Algèbre Linéaire et Géométrie

François DE MARÇAY

Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

Il m'est arrivé souvent, lorsque je jetais les yeux sur l'élite de l'humanité, sur tous ces beaux génies, de me demander pourquoi, partout ailleurs que dans l'éloquence, avaient apparu plus nombreux les hommes supérieurs.

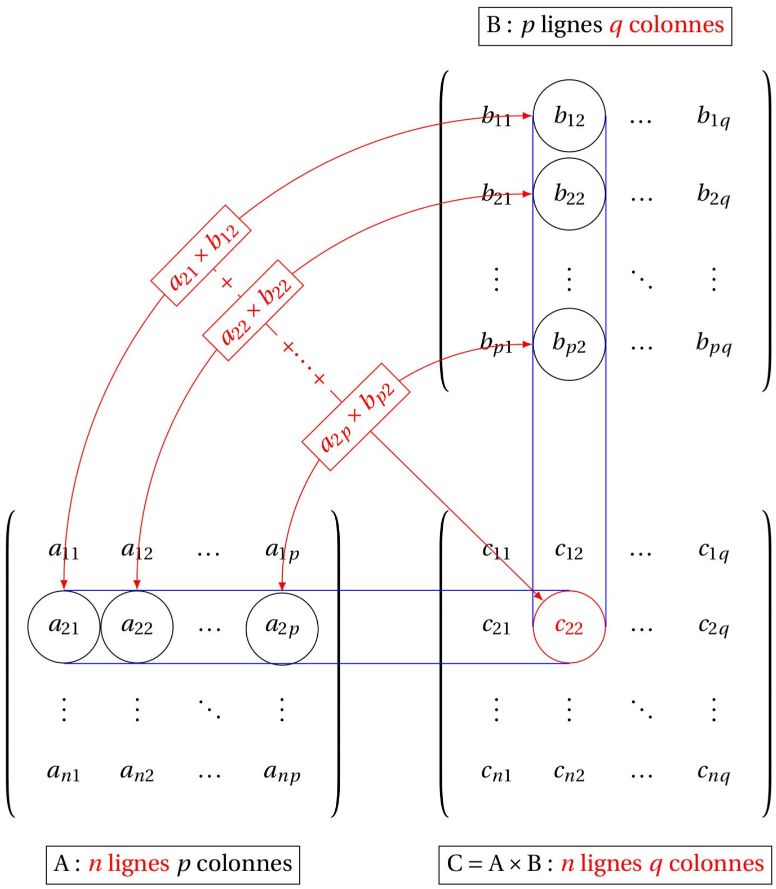
CICÉRON, *De l'Orateur*, Livre I, 6.

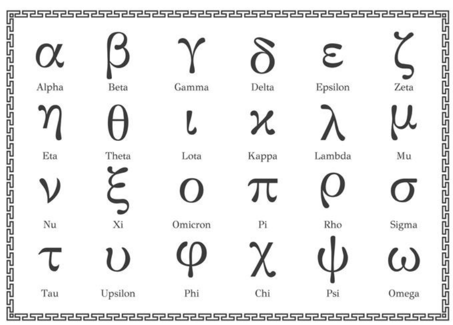
Et ceux que l'on nomme les *mathématiciens*, qui ne sait l'obscurité, l'abstraction, la diversité de leur matière, et la pénétration subtile qu'elle exige ? Cependant tel est le nombre de ceux qui s'y sont montrés du premier ordre, que personne, semble-t-il, n'a vraiment porté dans cette étude une ardeur un peu vive, sans avoir obtenu le résultat qu'il cherchait.

CICÉRON, *De l'Orateur*, Livre I, 10.

« Celui qui enseigne une chose la connaît rarement à fond, car s'il l'étudiait à fond afin de l'enseigner, il n'aurait alors plus assez de temps disponible pour l'enseigner. »

Jacques-Henri D'AGUESSEAU.


B : p lignes q colonnes
$a_{21} \times b_{12}$
+
$a_{22} \times b_{22}$
$+ \cdots +$
$a_{2p} \times b_{p2}$
$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nq} \end{pmatrix}$
A : n lignes p colonnes
C = A × B : n lignes q colonnes


α β γ δ ε ζ
Alpha Beta Gamma Delta Epsilon Zeta
η θ ι κ λ μ
Eta Theta Lota Kappa Lambda Mu
ν ξ ο π ρ σ
Nu Xi Omicron Pi Rho Sigma
τ υ φ χ ψ ω
Tau Upsilon Phi Chi Psi Omega

Méthodologie de travail pour le cours « *Algèbre Linéaire et Géométrie* » Licence 1 de Mathématiques–Physique

Joël MERKER alias François DE MARÇAY
Département de Mathématique d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

• **Notes de cours.** Des notes de cours seront régulièrement transmises par courriel sous forme pdf. La référence principale utilisée pour ce cours sera le livre de David LAY, *Algèbre linéaire et applications*, dont il existe plus de 20 exemplaires empruntables à la Bibliothèque Universitaire Sciences.

• **Modalités de contrôle.** Les **100 %** de la note finale complète comprendront :

☐ **25 %** contrôle continu = les **5** devoirs à la maison (DMs).

☐ **35 %** examen partiel.

☐ **40 %** examen terminal.

• **Devoirs à la maison.** Cinq devoirs à la maison seront à rendre, trois avant l'examen partiel, deux avant l'examen terminal. Ils seront établis par le professeur responsable, Joël Merker, qui rédigera aussi un corrigé.

! Chaque devoir non rendu se verra attribuer une note de $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{20}}$ qui contribuera à hauteur de **5 %** de la note finale**!**

Pour chaque DM, entre 16 et 18 points sur 20 seront facilement accessibles. Un (ou deux) exercices plus difficiles seront parfois placés *à la fin* des sujets de DMs, et représenteront 2 (ou 4) points sur 20.

• **Méthode classique : *Obligation impérative d'écrire à la main !***

☐ *Pourquoi ?* Parce qu'un document sur ordinateur peut facilement être échangé par mail entre étudiants et être récopié en entier ou par morceaux via Control-C puis Control-V.

☐ *Quel est le but ?* Que les étudiants apprennent et assimilent des mathématiques par la lecture. Mieux vaut un vrai travail personnel formateur qu'une dilapidation de son temps sur internet, ou devant la télévision.

• **Transmission des devoirs à la maison :** *Par mail, sous forme scannée (ou photographiée).* Document unique apprécié.

• **Examens.** Les sujets de l'examen partiel et de l'examen terminal seront établis par le professeur responsable, Joël Merker. Les copies seront intégralement corrigées par ledit professeur.

• **Règle d'or pendant les cours :**

Interdiction absolue d'utiliser et de consulter
smartphones, téléphones et ordinateurs portables
et tous autres gadgets électroniques contraires au travail.

• **Modalités d'application de cette règle d'or.** Les étudiants qui contreviendront à cette règle seront exclus sur le champ de la salle de cours. Le cours ne reprendra que lorsque les étudiants en question seront sortis de la salle de cours.

• **Lecture régulière du cours.** Chaque étudiant s'imposera de lire, relire et étudier régulièrement le cours. Ce travail s'effectuera occasionnellement, même sur des courtes périodes d'une dizaine de minutes, à la maison, à la bibliothèque ou dans les transports en commun. ***C'est en lisant qu'on développe son intelligence***, car on absorbe les intelligences variées d'autres personnes sans rester confiné en soi-même, voire infiniment pire : confiné à l'abrutissement total du tripotage crétinisant de smartphone !

• **Assiduité au cours.** C'est principalement le cours oral au tableau qui permettra de transmettre les idées informelles et les intuitions importantes. Aussi, lecture du cours et présence au cours seront-elles *deux activités complémentaires et indispensables pour une préparation optimale au métier de scientifique*. De plus, *on lit beaucoup plus facilement les notes de cours après avoir écouté le professeur*. ***De toute façon, une bonne prise de notes manuscrites personnelles a plus de valeur que les polycopiés.***

• **Prise de notes pendant les séances de cours.** ***L'existence de documents écrits transmis par les professeurs ne dispense absolument pas de prendre des notes manuscrites complètes et soignées***.

Table des matières

I. Systèmes linéaires : exemples divers 11

1. Introduction 11
2. Systèmes d'équations linéaires 12
3. Notation matricielle 16
4. Exemples de résolution de systèmes linéaires 17
5. Méthode des quatre couleurs 22
6. Trois opérations fondamentales 26
7. Questions d'existence et d'unicité 29
8. Exercices d'entraînement 31
9. Exercices 32

II. Méthode du pivot de gauss et formes échelonnées (réduites) 33

1. Introduction 33
2. Systèmes échelonnés et systèmes échelonnés réduits 33
3. Deux résultats théoriques, et une démonstration 34
4. Positions de pivot et exemples supplémentaires 37
5. Algorithme du pivot de Gauss 39
6. Solutions d'un système linéaire 41
7. Représentation paramétrique d'un ensemble de solutions 43
8. Résolution par substitutions successives 44
9. Synthèse théorique sur la méthode du pivot de Gauss 44
10. Exercices d'entraînement 47
11. Exercices 48

III. Systèmes linéaires dépendant de paramètres 49

1. Introduction 49
2. Exercices corrigés 49

IV. Espaces vectoriels $\vec{V}_{\mathbb{R}^2}, \vec{V}_{\mathbb{R}^3}, \ldots, \vec{V}_{\mathbb{R}^n}$ et équations vectorielles 61

1. Introduction 61
2. Vecteurs de $\vec{V}_{\mathbb{R}^2}$ 61
3. Interprétation géométrique de $\vec{V}_{\mathbb{R}^2}$ 63
4. Vecteurs de $\vec{V}_{\mathbb{R}^3}$ 65
5. Vecteurs de $\vec{V}_{\mathbb{R}^n}$ 65

6. **Combinaisons linéaires générales** **66**

7. **Interprétation géométrique de** $\mathsf{Vect}\,\{\vec{v}\}$ **et de** $\mathsf{Vect}\,\{\vec{u},\vec{v}\}$ **70**

8. **Exercices d'entraînement** **71**

9. **Applications linéaires du plan** $\mathbb{R}^2$ **dans lui-même** **72**

10. **Exercices** **75**

V. Droites dans le plan **76**

1. **Introduction** **76**

2. **Droites dans le plan : définition paramétrique et équations cartésiennes** **76**

3. **Travail mathématique avec des lettres littérales** **78**

4. **Produit scalaire et vecteur directeur d'une droite** **78**

5. **Droite passant par deux points distincts** **80**

6. **Intersections d'une droite avec les axes** $0x$ **et** $0y$ **81**

7. **Équation graphée pour une droite** **82**

8. **Intersection entre deux droites planaires et systèmes linéaires** **85**

9. **Formules symétriques pour l'intersection entre deux droites** **87**

10. **Caractérisation de la coïncidence** $D = D$**' de deux droites dans** $\mathbb{R}^2$ **92**

11. **Intersection entre une droite cartésienne et une droite paramétrique** **93**

12. **Intersection entre deux droites paramétriques** **94**

13. **Intersection de trois droites** $D \cap D' \cap D''$ **dans le plan** $\mathbb{R}^2$ **97**

14. **Exercices** **99**

VI. Droites et plans dans l'espace **100**

1. **Introduction** **100**

2. **Indépendance linéaire de deux vecteurs** $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **dans** $V_{\mathbb{R}^3}$ **100**

3. **Définition d'un** 2**-plan dans** $\mathbb{R}^3$ **par une équation cartésienne** **102**

4. **Produit scalaire et vecteur orthogonal directeur d'un** 2**-plan** $P \subset \mathbb{R}^3$ **104**

5. **Plan passant par trois points non alignés** **106**

6. **Intersections d'un plan avec les axes** $0x$**,** $0y$**,** $0z$ **107**

7. **Équations graphées de plans** $P \subset \mathbb{R}^3$ **107**

8. **Intersection entre deux plans** $P \subset \mathbb{R}^3$ **et** $P' \subset \mathbb{R}^3$ **108**

9. **Intersection entre trois plans** $P, P', P'' \subset \mathbb{R}^3$ **et déterminant** 3×3 **formel** **111**

10. **Droites** $D \subset \mathbb{R}^3$ **dans l'espace** $\mathbb{R}^3$ **117**

11. **Intersection entre une droite** $D \subset \mathbb{R}^3$ **et un plan** $P \subset \mathbb{R}^3$ **119**

12. **Intersection entre deux droites** $D \subset \mathbb{R}^3$ **et** $D' \subset \mathbb{R}^3$ **121**

13. **Exercices** **122**

VII. Systèmes linéaires homogènes **123**

1. Introduction 123
2. Représentation vectorielle des solutions d'un système linéaire 123
3. Système linéaire homogène associé à un système linéaire 125
4. Interprétation vectorielle des systèmes linéaires 130
5. Familles libres de vecteurs $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ 131
6. Familles génératrices de vecteurs $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ 133
7. Familles libres et génératrices de vecteurs $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ 134
8. Exercices 134

VIII. Décomposition $A = LU$ de matrices A quelconques 135
1. Introduction 135
2. La factorisation LU 135
3. Algorithme de factorisation $A = L\,U$ 138

IX. Produit scalaire, produit vectoriel, produit mixte 142
1. Introduction 142
2. Produit scalaire dans l'espace vectoriel euclidien $V_{\mathbb{R}^3}$ 142
3. Présentation des deux (seules) orientations dans l'espace $V_{\mathbb{R}^3}$ 144
4. Produit vectoriel dans $V_{\mathbb{R}^3}$ 147
5. Applications bilinéaires 152
6. Produit mixte 155
7. Applications trilinéaires alternées 157
8. Déterminants d'ordre 3 159
9. Exercices 162

X. Espaces vectoriels 163
1. Introduction 163
2. Structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et premières propriétés 167
3. Sous-espaces vectoriels 169
4. Combinaisons linéaires de vecteurs 170
5. Trois opérations sur $\mathsf{Vect}\,(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$ 171
6. Familles libres et familles liées 173
7. Bases, dimensions, coordonnées 177
8. Somme de deux sous-espaces vectoriels 182
9. Appendice : Nombres complexes et similitudes complexes 185
10. Exercices 189

XI. Applications linéaires 190
1. Introduction 190
2. Homomorphismes linéaires entre espaces vectoriels 190
3. Image et noyau d'une application linéaire 191

4. Applications linéaires et dimension 196
5. Espace vectoriel des applications linéaires de E dans F 199
6. Dual d'un espace vectoriel 200
7. Anneau des endomorphismes linéaires d'un espace vectoriel E 200
8. Groupe des automorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E 202
9. Projecteurs 203
10. Formes linéaires et espace dual 206
11. Exercices 208
XII. Matrices 209
1. Introduction 209
2. Étude d'un cas particulier éclairant 209
3. Passage au cas général 211
4. Matrices de rotation en géométrie euclidienne planaire 214
5. Matrice ligne et matrice colonne 215
6. Espace vectoriel $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ 216
7. Multiplication des matrices 218
8. Anneau des matrices carrées d'ordre n 228
9. Matrices scalaires, diagonales et triangulaires 229
10. Matrices inversibles 233
11. Changements de bases 235
12. Transpositions de matrices 239
13. Matrices inverses et systèmes linéaires 241
14. Inverses de matrices 2×2 242
15. Algorithme de calcul de l'inverse d'une matrice A 244
16. Matrices élémentaires 247
17. Exercices 248
XIII. Déterminants 249
1. Introduction 249
2. Applications multilinéaires 249
3. Applications multilinéaires alternées 251
4. Déterminants 255
5. Déterminant du produit de deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ 257
6. Développement d'un déterminant selon les éléments d'une rangée . 259
7. Matrice adjointe 264
8. Critère pour l'invertibilité des matrices 267
9. Exercices 268
XIV. Théorie du rang 269

1. **Introduction** **269**
2. **Rang d'une application linéaire** **269**
3. **Matrices extraites d'une matrice** **273**
4. **Systèmes d'équations linéaires** **275**
5. **Systèmes de Cramér** **277**
6. **Résolution d'un système linéaire général** **280**
7. **Exercices** **284**

XV. Examens corrigés 285

1. **Examen 1** **285**
2. **Corrigé de l'examen 1** **288**
3. **Examen 2** **294**
4. **Corrigé de l'examen 2** **296**
5. **Examen 3** **301**
6. **Corrigé de l'examen 3** **303**
7. **Examen 4** **311**
8. **Corrigé de l'examen 4** **313**
9. **Examen 5** **321**
10. **Corrigé de l'examen 5** **324**
11. **Examen 6** **330**
12. **Corrigé de l'examen 6** **332**
13. **Examen 7** **341**
14. **Corrigé de l'examen 7** **343**
15. **Examen 8** **350**
16. **Corrigé de l'examen 8** **352**
17. **Examen 9** **358**
18. **Corrigé de l'examen 9** **361**
19. **Examen 10** **368**
20. **Corrigé de l'examen 10** **370**

Systèmes linéaires : exemples divers

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

En mathématiques, et plus précisément en Algèbre linéaire, *l'élimination de Gauss-Jordan* est un algorithme général, qui permet de déterminer toutes les solutions d'un système *quelconque* d'équations linéaires. Cette méthode est nommée en hommage conjoint à Carl Friedrich Gauss et à Wilhelm Jordan, mais elle est plus fréquemment appelée *méthode du pivot de Gauss*. Elle consiste en des calculs d'élimination successifs, répétés, nombreux, que le moindre sous-bachelier des années 2020 peut dorénavant apprendre en quelques séances de cours et de TD au sein de la très belle et très grande *Université Paris-Saclay*.

Lorsqu'on applique cette méthode d'élimination de Gauss à n'importe quel système linéaire, on obtient une forme canonique unique, dite *forme échelonnée réduite*, dont nous donnerons très bientôt une définition précise.

Cette méthode était en fait connue des mathématiciens chinois depuis au moins le I$^{\text{er}}$ siècle de notre ère. Elle est présentée au moyen de dix-huit exercices dans le livre chinois iconique '*Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique*', dont elle constitue le huitième chapitre, sous le titre « *Fang cheng* », c'est-à-dire « *La disposition rectangulaire* ». Dans son commentaire daté de 263 après Jésus-Christ, Liu Hui en attribue la paternité à Chang Tsang, chancelier de l'empereur de Chine au II$^{\text{ième}}$ siècle avant Jésus-Christ !

Mais en Europe, cette méthode n'a été re-découverte et présentée sous forme moderne qu'au XIX$^{\text{ième}}$ siècle. En 1810 en effet, Carl Friedrich Gauss présentait sa méthode dite « *des moindres carrés* » dans un livre consacré à l'étude du mouvement de l'astéroïde Pallas. Dans l'article 13 de son livre, Gauss décrivait une méthode générale de résolution de systèmes d'équations linéaires qui constitue l'essentiel de *sa* méthode du pivot.

En 1888, Wilhelm Jordan publia un livre de géodésie dans lequel il précisa comment utiliser efficacement cette méthode en adoptant des notations astucieuses — tout un *génie* des mathématiques peut s'exprimer dans le choix des notations ! C'est grâce à ce dernier livre que cette méthode se diffusa dans tout l'Occident. Elle est aujourd'hui connue sous le nom d'élimination de Gauss-Jordan ou méthode du pivot de Gauss.

Les systèmes linéaires sont au cœur de ce qu'on appelle l'*Algèbre linéaire*, objectif principal de ce cours. Dans ce premier chapitre, nous allons introduire certains concepts fondamentaux du domaine, en analysant de nombreux exemples très concrets et très élémentaires.

Les premières sections sont consacrées à développer de manière systématique la méthode Gauss-Jordan, qui est utilisée de manière universelle dans les applications des mathématiques. Mais avant de commencer le cours technique proprement dit, signalons un exemple historique célèbre d'application des mathématiques linéaires.

À la fin de l'été 1949, un professeur de l'Université de Harvard, Wassily Leontief, introduisait soigneusement son dernier lot de cartes perforées dans le Mark II, un ordinateur très puissant (pour l'époque) de son institution. Ces cartes contenaient des données économiques sur les États-Unis, soit une synthèse de plus de 250 000 renseignements collectés par le Bureau des statistiques américain, et constituant le fruit de deux années de travail intensif.

Leontief avait divisé l'économie américaine en 500 « secteurs », comme l'industrie du charbon, l'industrie automobile, la production de l'électricité, les communications, le textile, *etc.*. Pour chacun de ces secteurs, il avait écrit une *équation linéaire* (nous verrons dans un instant ce dont il s'agit) qui décrivait comment ledit secteur distribuait sa production aux autres secteurs. Comme le Mark II, un des plus grands ordinateurs de son époque, était dans l'incapacité de traiter le système concerné de 500 équations (!) à 500 inconnues (!), Leontief avait réduit le problème à un système de 42 équations à 42 inconnues.

Programmer le Mark II pour résoudre ces 42 équations avait exigé des mois d'efforts et de patience, et donc, Leontief s'inquiétait de savoir combien de temps l'ordinateur mettrait à résoudre son problème. Il en fallut 56 heures, durant lesquelles le Mark II ronronna et clignota avant de produire finalement une solution numérique. Nous montrerons quelque peu ce dont il s'agit, mais en ne travaillant que sur des systèmes simplifiés à un petit nombre d'inconnues et d'équations.

