RAPPORT SUR LE SÉJOUR EN INDE DANS LE CADRE DE L'ÉCHANGE *ENS ULM - CMI*

22 juillet 2000 - 11 septembre 2000

ALEXANDRU OANCEA

Pendant la période du 22 juillet 2000 - 11 septembre 2000 j'ai pris part avec Mladen Dimitrov et Stéphane Fischler au programme commun ENS Ulm - Chennai Mathematical Institute (CMI). Ce rapport rend compte du séjour mais il se veut aussi utile aux élves qui vont continuer le programme dans les années à venir.

1. Obligations scientifiques

1.1. **Enseignement.** Le CMI développe depuis 1998 un *Undergraduate Programme* dans l'intention de relancer un enseignement de haute qualité en mathématiques pures en Inde au niveau des premières années d'université. Les étudiants sont sélectionnés sur concours national et les promotions sont très petites, de 6-7 personnes par an. De cette façon un suivi attentif des étudiants est possible et le travail en classe est très efficace.

La principale mission qu'on a dû accomplir a été d'assurer une charge d'enseignement préétablie avec les responsables pédagogiques du CMI, étalée sur les cinq semaines passées effectivement à Chennai. Les cours ont dû être dispensés en anglais. De mon côté j'ai assuré deux cours:

- *Equations Différentielles Ordinaires* pour les étudiants de deuxième année (promotion 1999), constituant la première partie du cours obligatoire *Calculus III*. La structure du cours que j'ai fait est donnée en Annexe 1a. Le cours a été sanctionné à la fin par un examen (voir les sujets d'examen en Annexe 1b), dont il sera tenu compte dans la note finale pour le cours de *Calculus III*. Le cours est continué par Prof. Parameshwaran Sankaran (sankaran@smi.ernet.in).

  Nombre d'heures par semaine: 4,5 (2x1,5h cours et 1,5h TD)
- *Topologie Différentielle* pour les étudiants de troisième année (promotion 1998), en tant que cours facultatif. Le cours n'est pas continué après mon départ, vu qu'il ne fait pas partie du programme. Il n'y a pas eu d'examen final. Le notions traitées dans le cours sont données en Annexe 2. Même si le cours était principalement destiné aux étudiants de troisième année, trois étudiants supplémentaires de deuxième année y ont participé régulièrement.

  Nombre d'heures par semaine: 3 (1,5h de cours et 1,5h TD)

1.2. **Exposés et visites d'autres instituts ou universités.** Le séjour à Madras a été effectivement organisé comme suit:

- **22 juillet - 31 juillet:** installation au CMI et visite de l'*Université de Pondicherry*

L'accueil organisé à l'Université de Pondicherry par les professeurs Indumathi (pattu_indu@yahoo.com) et Ramaswamy (rama.mat@pu.pon.nic.in) a été extraordinaire. Ils se sont occupés de notre séjour avec une infinie gentillesse, surpassant les frictions internes du département de mathématiques de l'université de Pondicherry. Ils ont tout mis en place pour faciliter notre dialogue avec les étudiants. C'est ainsi qu'on a connu Satya et Narayana, deux doctorants, dont le dernier vient à Paris cette année pour commencer une thèse sous la direction de Gilles Godefroy. En ce qui concerne Satya, j'ai eu l'occasion de rediscuter avec lui puisqu'il a intégré le CMI en tant que *Junior Research Fellow* cette année et il continue le TD de Calculus III après mon départ.

On nous a demandé de présenter chacun un exposé accessible à un public large, constitué principalement d'étudiants. Le titre de mon exposé a été

Cutting and Pasting Surfaces

J'ai expliqué dans cet exposé le théorème de classification des surfaces compactes.

– **31 juillet - 1 septembre:** séjour sur place à Madras au *Chennai Mathematical Institute* et contacts avec les gens de l'*Institute of Mathematical Sciences*

Le Professeur Seshadri (css@smi.ernet.in), directeur du CMI, a pris soin de tout afin que notre séjour se passe de la meilleure façon possible et tous les membres du CMI nous ont accueillis avec amitié, curiosité et disponibilité.

La plupart de mon temps passé à Madras a été dédié aux étudiants: préparation des cours, correction de leurs devoirs ou tout simplement de longues discussions. Sans doute le fait de s'être lié d'amitié avec eux est la meilleure chose acquise pendant le séjour en Inde. Les étudiants sont extrémement intéressés, motivés et curieux de tout.

A part les cours, j'ai aussi présenté au CMI un exposé sur le thème

Symplectic Isoperimetric Inequalities

d'après des résultats de Claude Viterbo et suivant mon travail de DEA.

