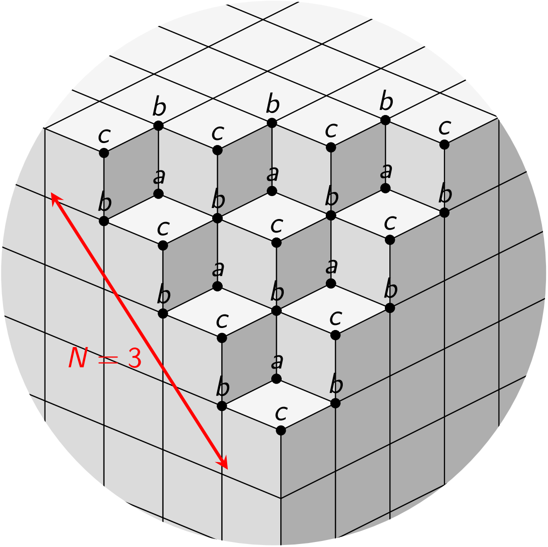
$$Z_{C_2^{(1)}}(I, g) = \sum_{conf.de\ \ boucles} \left( 2^N \prod_{\mathrm{f}} \mathrm{poids}(\mathrm{f}) \prod_{i \in I} g_i^{-2} \right)$$

est la solution de la récurrence de Kashaev avec conditions initiales $(g_i)_{i \in I}$. Il y a une bijection entre configurations de boucles et monômes.

## Conséquences

- Polynôme de Laurent en les $g_i$ et les $X_{\mathrm{f}} = \sqrt{g_s g_t + g_u g_v}$ ; exposants connus ; les coefficients sont des puissances de 2...
- Formes limites.

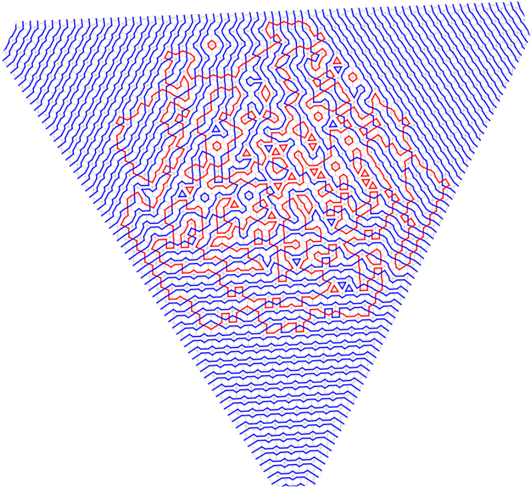
Conditions initiales périodiques :

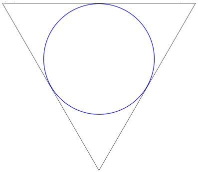



$$R = \frac{ac}{b^2},$$

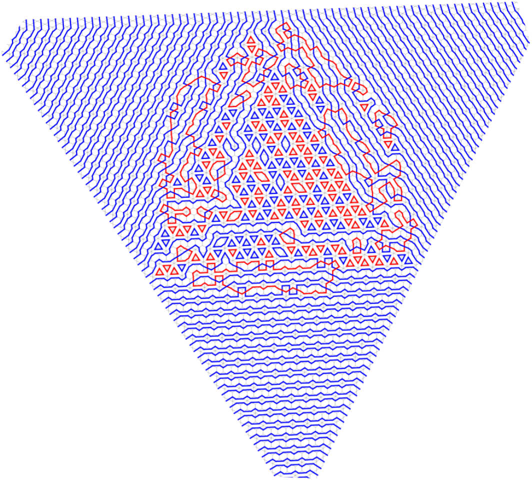
$$N \to \infty$$

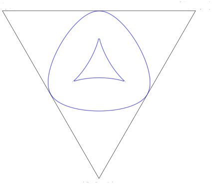
Conditions initiales périodiques : $R = 3, \quad N \to \infty$



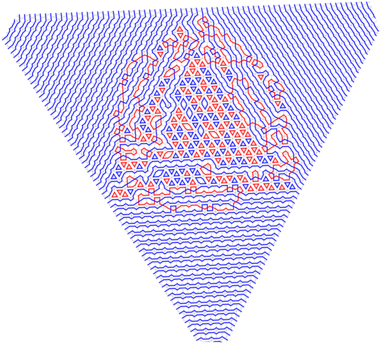


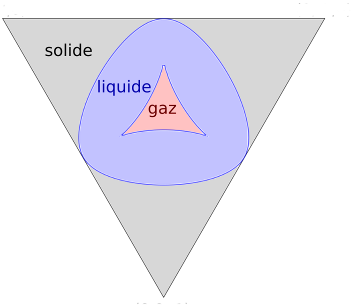
Conditions initiales périodiques : $R \neq 3, \quad N \to \infty$





Conditions initiales périodiques : $R \neq 3, \quad N \to \infty$






**Forme limite** : courbe algébrique (projective) explicite de degré 8.

**Question**

D'où viennent ces formes limites ?