Leontief, qui reçut le prix Nobel d'économie en 1973 pour ce travail et d'autres, avait ouvert la voie à une nouvelle ère de la modélisation mathématique en économie. Ses efforts à Harvard en 1949 ont conduit à l'une des premières utilisations des ordinateurs pour analyser un modèle économique *à grande échelle*.

Depuis cette époque, des chercheurs dans beaucoup d'autres domaines ont utilisé l'informatique pour analyser des modèles mathématiques. Du fait des très grandes quantités de données en jeu, on utilise en général des modèles *linéaires*, c'est-à-dire qui sont décrits par des *systèmes d'équations linéaires*, que l'on appelle parfois plus simplement des *systèmes linéaires*.

2. Systèmes d'équations linéaires

Soit un entier $n \geqslant 1$ quelconque. On note $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ des indéterminées, ou inconnues, en nombre n, comme par exemple, x_1, x_2 lorsque $n = 2$, ou x_1, x_2, x_3 lorsque $n = 3$. La plupart du temps en effet, dans les exercices, dans les TD, dans les examens, et dans les cachots de l'université, l'entier n sera « *petit* », c'est-à-dire qu'on aura le plus souvent $n = 2$ ou $n = 3$, voire $n = 4$, et plus rarement $n = 5, 6$.

Définition 2.1. On appelle *équation linéaire* en les inconnues $x_1, \dots, x_n$ une équation que l'on peut mettre sous la forme-type :

$$a_1\, x_1 + \cdots + a_n\, x_n \;=\; b,$$

où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ sont des *constantes*, c'est-à-dire des nombres réels donnés, fixés.

Le plus fréquemment, ces nombres seront des entiers, souvent compris entre -9 et 9, ou seront des nombres fractionnaires $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ entier (relatif) et $q \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ entier positif non nul, tous deux relativement « *petits* ».

Certaines fois (mais pas dans ce chapitre), on autorise les constantes $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$ à être des nombres *complexes*.

Exemple 2.2. Les deux équations :

$$4\, x_1 - 5\, x_2 + 2 \;=\; x_1 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad x_2 \;=\; 2\,\big(\sqrt{6} - x_1\big) + x_3,$$

sont linéaires en x_1, x_2, x_3, car on peut les ré-écrire sous la forme-type :

$$3\, x_1 - 5\, x_2 \;=\; -2 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad 2\, x_1 + x_2 - x_3 \;=\; 2\,\sqrt{6}.$$

Contre-exemple 2.3. En revanche, *aucune* des deux équations :

$$4\, x_1 - 5\, x_2 \;=\; x_1 x_2 \qquad\qquad \text{ou} \qquad\qquad x_1 \;=\; 2\,\sqrt{x_1} - 6,$$

n'est linéaire : la première parce qu'elle contient le terme-produit $x_1 x_2$; la seconde à cause de la racine carrée $\sqrt{x}_1$.

Rassurons-nous : durant tout le cours, nous ne considérerons que des équations linéaires, sans aucune puissance x^α ou produit de puissances $x^\alpha y^\beta z^\gamma$, et aussi, sans fractions rationnelles du type $\frac{ax+b}{cx+d}$, *etc.*

Toutefois, une certaine complexité mathématique intéressante pourra être embrassée en considérant *plusieurs* équations linéaires.

Définition 2.4. On appelle *système d'équations linéaires*, ou simplement *système linéaire*, une collection finie (S) d'une ou plusieurs équations linéaires incorporant les *mêmes* inconnues.

Si on note $m \geqslant 1$ le nombre des équations, et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ les inconnues communes, un tel système linéaire (S) peut s'écrire :

$$
(S): \qquad \left\{
\begin{aligned}
a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,n}\,x_n \;&=\; b_1, \\
a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,n}\,x_n \;&=\; b_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\
a_{m,1}\,x_1 + a_{m,2}\,x_2 + \cdots + a_{m,n}\,x_n \;&=\; b_m,
\end{aligned}
\right.
$$

avec des constantes données fixées $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ et $b_j \in \mathbb{R}$, où les *indices des lignes* seront notés :

$$
1 \leqslant i \leqslant m \qquad\qquad \text{ou encore} \qquad\qquad i = 1, 2, \dots, m
$$

tandis que les *indices des colonnes* seront notés :

$$
1 \leqslant j \leqslant n \qquad\qquad \text{ou encore} \qquad\qquad j = 1, 2, \dots, n.
$$

On écrira parfois aussi un tel système linéaire sous la forme abrégée :

$$
a_{i,1}\,x_1 + a_{i,2}\,x_2 + \cdots + a_{i,n}\,x_n \;=\; b_i \qquad\qquad (1 \leqslant i \leqslant m),
$$

et même encore plus abrégée :

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,x_j \;=\; b_i \qquad\qquad (1 \leqslant i \leqslant m).
$$

L'écriture d'un grand crochet à gauche du système n'est pas obligatoire, pourvu que la disposition visuelle soit claire.

Par exemple, avec $n = 3$ et $m = 2$, voici un système-bébé linéaire de 2 équations à 3 inconnues :

$$
\begin{aligned}
2\,x_1 - x_2 + \tfrac{1}{2}\,x_3 &= 8 \\
x_1 \qquad - 4\,x_3 &= -7
\end{aligned}
$$

Définition 2.5. On appelle *solution* d'un système linéaire (S) tout n-uplet de nombres réels $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ qui en satisfait les équations, c'est-à-dire tel que :

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}\,s_1 + a_{1,2}\,s_2 + \cdots + a_{1,n}\,s_n \;&=\; b_1, \\
a_{2,1}\,s_1 + a_{2,2}\,s_2 + \cdots + a_{2,n}\,s_n \;&=\; b_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\
a_{m,1}\,s_1 + a_{m,2}\,s_2 + \cdots + a_{m,n}\,s_n \;&=\; b_m.
\end{aligned}
$$

Par exemple, avec $n = m = 3$, soit le petit système linéaire sucré dérobé à l'épicerie du coin :

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
2\,x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\
x_1 - x_2 + 2\,x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

Alors nous affirmons que $(s_1, s_2, s_3) := (-2, 1, 2)$ en est une solution, ce que l'on peut aisément vérifier :

$$\begin{aligned} -2+1+\quad 2 &\stackrel{?}{=} \quad 1 \qquad \text{OUI}, \\ 2(-2)+1+\quad 2 &\stackrel{?}{=} -1 \qquad \text{OUI}, \\ -2-1+2\,(2) &\stackrel{?}{=} \quad 1 \qquad \text{OUI}. \end{aligned}$$

Définition 2.6. On appelle *ensemble des solutions* d'un système linéaire (S) l'ensemble de *toutes* les solutions possibles, que l'on peut noter :

$$\mathsf{Sol}\,(S) := \Big\{(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n : \; a_{i,1}s_1 + \cdots + a_{i,n}s_n = b_i, \quad i = 1, \dots, m\Big\}.$$

L'objectif principal de très nombreux domaines des mathématiques est de déterminer les ensembles (complets) de solutions à des systèmes linéaires, à des équations différentielles ordinaires, à des équations algébriques, *etc.*, et cet objectif est souvent difficile à atteindre.

Pour les systèmes linéaires, il existe une méthode algorithmique simple, que l'on peut enseigner en Licence 1 (super !). La méthode (naïve) qui fonctionne le mieux consiste à transformer successivement le système linéaire en des systèmes de plus en plus simples, sans en perdre aucune solution.

Définition 2.7. Deux systèmes linéaires avec les *mêmes* inconnues $(x_1, \dots, x_n)$, le premier à $m \geqslant 1$ équations :

$$(S) : \qquad \begin{cases} a_{1,1}\,x_1 + \cdots + a_{1,n}\,x_n \;=\; b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}\,x_1 + \cdots + a_{m,n}\,x_n \;=\; b_m, \end{cases}$$

où les $a_{i,j}$ et les b_i sont des constantes, et le second à un nombre $m' \geqslant 1$ — éventuellement différent de m — d'équations :

$$(S') : \qquad \begin{cases} a'_{1,1}\,x_1 + \cdots + a'_{1,n}\,x_n \;=\; b'_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{m',1}\,x_1 + \cdots + a'_{m',n}\,x_n \;=\; b'_{m'}, \end{cases}$$

où les $a'_{i',j'}$ et les $b'_{i'}$ sont des constantes *en général très différentes* des $a_{i,j}$ et des b_i, sont dits *équivalents* lorsque leurs ensembles de solutions sont identiques

$$\mathsf{Sol}\,(S) \;=\; \mathsf{Sol}\,(S').$$

L'espoir, c'est que sur un système agréablement simplifié (S'), on voie beaucoup mieux les solutions que sur le système initial (S).

Exemple 2.8. Soit le système de $m = 2$ équations à $n = 2$ inconnues :

$$(S) \qquad \begin{cases} 2\,x_1 + 5\,x_2 = 7 \\ \;\;\, x_1 + 3\,x_2 = 9 \end{cases}$$

Multiplier la deuxième équation par le nombre *non nul* 2 ne change pas l'ensemble des solutions :

$$2\,x_1 + 6\,x_2 = 18.$$

Soustraire cette équation à la première équation ne change rien non plus :

$$-\,x_2 = \;-\;11.$$

Cette opération permet de remplacer le système initial (S) par le système équivalent :

$$(S') \qquad \begin{cases} 2\,x_1 + 5\,x_2 = 7 \\ \qquad\; -\quad x_2 = \;-\;11 \end{cases}$$

Or ce nouveau système permet de résoudre aussitôt :

$$x_2 \,=\, 11,$$

puis en remplaçant cette valeur dans la première équation :

$$2\,x_1 + 5(11) \,=\, 7 \qquad \text{d'où} \qquad 2\,x_1 \,=\, -\,48 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x_1 \,=\, -\,24.$$

On trouve ainsi que $(x_1, x_2) := (-\,24, 11)$ est solution, mais on doit impérativement vérifier ce résultat — sous peine d'engranger des points négatifs aux examens — en substituant ces valeurs dans le système initial :

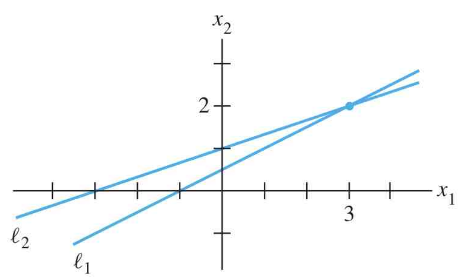
$$\begin{aligned} 2(-24) + 5(11) &\overset{?}{=} 7 \qquad \text{OUI}, \\ -\,24 + 3(11) &\overset{?}{=} 9 \qquad \text{OUI}. \end{aligned}$$

Trouver les solutions d'un système de deux équations à deux inconnues est assez facile, puisque cela revient à déterminer l'intersection de deux droites dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées (x_1, x_2).

Considérons par exemple le système hyper-simple :

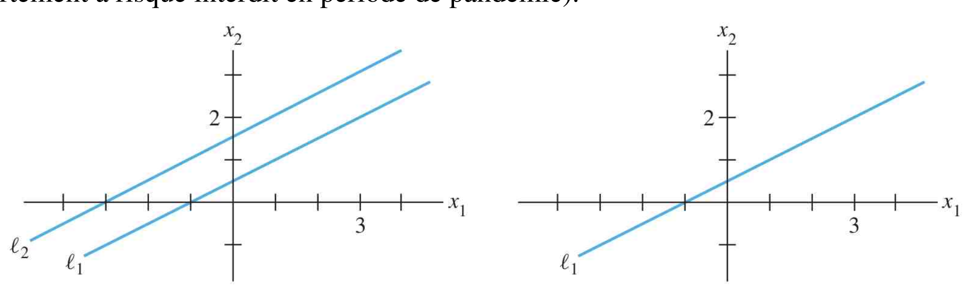
$$\begin{aligned} x_1 - 2\,x_2 &= \,-\,1 \\ -\,x_1 + 3\,x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Ces équations représentent deux droites, notées respectivement ℓ_1 et ℓ_2 sur la figure.



Un couple de nombres (x_1, x_2) vérifie les *deux* équations du système si et seulement si le point de coordonnées (x_1, x_2) se situe à la fois sur ℓ_1 et sur ℓ_2. Dans le système ci-dessus, l'unique solution est le point $(3, 2)$, comme on peut le vérifier (indication : additionner les deux équations pour faire disparaître x_1).

Bien entendu, deux droites dans le plan ne se coupent pas nécessairement en un point unique, car elles peuvent être *parallèles et distinctes*. Elles peuvent d'ailleurs aussi être *parallèles et confondues* (comportement à risque interdit en période de pandémie).



(a) (b)

La figure qui précède illustre ces deux derniers cas « dégénérés », au moyen des deux *autres* systèmes suivants :

$$(a) \quad \begin{aligned} x_1 - 2\,x_2 &= \,-\,1 \\ -\,x_1 + 2\,x_2 &= 3 \end{aligned} \qquad\qquad (b) \quad \begin{aligned} x_1 - 2\,x_2 &= \,-\,1 \\ -\,x_1 + 2\,x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Le système (a) n'a aucune solution, puisque deux droites parallèles distinctes $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$ ne s'intersectent jamais, tandis que le système (b) possède une infinité de solutions, à savoir *tous les points* — en nombre infini — de la droite de coïncidence $\ell_1 = \ell_2$.

En fait, ces trois cas géométriques possibles de disposition de deux droites quelconques dans le plan permettent, par anticipation, d'illustrer un phénomène général des systèmes linéaires.

Théorème 2.9. [Anticipation de la théorie générale] *Un système linéaire* quelconque *de* $m \geqslant 1$ *équations à* $n \geqslant 1$ *inconnues se trouve toujours dans une, et une seule, des trois situations suivantes.*

1. *Soit il n'a* aucune *solution.*

2. *Soit il a exactement* une *solution* unique.

3. *Soit il a une infinité de solutions.* Δ

Terminologie 2.10. Un système linéaire est dit :

1. *incompatible* (ou *inconsistant*) s'il n'a aucune solution ;

2-3. *compatible* (ou *consistant*) s'il admet une solution, ou une infinité de solutions.

3. Notation matricielle

On peut présenter les informations importantes sur un système linéaire de façon concise grâce à un tableau rectangulaire appelé *matrice*. Par exemple, étant donné le système :

$$\begin{aligned} x_1 - 2\,x_2 + \ \ x_3 &= 0 \\ 2\,x_2 - 8\,x_3 &= 8 \\ 5\,x_1 \qquad\quad - 5\,x_3 &= 10 \end{aligned}$$

où les coefficients de chaque inconnue ont été alignés verticalement, la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

est appelée *matrice des coefficients* (du système linéaire), tandis que la matrice :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{array}\right]$$

parfois représentée avec les variables au-dessus de leurs colonnes respectives :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{array}\right] \end{array}$$

parfois représentée sans barre verticale :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

est appelée *matrice complète*, ou *matrice augmentée*, (du système inéaire). Visiblement, cette matrice s'obtient en adjoignant à la matrice du système la colonne contenant les constantes des seconds membres de chaque équation.

La *taille* d'une matrice indique son nombre de lignes (en premier), et son nombre de colonnes (en second). La matrice complète de notre exemple est donc de taille 3×4 : on dit « 3 par 4 », ou « 3-4 ».

Grâce à ces préliminaires concrets, nous pouvons maintenant formuler une définition générale.

Définition 3.1. Étant donné un systèmes linéaire de taille $m \times n$:

$$\begin{aligned} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,n}\,x_n \ &= \ b_1, \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,n}\,x_n \ &= \ b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}\,x_1 + a_{m,2}\,x_2 + \cdots + a_{m,n}\,x_n \ &= \ b_m, \end{aligned}$$

sa *matrice* est le tableau de nombres à m lignes et n colonnes :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

et sa *matrice complète*, ou *augmentée*, est le tableau de nombres à m lignes et $n+1$ colonnes :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right],$$

Ces notations matricielles permettent de simplifier la présentation des calculs qui vont suivre pour *transformater successivement un système en systèmes équivalents de plus en plus simples*. En effet, on évite ainsi d'avoir à écrire et à recopier indéfiniment les lettres x_1, x_2, ..., x_n, car on peut garder en mémoire qu'elles sont mentalement attachées aux colonnes 1, 2, ..., n :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \scriptstyle x_1 & \scriptstyle x_2 & \scriptstyle \cdots & \scriptstyle x_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right] \end{array}.$$

4. Exemples de résolution de systèmes linéaires

Cette section ainsi que les suivantes décrivent un *algorithme*, c'est-à-dire une procédure systématique qui marche à coup sûr, permettant de résoudre un système linéaire. Fondamentalement, la stratégie consiste à *remplacer un système par un autre système qui lui est équivalent, c'est-à-dire qui possède le même ensemble de solutions, et qui est beaucoup plus facile à résoudre*.

Grosso modo, on utilise le terme en x_1 de la première équation pour éliminer les termes en x_1 des autres équations. Ensuite, on utilise le terme en x_2 de la deuxième équation pour éliminer les termes en x_2 des équations suivantes, et ainsi de suite, jusqu'à obtenir finalement un système beaucoup plus simple, et équivalent au système de départ.

Comme nous allons le voir sur quelques exemples détaillés avant d'énoncer une théorie générale, on utilise trois opérations fondamentales pour simplifier le système :

- échanger la place de deux équations, c'est-à-dire permuter deux lignes ;
- multiplier tous les termes d'une équation par une constante *non nulle ;*
- modifier une équation en lui ajoutant un multiple quelconque d'une autre équation.

Nous expliquerons plus tard (justifierons) pourquoi ces trois opérations ne modifient pas l'ensemble des solutions. Mieux vaut commencer par du concret attractif et intuitif.

Exemple 4.1. La procédure d'élimination est présentée ici à la fois sous forme matricielle et sous forme non matricielle. On dispose côte à côte les résultats de ces deux approches pour faciliter la comparaison et la compréhension.

Commençons par traduire un exemple de système linéaire en une matrice augmentée :

$$\begin{aligned} x_1 - 2\,x_2 + \quad x_3 &= \ 0 \\ 2\,x_2 - 8\,x_3 &= \ 8 \\ 5\,x_1 \qquad\quad - 5\,x_3 &= 10 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{array}\right]$$

On *conserve* x_1 dans la première équation et on l'*élimine* dans les autres. Pour cela, on ajoute -5 fois la première équation à la troisième. Avec un peu d'entraînement, il est éventuellement possible d'effectuer ce type de calculs de tête [1] :

$$\begin{array}{r} -\,5 \cdot [\text{équation } 1] \\ +[\text{équation } 3] \\ \hline [\text{nouvelle équation } 3] \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} -5\,x_1 + 10\,x_2 - \ 5\,x_3 &=& 0 \\ 5\,x_1 \qquad\quad - \ 5\,x_3 &=& 10 \\ \hline 10\,x_2 - 10\,x_3 &=& 10 \end{array}$$

On écrit alors le résultat à la place de la troisième équation :

$$\begin{aligned} x_1 - \ 2\,x_2 + \quad x_3 &= \ 0 \\ 2\,x_2 - \ 8\,x_3 &= \ 8 \\ 10\,x_2 - 10\,x_3 &= 10 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{array}\right]$$

Ensuite, on multiplie l'équation 2 par $\frac{1}{2}$ pour obtenir 1 comme coefficient de x_2, ce qui simplifiera les opérations arithmétiques à l'étape suivante :

$$\begin{aligned} x_1 - \ 2\,x_2 + \quad x_3 &= \ 0 \\ x_2 - \ 4\,x_3 &= \ 4 \\ 10\,x_2 - 10\,x_3 &= 10 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{array}\right]$$

On utilise le terme en x_2 de l'équation 2 pour éliminer le terme $10\,x_2$ de l'équation 3. Voici le calcul détaillé, moins risqué qu'un calcul mental :

$$\begin{array}{r} -\,10 \cdot [\text{équation } 2] \\ +[\text{équation } 3] \\ \hline [\text{nouvelle équation } 3] \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} -10\,x_2 + 40\,x_3 &=& -\,40 \\ 10\,x_2 - 10\,x_3 &=& 10 \\ \hline 30\,x_3 &=& -\,30 \end{array}$$

On écrit alors le résultat à la place de la troisième équation précédente :

$$\begin{aligned} x_1 - 2\,x_2 + \quad x_3 &= \ 0 \\ x_2 - \ 4\,x_3 &= \ 4 \\ 30\,x_3 &= -\,30 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 30 & -30 \end{array}\right]$$

Ensuite, on multiplie l'équation 3 par $\frac{1}{30}$ pour obtenir 1 comme coefficient de x_3, ce qui simplifiera les opérations arithmétiques à l'étape suivante :

$$\begin{aligned} x_1 - 2\,x_2 + \quad x_3 &= \ 0 \\ x_2 - 4\,x_3 &= \ 4 \\ x_3 &= -\,1 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Dans un sens intuitif qui sera bientôt accompagné d'une définition mathématique rigoureuse, le système obtenu semble alors recevoir une « *forme triangulaire* ».