Le Professeur Aravinda (aravinda@smi.ernet.in) s'est aussi largement impliqué dans l'organisation de notre séjour à Madras et des visites des autres institutions. Le secrétaire de l'institut, Mr. Sripathy (sripathy@smi.ernet.in), nous a été d'une aide inestimable dans tous les problèmes pratiques.

– **23 - 24 août:** visite de trois instituts à Bangalore - *Indian Institute of Science*, *TIFR* et *Indian Statistical Institute*.

La visite de Bangalore a été très fructueuse, même si au début elle s'annonçait un peu désorganisée à cause de quelques malentendus concernant les thèmes des exposés, convenus avec le Professeur Yogananda (yoga@math.iisc.ernet.in). J'ai présenté l'exposé sur les Inégalités Isopérimétriques Symplectiques au *TIFR Centre* et j'ai rencontré deux personnes intéressées par des questions impliquant géométrie symplectique et équations aux dérivées partielles, notamment les Prof. Vanninathan (vanni@math.tifrbng.res.in) et Nagaraj (brn@math.tifr.res.in). On a identifié des questions d'intêret commun.

– **2 septembre - 10 septembre:** visite du *Tata Institute of Fundamental Research (TIFR)* à Bombay.

Le centre du TIFR à Bombay est très imposant et c'était un honneur pour moi que de pouvoir présenter un exposé là-bas. J'ai encore une fois parlé d'Inégalités Isopérimétriques et discuté avec le Prof. Indranil Biswas (biswas@math.tifr.res.in) sur des possibles développements.

J'ai aussi écouté des exposés présentés pendant cette semaine à l'Institut, ainsi que les exposés de mes deux amis, Mladen Dimitrov et Stéphane Fischler.

En tout, j'ai donc exposé quatre fois, sur deux thèmes différents:

1. *Cutting and Pasting Surfaces* (1 fois)
2. *Symplectic Isoperimetric Inequalities* (3 fois)

2. Questions pratiques: finances, logement, accueil

Pendant le séjour à Madras, le CMI a pris en charge d'une façon exemplaire tout ce qui concernait le logement, la restauration, le transport depuis la Guest House à l'Institut, ainsi que les différents voyages d'intêret scientifique qu'on a faits. Apart cela, on nous a fourni de l'argent de poche en quantité plus que suffisante. Dans ce qui suit je donnerai une déscription détaillée des aspects pratiques de l'hospitalité de nos hôtes, en espérant que l'ENS et le DMA pourront assurer aux deux étudiants du CMI qui viendront à Paris en mai 2001 un accueil de même niveau.

Pour une bonne compréhension de la situation il faut penser que le pouvoir d'achat en Inde d'une Roupie indienne est le même que le pouvoir d'achat en France d'un Franc français.

2.1. **Questions financières.** Le CMI a assuré les suivantes dépenses:

- dépenses relatives au **logement** à Chennai. On a été logés dans la Guest House du IMSc (Institute of Mathematical Sciences) dans des conditions exceptionnelles: on a reçu les meilleurs appartements avec air conditionné, comprenant chambre à coucher, salon de travail, halls, cuisine, salle de bain et balcon. Ceci peut paraître incroyable, mais c'est symptomatique pour les dimensions de l'accueil qu'on a reçu en Inde.
- **versements liquides**: on nous a versés 8000Rs/- par personne, ce qui représente, pour comparaison, 1,3 fois le montant de la bourse d'un thésard indien, qui est d'environ 6000Rs/-. Le pouvoir d'achat de 8000Rs/- en Inde est équivalent au pouvoir d'achat de 8000FF en France.
- dépenses relatives à la **restauration**: on a pu déjeuner gratuitement chaque jour avec les étudiants dans leur foyer. Le reste des repas pris à la Guest House ont coûté environ 1500Rs/- et ils ont été supportés sur la somme de 8000Rs/- que le CMI nous a versée. En tout, une somme d'environ 6500Rs/- nous est restée comme **argent de poche**.
- **transport en ville**: le CMI a assuré chaque jour le transport en voiture entre la Guest House où on était logés et le CMI (la distance entre les deux est d'environ 8km, et le transport dans Chennai difficile et long). On nous a épargné de cette façon beaucoup de fatigue et de temps.

– **voyages** d'intêret scientifique et **logement dans d'autres villes**: le CMI nous a payé le transport vers Bangalore et Bombay (environ 2500Rs/- par personne), ainsi que le logement à Pondicherry (approx.700Rs/- par personne).

Apart ces dépenses du CMI, le TIFR de Bombay et le IISc de Bangalore ont pris en charge le logement dans ces deux villes. Le voyage Chennai-Pondicherry-Chennai a été pris en charge par l'Université de Pondicherry (environ 700Rs/- par personne).