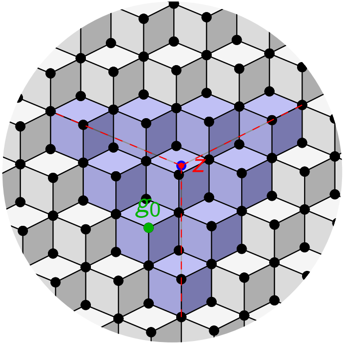
*[Petersen, Speyer 2004 ; Di Francesco, Soto-Garrido 2014 ; Kenyon, Pemantle 2016]*

## Question

D'où viennent ces formes limites ?

*[Petersen, Speyer 2004 ; Di Francesco, Soto-Garrido 2014 ; Kenyon, Pemantle 2016]*

Pour différents $z$, les
$g_z = Z_{C_2^{(1)}}(I_z, g)$
satisfont la récurrence
de Kashaev (relation polynomiale).



## Question

D'où viennent ces formes limites ?

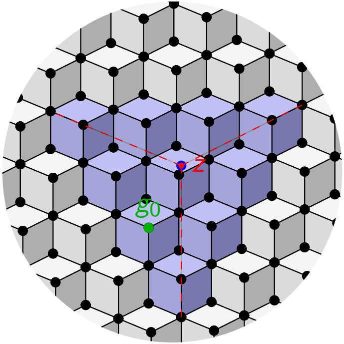
*[Petersen, Speyer 2004 ; Di Francesco, Soto-Garrido 2014 ; Kenyon, Pemantle 2016]*

Pour différents $z$, les

$g_z = Z_{C_2^{(1)}}(I_z, g)$

satisfont la récurrence de Kashaev (relation polynomiale).

$\rightarrow$ Les $\rho_z := g_0 \frac{\partial \ln(g_z)}{\partial g_0}$ satisfont une relation **linéaire**.



## Question

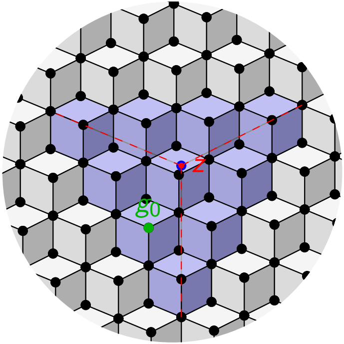
D'où viennent ces formes limites ?

*[Petersen, Speyer 2004 ; Di Francesco, Soto-Garrido 2014 ; Kenyon, Pemantle 2016]*

Pour différents $z$, les
$g_z = Z_{C_2^{(1)}}(I_z, g)$
satisfont la récurrence
de Kashaev (relation polynomiale).

$\rightarrow$ Les $\rho_z := g_0 \frac{\partial \ln(g_z)}{\partial g_0}$
satisfont une relation **linéaire**.

$\rightarrow F(x,y,z) = \sum_{i,j,k} \rho_{i,j,k} x^i y^j z^k$ :
$F(x,y,z) = \frac{P(x,y,z)}{H(x,y,z)}$.

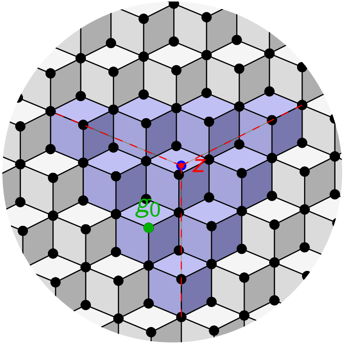


## Question

D'où viennent ces formes limites ?

*[Petersen, Speyer 2004 ; Di Francesco, Soto-Garrido 2014 ; Kenyon, Pemantle 2016]*

Pour différents $z$, les
$g_z = Z_{C_2^{(1)}}(I_z, g)$
satisfont la récurrence
de Kashaev (relation polynomiale).




$\rightarrow$ Les $\rho_z := g_0 \frac{\partial \ln(g_z)}{\partial g_0}$
satisfont une relation **linéaire**.