1. Toutefois, pour prendre le moins de risque d'être relégué en *deuxième division de L1* — ouaïe le jeu de mot ! —, voire d'être redirigé vers un des cachots souterrains secrets de FdM, il vaut mieux détailler chaque étape de calcul, en TD, en interrogation écrite, et en examen.

On pourrait éliminer le terme $-2\,x_2$ dans l'équation 1, mais il est plus efficace d'utiliser d'abord x_3 dans l'équation 3 pour éliminer le terme $-4\,x_3$ dans l'équation 1, comme suit :

$$\begin{array}{r} 4\cdot[\text{équation } 3] \\ +[\text{équation } 2] \\ \hline [\text{nouvelle équation } 2] \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} 4\,x_3 &=& -\,4 \\ x_2 - 4\,x_3 &=& 4 \\ \hline x_2 \qquad &=& 0 \end{array}$$

puis le terme $+x_3$ dans l'équation 1, comme suit :

$$\begin{array}{r} -\,1\cdot[\text{équation } 3] \\ +[\text{équation } 1] \\ \hline [\text{nouvelle équation } 1] \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} -\ x_3 &=& 1 \\ x_1 - 2\,x_2 +\ x_3 &=& 0 \\ \hline x_1 - 2\,x_2 \qquad &=& 1 \end{array}$$

On combine en général ces deux calculs en un seul, et on obtient :

$$\begin{array}{rcr} x_1 - 2\,x_2 \qquad &=& 1 \\ x_2 \qquad &=& 0 \\ x_3 &=& -\,1 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Maintenant que l'on a éliminé tous les termes au-dessus du x_3 de l'équation 3, on passe au terme x_2 dans l'équation 2 et on utilise cette équation pour éliminer le $-2\,x_2$ au-dessus. *Grâce aux calculs précédents, x_3 n'intervient plus !* En ajoutant l'équation 2 multipliée par 2 à l'équation 1, on obtient :

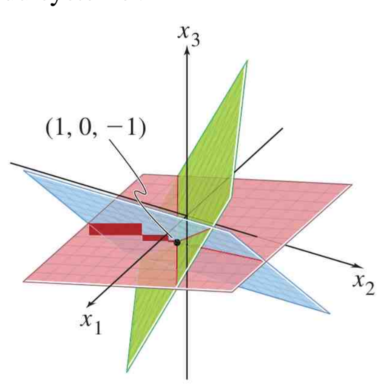
$$\begin{array}{rcr} x_1 \qquad &=& 1 \\ x_2 \qquad &=& 0 \\ x_3 &=& -\,1 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

L'essentiel est maintenant achevé. On voit en effet aussitôt que l'unique solution du système initial est le triplet $(1, 0, -1)$.

Après ces nombreux calculs intermédiaires au cours desquels nous pourrions avoir fait plusieurs erreurs, il est *impératif* de vérifier si le résultat trouvé $(1, 0, -1)$ est bel et bien une solution du système initial. Pour s'en assurer, on substitue ces valeurs numériques dans le premier membre du système initial et on calcule :

$$\begin{array}{rcrl} 1(1) - 2\,(0) +\ 1(-1) &\overset{?}{=}& 0 & \qquad \text{OUI,} \\ 2\,(0) - 8\,(-1) &\overset{?}{=}& 8 & \qquad \text{OUI,} \\ 5\,(1) \qquad\quad - 5\,(-1) &\overset{?}{=}& 10 & \qquad \text{OUI.} \end{array}$$

Les trois résultats correspondent aux trois seconds membres du système initial, donc en conclusion $(1, 0, -1)$ est bel et bien solution du système !



Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées (x_1, x_2, x_3), la figure représente :

(1) en vert, le plan d'équation cartésienne $\{x_1 - 2\,x_2 + x_3 = 0\}$;

(2) en roouge, le plan d'équation cartésienne $\{2\,x_2 - 8\,x_3 = 8\}$;

(3) en bleu, le plan d'équation cartésienne $\{5\,x_1 - 5\,x_3 = 10\}$.

Et effectivement, ces trois plans s'intersectent en l'unique point $(1, 0, -1)$, en noir.

Exemple 4.2. [très détaillé] Soit le système de trois équations linéaires à trois inconnues :

$$\begin{cases} x - \ \ y + 2\,z = 5, \\ 3\,x + 2\,y + \ \ z = 10, \\ 2\,x - 3\,y - 2\,z = -10. \end{cases}$$

La matrice augmentée de ce système est donc :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ \mathbf{3} & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

On commence par lire la première colonne à gauche. Elle contient les nombres non tous nuls 1, 2, 3 (au moins un nombre non nul suffirait). Comme pivot, on choisit alors le *maximum* **3** en valeur absolue parmi 1, 3, 2, ce qui conduit à sélectionner la *deuxième* ligne. On divise alors cette deuxième ligne par **3** pour faire apparaître **1** :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ \mathbf{1} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array}\right).$$

Ensuite, on permute les lignes 1 et 2 afin de ramener ce **1** en haut à gauche :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ \mathbf{1} & -1 & 2 & 5 \\ \mathbf{2} & -3 & -2 & -10 \end{array}\right),$$

et il s'agit maintenant de *transformer et simplifier toutes les lignes en-dessous de la nouvelle première ligne*, de manière à fabriquer une pile de zéros **0**, comme piédestal en-dessous de la « statue » **1**.

À la ligne 2 de la colonne 1, on voit le nombre $\lambda := \mathbf{1}$. Pour éliminer ce nombre et en faire un **0**, on soustrait de la ligne 2 la ligne 1 multipliée par ce λ :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) - \mathbf{1} \times \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right).$$

Gagné ! Pareillement, puisqu'à la ligne 3 de la colonne 1, on voit le nombre $\mu := \mathbf{2}$, on soustrait de la ligne 3 la ligne 1 multipliée par ce μ :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & -3 & -2 & -10 \end{array}\right) - \mathbf{2} \times \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & -\frac{13}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{50}{3} \end{array}\right).$$

Ensuite naturellement, on remplace les lignes 2 et 3 ainsi calculée dans la matrice, qui devient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ \hline \mathbf{0} & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ \mathbf{0} & -\frac{13}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{50}{3} \end{array}\right),$$

et on ne touche plus à la ligne 1.

On passe à la colonne 2, *en-dessous de la ligne* 1. Comme pivot, on choisit le maximum en valeur absolue entre $-\frac{5}{3}$ et $-\frac{13}{3}$, soit $-\frac{13}{3}$, et on le ramène à la ligne 2, simplement en permutant les lignes 2 et 3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\frac{13}{3}} & -\frac{8}{3} & -\frac{50}{3} \\ \mathbf{0} & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right).$$

On divise la ligne 2 où ce trouve ce pivot par sa valeur $-\frac{13}{3}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \frac{8}{13} & \frac{50}{13} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\frac{5}{3}} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right).$$

Comme précédemment, il s'agit maintenant de fabriquer une pile de zéros **0** à la colonne 2 en-dessous de cette nouvelle « statue » **1**, et comme il ne reste d'ailleurs plus qu'une ligne en-dessous, il suffit de soustraire de la ligne 3 la ligne 2 multipliée par $-\boldsymbol{\frac{5}{3}}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & -\boldsymbol{\frac{5}{3}} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right) - \left(-\boldsymbol{\frac{5}{3}}\right) \times \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \frac{8}{13} & \frac{50}{13} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{35}{13} & \frac{105}{3} \end{array}\right).$$

On remplace cette nouvelle ligne 3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \frac{8}{13} & \frac{50}{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{35}{13} & \frac{105}{13} \end{array}\right).$$

On passe à la colonne 3. Le pivot est $\frac{35}{13}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \frac{8}{13} & \frac{50}{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\frac{35}{13}} & \frac{105}{13} \end{array}\right).$$

Comme ce pivot n'est pas nul, on divise la ligne où il se trouve (c'est-à-dire la ligne 3) par le pivot, et on aboutit finalement à une forme échelonnée de la matrice :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \frac{8}{13} & \frac{50}{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right).$$

Le système linéaire dont on est parti est donc équivalent au système correspondant à cette matrice simplifiée (échelonnée) :

$$\left\{\begin{aligned} x + \tfrac{2}{3}\,y + \tfrac{1}{3}\,z &= \tfrac{10}{3}, \\ y + \tfrac{8}{13}\,z &= \tfrac{50}{13}, \\ z &= 3. \end{aligned}\right.$$

Puisque ce système 3×3 est triangulaire avec 3 pivots non nuls, il admet une solution unique, que l'on calcule comme suit en remontant du bas vers le haut :

$$z = 3, \qquad \text{d'où} \qquad y + \tfrac{8}{13}\,3 = \tfrac{50}{13}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad y = \tfrac{50}{13} - \tfrac{24}{13} = 2,$$

et enfin :

$$x + \tfrac{2}{3}\,2 + \tfrac{1}{3}\,3 = \tfrac{10}{3}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x = \tfrac{10}{3} - \tfrac{4}{3} - \tfrac{6}{3} = 1.$$

Comme toujours, on doit impérativement vérifier que la solution trouvée satisfait effectivement le système linéaire de départ :

$$\begin{cases} 1 - 1\,(2) + 2(3) \stackrel{?}{=} 5 & \text{OUI}, \\ 3\,(1) + 2\,(2) + 1\,(3) \stackrel{?}{=} 10 & \text{OUI}, \\ 2\,(1) - 3\,(2) - 2\,(3) \stackrel{?}{=} -10 & \text{OUI}. \end{cases}$$

Une autre manière de terminer la résolution du système (essentiellement équivalente) consiste à terminer le travail pour mettre la matrice sous forme échelonnée *réduite*. En repartant donc de :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \frac{8}{13} & \frac{50}{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right),$$

on soustrait à la ligne 2 la ligne 3 multipliée par $\frac{8}{13}$, et à la ligne 1 la même ligne 3 multipliée par $\frac{1}{3}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \frac{2}{3} & \mathbf{0} & \frac{10}{3} - \frac{3}{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \frac{50}{13} - \frac{24}{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \frac{2}{3} & \mathbf{0} & \frac{7}{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right),$$

et enfin, on soustrait à la ligne 1 la ligne 2 multipliée par $\frac{2}{3}$, ce qui fournir la forme échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right).$$

La traduction de cette matrice en un système linéaire :

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 3, \end{cases}$$

exhibe instantanément la solution que nous connaissions déjà. *Tout ça pour ça ! ?*

Signalons maintenant que les Exemples 4.1 et 4.2 ont été choisis de façon à ce que les opérations sur les lignes s'effectuent aisément, afin de permettre au lecteur-étudiant de se concentrer sur les concepts sous-jacents.

Les nombreux calculs de ces deux exemples peuvent paraître assez longs et fastidieux au premier abord, mais avec un peu d'entraînement et de motivation, *on doit impérativement apprendre à les maîtriser sans faire d'erreur arithmétique*. En effet, de tels calculs seront régulièrement exigés dans les examens de L1, au premier semestre S1, *et aussi* au deuxième semestre S2.

5. Méthode des quatre couleurs

Avant de formuler des considérations théoriques appétissantes, décrivons une méthode de calculs manuels hyper-simplifiée qui sera exigée lors des interrogations écrites et des examens. Quatre stylos de quatre couleurs différentes sont les ingrédients principaux de la recette, avec une « pincée » d'intuition mathématique.

Chaque étudiant doit développer ses propres techniques et codes couleurs, *mais en interrogation écrite et en examen, un minimum de deux couleurs sera exigé de manière impérative*.

Voici le code personnel du professeur.

- Stylo bleu : écriture courante.
- Stylo vert : indications légères ; calculs intermédiaires ; remarques mineures.

- Stylo noir : résultat important ; énoncé mathématique ; synthèse.
- Stylo rouge : questions ; termes valant 0 ; erreurs.

Expliquons comment des couleurs peuvent être utilisées pour simplifier et élaguer les calculs, en écrivant toutes les étapes intermédiaires afin d'éviter les erreurs de calcul.

Exemple 5.1. Soit le système linéaire :

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 1 \\ 2x+4y+7z &= 2 \\ 3x+7y+11z &= 8 \end{aligned}$$

Transformons-le en matrice augmentée :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & 7 & 11 & 8 \end{array}$$

L'élément en haut à gauche est non nul, égal à 1, donc il peut servir comme pivot. C'est pourquoi la première ligne apparaît en noir : elle est déjà finalisée.

Ensuite, écrivons la matrice augmentée en insérant volontairement une ligne vide puis deux lignes vides qui vont être remplies dans un instant :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \\ 2 & 4 & 7 & 2 \\ \\ \\ 3 & 7 & 11 & 8 \end{array}$$

Multiplions la première ligne par -2 et par -3, puis copions les deux résultats en vert :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ {\scriptstyle -2} & {\scriptstyle -4} & {\scriptstyle -6} & {\scriptstyle -2} \\ 2 & 4 & 7 & 2 \\ \\ {\scriptstyle -3} & {\scriptstyle -6} & {\scriptstyle -9} & {\scriptstyle -3} \\ 3 & 7 & 11 & 8 \end{array}$$

Additionnons chaque ligne verte avec la ligne bleue en-dessous, et écrivons le résultat en noir :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ {\scriptstyle -2} & {\scriptstyle -4} & {\scriptstyle -6} & {\scriptstyle -2} \\ 2 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ {\scriptstyle -3} & {\scriptstyle -6} & {\scriptstyle -9} & {\scriptstyle -3} \\ 3 & 7 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

Deux zéros 0 apparaissent en-dessous du pivot 1 : *good !* Recopions les lignes noires, en permutant astucieusement la ligne 2 avec la ligne 3 :

$$\begin{array}{cccc} {\scriptstyle x} & {\scriptstyle y} & {\scriptstyle z} & \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

En effet, nous voyons que le travail est terminé puisque la matrice est déjà sous forme échelonnée.

Retraduisons cette matrice en système linéaire triangulaire, et résolvons ce système en partant du bas :

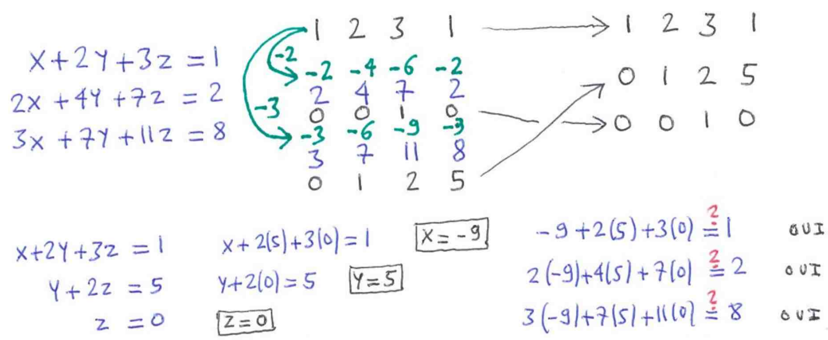
$$\begin{aligned} x+2\,y+3\,z &= 1 \\ y+2\,z &= 5 \\ z &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &x+2(5)+3(0) = 1 \quad \boxed{x=-9} \\ &y+2(0) = 5 \quad \boxed{y=5} \\ &\boxed{z=0} \end{aligned}$$

Nous trouvons certes une solution, ... *mais-mais-mais !* Elle pourrait fort bien être fausse ! Donc il est impératif de revenir au système de départ et de tester si cette solution est bel et bien une solution :

$$\begin{aligned} -9+2\,(5)+\ \ 3(0) &\overset{?}{=} 1 \qquad \text{OUI}, \\ 2\,(-9)+4\,(5)+\ \ 7\,(0) &\overset{?}{=} 2 \qquad \text{OUI}, \\ 3\,(-9)+7\,(5)+11\,(0) &\overset{?}{=} 8 \qquad \text{OUI}. \end{aligned}$$

Chaque étudiant peut s'inspirer de cette méthode, en la modifiant à sa guise, ou en inventant une méthode alternative, *pourvu que des stylos de couleurs différentes soient utilisés*.

Voici le même exemple sous forme manuscrite scannée, et compactée.

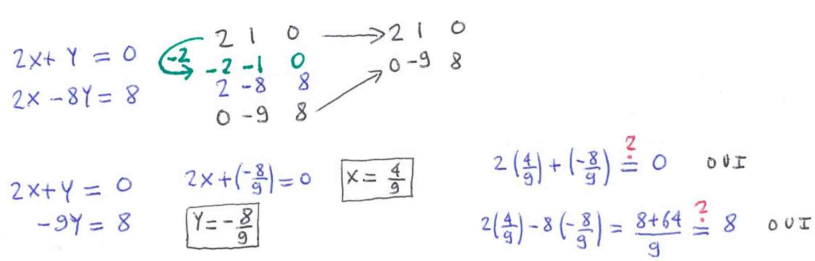


Question 5.2. *Que doit-on faire quand on constate qu'on a commis une erreur, ce qui arrive souvent ?*

Réponse 5.3. *Relire ses calculs depuis le début en étant très concentré et très patient car cela toujours prend beaucoup plus de temps que l'on ne croit. Il faut apprendre à se relire, ce qui est difficile, y compris pour les professeurs.*

Si la relecture et la découverte d'erreurs force à faire trop de corrections, il faut tout ré-écrire à partir de zéro.

Pour terminer cette Section **5** méthodologique, voici cinq autres calculs manuscrits scannés, à lire très en détail.



$$\begin{aligned} x+2y&=1\\ 2x+3y&=1 \end{aligned}
\qquad
\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}
\;\xrightarrow{-2}\;
\qquad
\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}
\quad (-1)$$

$$\begin{aligned} x+2y&=1\\ y&=1 \end{aligned}
\qquad
\begin{aligned} x+2(1)&=1 \quad \boxed{x=-1}\\ &\boxed{y=1} \end{aligned}
\qquad
\begin{aligned} -1+2(1) &\overset{?}{=} 1 \quad \text{OUI}\\ 1 &\overset{?}{=} 1 \quad \text{OUI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ 3x+2y+z&=1\\ 7x+2y-3z&=1 \end{aligned}
\qquad
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & -9 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -2 \\ -7 & -14 & -21 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -12 & -24 & -6 \end{array}
\quad (-3),\ (-7)
\qquad
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \quad (\div -2) \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{1} \quad (\div -6) \end{array}$$

Redondant

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}$$

null

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ 2y+4z&=1\\ \cancel{0}&=\cancel{0} \end{aligned}
\qquad
\begin{aligned} &\boxed{x=z}\\ &\boxed{y=\tfrac{1}{2}-2z}\\ &z \text{ libre} \end{aligned}$$

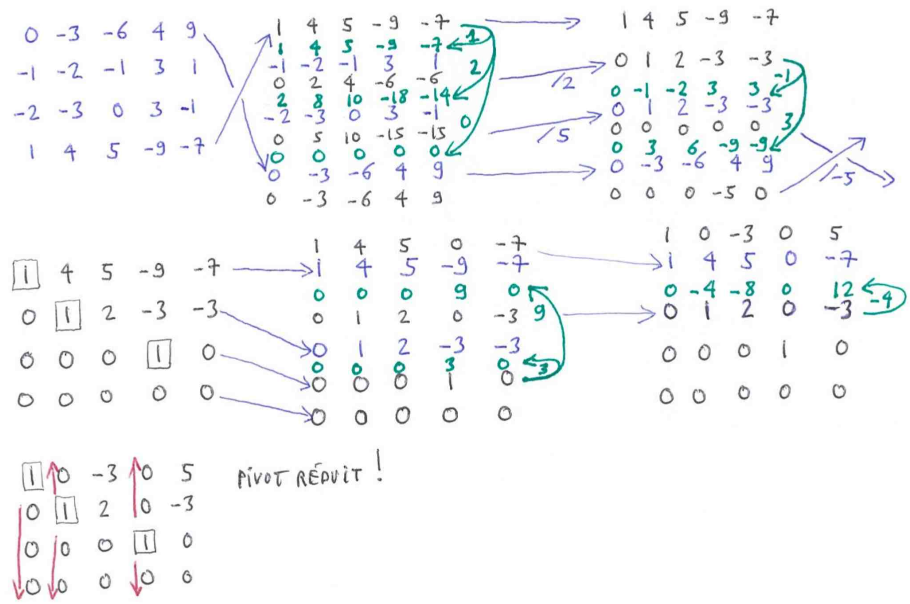
$$\begin{aligned} z+2\left(\tfrac{1}{2}-2z\right)+3z &\overset{?}{=} 1 \quad \text{OUI}\\ 3(z)+2\left(\tfrac{1}{2}-2z\right)+z &\overset{?}{=} 1 \quad \text{OUI}\\ 7(z)+2\left(\tfrac{1}{2}-2z\right)-3z &\overset{?}{=} 1 \quad \text{OUI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y-4z&=8\\ 2x-3y+2z&=1\\ 4x-8y+12z&=1 \end{aligned}
\qquad
\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ -4 & 6 & -4 & -2 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \end{array}
\quad (-2)$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 2 & -8 & 16 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}
\quad (2)
\qquad
\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}
\qquad
\begin{aligned} 2x-3y+2z&=1\\ y-4z&=8\\ 0x+0y+0z&=15 \end{aligned}
\qquad 0=15$$

IMPOSSIBLE!