Je veux souligner encore une fois que le CMI a toujours choisi d'*excellentes* solutions de transport et logement, sans économie d'argent, de temps ou d'organisation. Les étudiants indiens qui viendront à Paris en mai 2001 devront recevoir à leur tour un traitement exceptionnel.

3. Tourisme

Cette section est très courte et invite les futurs partants pour Madras à venir nous consulter moi, Mladen Dimitrov et Stéphane Fischler pour des conseils précieux sur le sujet. L'Inde est un pays fascinant qui invite au voyage.

ANNEXE 1a

Chennai Mathematical Institute
Undergraduate Program

Topics covered in the differential equations lectures, 31 july - 31 august 2000
Lecturer: Alexandru Oancea

Number of lectures: 9×90 *min.*
Number of tutorials conducted: 5×90 *min.*
Assignments: 4
1 initial test, 1 quiz and 1 final test

Topics covered:

1. Scalar equations. Linear, affine, separable variables, Bernoulli, Ricatti, homogeneous, reduction of order.

2. Equivalence between higher order equations and systems.

3. Qualitative results. Cauchy problem. Local/Global existence and unicity properties. Proof of local existence and local unicity theorems. Proof of a global existence criterion. Results concerning extension of solutions. Maximal solutions.

4. Linear systems and linear higher order equations. Global existence and unicity properties. The space of solutions.

5. Linear equations with constant coefficients. Explicit formulas for distinct eigenvalues. Exponential of a matrix. Solutions using the exponential. Jordan form of a matrix. Explicit formulas in the general case using quasi-polynomials.

6. Affine equations. Global existence and unicity. The space of solutions. The method of variation of constants.

Textbooks:

V.Arnold: Ordinary Differential Equations. Springer, 1992.

G.Simmons: Differential Equations with Historical Notes and Applications. Tata McGraw-Hill, 1997.

Demidovitch: Problem Book in Analysis. Mir, Moscou. (french)

G. Morosanu: Problem Book in Differential Equations. Ed. Academiei, Bucharest, 1989. (romanian)

ANNEXE 1b

Chennai Mathematical Institute
Undergraduate Program

Final test on differential equations - Calculus III course
31 august 2000
Conductor of test: Alexandru Oancea

Time allowed: 90 min. Only three out of four problems are necessary in order to achieve maximal score.

I. Prove that the Cauchy problem

$$x' = \frac{1}{t^2 + x^2}$$

$$x(0) = x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

admits a unique solution defined on the whole real axis $\mathbb{R}$. Moreover, show that $\lim_{t\to\pm\infty} x(t)$ exist and are finite.

II. Let $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be continuous functions, defining the equation

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Let y_1 and y_2 be two linearly independent solutions for this equation.

a) By using the wronskian $W(y_1, y_2) = y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'$ show that y_1 and y_2 have distinct zeroes.

b) Show that y_1 vanishes exactly once between any two successive zeroes of y_2 and the converse. ("Sturm separation property")

c) Show that on any compact interval both y_1 and y_2 have a finite number of zeroes, say N_1 and N_2. Show that $|N_1 - N_2| \leq 1$.

d) Apply the results to the equation $y'' + y = 0$.

III. a) Find the general form of the solutions for the system

$$x' = -x - 2y$$

$$y' = 4x - 5y$$

b) Prove that any solution ϕ satisfies

$$\lim_{t\to\infty} \phi(t) = (0, 0)$$

$$\lim_{t\to-\infty} |\phi(t)| = \infty$$

IV. Find the general form of the solutions for the system:

$$x' = z$$

$$y' = x - 3z$$

$$z' = -2x - y + z$$

ANNEXE 2

Chennai Mathematical Institute
Undergraduate Program

Topics covered in the differential topology lectures, 31 july - 31 august 2000
Lecturer: Alexandru Oancea

Number of lectures: 5×90 *min.*
Number of tutorials conducted: 5×90 *min.*
Assignments: 0
No final test
Number of attendants: 7 students (4 students of 3rd yesr, 3 students of 2nd year)

Topics covered:

1. Definition of manifolds (abstract and embedded in $\mathbb{R}^n$). Examples of manifolds. Separation and connexity properties.

2. Smooth maps. Differential of a map. Tangent space at a point. Tangent bundle.

3. Immersions and submersions. Local immersion/submersion theorem. Submanifolds.

4. Regular and critical values of smooth functions. Sard's theorem. Application: fundamental theorem of algebra.

5. Mod_2 degree of a smooth function. Classification of 1 dimensional manifolds. Invariance by homotopy of the mod_2 degree. Application: Brouwer's fixed point theorem.

Textbooks:

V.Guillemin; A.Pollack: Differential Topology, Prentice-Hall, 1974;
J.Milnor: Topology from the Differentiable Viewpoint, Virginia Univ.Press, 1965.