$\rightarrow F(x,y,z) = \sum_{i,j,k} \rho_{i,j,k} x^i y^j z^k$ :
$F(x,y,z) = \frac{P(x,y,z)}{H(x,y,z)}$.

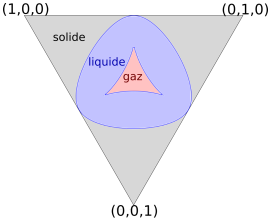
Méthodes de combinatoire analytique *[Pemantle, Wilson]* pour trouver l'asymptotique des coefficients (analyse de singularités de $F$).

# Formes limites

Dans les conditions initiales périodiques,
on considère une configuration aléatoire $\sigma$.
Pour un point $z \in I$, on définit une **observable**

$$\rho(z) = \mathbb{E}\left[n_z(\sigma) + \frac{1}{2(1+R)} \sum_{\mathrm{f} \sim z} \epsilon_{\mathrm{f}}(\sigma)\right]$$

où $n_z(\sigma)$ est la puissance de $g_z$ dans le poids de $\sigma$,
et $\epsilon_{\mathrm{f}}(\sigma)$ la puissance de $X_{\mathrm{f}}$.

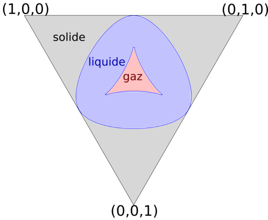


# Formes limites

Dans les conditions initiales périodiques,
on considère une configuration aléatoire $\sigma$.
Pour un point $z \in I$, on définit une **observable**

$$\rho(z) = \mathbb{E}\left[n_z(\sigma) + \frac{1}{2(1+R)}\sum_{\mathrm{f}\sim z}\epsilon_{\mathrm{f}}(\sigma)\right]$$

où $n_z(\sigma)$ est la puissance de $g_z$ dans le poids de $\sigma$,
et $\epsilon_{\mathrm{f}}(\sigma)$ la puissance de $X_{\mathrm{f}}$.




**Théorème** *[M. 2018]*

Pour les conditions initiales périodiques de longueur $N$, et
$z = (\lfloor Nu \rfloor, \lfloor Nv \rfloor, \lfloor Nw \rfloor)$, avec $N \to \infty$,

- si $[u : v : w]$ est dans la région solide, $\rho(z) \sim \mathrm{cste}\ e^{-\kappa_{uvw}N}$,
- si $[u : v : w]$ est dans la région liquide, $\rho(z) \sim \mathrm{cste}\ N^{-\theta_{uvw}}$,
- si $[u : v : w]$ est dans la région gazeuse, $\rho(z) \to \frac{1}{3}$,

où $\kappa_{uvw}, \theta_{uvw}$ sont des taux explicites.

# Lien $C_2^{(1)}$ - Ising

**Question**

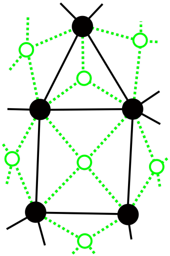
Existe-t-il un lien direct entre modèle d'Ising et boucles bicolores ?

# Lien $C_2^{(1)}$ - Ising

**Question**

Existe-t-il un lien direct entre modèle d'Ising et boucles bicolores ?

Soit $G = (V, E)$ un graphe fini, planaire, muni d'un modèle d'Ising avec poids $(x_e = \exp(-2J_e))_{e \in E}$. On considère le modèle de boucles $C_2^{(1)}$ sur $G^\diamond$ avec poids locaux



$$\lambda = (a_e^2, b_e^2, a_e, b_e, a_e b_e)_{e \in E},$$

où $a_e = \tanh 2J_e$, $b_e = (\cosh 2J_e)^{-1}$.

# Lien $C_2^{(1)}$ - Ising

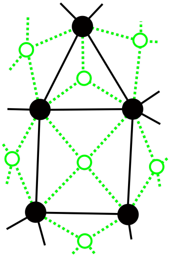
**Question**

Existe-t-il un lien direct entre modèle d'Ising et boucles bicolores ?

Soit $G = (V, E)$ un graphe fini, planaire, muni d'un modèle d'Ising avec poids $(x_e = \exp(-2J_e))_{e \in E}$. On considère le modèle de boucles $C_2^{(1)}$ sur $G^\diamond$ avec poids locaux

$$\lambda = (a_e^2, b_e^2, a_e, b_e, a_e b_e)_{e \in E},$$

où $a_e = \tanh 2J_e$, $b_e = (\cosh 2J_e)^{-1}$.