SYSTÈME INCOMPATIBLE



6. Trois opérations fondamentales

Tous les exemples qui précèdent ont montré comment des opérations sur les équations d'un système linéaire correspondent à des opérations analogues sur les lignes de sa matrice complète. En effet, les trois opérations élémentaires listées au début de la Section **4** peuvent maintenant être traduites au niveau des matrices :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix},$$

i.e. des tableaux rectangulaires de nombres.

(1) Permuter deux lignes L_{i_1} et L_{i_2} d'indices *différents* $1 \leqslant i_1 \neq i_2 \leqslant m$ de la matrice :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_1,1} & \cdots & a_{i_1,n} & b_{i_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_2,1} & \cdots & a_{i_2,n} & b_{i_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a_{i_2,1}} & \cdots & \mathbf{a_{i_2,n}} & \mathbf{b_{i_2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a_{i_1,1}} & \cdots & \mathbf{a_{i_1,n}} & \mathbf{b_{i_1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix}.$$

(2) Multiplier une ligne L_i de la matrice par une constante *non nulle* $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} & b_i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{c\,a_{i,1}} & \cdots & \mathbf{c\,a_{i,n}} & \mathbf{c\,b_i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix}.$$

(3) À une ligne $L_{i'}$ de la matrice d'indice i', ajouter un multiple quelconque par $e \in \mathbb{R}$ d'une *autre* ligne L_i d'indice $i \neq i'$ de la matrice :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} & b_i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i',1} & \cdots & a_{i',n} & b_{i'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} & b_i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a_{i',1} + e\, a_{i,1}} & \cdots & \mathbf{a_{i',n} + e\, a_{i,n}} & \mathbf{b_{i'} + e\, b_i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix}.$$

Au niveau des systèmes linéaire, ces trois opérations peuvent aussi être représentées explicitement encore comme suit.

(1) Permuter deux équations du système linéaire :

$$\left\{\begin{aligned} a_{1,1}\,x_1 + \cdots + a_{1,n}\,x_n &= b_1, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{i_1,1}\,x_1 + \cdots + a_{i_1,n}\,x_n &= b_{i_1}, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{i_2,1}\,x_1 + \cdots + a_{i_2,n}\,x_n &= b_{i_2}, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{m,1}\,x_1 + \cdots + a_{m,n}\,x_n &= b_m, \end{aligned}\right. \qquad \longmapsto \qquad \left\{\begin{aligned} a_{1,1}\,x_1 + \cdots + a_{1,n}\,x_n &= b_1, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ \mathbf{a_{i_2,1}\,x_1 + \cdots + a_{i_2,n}\,x_n} &= \mathbf{b_{i_2}}, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ \mathbf{a_{i_1,1}\,x_1 + \cdots + a_{i_1,n}\,x_n} &= \mathbf{b_{i_1}}, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{m,1}\,x_1 + \cdots + a_{m,n}\,x_n &= b_m, \end{aligned}\right.$$

(2) Multiplier une équation du système linéaire par une constante *non nulle* $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$\left\{\begin{aligned} a_{1,1}\,x_1 + \cdots + a_{1,n}\,x_n &= b_1, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{i,1}\,x_1 + \cdots + a_{i,n}\,x_n &= b_i, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{m,1}\,x_1 + \cdots + a_{m,n}\,x_n &= b_m, \end{aligned}\right. \qquad \longmapsto \qquad \left\{\begin{aligned} a_{1,1}\,x_1 + \cdots + a_{1,n}\,x_n &= b_1, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ \mathbf{c\, a_{i,1}\,x_1 + \cdots + c\, a_{i,n}\,x_n} &= \mathbf{c\, b_i}, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{m,1}\,x_1 + \cdots + a_{m,n}\,x_n &= b_m. \end{aligned}\right.$$

(3) À une ligne $L_{i'}$ du système d'indice i', ajouter un multiple quelconque par $e \in \mathbb{R}$ d'une *autre* ligne d'indice $i \neq i'$ du système :

$$\left\{\begin{aligned} a_{1,1}\,x_1 + \cdots + a_{1,n}\,x_n &= b_1, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{i,1}\,x_1 + \cdots + a_{i,n}\,x_n &= b_i, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{i',1}\,x_1 + \cdots + a_{i',n}\,x_n &= b_{i'}, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{m,1}\,x_1 + \cdots + a_{m,n}\,x_n &= b_m, \end{aligned}\right. \longmapsto \left\{\begin{aligned} a_{1,1}\,x_1 + \cdots + a_{1,n}\,x_n &= b_1, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{i,1}\,x_1 + \cdots + a_{i,n}\,x_n &= b_i, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ \big(\mathbf{a_{i',1} + e\, a_{i,1}}\big)\,\mathbf{x_1} + \cdots + \big(\mathbf{a_{i',n} + e\, a_{i,n}}\big)\,\mathbf{x_n} &= \mathbf{b_{i'} + e\, b_i}, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{m,1}\,x_1 + \cdots + a_{m,n}\,x_n &= b_m. \end{aligned}\right.$$

En notant de manière abrégée L_i les lignes ou bien des matrices ou bien des systèmes linéaires :

$$(L_i) \qquad \begin{bmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} & b_i \end{bmatrix},$$
$$(L_i) \qquad a_{i,1}\,x_1 + \cdots + a_{i,n}\,x_n = b_i,$$

ces trois opérations élémentaires peuvent maintenant être résumées comme suit :

(1) $L_{i_1} \longmapsto L_{i_2}$ et $L_{i_2} \longmapsto L_{i_1}$ pour $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant m$ quelconques.

(2) $L_i \longmapsto c\, L_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$ quelconque, et pour une constante $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *non nulle*.

(3) $L_i \longmapsto L_i + e\, L_{i'}$ pour un indice de ligne *distinct* $i' \neq i$ et pour une constante $e \in \mathbb{R}$ arbitraire.

Question 6.1. *Pourquoi demande-t-on* $c \neq 0$ *dans* **(2)** ?

C'est évident : avec $c := 0$, la ligne L_i qui n'est en général pas nulle deviendrait une ligne identiquement nulle $0\,L_i = \big[0 \cdots 0\ 0\big]$, inutile et stupide.

Question 6.2. *Pourquoi demande-t-on $i' \neq i$ dans* **(3)** *?*

Sinon, si on autorisait $i' = i$ dans **(3)**, alors avec le choix *dangereux* $e := -1 \in \mathbb{R}$, on produirait la ligne identiquement nulle $L_i - L_i = 0$ sur 20.

Attention ! Il est essentiel de réaliser ces trois opérations élémentaires de manière séquentielle, c'est-à-dire *les unes après les autres*, et non simultanément, pour être sûr de produire des systèmes équivalents, et être certain de conserver intact l'espace des solutions.

Exemple 6.3. Par (contre-)exemple, soit le système (trivial) de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{aligned} (L_1) \qquad x + y &= 0, \\ (L_2) \qquad x - y &= 0, \end{aligned}$$

qui implique (exercice mental) $x = y = 0$. Chacune des opérations $L_1 \longmapsto L_1 - L_2$ et $L_2 \longmapsto L_2 - L_1$ effectuée séparément :

$$\begin{aligned} (L_1 - L_2) \qquad\quad 2\,y &= 0, \\ (L_2) \qquad x - y &= 0, \end{aligned} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \begin{aligned} (L_1) \qquad x + y &= 0, \\ (L_2 - L_1) \qquad -2\,y &= 0, \end{aligned}$$

donne un système équivalent au système de départ, *mais si on avait le malheur d'effectuer simultanément ces deux opérations :*

$$\begin{aligned} (L_1 - L_2) \qquad 2\,y &= 0, \\ (L_2 - L_1) \qquad -2\,y &= 0, \end{aligned}$$

on obtiendrait un système *qui n'est pas équivalent au système de départ*, car ce (mauvais) système impliquerait seulement $y = 0$, tandis que x resterait libre, quelconque, alors qu'on sait qu'on doit trouver $x = 0$ aussi.

Théorème 6.4. *En partant d'un système linéaire $(\boldsymbol{S})$ quelconque de $m \geqslant 1$ équations à $n \geqslant 1$ inconnues, tout système linéaire $(\boldsymbol{S}')$ qui est obtenu après un nombre fini d'opérations* **(1)***,* **(2)***,* **(3)***, est* équivalent *à $(\boldsymbol{S})$, c'est-à-dire possède le même ensemble de solutions :*

$$\mathsf{Sol}\,(\boldsymbol{S}') \, = \, \mathsf{Sol}\,(\boldsymbol{S}).$$

Démonstration. Cela provient du fait que les trois opérations **(1)**, **(2)**, **(3)** sont *réversibles*, au sens où :

(1) il suffit de ré-échanger les deux lignes pour revenir en arrière :

$$\Big(L_{i_1} \longmapsto L_{i_2} \quad \text{et} \quad L_{i_2} \longmapsto L_{i_1}\Big) \qquad \text{puis} \qquad \Big(L_{i_2} \longmapsto L_{i_1} \quad \text{et} \quad L_{i_1} \longmapsto L_{i_2}\Big);$$

(2) il suffit de multiplier la ligne par $\frac{1}{c} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ pour revenir en arrière :

$$\Big(L_i \longmapsto c\,L_i\Big) \qquad \text{puis} \qquad \Big(c\,L_i \longmapsto \tfrac{1}{c}\,c\,L_i\Big);$$

(3) il suffit de soustraire à nouveau le même multiple de ligne ajoutée :

$$\Big(L_i \longmapsto L_i + e\,L_{i'}\Big) \qquad \text{puis} \qquad \Big(L_i + e\,L_{i'} \longmapsto L_i + e\,L_{i'} - e\,L_{i'}\Big). \qquad \square$$

7. Questions d'existence et d'unicité

Cette section montre comment on peut utiliser les opérations sur les lignes pour déterminer la taille de l'ensemble des solutions d'un système linéaire, sans nécessairement avoir à résoudre entièrement le système.

Plus tard, nous verrons pourquoi un système linéaire peut ou bien n'admettre aucune solution, ou bien avoir une solution unique, ou bien posséder une infinité de solutions.

En tout cas, quand on est mis devant un système linéaire à un petit ou à grand nombre d'équations et d'inconnues mystérieuses — en toutes circonstances, garder son sang-froid ! —, deux questions fondamentales surgissent toujours.

Question 7.1. *Le système est-il compatible ? Autrement-dit, existe-t-il* au moins une *solution ?*

Question 7.2. *Si une solution existe, est-elle* la seule *? Autrement dit, la solution est-elle* unique *?*

Ces deux questions apparaîtront sous des formes diverses tout au long de ce cours magistral. Sur des exemples simples, illustrons maintenant comment il est possible d'y répondre.

Exemple 7.3. Proposons-nous d'étudier la compatibilité du système suivant :

$$\begin{aligned} x_1 - 2\,x_2 + x_3 &= 0 \\ 2\,x_2 - 8\,x_3 &= 8 \\ 5\,x_1 - 5\,x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Il s'agit de l'Exemple 4.1, déjà vu. Mais supposons que nous nous contentions d'effectuer des opérations sur les lignes jusqu'à atteindre seulement le point intermédiaire :

$$\begin{aligned} x_1 - 2\,x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - 4\,x_3 &= 4 \\ x_3 &= -1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

À ce stade de calcul, on connaît la valeur de x_3. Si, dans l'équation 2, on substituait à x_3 cette valeur, on pourrait calculer x_2, puis, si on substituait la valeur de x_2 et la valeur de x_3 dans l'équation 1, on pourrait déterminer la valeur de x_1.

Il existe donc une solution, et le système est compatible, et même, ce raisonnement montre qu'il existe une solution unique, sans qu'on ait besoin de réellement calculer cette solution unique, comme on l'a fait à la fin de l'Exemple 4.1.

Contre-exemple 7.4. Étudions la compatibilité (ou l'incompatibilité) du système suivant :

$$\begin{aligned} x_2 - 4\,x_3 &= 8 \\ 2\,x_1 - 3\,x_2 + 2\,x_3 &= 1 \\ 4\,x_1 - 8\,x_2 + 12\,x_3 &= 1 \end{aligned}$$

La matrice complète est :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour avoir un terme en x_1 dans la première équation, permutons les lignes 1 et 2 :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour éliminer le terme $4\,x_1$ dans la troisième équation, ajoutons -2 fois la ligne 1 à la ligne 3 :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Ensuite, utilisons le terme en x_2 de la deuxième équation pour éliminer $-2\,x_2$ dans la troisième équation, simplement en lui ajoutant 2 fois la ligne 2 :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

La matrice complète est maintenant sous forme triangulaire. Pour l'interpréter, on revient à la notation sous forme d'équations :

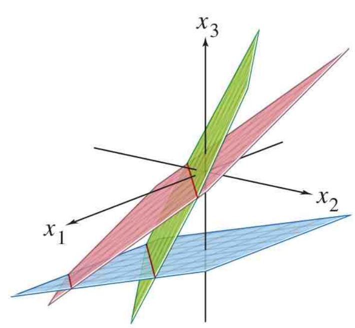
$$\begin{aligned} 2\,x_1 - 3\,x_2 + 2\,x_3 &= 1 \\ x_2 - 4\,x_3 &= 8 \\ 0 &= 15 \qquad \textbf{Argl!} \end{aligned}$$

L'équation impossible $\mathbf{0 = 15}$ est une forme simplifiée de :

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 = 15.$$

Ce système triangulaire contient donc une contradiction manifeste. Aucune valeur de x_1, x_2, x_3 ne peut le satisfaire, puisque la troisième équation $0 = 15$ ne serait même pas vraie sur un des astéroïdes excentriques que fréquentait le Petit Prince d'Antoine de Saint-Exupéry.

Enfin, comme ce système triangulaire et le système de départ ont même ensemble de solutions, ceci achève de démontrer que *le système initial est incompatible, c'est-à-dire n'a aucune solution.*



Graphiquement, les trois plans dans $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées (x_1, x_2, x_3), dont les équations cartésiennes correspondent au système linéaire considéré :

$$x_2 - 4\,x_3 = 8, \qquad 2\,x_1 - 3\,x_2 + 2\,x_3 = 1, \qquad 4\,x_1 - 8\,x_2 + 12\,x_3 = 1,$$

ne s'intersectent en *aucun* point commun.

Par anticipation, signalons que la dernière ligne obtenue $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$ avec que des zéros suivi d'un unique dernier terme non nul est typique des systèmes incompatibles, car nous verrons plus tard que c'est toujours ainsi qu'on constate qu'un système est incompatible.

8. Exercices d'entraînement

Exercice d'entraînement 1. Décrire par une phrase la première opération élémentaire sur les lignes qu'il faudrait effectuer pour résoudre les deux systèmes suivants [plusieurs réponses sont possibles] :

$$(a)\quad \begin{aligned} x_1 + 4\,x_2 - 2\,x_3 + 8\,x_4 &= 12 \\ x_2 - 7\,x_3 + 2\,x_4 &= -4 \\ 5\,x_3 - x_4 &= 7 \\ x_3 + 3\,x_4 &= -5 \end{aligned} \qquad (b)\quad \begin{aligned} x_1 - 3\,x_2 + 5\,x_3 - 2\,x_4 &= 0 \\ x_2 + 8\,x_3 &= -4 \\ 2\,x_3 &= 3 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(a) Pour un calcul « à la main », le mieux est d'échanger d'abord les équations 3 et 4. On peut aussi multiplier l'équation 3 par $\frac{1}{5}$ ou encore ajouter à l'équation 4 la ligne 3 multipliée par $-\frac{1}{5}$.
En tout cas, il serait très maladroit de chercher à éliminer le $4\,x_2$ de l'équation 1 à l'aide du x_2 de l'équation 2. Il faut auparavant avoir obtenu une forme triangulaire et avoir éliminé les termes en x_3 et en x_4 dans les deux premières équations.

(b) Le système est déjà sous forme triangulaire. La simplification suivante concerne alors le x_4 de la quatrième équation, et on doit l'utiliser pour éliminer tous les termes en x_4 au-dessus de lui. La bonne opération à effectuer à ce moment est donc d'ajouter 2 fois la quatrième équation à la première.
Après cela, on passe à l'équation 3 : on la multiplie par $\frac{1}{2}$ et on utilise l'équation ainsi transformée pour éliminer les termes en x_3 au-dessus.

Exercice d'entraînement 2. Au moyen d'opérations sur les lignes, supposons qu'on ait transformé la matrice complète d'un certain système linéaire en la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce système est-il compatible ?

Le système correspondant à la matrice complète s'écrit :

$$\begin{aligned} x_1 + 5\,x_2 + 2\,x_3 &= -6 \\ 4\,x_2 - 7\,x_3 &= 2 \\ 5\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

La troisième équation donne $x_3 = 0$, ce qui correspond bien à une valeur autorisée pour x_3. Après l'élimination des termes en x_3 dans les équations 1 et 2, on peut sans problème terminer la résolution et obtenir une unique valeur pour x_2, puis pour x_1.
Il existe donc une solution, et elle est unique.

Exercice d'entraînement 3. Le triplet $(3, 4, -2)$ est-il solution du système ci-dessous ?

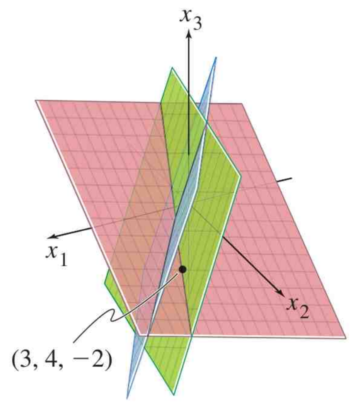
$$\begin{aligned} 5\,x_1 - x_2 + 2\,x_3 &= 7 \\ -2\,x_1 + 6\,x_2 + 9\,x_3 &= 0 \\ -7\,x_1 + 5\,x_2 - 3\,x_3 &= -7 \end{aligned}$$

Par simples remplacements, il est très facile de vérifier qu'une liste donnée de nombres est solution (ou pas) d'un système :

$$\begin{aligned} 5\,(3) - (4) + 2(-2) &= 15 - 4 - 4 \stackrel{?}{=} 7 && \text{OUI,} \\ -2\,(3) + 6\,(4) + 9\,(-2) &= -6 + 24 - 18 \stackrel{?}{=} 0 && \text{OUI,} \\ -7\,(3) + 5\,(4) - 3\,(-2) &= -21 + 20 + 6 \stackrel{?}{=} -7 && \textbf{NON !} \ = \mathbf{5} \end{aligned}$$

Les deux premières équations sont vérifiées, mais pas la troisième, donc $(3, 4, -2)$ n'est *pas* solution du système.

On remarquera la présence de parenthèses dans l'expression des substitutions. Leur usage est fortement recommandé afin d'éviter les erreurs de calcul.



La figure explique la signification *géométrique* du fait que $(3, 4, -2)$ n'est *pas* solution du sytème. En effet, puisque ce point $(3, 4, -2)$ vérifie les deux premières équations, il appartient à la droite d'intersection entre les deux premiers plans $\big\{5\,x_1 - x_2 + 2\,x_3 = 7\big\}$ et $\big\{-2\,x_1 + 6\,x_2 + 9\,x_3 = 0\big\}$. Toutefois, il ne vérifie pas la troisième équation, donc il n'appartient pas aux trois plans à la fois.

Le lecteur-étudiant devrait résoudre réellement ce système, constater qu'il possède une solution unique (le point intersection des trois plans sur la figure), et se dire que le point noir $(3, 4, -2)$ sur la figure pourrait *correspondre à une erreur de calcul*, ce qui arrive fréquemment, aux étudiants, comme aux professeurs.

Vérifier ses calculs est absolument essentiel !

Exercice d'entraînement 4. Pour quelles valeurs des paramètres réels h et k le système suivant est-il compatible ?

$$\begin{aligned} 2\,x_1 - \,x_2 &= h \\ -6\,x_1 + 3\,x_2 &= k \end{aligned}$$

Ajoutons trois fois la première équation à la seconde pour transformer le sytème en :

$$\begin{aligned} 2\,x_1 - x_2 \quad &= \qquad h \\ 0 &= k + 3\,h \end{aligned}$$

Si $k + 3\,h \neq 0$ est non nul, il n'y a pas de solution. Au contraire, le système est compatible pour toutes les valeurs de h et de k telles que $k + 3\,h = 0$, avec une infinité de solutions données par :

$$\Big\{\big(\tfrac{1}{2}\,x_2 + \tfrac{1}{2}\,h,\ x_2\big) \colon\ x_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\Big\}.$$

9. Exercices

Exercice 1.

Méthode du pivot de gauss et formes échelonnées (réduites)

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons systématiser les méthodes de calcul qui ont été illustrées sur divers exemples dans le chapitre précédent. L'objectif est de mettre en place un algorithme de réduction, appelé *méthode du pivot de Gauss*, ou *méthode d'élimination de Gauss-Jordan*, qui permet d'analyser et de résoudre n'importe quel système d'équations linéaires, quel qu'en soit le nombre et quelles qu'en soient les variables.

La première partie de l'algorithme consiste à transformer la matrice d'un système sous une forme dite *échelonnée*, forme sympathique et agréable qui permet, sans résoudre complètement le système, de répondre à deux questions fondamentales que nous avons déjà mentionnées : **(1)** *Le système est-il compatible ?* **(2)** *Si une solution existe, est-elle unique ?*

Faisons observer que l'algorithme du pivot de Gauss s'applique à n'importe quelle matrice, qu'elle s'interprète ou non comme matrice complète (augmentée) d'un système linéaire.

Nous considérerons donc des matrices rectangulaires arbitraires, et nous commencerons par définir une classe importante de matrices, qui comprend les matrices « *triangulaires* » que nous avons déjà rencontrées en taille 2×2 et 3×3.

2. Systèmes échelonnés et systèmes échelonnés réduits

Convenons d'appeller ligne ou colonne *non nulle* toute ligne ou colonne contenant au moins un coefficient (réel) *non nul*.

Terminologie 2.1. On appelle *coefficient principal* d'une ligne non nulle le coefficient non nul le plus à gauche dans la ligne :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \blacksquare & \ast & \cdots & \ast \end{bmatrix}$$

Dans une matrice, la signification de ces symboles est la suivante :

$$\mathbf{0} := \text{zéro}; \qquad \blacksquare = \text{nombre réel } \textit{non nul}; \qquad \ast = \text{nombre réel quelconque, éventuellement nul.}$$

Diagrammatiquement, voici deux matrices complètes de systèmes linéaires qui sont sous une forme analogue à celles que nous avons obtenues en travaillant plusieurs exemples dans le chapitre précédent.

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & \ast & \ast & \ast \\ 0 & \blacksquare & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \ast & \ast & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \ast \end{bmatrix}$$

Nous sommes ainsi conduits à *conceptualiser* d'une manière générale ce type de matrices-modèles.

Définition 2.2. Une matrice rectangulaire est dite *sous forme échelonnée* (en lignes) si elle vérifie les trois propriétés suivantes.

(1) Toutes les lignes non nulles sont situées au-dessus de toutes les lignes nulles [1].

(2) Le coefficient principal de chaque ligne se trouve dans une colonne située strictement à droite de celle du coefficient principal de la ligne au-dessus d'elle [2].

(3) Tous les coefficients situés dans une colonne en-dessous d'un coefficient principal sont nuls [3].

Ensuite, sur quelques exemples, nous avons vu que nous pouvions nous servir d'un petit carré noir non nul pour effectuer des opérations supplémentaires sur les lignes afin d'annihiler aussi tous les coefficients qui se trouvent au-dessus de lui.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

De plus, après une division de chaque ligne par la valeur de son (unique) petit carré noir, on peut s'assurer que chaque petit carré noir est égal à 1. Ces observations justifient la

Définition 2.3. Une matrice sous forme échelonnée — au sens de la Définition 2.2 qui précède — est dite *sous forme échelonnée réduite* si elle vérifie de surcroît les deux propriétés supplémentaires suivantes.

(4) Le coefficient principal de toute ligne est égal à 1.

(5) Les coefficients principaux (égaux à 1) sont les seuls élément non nuls de leur colonne.

Les matrices triangulaires du chapitre précédent :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

sons sous forme échelonnée, la deuxième étant même sous forme échelonnée *réduite*. D'autres exemples viendront bientôt à nous naturellement.

3. Deux résultats théoriques, et une démonstration

Il est grand temps, maintenant, d'énoncer et de démontrer (enfin !) un résultat théorique.

Théorème 3.1. *Tout système linéaire* (S) *est équivalent à un système linéaire* échelonné (S') *obtenu par transformations/opérations élémentaires.*

Démonstration. La méthode consiste à éliminer progressivement les occurrences des inconnues dans les équations au moyen de la *méthode du pivot de Gauss*, que nous avons déjà pratiquée sur plusieurs exemples.

1. Dans le premier exemple ci-dessus, il y a deux lignes nulles, situées en dernier.

2. Effectivement, dans les deux exemples ci-dessus, il y a un escalier bleu *renversé* qui descend tout en se décalant vers la droite, chaque marche étant créée par un coefficient principal (non nul).

3. Oui, nous l'avons déjà dit dans le chapitre précédent, chaque coefficient principal est une « statue » qui se tient debout sur sa pile de zéros, l'écrasant sans pitié ! Exercice : montrer que cette propriété **(3)** est en fait conséquence de la propriété **(2)**.

Partons en effet d'un système linéaire quelconque, ou mieux encore, de sa matrice augmentée :

$$\begin{aligned} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,n}\,x_n &= b_1, \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,n}\,x_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}\,x_1 + a_{m,2}\,x_2 + \cdots + a_{m,n}\,x_n &= b_m, \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right],$$

dont les lignes sont désignée par $L_1, L_2, \dots, L_m$, dans les deux représentations.

Si $a_{1,1} \neq 0$ (le cas $a_{1,1} = 0$ est discuté plus bas), on conserve la première ligne L_1 inchangée (jusqu'à la fin), et on utilise cette première ligne pour éliminer l'inconnue x_1 dans *toutes* les lignes suivantes $L_2, \dots, L_m$, simplement grâce aux combinaisons :

$$L_2 \longmapsto L_2 - \tfrac{a_{2,1}}{a_{1,1}}\,L_1, \quad \dots\dots\dots, \quad L_m \longmapsto L_m - \tfrac{a_{m,1}}{a_{1,1}}\,L_1,$$

ce qui donne la nouvelle matrice (complète) :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \mathbf{0} & a_{2,2} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}a_{1,2} & \cdots & a_{2,n} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}a_{1,n} & b_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & a_{m,2} - \frac{a_{m,1}}{a_{1,1}}a_{1,2} & \cdots & a_{m,n} - \frac{a_{m,1}}{a_{1,1}}a_{1,n} & b_m - \frac{a_{m,1}}{a_{1,1}}b_1 \end{array}\right],$$

matrice que nous *re*-noterons sous forme abrégée :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \mathbf{0} & a'_{2,2} & a'_{2,3} & \cdots & a'_{2,n} & b'_2 \\ \mathbf{0} & a'_{3,2} & a'_{3,3} & \cdots & a'_{3,n} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & a'_{m,2} & a'_{m,3} & \cdots & a'_{m,n} & b'_m \end{array}\right].$$

Ensuite, en nous concentrant seulement sur la sous-matrice avec des primes, si[4] $a'_{2,2} \neq 0$, on conserve la deuxième ligne L'_2 inchangée, et on itère le procédé, à savoir, on utilise la deuxième ligne L'_2 pour éliminer l'inconnue x_2 dans *toutes* les lignes successives $L'_3, \dots, L'_m$, simplement grâce aux combinaisons :

$$L'_3 \longmapsto L'_3 - \tfrac{a'_{3,2}}{a'_{2,2}}\,L'_2, \quad \dots\dots\dots, \quad L'_m \longmapsto L'_m - \tfrac{a'_{m,2}}{a'_{2,2}}\,L'_2,$$

ce qui donne une nouvelle matrice de la forme :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \mathbf{0} & a'_{2,2} & a'_{2,3} & \cdots & a'_{2,n} & b'_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & a''_{3,3} & \cdots & a''_{3,n} & b''_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & a''_{m,3} & \cdots & a''_{m,n} & b''_m \end{array}\right].$$

Question 3.2. *Que faire lorsque* $a_{1,1} = 0$ *? Et lorsque* $a'_{2,2} = 0$ *?*

Si $a_{1,1} = 0$, on lit tous les $a_{1,i} = a_{2,1}, \dots, a_{m,1}$ en-dessous de $a_{1,1}$ pour en chercher un qui soit *non nul*. Si on trouve un $a_{i,1} \neq 0$, on le remonte en haut, c'est-à-dire on permute les deux lignes $L_i \longleftrightarrow L_1$.

4. Le cas $a'_{2,2} = 0$ est discuté plus bas.

Question 3.3. *Mais alors, que faire lorsque* tous *les* $a_{1,1} = a_{2,1} = \cdots = a_{m,1} = 0$ *de la colonne* 1 *sont nuls ?*

Dans ce cas très surprenant (et très embêtant), cela veut dire que x_1 n'apparaît dans *aucune* équation linéaire du système ! Ce x_1 est donc un « *fantôme d'inconnue* » ! Quelle que soit la valeur de ce « *martien* » x_1, le système sera satisfait — qu'il y ait des palmiers sur la Planète Mars, ou qu'il n'y en ait pas, d'ailleurs . . .

Alors on oublie la colonne 1, on passe à la colonne 2, on re-teste si un des coefficients $a_{1,2}, a_{2,2}, \dots, a_{m,2}$ de cette colonne est non nul, et si on trouve un coefficient non nul, on le remonte à la première ligne, et on effectue des combinaisons linéaires sur les lignes comme nous l'avons déjà expliqué.

Sinon, si *toute* la colonne 2 est elle aussi *nulle* — y aurait-il tant de nulles et de nuls ? —, on passe à la colonne 3, et ainsi de suite, jusqu'à épuisement.

Question 3.4. *Que faire lorsque* $a'_{2,2} = 0$ *?*

Si $a'_{2,2} = 0$, on lit tous les $a'_{i,2} = a'_{3,2}, \dots, a'_{m,2}$ en-dessous, *en oubliant et en préservant la ligne* 1, jusqu'à trouver un $a'_{i,2} \neq 0$, que l'on remonte à la ligne 2 ; sinon, si $a'_{2,2} = a'_{3,2} = \cdots = a'_{m,2} = 0$, on passe à la colonne 3, et ainsi de suite, toujours en laissant la ligne 1 intacte.

Autrement dit, on répète exactement le même procédé à la *sous-matrice :*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a'_{2,2} & a'_{2,3} & \cdots & a'_{2,n} & b'_2 \\ a'_{3,2} & a'_{3,3} & \cdots & a'_{3,n} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a'_{m,2} & a'_{m,3} & \cdots & a'_{m,n} & b'_m \end{array}\right].$$

Comme le nombre de lignes diminue d'une unité à chaque étape, et comme le nombre de colonnes diminue d'au moins une unité aussi, l'algorithme se termine en au plus :

$$\mathsf{min}\,\big(m,\,n\big)\ \text{ étapes.} \qquad \square$$

Il importe de signaler que la forme échelonnée d'une matrice n'est presque jamais *unique* :

Exemple 3.5. La matrice que nous avons exhibée après la Définition 2.3 était échelonnée :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & -3 & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -4 & 8 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{15} \end{bmatrix},$$

mais si nous additionnons la ligne 2 à la ligne 1, puis la ligne 3 à la ligne 2, *du bas vers le haut*, nous trouvons une *autre* matrice équivalente qui est *aussi* échelonnée :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & -2 & -2 & 9 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -4 & 23 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{15} \end{bmatrix}.$$

Pour espérer avoir unicité d'une forme échelonnée, il faudrait donc neutraliser cette liberté rémanente [5] qu'on a de ré-effectuer des opérations élémentaires dans l'autre sens, *du bas vers le haut*.

Or la forme échelonnée *réduite* d'une matrice poursuit les calculs jusqu'à mettre une pile de zéros **0** non seulement au-dessous de chaque pivot '■', mais aussi *au-dessus*. Voici alors un exemple « *symbolique* » de passage d'une matrice échelonnée à une forme échelonnée *réduite*, où chaque

5. « *Neutraliser les libertés rémanentes !* » Superbe programme politique ! Votez pour les mathématiques !

pivot '$\blacksquare = 1$' est réduit à 1 après multiplication de sa ligne par $\frac{1}{\blacksquare}$:

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & * \end{bmatrix}.$$

À la fin, il ne peut rester des étoiles '$*$' qu'au-dessus d'une pile de zéros $\mathbf{0}$ ne contenant *pas* de pivot '$\blacksquare = 1$'.

Une fois effectuées ces opérations de remontées le long d'échelles à saumons, il devient essentiellement impossible d'aller plus loin dans les calculs de simplification. C'est ce qu'exprime le résultat théorique suivant, que nous ne pourrons pour l'instant pas démontrer, et donc, que nous admettrons.

Théorème 3.6. [Unicité de la forme échelonnée réduite] *Toute matrice est équivalente selon les lignes à une et une seule matrice échelonnée* réduite. □

Quand une matrice A est équivalente (selon les lignes) à une certaine matrice échelonnée A', on dit tout simplement que A' est une *forme échelonnée de* A, et quand A' est de plus réduite, on dit que A' est *la forme échelonnée réduite de* A.

4. Positions de pivot et exemples supplémentaires

Une fois qu'une matrice a été réduite à une forme échelonnée, les opérations que l'on effectue pour aboutir à sa forme échelonnée réduite (unique !) ne modifient pas la position des coefficients principaux.

Or, comme la forme échelonnée réduite d'une matrice est unique, *les coefficients principaux d'une matrice échelonnée obtenue à partir d'une matrice donnée sont toujours situés à la même position*. Ces coefficients principaux correspondent aux coefficients principaux (des '$\blacksquare = 1$' par exemple) de la forme échelonnée réduite.

Définition 4.1. On appelle *position de pivot* d'une matrice A l'emplacement dans A correspondant à un coefficient principal (égal à 1) de la forme échelonnée réduite de A.

On appelle *colonne-pivot* une colonne de A contenant une position de pivot de A.

Dans les exemples symboliques qui précèdent, les (petits) carrés noirs '$\blacksquare$' indiquent les positions de pivot.

De nombreux concepts fondamentaux qui seront étudiés dans suite du cours sont liés, d'une façon ou d'une autre, aux positions de pivot d'une matrice. Pour cette raison, il importe au plus haut point de maîtriser la méthode de réduction des matrices à des formes échelonnées. Des exemples supplémentaires ne seront pas inutiles.

Exemple 4.2. Proposons-nous de réduire à une forme échelonnée la matrice suivante :

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

Évidemment, le principe des calculs est le même que dans le chapitre qui précède, mais ici, nous allons indiquer en plus les colonnes-pivots et les positions de pivot.

Pour cette matrice, le haut de la colonne non nulle la plus à gauche devrait correspondre à la première position de pivot, puisque la première colonne n'est pas nulle. Il faut donc placer un coefficient non nul en haut à gauche.

Ici, on a intérêt à échanger les lignes 1 et 4. On amène ainsi un 1 en position de pivot, ce qui évitera d'avoir à manipuler des fractions à l'étape suivante.

$$\begin{array}{c} \text{Pivot} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \\ \text{Pivot column} \end{array}$$

On fait apparaître des $\mathbf{0}$ en-dessous du pivot, 1, en ajoutant aux lignes inférieures des multiples de la première ligne, et l'on obtient la matrice :

$$\begin{array}{c} \text{Pivot} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \\ \text{Next pivot column} \end{array}$$

Ensuite, dans cette matrice, la position de pivot de la deuxième ligne doit être aussi à gauche que possible, soit, ici, dans la deuxième colonne. Comme indiqué, on choisit donc comme pivot le coefficient 2 qui se trouve à cet emplacement.

Maintenant, afin de créer une pile de zéros en-dessous de ce deuxième pivot, on ajoute $-\frac{5}{2}$ la ligne 2 à la ligne 3, puis $\frac{3}{2}$ la ligne 2 à la ligne 4 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice ne ressemble à aucune de celles que l'on a rencontrées jusqu'à maintenant ! En effet, il est impossible de faire apparaître un coefficient principal dans la colonne 3 ! Et il n'est pas question de ré-utiliser les lignes 1 et 2, car on détruirait alors la disposition en échelons des coefficients principaux obtenus auparavant.

En revanche, on peut faire apparaître un coefficient principal dans la colonne 4 en échangeant les lignes 3 et 4 :

$$\begin{array}{c} \text{Pivot} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Pivot columns} \end{array} \qquad \text{General form:} \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice que l'on obtient ainsi est alors gratuitement échelonnée, sans qu'il y ait besoin de continuer à faire des calculs. Ainsi, nous pouvons affirmer que les trois colonnes 1, 2, 4 sont des colonnes-pivots.

Cet exemple illustre la notion de *pivot*, qui est un nombre non nul en position de pivot, et qui est utilisé pour faire apparaître des $\mathbf{0}$ en-dessous au moyen d'opérations sur les lignes. Ici, les pivots sont $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $-\mathbf{5}$:

$$A' := \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & 4 & -6 & -6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{5} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$$

Mais il importe de faire observer que ces nombres-pivots sont *très différents* des coefficients de la matrice initiale aux mêmes emplacements :

Pivot positions

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

Pivot columns

À nouveau, le lecteur est invité à étudier soigneusement et à maîtriser les procédures illustrées dans cet exemple, ainsi que dans tous les autres exemples des cours et des TD, car ces efforts seront largement récompensés par la suite.

5. Algorithme du pivot de Gauss

À l'aide d'un autre exemple supplémentaire, décrivons maintenant une procédure effective pour transformer une matrice en une matrice échelonnée, réduite ou non. Implicitement, nous avons déjà compris et intégré tous les éléments de cet algorithme, mais il est maintenant nécessaire d'en formuler plus précisément les aspects généraux.

L'*algorithme du pivot de Gauss* comporte 4 étapes, et il conduit à une matrice sous forme échelonnée. Une cinquième étape permet d'obtenir une matrice échelonnée réduite.

Exemple 5.1. Proposons-nous de mettre sous forme échelonnée, puis sous forme échelonnée réduite, la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

Étape 1. *On considère la colonne non nulle la plus à gauche. C'est une colonne-pivot. La position de pivot doit être en haut de cette colonne.*

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

Pivot column

Étape 2. *On choisit comme pivot un élément non nul de la colonne-pivot. Si nécessaire, on échange deux lignes pour amener cet élément à la position de pivot.*

Ici, on échange les lignes 1 et 3 (on aurait pu également échanger les lignes 1 et 2) :

Pivot

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Étape 3. *Au moyen d'opérations de remplacement, on fait apparaître des* **0** *à toutes les positions situées en-dessous du pivot dans la même colonne.*

À ce moment, on pourrait préalablement diviser la ligne 1 par le pivot 3. Mais comme la colonne 1 comporte deux fois le nombre 3, il est aussi simple d'ajouter -1 fois la ligne 1 à la ligne 2 :

$$\begin{array}{c}\text{Pivot}\\ \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}\end{array}$$

Étape 3. *On cache (ou on ignore) la ligne contenant la position de pivot, et, éventuellement, toutes les lignes au-dessus d'elle. On applique les étapes* 1 *à* 3 *à la sous-matrice restante. On répète le processus jusqu'à ce qu'il ne reste plus aucune ligne non nulle à modifier.*

Si l'on cache la ligne 1, on voit, en appliquant l'Étape 1, que la colonne 2 est la colonne-pivot suivante. Pour appliquer l'Étape 2, on choisit comme pivot le « haut » de cette colonne.

$$\begin{array}{c}\text{Pivot}\\ \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}\\ \text{New pivot column}\end{array}$$

Pour appliquer l'Étape 3, on pourrait introduire une étape facultative qui consisterait à diviser la ligne supérieure de la sous-matrice par le pivot, 2. Mais on peut aussi directement ajouter $-\frac{3}{2}$ la ligne supérieure à la ligne juste en-dessous. On obtient alors :

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Si l'on cache maintenant la ligne contenant la deuxième position de pivot pour l'Étape 4, on se retrouve avec une nouvelle sous-matrice formée d'une seule ligne :

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\\ \text{Pivot}\end{array}$$

Pour la sous-matrice constituée de la dernière ligne, les Étapes 1, 2, 3 sont inutiles, et l'on est parvenu à une forme échelonnée de la matrice initiale.

Si l'on veut une forme échelonnée *réduite*, il faut effectuer une étape supplémentaire.

Étape 5. *On fait apparaître des* **0** *au-dessus de chaque pivot, en commençant par le pivot le plus à droite, et en progressant vers le haut et vers la gauche. Si un pivot est différent de* 1*, on divise par la valeur du pivot pour obtenir la valeur* 1.

Ici, le pivot le plus à droite est à la ligne 3. On fait apparaître des **0** au-dessus de lui, en ajoutant aux lignes 1 et 2 des multiples convenables de la ligne 3 :

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Row } 1 + (-6) \cdot \text{row } 3 \\ \leftarrow \text{Row } 2 + (-2) \cdot \text{row } 3 \\ \end{matrix}$$

Le pivot suivant est à la ligne 2. On transforme sa valeur en 1, en divisant cette ligne par la valeur du pivot :

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{Row scaled by } \tfrac{1}{2} \\ \\ \end{array}$$

On fait apparaître un **0** dans la colonne 2 en ajoutant 9 fois la ligne 2 à la ligne 1 :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{Row } 1 + (9) \cdot \text{row } 2 \\ \\ \\ \end{array}$$

Pour finir, on divise la ligne 1 par la valeur du pivot, 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{Row scaled by } \tfrac{1}{3} \\ \\ \\ \end{array}$$

Et voilà la belle forme échelonnée réduite de notre matrice ! En définitive, l'espace des solutions est :

$$\mathsf{Sol} = \Big\{ \big(-24+2\,x_3-3\,x_4,\ -7+2\,x_3-2\,x_4,\ x_3,\ x_4\big) :\ x_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\ x_4 \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \Big\}.$$

L'ensemble des opérations correspondant aux Étapes 1, 2, 3, 4 pourrait être appelé *phase de descente* de l'algorithme du pivot.