**Théorème** *[M. 2018]*

$$(Z_{\text{Ising}}(G, J))^4 = \left(2^{2|V|} \prod_{e \in E} \cosh^2 2J_e\right) Z_{C_2^{(1)}}(G^\diamond, \lambda).$$

# Lien $C_2^{(1)}$ - Ising

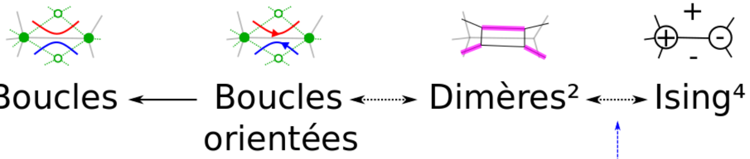
**Question**

Existe-t-il un lien direct entre modèle d'Ising et boucles bicolores ?

**Théorème** *[M. 2018]*

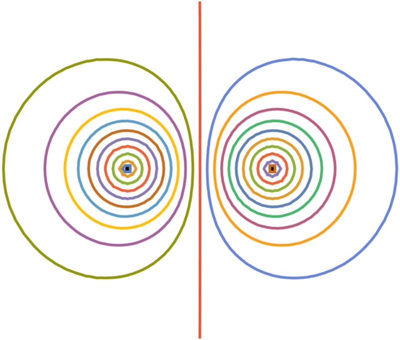
$$\left(Z_{\text{Ising}}(G,J)\right)^4 = \left(2^{2|V|}\prod_{e\in E}\cosh^2 2J_e\right)\ Z_{C_2^{(1)}}(G^\diamond,\lambda).$$

Preuve :




Dubédat 2011
Boutillier, de Tilière 2014

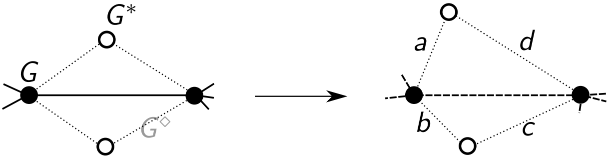
# III - Transformation « triangle-étoile » en géométrie discrète



Travail en commun avec Sanjay Ramassamy et Paul Thévenin.

## Plongements de graphes

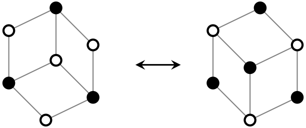
Soit $G$ un graphe planaire, on cherche des plongements naturels de $G$ et son dual $G^*$ (*i.e.* des plongements de $G^\diamond$).



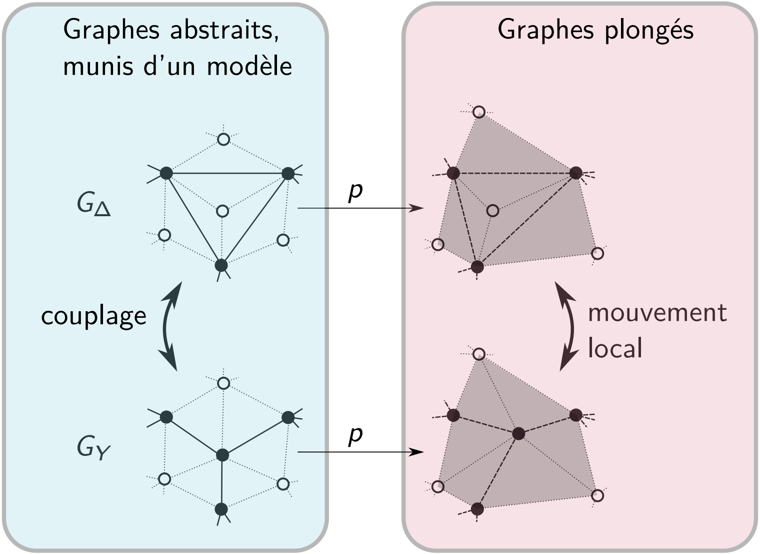

**Exemple 1 :** *certains* graphes peuvent être plongés en un graphe de losanges : toute face de $G^\diamond$ est envoyée sur un quadrilatère t.q.

$$a = b = c = d.$$

Triangle-étoile :