L'Étape 5, qui conduit à l'*unique* forme échelonnée *réduite*, pourrait être appelée *phase de remontée* (échelle vers le ciel).

Tous les programmes informatiques appliquent ce qu'on appelle la *stratégie du pivot partiel*, laquelle consiste à choisir dans une colonne toujours le coefficient le *plus grand* en valeur absolue, parce que c'est cette stratégie qui produit le moins d'erreurs d'arrondi après la virgule. En effet, plus on divise par un grand nombre, plus les décimales sont éloignées.

6. Solutions d'un système linéaire

En appliquant l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice complète d'un système linéaire, on arrive directement à la description de son ensemble de solutions.

Exemple 6.1. Supposons que la matrice complète d'un certain système ait été mise sous la forme échelonnée *réduite :*

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Ce système comporte *trois* inconnues, car la matrice complète a quatre colonnes. Donc le système linéaires associé est :

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 5\,x_3 &= 1 \\ x_2 + \ \ x_3 &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Ici, les inconnues x_1 et x_2 qui correspondent aux deux colonnes-pivots de la matrice peuvent être résolues, *i.e.* placées à gauche, tandis que la dernière inconnue, x_3, doit être considérée comme une variable libre. Par conséquent, la solution générale est :

$$\begin{cases} x_1 \,=\, 1+5\,x_3, \\ x_2 \,=\, 4-x_3, \\ x_3 \text{ quelconque.} \end{cases}$$

La locution « x_3 quelconque » signifie que l'on peut choisir arbitrairement n'importe quelle valeur pour x_3. Une fois cette valeur choisie, les deux premières formules déterminent de façon unique les valeurs de x_1 et de x_2. Par exemple, pour $x_3 := 0$, la solution est $(1, 4, 0)$; pour $x_3 := 1$, elle est $(6, 3, 1)$. En général, on peut écrire :

$$\mathsf{Sol} \,=\, \big\{\big(1+5\,x_3,\;4-x_3,\;x_3\big)\colon\; x_3\,\text{quelconque}\big\}.$$

Des choix distincts pour x_3 déterminent des solutions distinctes du système, et toute solution est déterminée par un choix de x_3.

Nous pouvons maintenant conceptualiser d'une manière générale la décomposition de la collections des inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$ en deux ensembles disjoints.

Définition 6.2. Soit (S) un système linéaire mis sous forme *échelonnée* (éventuellement réduite).

(1) Les inconnues x_j dont les indices j correspondent aux colonnes-pivots du système échelonné sont appelées *inconnues principales*, ou *variables liées*.

(2) Les autres inconnues sont appelées *inconnues non principales* (*secondaires*), ou *variables libres*.

Exemple 6.3. Proposons-nous de déterminer la solution générale d'un certain système linéaire dont on admet avoir réduit la matrice complète à la forme échelonnée suivante :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \end{array}.$$

comme il y a 6 colonnes, le système comporte $5 = 6-1$ inconnues, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Certes, cette matrice est sous forme échelonnée, mais une résolution *effective* du système exige de produire la forme échelonnée *réduite*.

En utilisant le symbole $\sim$ pour signifier des équivalences entre matrices modulo des opérations selon les lignes, résumons les opérations qui conduisent à la forme échelonnée réduite :

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 6 & \mathbf{0} & 3 & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & -4 & \mathbf{0} & 5 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 7 \end{bmatrix}.$$

Le système final s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{x_1} + 6\,x_2 \qquad + 3\,x_4 \qquad &= 0 \\ \mathbf{x_3} - 4\,x_4 \qquad &= 5 \\ \mathbf{x_5} &= 7 \end{aligned}$$

Puisque les colonnes-pivots de cette matrice réduite sont 1, 3, 5, les inconnues principales sont x_1, x_3, x_5. Les inconnues non principales restantes, x_2, x_4, peuvent avoir une valeur quelconque : ce sont des variables (des électrons ?) libres.

Pour obtenir la solution générale, on résout alors les inconnues principales en fonction des variables libres, ce qui est immédiat :

$$\begin{cases} x_1 \;=\; -\,6\,x_2 - 3\,x_4, \\ x_2 \text{ quelconque}, \\ x_3 \;=\; 5 + 4\,x_4, \\ x_4 \text{ quelconque}, \\ x_5 \;=\; 7. \end{cases}$$

En définitive, l'ensemble des solutions est :

$$\mathsf{Sol} \;=\; \Big\{ \big(-\,6\,x_2 - 3\,x_4,\;\; x_2,\;\; 5 + 4\,x_4,\;\; x_4,\;\; 7 \big) :\;\; x_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\;\; x_4 \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \Big\}.$$

7. Représentation paramétrique d'un ensemble de solutions

Les équations du type qui précèdent :

$$x_1 \;=\; -\,6\,x_2 - 3\,x_4 \qquad\qquad \text{ou} \qquad\qquad x_3 \;=\; 5 + 4\,x_4,$$

sont des *représentation paramétriques* des solutions, dans lesquelles les inconnues non principales jouent le rôle de paramètres libres. *Résoudre un système*, cela revient donc à trouver une *représentation paramétrique* de l'ensemble de ses solutions, ou à montrer que l'ensemble des solutions est vide.

Quand un système est compatible et comporte des inconnues non principales, plusieurs représentations paramétriques de l'ensemble des solutions sont possibles. Par exemple, dans le système de l'Exemple 6.1 :

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 5\,x_3 &= 1, \\ x_2 + \;\; x_3 &= 4, \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

on pourrait fort bien ajouter 5 fois l'équation 2 à l'équation 1, obtenir ainsi le système équivalent :

$$\begin{aligned} x_1 + 5\,x_2 \qquad\quad &= 21, \\ x_2 + \; x_3 &= \;\; 4, \end{aligned}$$

considérer que x_2 est un paramètre, et exprimer x_1 et x_3 en fonction de x_2 :

$$\begin{cases} x_1 \;=\; 21 - 5\,x_3, \\ x_2 \text{ quelconque}, \\ x_3 \;=\; 4 - x_2. \end{cases}$$

On aurait ainsi une description tout aussi exacte et vraie de l'ensemble des solutions.

Cependant, par souci de cohérence, nous adopterons désormais la convention de choisir toujours les inconnues non principales comme paramètres pour représenter les ensembles de solutions. Tous les exercices, TD, devoirs à la maison, interrogations écrites, examens, respecteront cette convention.

À l'opposé, quand un système est incompatible, l'ensemble de ses solutions est vide, même si le système comporte des inconnues non principales. Dans ce cas, il n'existe *aucune* représentation paramétrique de l'ensemble des solutions.

8. Résolution par substitutions successives

Considérons par exemple le système ci-dessous, dont la matrice complète est déjà sous forme échelonnée :

$$\begin{aligned} x_1 - 7\,x_2 + 2\,x_3 - 5\,x_4 + 8\,x_5 &= \;\;10 \\ x_2 - 3\,x_3 + 3\,x_4 + \;\; x_5 &= -5 \\ x_4 - \;\; x_5 &= \;\;4 \end{aligned}$$

Plutôt que de calculer la forme échelonnée réduite, un programme informatique résoudrait ce système par remontées successives, en commençant par la dernière équation, et en substituant aux inconnues les valeurs obtenues au fur et à mesure.

Plus précisément, le programme résoudrait l'équation 3 en exprimant x_4 en fonction de x_5 ; il substituerait l'expression de x_4 dans l'équation 2 ; il résoudrait l'équation 2 par rapport à x_2 ; il substituerait ensuite les expressions de x_2 et de x_4 dans l'équation 1 ; il résoudrait enfin l'équation 1 en fonction de x_1.

La représentation matricielle de la phase de remontée dans la méthode du pivot nécessite le même nombre d'opérations arithmétiques que la méthode par substitutions successives.

Toutefois, quand on effectue les calculs à la main, comme tous les étudiants de L1 adorent le faire, il est préférable de s'astreindre à la représentation matricielle, car cette méthode diminue le nombre d'erreurs, si désagréables quand on passe un examen.

Affirmation 8.1. *Pour résoudre un système linéaire, la meilleure stratégie consiste à n'utiliser que la forme échelonnée* réduite. □

En général, la phase de descente de la méthode du pivot prend beaucoup plus de temps que la phase de remontée.

On mesure habituellement un algorithme de résolution d'un système linéaire en *flops*, "*floating point operations*", *opérations en virgule flottante*. Un *flop* est une opération arithmétique $(+, -, \times, /)$ entre deux réels représentés en virgule flottante.

Pour une matrice de taille $n \times (n+1)$, la réduction à une forme échelonnée peut nécessiter jusqu'à environ $\frac{2}{3}\,n^3$ flops. En revanche, les opérations restant à effectuer pour parvenir à la forme réduite nécessitent un maximum de $\frac{1}{2}\,n^2$ flops.

9. Synthèse théorique sur la méthode du pivot de Gauss

Grâce à aux multiples exemples que nous avons étudiés, nous sommes maintenant en mesure d'exprimer sous une forme théorique générale toutes les formes possibles que peut revêtir une matrice mise sous forme échelonnée, après application de la méthode du pivot de Gauss.

Mais auparavant, rappelons notre convention symbolique :

$$\mathbf{0} := \text{zéro}; \qquad \blacksquare = \text{nombre réel } \textit{non nul} \text{ (pivot)};$$
$$* = \text{nombre réel quelconque, éventuellement nul.}$$

Nous allons travailler avec une matrice à $12+1 = 13$ colonnes, comme si le nombre de colonnes était arbitrairement grand.

Tout d'abord, dans une matrice échelonnée, les pivots de deux lignes successives ne peuvent jamais être alignés verticalement :

$$\textbf{impossible :} \quad \left[\begin{array}{cccccccccccc|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \end{array}\right]$$

car chaque pivot crée en-dessous de lui une colonne de $\mathbf{0}$ par opérations élémentaires de soustractions de lignes. Par conséquent, le pivot de la ligne suivante doit *toujours* être décalé d'au moins une case vers la droite :

$$\textbf{possible :} \quad \left[\begin{array}{cccccccccccc|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * \end{array}\right]$$

et ce décalage peut être tout à fait quelconque, plus grand qu'une unité :

$$\textbf{possible} : \qquad \left[\begin{array}{cccccccccccc|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * \end{array}\right]$$

Si le système linéaire comporte n inconnues, c'est-à-dire si la matrice complète du système possède $n+1$ colonnes, une forme échelonnée de la matrice complète sera donc toujours constituée d'au plus $n+1$ lignes non nulles, comme le montre une première illustration (toujours dans le cas $n = 12$) pour laquelle tous les décalages de pivots valent une unité :

$$\begin{array}{cccccccccccc|cl}
\blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \\
\mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & \quad \textbf{regarder la dernière ligne non nulle !} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}, &
\end{array}$$

et une seconde illustration pour laquelle les décalages de pivots sont aléatoires :

$$\begin{array}{cccccccccccc|cl}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & \quad \textbf{regarder la dernière ligne non nulle !} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}, &
\end{array}$$

À la fin, il peut y avoir un nombre quelconque de lignes nulles, pourvu que le nombre total de lignes soit égal à m, le nombre de ligne de la matrice initiale. Mais ce dernier paquet de lignes nulles peut immédiatement être effacé, car elles signifient seulement l'équation mathématique tautologique inutile zero $=$ zero.

$$\mathbf{0}\,x_1 + \mathbf{0}\,x_2 + \cdots + \mathbf{0}\,x_n \;=\; \mathbf{0}.$$

Théorème 9.1. *Un système linéaire est* compatible *si et seulement si la colonne la plus à droite de sa matrice* complète *n'est* pas *une colonne-pivot, c'est-à-dire si et seulement si la* dernière ligne non nulle *d'une forme échelonnée de sa matrice complète n'est* pas *de la forme :*

$$\left[\mathbf{0}\;\mathbf{0}\;\cdots\;\mathbf{0} \;|\; \blacksquare\right],$$

avec un nombre réel non nul $\blacksquare \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Démonstration. S'il existe une telle ligne qui signifie :

$$\mathbf{0}\,x_1 + \cdots + \mathbf{0}\,x_n \;=\; \blacksquare,$$

on en déduit $\mathbf{0} = \text{nonzero}$, ce qui est une contradiction mathématique vraiment fatale, donc le système est incompatible.

Inversement, s'il n'existe *aucune* ligne de cette forme $\big[\mathbf{0}\ \cdots\ \mathbf{0} \mid \blacksquare\big]$, alors toutes les lignes non nulles sont de la forme :

$$\mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} + \blacksquare\, x_j + *\, x_{j+1} + \cdots + *\, x_n = *.$$

Ensuite, comme l'on peut résoudre :

$$x_j = \tfrac{*}{\blacksquare} - \tfrac{*}{\blacksquare}\, x_{j+1} - \cdots - \tfrac{*}{\blacksquare}\, x_n,$$

puis remplacer pas à pas ces x_j résolus dans les lignes au-dessus en partant du bas (après avoir effacé les lignes nulles inutiles $\mathbf{0} = \mathbf{0}$), on se convainc aisément qu'il y a toujours au moins une solution, donc le système est compatible. □

Une analyse plus précise conduit au

Théorème 9.2. *Si un système linéaire est compatible, c'est-à-dire si la dernière ligne de sa matrice complète n'est* pas *la ligne* $\big[\mathbf{0}\ \mathbf{0}\ \cdots\ \mathbf{0} \mid \blacksquare\big]$, *alors l'ensemble de ses solutions consiste en :*

(1) *ou bien une solution unique, lorsqu'il n'existe aucune inconnue secondaire (non principale), c'est-à-dire lorsque* toutes *les colonnes* $1, 2, \ldots, n$ *sauf la colonne* $n+1$ *sont des colonnes pivots ;*

(2) *ou bien en une infinité de solutions, lorsqu'il existe au moins une inconnue secondaire, c'est-à-dire lorsqu'au moins une colonne* j *avec* $1 \leqslant j \leqslant n$ *ne contient pas de pivot* $\blacksquare$.

Nous pouvons supposer que les lignes nulles inutiles ont été effacées, et nous allons illustrer les raisonnements généraux avec la valeur plus petite $n := 7 < 12$.

Démonstration. **(1)** Nous laissons au lecteur-étudiant le soin de se convaincre que cette circonstance correspond au cas où il y a exactement $n = \#x_j$ pivots, tous décalés exactement d'une unité (jamais plus) :

$$\begin{array}{ccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\
\blacksquare & * & * & * & * & * & * & * \\
\mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & *
\end{array}$$

Car en partant du bas, x_n peut être résolu de manière unique, puis $x_{n-1}, \ldots$, puis x_1, donc la solution est *unique*.

(2) Inversement, quand il y a *au moins* un décalage de pivot égal à deux unités lorsqu'on passe d'une certaine ligne à la suivante, comme par exemple :

$$\begin{array}{ccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\
\blacksquare & * & * & * & * & * & * & * \\
\mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & *
\end{array}$$

alors l'inconnue correspondante, ici x_5, est *une variable libre*, qui peut prendre une infinité de valeurs, et par conséquent, il y a une infinité de solutions. □

Terminons en énonçant un algorithme pour la résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.

Algorithme: Résolution d'un système linéaire

1. Écrire la matrice complète du système.
2. Appliquer la méthode du pivot pour obtenir une matrice complète équivalente sous forme échelonnée. Déterminer si le système est compatible. S'il n'y a pas de solution c'est terminé ; sinon, aller à l'étape suivante.
3. Continuer la méthode du pivot pour obtenir la forme échelonnée réduite.
4. Écrire le système d'équations correspondant à la matrice obtenue à l'Étape 3.
5. Ré-écrire chaque équation non nulle issue de l'Étape 4 de façon à exprimer son unique inconnue principale en fonction des inconnues non principales apparaissant dans l'équation.

10. Exercices d'entraînement

Exercice d'entraînement 1. Étudier l'existence et l'unicité d'une solution au système :

$$\begin{aligned} 3x_2 - \ 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + \ 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= \ \ 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 &= \ 15 \end{aligned}$$

Dans l'Exemple 5.1, on a déjà déterminé une forme échelonnée de la matrice complète du système :

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Les inconnues principales sont x_1, x_2, x_5, tandis que les non principales sont x_3, x_4.

Aucune des équations n'étant du type $0 =$ nonzero (ce qui signifierait une incompatibilité du système), le système est *compatible*. Ensuite, on pourrait éventuellement remonter le système par substitutions successives.

Toutefois, sans avoir à expliciter tout le calcul, l'*existence* d'une solution est claire. Par ailleurs, la solution n'est *pas* unique, car le système comporte des inconnues non principales. Différentes valeurs de x_3 et de x_4 déterminent en effet des solutions différentes. Le système admet donc une infinité de solutions.

Exercice d'entraînement 2. Déterminer la solution générale du système linéaire dont la matrice complète est :

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

La forme échelonnée de la matrice complète et le système correspondant sont :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} x_1 \qquad - 8x_3 &= -3 \\ x_2 - \ \ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Les inconnues principales sont x_1, x_2, et la solution générale est :

$$\begin{cases} x_1 = -3 + 8x_3, \\ x_2 = -1 + x_3, \\ x_3 \text{ quelconque.} \end{cases}$$

Il est essentiel que la solution générale décrive chaque inconnue, celles qui jouent le rôle de paramètres étant clairement identifiée. Par (contre-)exemple, les relations ci-dessous ne décrivent *pas* l'ensemble des solutions :

$$\begin{cases} x_1 = -3 + 8\,x_3, \\ x_2 = -1 + x_3, \\ x_3 = 1 + x_2 \text{ — \textbf{solution incorrecte !}} \end{cases}$$

Cette *fausse* formulation implique que x_2 et x_3 sont *toutes deux* des inconnues principales, ce qui n'est sûrement pas le cas.

Exercice d'entraînement 3. Déterminer la solution générale du système :

$$\begin{aligned} x_1 - 2\,x_2 - x_3 + 3\,x_4 &= 0 \\ -2\,x_1 + 4\,x_2 + 5\,x_3 - 5\,x_4 &= 3 \\ 3\,x_1 - 6\,x_2 - 6\,x_3 + 8\,x_4 &= 2 \end{aligned}$$

On applique la méthode du pivot :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -5 & 3 \\ 3 & -6 & -6 & 8 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice montre que le système est *incompatible*, car sa dernière colonne la plus à droite est une colonne-pivot : en effet, la troisième ligne correspond à l'équation $0 = 5$, *impossible*.

Il est donc inutile de continuer la réduction. On remarque que, vu l'incompatibilité du système, la présence d'inconnues non principales est sans conséquence dans cet exemple.

Exercice d'entraînement 4. On suppose que la matrice des *coefficients* d'un système linéaire est une matrice 4×7 contenant quatre pivots. Le système est-il compatible ? Dans le cas où il l'est, étudier l'unicité de la solution.

Comme la matrice des coefficients a quatre pivots, chacune de ses lignes contient un pivot. Cela garantit que la forme échelonnée réduite de la matrice des coefficients ne possède aucune ligne non nulle.

Ainsi, la forme échelonnée réduite de la matrice *complète*, qui contient par définition une colonne supplémentaire, ne peut jamais avoir une ligne de la forme $\begin{bmatrix}\mathbf{0}\ \mathbf{0}\ \mathbf{0}\ \mathbf{0}\ \mathbf{0}\ \mathbf{0}\ b\end{bmatrix}$, avec $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ non nul, sinon $\begin{bmatrix}\mathbf{0}\ \mathbf{0}\ \mathbf{0}\ \mathbf{0}\ \mathbf{0}\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$ serait une ligne nulle dans la matrice des coefficients.

D'après le Théorème 9.1, le système est compatible. De plus, puisqu'il y a sept colonnes dans la matrice des coefficients et seulement quatre colonnes-pivots, il y a nécessairement trois inconnues non principales. Par conséquent, le système admet une infinité de solutions.

11. Exercices

Exercice 1.

Systèmes linéaires dépendant de paramètres : Exercices corrigés variés

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des systèmes linéaires dont les coefficients ne sont pas nécessairement de simples constantes comme -1, 5, 13, $-\frac{7}{2}$, $\frac{1}{3}$, mais peuvent dépendre de paramètres réels a, b, c, d, e, ... De tels systèmes se présentent très fréquemment dans les applications des mathématiques, et aussi, dans les mathématiques fondamentales elle-mêmes.