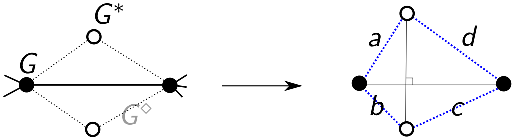


# Plongement $p$ ayant la *propriété de flip*

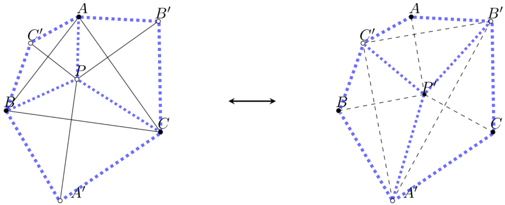


# Plongements de graphes et triangle-étoile

**Exemple 2 :** plongements de Tutte.




$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

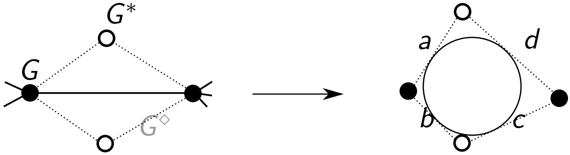



**Théorème** *[Steiner ; Kenyon, Lam, Ramassamy, Russkikh 2018]*

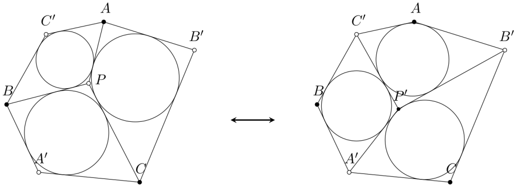
Pour tout plongement de Tutte de $G^\diamond_\Delta$, il existe un unique point $P'$ qui donne un plongement de Tutte de $G^\diamond_Y$.

# Plongements de graphes et triangle-étoile

**Exemple 3 :** $s$-plongements pour le modèle d'Ising *[Chelkak 2017]*.




$a + c = b + d$

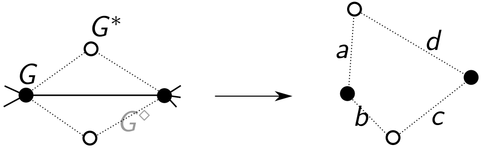



**Théorème** *[M., Ramassamy, Thévenin 2019]*

Pour tout $s$-plongement *propre* de $G^\diamond_\Delta$, il existe un unique point $P'$ qui donne un $s$-plongement *propre* de $G^\diamond_Y$.

# Plongements de graphes et triangle-étoile

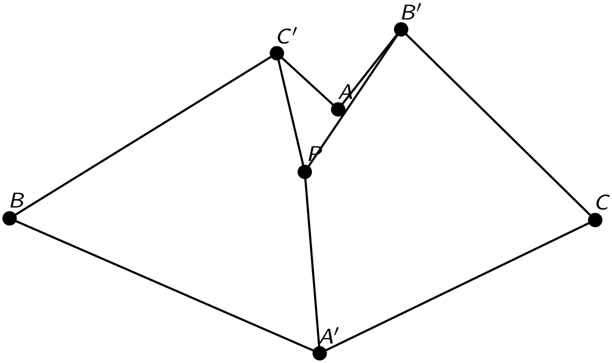
**Exemple 4 :** $\alpha$-plongements.



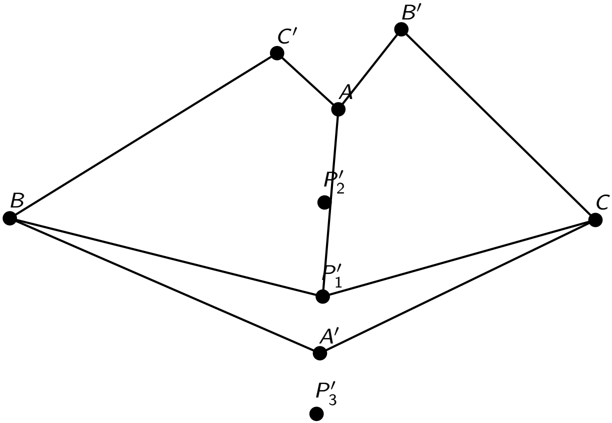

$$a^\alpha + c^\alpha = b^\alpha + d^\alpha$$

La définition s'étend à $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

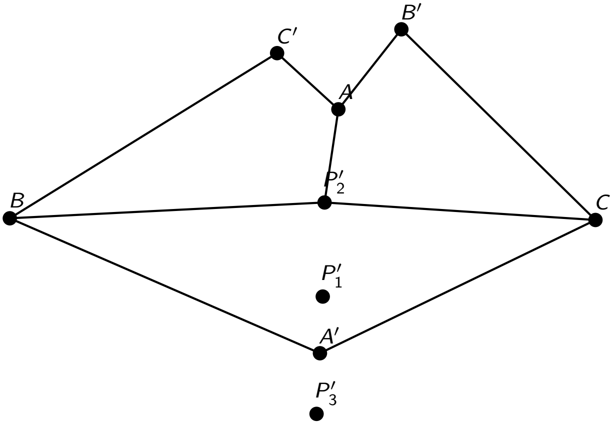
$\alpha = 4.3$



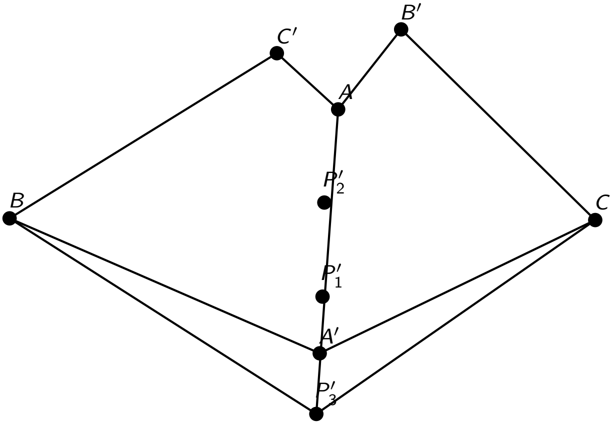
$\alpha = 4.3$



$\alpha = 4.3$

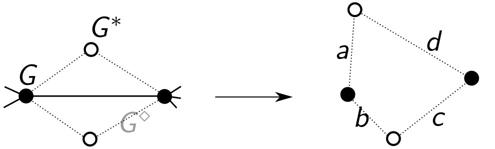


$\alpha = 4.3$



# Plongements de graphes et triangle-étoile

**Exemple 4 :** $\alpha$-plongements.



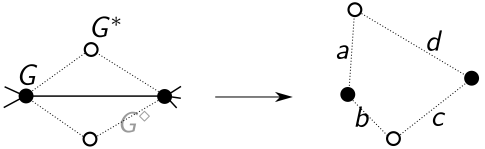

$$a^\alpha + c^\alpha = b^\alpha + d^\alpha$$

**Théorème** *[M., Ramassamy, Thévenin 2019]*

**Si $\alpha > 1$,**
Pour toute $\alpha$-réalisation de $G^\diamond_\Delta$, il existe un ~~unique~~ point $P'$ qui donne une $\alpha$-réalisation de $G^\diamond_Y$.

# Plongements de graphes et triangle-étoile

**Exemple 4 :** $\alpha$-plongements.




$$a^\alpha + c^\alpha = b^\alpha + d^\alpha$$

**Théorème** *[M., Ramassamy, Thévenin 2019]*

**Si $\alpha > 1$,**
Pour toute $\alpha$-réalisation de $G^\diamond_\Delta$, il existe un ~~unique~~ point $P'$ qui donne une $\alpha$-réalisation de $G^\diamond_Y$.

**Question**

Modèle de mécanique statistique intégrable associé ?

# « Intégrables » ?...

Liouville :
$N$ constantes
du mouvement
$\{f_i, f_j\} = 0$

Paire de Lax
$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = [P, L]$

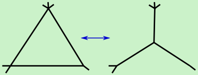
...

Matrices de transfert
$[T(u), T(v)] = 0$

Dynamique conjuguée à une translation sur $S^1 \times \cdots \times S^1$

dimères

Yang-Baxter



Modèles "exactement solubles"

"Existence de structures algébriques"

Z-invariance

8V "free-fermion"

# « Intégrables » ?...

Liouville :
$N$ constantes du mouvement
$\{f_i, f_j\} = 0$

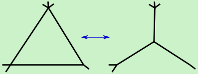
Paire de Lax
$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = [P, L]$

...

Matrices de transfert
$[T(u), T(v)] = 0$

Dynamique conjuguée à une translation sur $S^1 \times \cdots \times S^1$

Yang-Baxter



Modèles "exactement solubles"

"Existence de structures algébriques"

Kashaev

Ising

mineurs, boucles $C_2^{(1)}$

# « Intégrables » ?...

Liouville :
$N$ constantes
du mouvement
$\{f_i, f_j\} = 0$

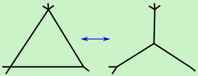
Paire de Lax
$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = [P, L]$

...

Matrices de transfert
$[T(u), T(v)] = 0$

Dynamique conjuguée à une translation sur $S^1 \times \cdots \times S^1$

Yang-Baxter



Modèles "exactement solubles"

"Existence de structures algébriques"

$\alpha$-plongements ?