En ce premier semestre initiatique S_1 de la première année universitaire L_1, plutôt que d'ériger une théorie générale, nous allons traiter en détail de nombreux exercices tirés des livres et des annales. De cette manière, presque tous les aspects théoriques transparaîtront.

Nous ne commencerons donc pas forcément par les exercices les plus élémentaires. Au contraire, les Exercices 2 et 3, dont le niveau est avancé, nous feront d'ores et déjà découvrir les choses les plus essentielles. C'est pourquoi le lecteur-étudiant est fortement invité à lire et relire plusieurs fois ces deux Exercices 2 et 3.

2. Exercices corrigés

Exercice 1. **(a)** Résoudre le système linéaire suivant dépendant de trois paramètres réels a, b, c quelconques :

$$\begin{aligned} x + 2\,y + 3\,z &= a \\ x + 3\,y + 8\,z &= b \\ x + 2\,y + 2\,z &= c \end{aligned}$$

(a) Deux opérations de pivot sur la première colonne de la matrice complète de ce système suffisent à atteindre une forme échelonnée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & a \\ 1 & 3 & 8 & b \\ 1 & 2 & 2 & c \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & a \\ 0 & \boxed{1} & 5 & b-a \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & c-a \end{array}\right].$$

Comme la forme obtenue est du type :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \end{array}\right]$$

nous savons (grâce à la théorie générale que nous avons apprise) sans avoir à continuer les calculs, que ce système possède une solution unique, quelles que soient les valeurs des paramètres a, b, c. [Toutefois, nous allons étudier ensuite beaucoup d'autres systèmes linéaires qui dépendront de paramètres et pour lesquels il faudra vraiment distinguer plusieurs cas selon les valeurs possibles de ces paramètres.]

Pour terminer la résolution, continuons jusqu'à la forme échelonnée *réduite :*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 5 & b-a \\ 0 & 0 & \boxed{1} & a-c \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2a+3c \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -6a+5c+b \\ 0 & 0 & 1 & a-c \end{array}\right]$$
$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10a-2b-7c \\ 0 & 1 & 0 & -6a+5c+b \\ 0 & 0 & 1 & a-c \end{array}\right],$$

et concluons que la solution unique est :

$$x := 10\,a - 2\,b - 7\,c, \qquad y := -6\,a + b + 5\,c, \qquad z := a - c.$$

Pour terminer, on pourrait (et on *devrait impérativement* si on était en examen) vérifier que cette solution satisfait bien le système linéaire initial, tâche ici laissée au lecteur-étudiant.

Exercice 2. Soit un paramètre $k \in \mathbb{R}$ prenant des valeurs quelconques, et soit le système linéaire :

$$\begin{aligned} x + \ \ y - \qquad\quad z &= 2 \\ x + 2\,y + \qquad\quad z &= 3 \\ x + \ \ y + (k^2 - 5)\,z &= k \end{aligned}$$

(a) Mettre la matrice complète du système sous forme échelonnée, et ré-écrire le système correspondant.

(b) Pour quelles valeurs de k le système admet-il une solution *unique* ?

(c) Dans ces circonstances, trouver la solution unique.

(d) Pour quelles valeurs de k le système admet-il une *infinité* de solutions ?

(e) Pour quelles valeurs de k le système n'admet-il *aucune* solution (*i.e.* est incompatible) ?

(a) Deux opérations de pivot sur la première colonne de la matrice complète de ce système suffisent à atteindre une forme qui semble échelonnée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & k^2-5 & k \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-4 & k-2 \end{array}\right].$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} x + y - \qquad z &= \quad 2 \\ y + \qquad 2\,z &= \quad 1 \\ (k^2 - 4)\,z &= k - 2 \end{aligned}$$

(b) Regardons la dernière équation en observant une factorisation utile :

$$(k-2)\,(k+2)\,z = k - 2.$$

Attention ! Nous sommes exactement dans la situation où :

$$\mathsf{Expression}\,(k) \cdot z = \mathsf{Quelque\ chose},$$

et comme pour une équation plus simple, plus basique, du type :

$$k \cdot z = \mathsf{Quelque\ chose},$$

où nous savons qu'il faut discuter si $k = 0$ ou si $k \neq 0$, ici, nous devons faire attention à la valeur de $\mathsf{Expression}(k)$, égale à 0 ou différente de 0.

Pour résoudre ce système linéaire, il y a donc une petite difficulté, et qui plus est, il y a un petit piège.

En effet, afin de pouvoir écrire :

$$z \overset{?}{=} \frac{\textsf{Quelque chose}}{\textsf{Expression}\,(k)},$$

il faut s'assurer que :

$$\textsf{Expression}\,(k) \neq 0,$$

c'est-à-dire ici :

$$(k-2)\,(k+2) \neq 0 \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad \Big(k \neq 2 \quad \text{et} \quad k \neq -2\Big).$$

Résumé 2.1. *L'inconnue z est résoluble dans l'équation 3 lorsque $k \neq 2$ et $k \neq -2$.* □

Mais il y a un petit piège ! En effet, on pourrait être tenté, dans la dernière équation en question :

$$\underline{(k-2)}\,(k+2)\,z = \underline{k-2},$$

de diviser, à gauche et à droite, par $k-2$, mais ceci conduirait à une *erreur mathématique*.

En effet, quand on a une équation à résoudre en une inconnue z de cette forme :

$$\textsf{Expression}\,(k) \cdot z = \textsf{Chose}\,(k),$$

le membre de droite est sans importance, même lorsqu'il dépend *aussi* du paramètre k, parce que si on veut résoudre :

$$z \overset{?}{=} \frac{\textsf{Chose}\,(\mathsf{k})}{\textsf{Expression}\,(k)},$$

le terme $\textsf{Chose}\,(k)$ apparaîtra au *numérateur*, et dans une fraction, un numérateur est autorisé à prendre n'importe quelle valeur $\in \mathbb{R}$, y compris 0.

Au contraire, le dénominateur est soumis à la contrainte très importante de ne pas être égal à 0.

$$\begin{tikzcd}
 & k \neq 2 \text{ et } k \neq -2 \text{ solution unique} \\
k \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & k = 2 \text{ solutions infinies} \\
 & k = -2 \text{ aucune solution}
\end{tikzcd}$$

(c) Supposons donc $k \neq 2$ et $k \neq -2$. Nous pouvons donc diviser la ligne 3 de la matrice échelonnée ci-dessus, et poursuivre la méthode du pivot afin de *réduire* la matrice :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{k+2} \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{2k+5}{k+2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{k}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{k+5}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{k}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{array}\right].$$

En conclusion, la solution est :

$$x := \frac{k+5}{k+2}, \qquad\qquad y := \frac{k}{k+2}, \qquad\qquad z := \frac{1}{k+2}.$$

(d) Ce qui est paradoxal, c'est que l'on a l'impression, en regardant cette solution, que seul le cas $k = -2$ pose problème.

Mais nous avons vu que le cas $k = 2$ posait *aussi* problème, à cause du fait qu'on n'avait *pas* le droit de supprimer le facteur $k - 2$ dans la dernière équation :

$$(k-2)\,(k+2)\,z \;=\; (k-2),$$

simplement parce que ce facteur $k - 2$, qui dépend de k, peut parfois être égal à 0, notamment lorsque $k = 2$, et en mathématiques, *il est catégoriquement interdit de diviser par* $\mathbf{0}$ **!**

Traitons donc ce cas délicat, « exceptionnel » :

$$k \;=\; 2.$$

La matrice échelonnée trouvée à la Question **(a)** devient alors :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \;\rightsquigarrow\; \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right],$$

et on peut supprimer la dernière ligne, totalement nulle.

Ensuite, on termine la forme échelonnée *réduite :*

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \end{array}\right] \end{array} \;\longmapsto\; \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \end{array}\right],$$

ce qui donne la solution générale, de cardinal infini, puisqu'elle dépend de l'inconnue libre $z \in \mathbb{R}$:

$$\mathsf{Sol} \;:=\; \big\{\big(1+3\,z,\; 1-2\,z,\; z\big) \colon\; z \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

(e) Il reste une toute dernière valeur du paramètre $k \in \mathbb{R}$ dont nous n'avons pas encore parlé :

$$k \;=\; -\,2.$$

Alors la dernière équation obtenue à la Question **(a)** devient :

$$(-2-2)\,(-2+2)\,z \;=\; -\,2-2,$$

c'est-à-dire :

$$\mathbf{0} \;=\; -\,4,$$

équation impossible, donc le système est *incompatible* lorsque $k = -2$, il n'a *aucune* solution.

Exercice 3. Soit à nouveau un paramètre $k \in \mathbb{R}$ prenant des valeurs quelconques, et soit le système linéaire :

$$\begin{aligned} x + 2\,y + \quad\;\; 3\,z &= 4 \\ x + k\,y + \quad\;\; 4\,z &= 6 \\ x + 2\,y + (k+2)\,z &= 6 \end{aligned}$$

(a) Mettre la matrice complète du système sous forme échelonnée.

(b) Discuter, selon les valeurs de k, le nombre de solutions.

(a) Deux opérations de pivot sur la première colonne de la matrice complète de ce système suffisent à atteindre une forme échelonnée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 1 & k & 4 & 6 \\ 1 & 2 & k+2 & 6 \end{array}\right] \;\longmapsto\; \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & k-2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k-1 & 2 \end{array}\right],$$

donc le système devient :

$$\begin{aligned} x + \qquad 2\,y + \qquad 3\,z &= 4 \\ (k-2)\,y + \qquad\; z &= 2 \\ (k-1)\,z &= 2 \end{aligned}$$

La forme générale de ce système n'est pas forcément échelonnée au sens strict du terme :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \underline{*}_2(k) & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{*}_3(k) & * \end{array}\right],$$

car les *deux* étoiles soulignées :

$$\underline{*}_2(k) := k-2 \qquad \text{et} \qquad \underline{*}_3(k) := k-1,$$

peuvent chacune valoir :

$$\underline{*}_2(k) = \begin{cases} \blacksquare \\ \mathbf{0} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \underline{*}_3(k) = \begin{cases} \blacksquare \\ \mathbf{0} \end{cases}$$

suivant les valeurs du paramètre k.

(b) Regardons la dernière équation :

$$(k-1)\,z = 2.$$

Quand $k = 1$, ceci est $0 = 2$, donc le système est incompatible.

Pour pouvoir résoudre en z, il faut supposer $k \neq 1$. Résolvons :

$$z = \frac{2}{k-1},$$

et remplaçons dans l'équation deuxième :

$$(k-2)\,y = 2 - \frac{2}{k-1},$$

c'est-à-dire :

$$(k-2)\,y = \frac{2\,(k-2)}{k-1}.$$

Attention ! Piège similaire ! On pourrait être tenté de diviser de part et d'autre par $k-2$, mais avec $k = 2$, on effectuerait une *division par zéro qui est vraiment interdite en mathématiques*.

Donc il faut traiter ce cas exceptionnel $k = 2$, où l'équation devient trivialement satisfaite :

$$0\,y = 0.$$

Plus haut, on avait $z = \frac{2}{2-1} = 2$, et la première équation devient :

$$x + 2\,y + 3\,(2) = 4,$$

d'où :

$$x = -2 - 2\,y.$$

Ainsi, lorsque $k = 2$, il y a une infinité de solutions :

$$\mathsf{Sol} = \big\{\big(-2-2y,\, y,\, 2\big)\, y \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

$$
\begin{tikzcd}
 & k = 1 \text{ incompatible} & \\
k \arrow[ur] \arrow[dr] & & k = 2 \text{ solutions infinies} \\
 & k \neq 1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & k \neq 2 \text{ solution unique}
\end{tikzcd}
$$

Enfin, supposons $k \neq 1$ et $k \neq 2$. Notre équation en y se résout alors comme :

$$y \,=\, \frac{2}{k-1}.$$

La première équation devient :

$$x + 2\,\frac{2}{k-1} + 3\,\frac{2}{k-1} \,=\, 4,$$

et permet de trouver la valeur de :

$$x \,=\, 4 - \frac{10}{k-1} \,=\, \frac{4\,k-14}{k-1}.$$

En conclusion, la solution, unique, est :

$$x \,:=\, \frac{4\,k-14}{k-1}, \qquad\qquad y \,:=\, \frac{2}{k-1}, \qquad\qquad z \,:=\, \frac{2}{k-1}.$$

Exercice 4. (a) Suivant les valeurs du paramètre $t \in \mathbb{R}$, trouver l'ensemble des solutions du système linéaire :

$$
\begin{aligned}
x + \,y &= 1, \\
2\,x + t\,y &= 2\,t.
\end{aligned}
$$

(a) La matrice complète de ce système dépendant du paramètre $t \in \mathbb{R}$ a pour forme échelonnée :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & t & 2t \end{array}\right] \quad\longmapsto\quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-2 & 2t-2 \end{array}\right].$$

La deuxième équation :

$$(t-2)\,y \,=\, 2\,t-2,$$

a pour solution, quand $t \neq 2$:

$$y \,=\, \frac{2\,t-2}{t-2},$$

puis :

$$x + \frac{2\,t-2}{t-2} \,=\, 1 \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad x \,=\, 1 - \frac{2\,t-2}{t-2} \,=\, -\,\frac{t}{t-2},$$

donc pour $t \neq 2$, il y a la solution unique :

$$x := -\frac{t}{t-2} \qquad\qquad y := \frac{2\,t-2}{t-2}.$$

Pour $t = 2$, la deuxième équation est impossible :

$$(2-2)\,y = \mathbf{0} \overset{!}{=} 2 = 2\cdot 2 - 2,$$

donc dans ce (dernier) cas, le système est incompatible.

Exercice 5. **(a)** Suivant les valeurs du paramètre $k \in \mathbb{R}$, discuter, et trouver, les solutions exactes du système linéaire :

$$\begin{aligned} y + 2\,k\,z &= 0, \\ x + 2\,y + \quad 6\,z &= 2, \\ k\,x \qquad + \quad 2\,z &= 1. \end{aligned}$$

(a) Après interversion des lignes 1 et 2, la matrice complète du système peut être soumise à un pivot sur sa première colonne, puis sur sa deuxième colonne :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2k & 0 \\ k & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2k & 0 \\ 0 & -2k & 2-6k & 1-2k \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 2-6k+4k^2 & 1-2k \end{array}\right].$$

La dernière équation se lit, grâce à la factorisation :

$$\begin{aligned} 2 - 6\,k + 4\,k^2 &= 4\left(k^2 - \tfrac{3}{2}\,k + \tfrac{1}{2}\right) \\ &= 4\,(k-1)\left(k - \tfrac{1}{2}\right) \\ &= 2\,(k-1)\,(2\,k-1), \end{aligned}$$

comme :

$$2\,(k-1)\,(2\,k-1)\,z = -\,(2\,k-1).$$

À nouveau, il y a le piège d'un même facteur, ici $(2\,k-1)$, à gauche et à droite, comme dans les Exercices 2 et 3, et à nouveau, il ne faut surtout pas diviser par $2\,k-1$.

En tout cas, les valeurs de k pour lesquelles ce facteur s'annule, à savoir :

$$k = 1 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad k = \tfrac{1}{2},$$

sont exceptionnelles, et requièrent chacune une étude indépendante.

Commençons par le cas « *générique* », en supposant $k \neq 1$ et $k \neq \frac{1}{2}$. Alors on peut résoudre la ligne 3 :

$$z := -\frac{1}{2}\,\frac{1}{k-1},$$

puis remonter à la ligne 2 :

$$y + 2\,k\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{k-1}\right) = 0 \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad y = \frac{k}{k-1},$$

et enfin, terminer par la ligne 1 :

$$x + 2\left(\frac{k}{k-1}\right) + 6\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{k-1}\right) = 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{aligned} x &= 2 - \frac{2\,k}{k-1} + \frac{3}{k-1} \\ &= \frac{2\,k - 2 - 2\,k + 3}{k-1} \\ &= \frac{1}{k-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $k \neq 1$ et $k \neq \frac{1}{2}$, il y a la solution unique :

$$x := \frac{1}{k-1}, \qquad\qquad y := \frac{k}{k-1}, \qquad\qquad z := -\frac{1}{2}\,\frac{1}{k-1}.$$

$$\begin{tikzcd}
 & k \neq \frac{1}{2} \text{ et } k \neq \frac{1}{2} \text{ solution unique} \\
k \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & k = \frac{1}{2} \text{ solutions infinies} \\
 & k = 1 \text{ système incompatible}
\end{tikzcd}$$

Ensuite, traitons le cas $k = \frac{1}{2}$. La dernière équation se résume à $0 = 0$:

$$2\left(\tfrac{1}{2} - 1\right)\left(\underline{2 \cdot \tfrac{1}{2} - 1}\right) 2 \;=\; -\left(\underline{2 \cdot \tfrac{1}{2} - 1}\right),$$

donc il ne reste que *deux* équations, à *trois* variables x, y, z :

$$\begin{aligned} x + 2\,y + \quad 6\,z &= 2, \\ y + 2 \cdot \tfrac{1}{2}\,z &= 0, \end{aligned}$$

que l'on résout aisément :

$$x + 2\,(-z) + 6\,z \;=\; 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \;=\; 2 - 4\,z,$$

$$y \;=\; -\,z,$$

d'où :

$$\mathsf{Sol} \;=\; \big\{ \big(2 - 4z,\; -z,\; z\big) \colon\; z \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \big\}.$$

Enfin, le dernier cas $k = 1$ a pour ligne 3 l'équation impossible $0 \overset{!}{=} -1$:

$$2\,(\underline{1 - 1})\,(2 \cdot 1 - 1)\,z \;\overset{!}{=}\; -\,(2 \cdot 1 - 1),$$

donc le système n'a aucune solution lorsque $k = 1$.

Exercice 6. **(a)** Déterminer une relation/équation sur les 3 paramètres g, h, k afin que le système suivant soit compatible :

$$\begin{aligned} x - 4\,y + 7\,z &= g, \\ 3\,y - 5\,z &= h, \\ -2\,x + 5\,y - 9\,z &= k. \end{aligned}$$

(a) On applique la méthode du pivot pour échelonner la matrice complète de ce système :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & h \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & \boxed{3} & -5 & h \\ 0 & -3 & 5 & 2g + k \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & 0 & 0 & 2g + h + k \end{array}\right],$$

donc une condition nécessaire pour la compatibilité est :

$$2\,g + h + k \;=\; 0,$$

puisque nous savons bien qu'un système du type :

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{*} \end{array}\right],$$

est *in*compatible dès que l'étoile soulignée $\underline{*} \neq 0$ est non nulle, à cause de la dernière équation :

$$\mathbf{0}\,x + \mathbf{0}\,y + \mathbf{0}\,z \;=\; \underline{*}.$$

Inversement, lorsque $2\,g + h + k = 0$, on peut supprimer la dernière ligne inutile, et considérer le système suivant de 2 équations à 3 variables :

$$\begin{aligned} x - 4\,y + 7\,z &= g, \\ 3\,y - 5\,z &= h, \end{aligned}$$

dont la matrice complète est de la forme :

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \end{array}\right],$$

et nous savons qu'un tel système linéaire est toujours compatible, avec une infinité de solutions.

D'ailleurs, on peut trouver (exercice — mais cela n'était pas demandé) :

$$\mathsf{Sol} \;=\; \Big\{ \big(g + \tfrac{4}{3}h - \tfrac{1}{3}z,\; \tfrac{1}{3}h + \tfrac{5}{3}\,z,\; z\big) :\; z \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \Big\}.$$

Exercice 7. **(a)** On suppose que le système suivant :

$$\begin{aligned} x + 3\,y &= f, \\ c\,x + d\,y &= g, \end{aligned}$$

est compatible pour tous paramètres $f, g \in \mathbb{R}$. Que dire de c et d ?

(a) Pivotons la colonne 1 :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & f \\ c & d & g \end{array}\right] \quad \longmapsto \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & f \\ 0 & d - 3c & g - cf \end{array}\right].$$

La forme générale est :

$$\begin{array}{cc|c} x & y & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \underline{*} & * \end{array}\right].$$

Quand l'étoile souligné $\underline{*} = \blacksquare$ est un nombre réel *non nul*, nous savons que le système est compatible, et qu'il y a une solution unique.

Examinons donc le cas restant où l'étoile soulignée en question est nulle :

$$d - 3\,c \;=\; 0.$$

La dernière équation 2 du système devient alors :

$$(d - 3\,c)\,y \;=\; \mathbf{0} \overset{?}{=} g - c\,f,$$

et pour avoir compatibilité, on devrait donc avoir :

$$g - c\,f \;=\; 0,$$

cela, $\forall\, f \in \mathbb{R}$ et $\forall\, g \in \mathbb{R}$, ce qui est impossible (exercice mental).

En conclusion, le système est compatible $\forall\, f \in \mathbb{R}$ et $\forall\, g \in \mathbb{R}$ si et seulement si son déterminant est non nul :

$$0 \neq d - 3\,c = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Exercice 8. **(a)** Trouver $h \in \mathbb{R}$ tel que le système suivant soit compatible :

$$\begin{aligned} 2\,x + 3\,y &= h, \\ 4\,x + 6\,y &= 7. \end{aligned}$$

(b) Faire de même pour le système :

$$\begin{aligned} x - 3\,y &= -\,2, \\ 5\,x + h\,y &= -\,7. \end{aligned}$$

(a) Pivotons :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & h \\ 4 & 6 & 7 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & h \\ 0 & 0 & 7-2h \end{array}\right],$$

et concluons que ce système linéaire est compatible si et seulement si $7 - 2\,h = 0$, c'est-à-dire ssi $h = \frac{7}{2}$.

(b) Pivotons :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 5 & h & -7 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & h+15 & 3 \end{array}\right].$$

Quand $h \neq -15$, ce système a une solution unique :

$$x := -\frac{21 + 2\,h}{15 + h}, \qquad\qquad y := \frac{3}{15 + h}.$$

Quand $h = -15$, il est incompatible, parce que l'équation 2 est impossible :

$$\big(-\,15 + 15\big)\,2 = \mathbf{0} \overset{!}{=} 3.$$

Exercice 9. Choisir les paramètres h et k afin que chacun des deux systèmes linéaires suivants

$$\textbf{(a)}\quad \begin{aligned} x + h\,y &= 2 \\ 4\,x + 8\,y &= k \end{aligned} \qquad\qquad \textbf{(b)}\quad \begin{aligned} x + 3\,y &= 2 \\ 3\,x + h\,y &= k \end{aligned}$$

aient :

- 1 solution unique ;
- une infinité de solutions ;
- aucune solution.

(a) Pivotons :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & h & 2 \\ 4 & 8 & k \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & h & 2 \\ 0 & 8-4h & k-8 \end{array}\right],$$

et concluons :

- 1 solution unique lorsque $8 - 4h \neq 0$, c'est-à-dire $h \neq 2$;
- une infinité de solutions quand $8 - 4\,h = 0$ et $k - 8 = 0$, c'est-à-dire $h = 2$ et $k = 8$;
- aucune solution lorsque $h = 2$ mais $k \neq 8$.

(b) Pivotons :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 3 & h & k \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & h-9 & k-6 \end{array}\right],$$

et concluons :

- 1 solution unique lorsque $h \neq 9$;
- une infinité de solutions quand $h = 9$ et $k = 6$;

- aucune solution lorsque $h = 9$ mais $k \neq 6$.

Exercice 10. **(a)** Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On suppose que le système linéaire suivant est compatible :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= f, \\ c\,x + d\,y &= g, \end{aligned}$$

$\forall\, f \in \mathbb{R}$ et $\forall\, g \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire de a, b, c, d ?

(a) Comme dans le chapitre consacré aux droites dans le plan, éliminons d'abord x :

$$\begin{aligned} c\,\big(a\,x + b\,y &= f\big), \\ a\,\big(c\,x + d\,y &= g\big), \end{aligned} \qquad\qquad \big(b\,c - a\,d\big)\,y = c\,f - a\,g,$$

puis éliminons y :

$$\begin{aligned} d\,\big(a\,x + b\,y &= f\big), \\ b\,\big(c\,x + d\,y &= g\big), \end{aligned} \qquad\qquad \big(a\,d - b\,c\big)\,x = d\,f - b\,g.$$

Certainement, ce système est compatible lorsque :

$$0 \neq a\,d - b\,c = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

et dans ce cas, nous avons déjà vu dans le chapitre sur les droites dans le plan qu'il admet pour solution unique :

$$x := \frac{d\,f - b\,g}{a\,d - b\,c}, \qquad\qquad y := \frac{a\,g - c\,f}{a\,d - b\,c}.$$

Question. *Que dire quand, au contraire,* $a\,d - b\,c = 0$ *?*

Pour que le système soit compatible, il faudrait que les deux équations obtenues :

$$\begin{aligned} \big(a\,d - b\,c\big)\,x &= \mathbf{0} \overset{?}{=} d\,f - b\,g, \\ \big(a\,d - b\,c\big)\,y &= \mathbf{0} \overset{?}{=} a\,g - c\,f, \end{aligned}$$

soient satisfaites, à savoir :

$$\begin{aligned} 0 &\overset{?}{=} d\,f - b\,g, \\ 0 &\overset{?}{=} a\,g - c\,f, \end{aligned}$$

cela, $\forall\, f \in \mathbb{R}$ et $\forall\, g \in \mathbb{R}$.

Or nous sommes dans le cas où $a\,d - b\,c = 0$, et comme l'exercice suppose depuis le début que $a \neq 0$, nous pouvons écrire :

$$d = \frac{b\,c}{a},$$

et remplacer :

$$\begin{aligned} 0 &\overset{?}{=} \tfrac{b\,c}{a}\,f - b\,g, \\ 0 &\overset{?}{=} a\,g - c\,f, \end{aligned}$$

toujours $\forall\, f \in \mathbb{R}$ et $\forall\, g \in \mathbb{R}$.

En prenant par exemple $f := 0$, la deuxième équation devient :

$$0 \overset{?}{=} a\,g,$$

cela, $\forall\, g \in \mathbb{R}$, ce qui est *impossible*, car en prenant $g := 1$, nous déduirions :

$$0 \overset{?}{=} a,$$

contrairement à notre hypothèse initiale $a \neq 0$.

Ainsi, pour que le système soit compatible $\forall\, f$ et $\forall\, g$, il est impossible que $a\,d - b\,c = 0$.

En conclusion, le système est compatible $\forall\, f$ et $\forall\, g$ si et seulement si $0 \neq a\,d - b\,c$.

Espaces vectoriels $\vec{V}_{\mathbb{R}^2}$, $\vec{V}_{\mathbb{R}^3}$, ..., $\vec{V}_{\mathbb{R}^n}$ et équations vectorielles

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

D'importantes propriétés des systèmes linéaires peuvent être interprétées à l'aide du concept de *vecteur*. Ce chapitre établit un lien entre les systèmes linéaires et certaines équations portant sur des vecteurs. Le terme de *vecteur* apparaît dans des contextes mathématiques ou physiques très variés.

Ici, *vecteur* signifiera pour nous *liste ordonnée de nombres réels* [1].

Cette conception assez simple permet d'accéder aussi rapidement que possible à un certain nombre d'applications intéressantes et importantes.

2. Vecteurs de $\vec{V}_{\mathbb{R}^2}$

Nous avons déjà rencontré des matrices à une seule colonne. Voici ce que sont les *vecteurs* de l'espace vectoriel réel à 2 dimensions $\vec{V}_{\mathbb{R}^2}$.

Définition 2.1. L'*espace vectoriel* $\vec{V}_{\mathbb{R}^2}$ est la collection :

$$\vec{V}_{\mathbb{R}^2} := \Big\{ \vec{u} = \binom{u_1}{u_2} :\ u_1 \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\ u_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \Big\},$$

des couples-colonnes, appelés *vecteurs*, de deux nombres réels quelconques, appelés *composantes*, u_1 et u_2, des vecteurs. On prononce « V-$\mathbb{R}$-deux ».

Voici par exemple deux vecteurs concrets :

$$\binom{3}{-1} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \binom{1/5}{1/3}.$$

On écrira parfois, mais peu souvent, $\mathbf{u} = \binom{u_1}{u_2}$ en caractères *gras*, au lieu de $\vec{u}$.

Pour économiser de la place, on écrira aussi parfois et peu souvent, un vecteur colonne tel que $\binom{3}{-2}$ sous la forme *horizontale* $(3, -2)$, avec une *virgule*. Pourquoi diable une virgule ? Afin de ne pas confondre le *vecteur* $(3, -2)$ avec la *matrice* $[3\ \ -2]$, écrite *sans* virgule dans les chapitres précédents, sachant aussi que les deux *matrices* suivantes :

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \neq [3\ \ -2]$$

sont par définition *distinctes*, simplement parce qu'elles ont, respectivement, 1, 2 colonnes, et 2, 1 lignes.

---

1. En fait, toutes les définitions et tous les théorèmes qui vont suivre ont aussi un sens avec des nombres *complexes*, où on rappelle que :

$$\mathbb{C} := \big\{ x + \sqrt{-1}\, y :\ x, y \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \big\}.$$

Des vecteurs et des matrices complexes apparaissent par exemple naturellement en électricité, notamment dans l'étude des circuits dits « RLC ». Toutefois, dans ce cours, nous travaillerons surtout avec des nombres *réels*.

Définition 2.2. Deux vecteurs $\vec{u} = \binom{u_1}{u_2}$ et $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ appartenant à $\vec{V}_{\mathbb{R}^2}$ sont dits *égaux* si leurs composantes coïncident :

$$\vec{u} = \vec{v} \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad \begin{aligned} u_1 &= v_1, \\ u_2 &= v_2. \end{aligned}$$

Par contre-exemple, les deux vecteurs $\binom{5}{7}$ et $\binom{7}{5}$ ne sont *pas* égaux. Il faut bien comprendre qu'un vecteur $\binom{u_1}{u_2}$ est un couple *ordonné* de nombres réels : u_1 vient *avant* u_2.

Définition 2.3. La *somme* $\vec{u} + \vec{v}$ de deux vecteurs $\vec{u} = \binom{u_1}{u_2}$ et $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ est le vecteur :

$$\vec{u} + \vec{v} = \binom{u_1}{u_2} + \binom{v_1}{v_2} := \binom{u_1+v_1}{u_2+v_2},$$

obtenu en additionnant les composantes correspondantes.

Par exemple :

$$\binom{1}{-2} + \binom{2}{5} = \binom{1+2}{-2+5} = \binom{3}{3}.$$

Maintenant, les nombres réels $c \in \mathbb{R}$, qui ne sont *pas* des vecteurs, seront souvent appelés des *scalaires*, afin de les différencier des vecteurs. Il n'ont pas de tête fléchée, comme le fils Guillaume Tell[2].

Définition 2.4. Étant donné un scalaire $c \in \mathbb{R}$ et un vecteur $\vec{u} \in \vec{V}_{\mathbb{R}^2}$, le *dilaté de $\vec{u}$ par le facteur c* est le *vecteur :*

$$c\,\vec{u} = c\binom{u_1}{u_2} := \binom{c\,u_1}{c\,u_2},$$

obtenu en multipliant également les deux composantes.

Par exemple [belle note finale sur 20 !] :

$$\text{si } c = 5 \text{ et si } \vec{u} = \binom{3}{2} \qquad \text{alors} \qquad c\,\vec{u} = 5\binom{3}{2} = \binom{15}{20}.$$

2. Au $14^{\text{ième}}$ siècle dans la Suisse ancienne, Guillaume « le Tall » était un homme honnête qui avait juré avec d'autres partisans de résister aux seigneurs locaux, car à cette époque-là, sous l'empereur Albert 1^{er} de Habsbourg, les baillis se livraient à des exactions peu scrupuleuses.

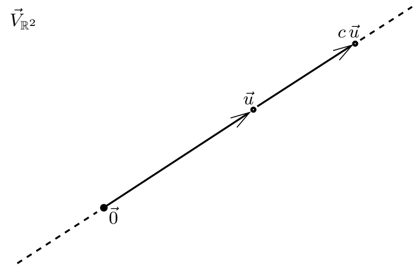
Or le 25 juillet 1307, l'un de ces baillis, Hermann Gessler, fit ériger un poteau sur la place des Tilleuls à Altdorf et y accrocha son chapeau, obligeant ainsi tous les habitants à se courber devant son couvre-chef. Mais le dimanche 18 novembre 1307, « le Tall » passa plusieurs fois devant ce poteau coiffé sans faire le geste exigé. Dénoncé, il comparut dès le lendemain devant Gessler. L'accusé invoqua alors sa distraction et le fait qu'il ignorait l'importance qu'avait le geste pour le bailli.

Gessler lui ordonna alors de percer d'un *carreau d'arbalète*, ou flèche métallique, une pomme posée sur la tête de son propre fils. En cas d'échec, l'arbalétrier était mis à mort. Malgré les supplications de Guillaume Tell, le bailli resta intraitable. Tell s'exécuta et fort heureusement, transperça le fruit sans toucher son enfant.

Mais alors Gessler, ayant vu Tell dissimuler une seconde flèche d'arbalète sous sa chemise, lui en demanda la raison. Tell prétendit d'abord qu'il s'agissait d'une simple habitude. Mais le bailli encouraga Tell à parler sincèrement en lui garantissant la vie sauve. Tell répondit alors sincèrement que si le premier trait avait manqué sa cible, le second aurait été droit au cœur du bailli.

Sur-le-champ, Gessler fit arrêter et jeter en prison Guillaume Tell !

Terminologie 2.5. Les vecteurs $\vec{u}$ et $c\,\vec{u}$ sont dits *colinéaires.*



Pourquoi ? Parce que dans une représentation graphique naturelle, les deux vecteurs $\vec{u}$ et $c\,\vec{u}$ sont situés sur une même droite.

Définition 2.6. Le vecteur nul [en maths ?] est :

$$\vec{0} := \binom{0}{0} \in \vec{V}_{\mathbb{R}^2}.$$

En particulier, avec le choix de $c = 0 \in \mathbb{R}$, observons pour tout vecteur $\vec{u}$ que l'on a :

$$0\,\vec{u} = 0\binom{u_1}{u_2} = \binom{0\,u_1}{0\,u_2} = \binom{0}{0} = \vec{0}.$$

Il en découle une

Observation 2.7. *Pour tout vecteur $\vec{u} \in \vec{V}_{\mathbb{R}^2}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{0} = 0\,\vec{u}$ sont colinéaires.*

Évidemment, on peut combiner les opérations d'addition de vecteurs et de multiplication par des scalaires — tout là est l'intérêt des vecteurs !

Exemple 2.8. Avec $\vec{u} := \binom{1}{-2}$ et $\vec{v} := \binom{2}{-5}$, proposons-nous de calculer :

$$4\,\vec{u}, \qquad \text{puis } (-3)\,\vec{v}, \qquad \text{et enfin } 4\,\vec{u} + (-3)\,\vec{v}.$$

Il est clair que :

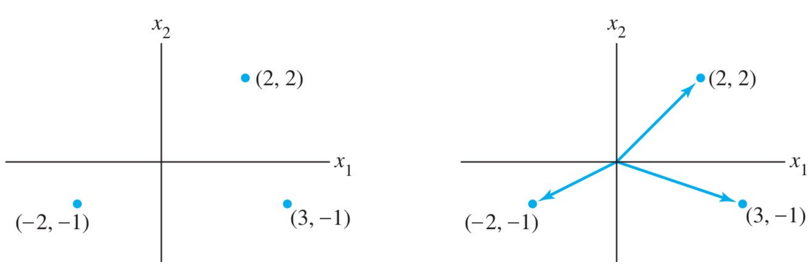
$$4\,\vec{u} = \binom{4}{-8}, \qquad\qquad (-3)\,\vec{v} = \binom{-6}{15},$$

d'où :

$$4\,\vec{u} + (-3)\,\vec{v} = \binom{4}{-8} + \binom{-6}{15} = \binom{-2}{7}.$$

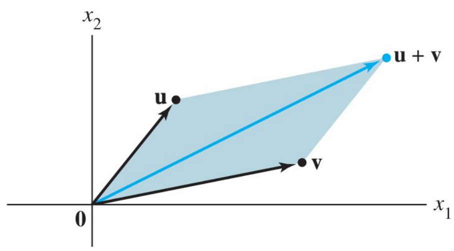
3. Interprétation géométrique de $\vec{V}_{\mathbb{R}^2}$

Considérons un système de coordonnées cartésiennes dans le plan réel à deux dimensions. Puisque tout point est entièrement déterminé par une liste ordonnée de deux nombres réels, on peut identifier un point dans le plan ayant pour coordonnées (p_1, p_2) avec le vecteur-colonne $\vec{p} = \binom{p_1}{p_2}$. On peut donc ainsi « voir » l'espace vectoriel $\vec{V}_{\mathbb{R}^2}$ comme étant l'ensemble des points du plan.



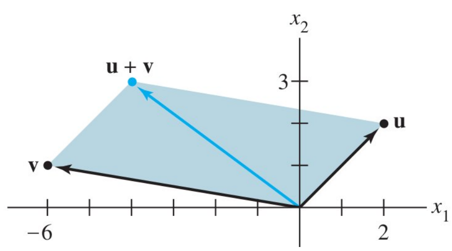
On visualise souvent plus facilement l'interprétation géométrique d'un vecteur tel que $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ en le représentatant par une flèche, ou un segment de droite orienté, allant de l'origine $(0, 0)$ vers le point $(3, -1)$, comme indiqué sur la figure. Mais on ne donne dans ce cas aucune signification particulière aux points situés sur la flèche. D'ailleurs, en physique, les flèches représentent des forces et peuvent en général se déplacer librement dans l'espace.

La somme de deux vecteurs s'interprète géométriquement sans difficulté. On peut vérifier la règle ci-dessous par un calcul en coordonnées.

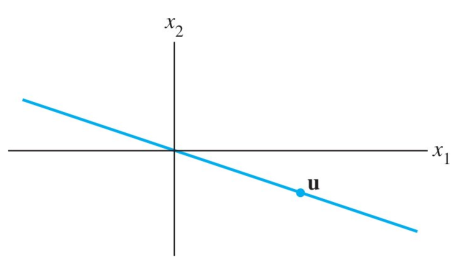


Théorème 3.1. [Règle du parallélogramme] *Si deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{V}_{\mathbb{R}^2}$ sont représentés par des points du plan, alors $\vec{u} + \vec{v}$ correspond au quatrième sommet du parallélogramme dont les trois autres sommets sont $\vec{0}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$.* □

Par exemple, la figure suivante :



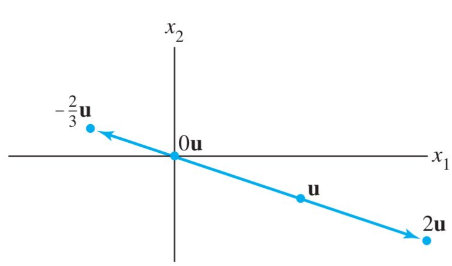
représente les vecteurs $\vec{u} := \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ et $\vec{v} := \left[\begin{smallmatrix} -6 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, ainsi que leur somme $\vec{u} + \vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} -4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$.



L'exemple suivant illustre le fait (bien connu) que l'ensemble des vecteurs colinéaires à un vecteur non nul fixé est une droite passant par l'origine.

Exemple 3.2. Étant donné le vecteur $\vec{u} := \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, on se propose de représenter sur un dessin (un peu coquin) les trois vecteurs :

$$\vec{u}, \qquad\qquad 2\,\vec{u}, \qquad\qquad -\tfrac{2}{3}\,\vec{u}.$$



La flèche correspondant à $2\,\vec{u}$ est deux fois plus longue que celle de $\vec{u}$, et ces deux flèches pointent dans la même direction. La flèche correspondant à $-\frac{2}{3}\,\vec{u}$ a une longueur égale aux deux tiers de celle de $\vec{u}$, mais elle pointe dans la direction *opposée*.

D'une façon générale, si $\vec{u} \in \vec{V}_{\mathbb{R}^2} \backslash \{\vec{0}\}$ est un vecteur non nul quelconque, et si $c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ est un scalaire non nul quelconque, la flèche $c\,\vec{u}$ a une longueur égale à $|c|$ fois la longueur de la flèche $\vec{u}$; de plus, $c\,\vec{u}$ pointe dans la même direction que $\vec{u}$ si $c > 0$, et dans la direction opposée si $c < 0$.

Quand $c = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, on a $c\,\vec{u} = \vec{0}$, *i.e.* toutes les flèches restent concentrées à l'origine, tous les trains restent à quai.

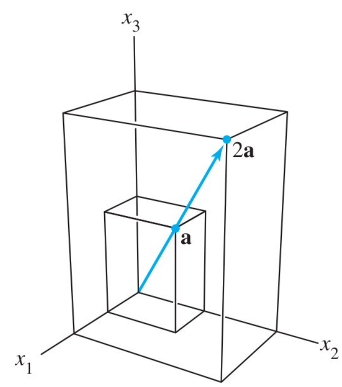
4. Vecteurs de $\vec{V}_{\mathbb{R}^3}$

Les vecteurs de $\vec{V}_{\mathbb{R}^3}$ sont les matrices à trois lignes et à une colonne :

$$\vec{V}_{\mathbb{R}^3} := \left\{ \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} : \ u_1 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}, \ u_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}, \ u_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \right\},$$

munies de l'addition composante par composante et de la multiplication par des scalaires :

$$\begin{aligned} c\,\vec{u} + d\,\vec{v} &= c \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{def}}{:=} \begin{pmatrix} c\,u_1 + d\,v_1 \\ c\,u_2 + d\,v_2 \\ c\,u_3 + d\,v_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Ils s'interprètent géométriquement comme des points dans un espace à trois dimensions, souvent munis, pour plus de clarté, de flèches partant de l'origine. La figure ci-dessus représente les vecteurs :

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad 2\,\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

5. Vecteurs de $\vec{V}_{\mathbb{R}^n}$

Fixons un entier $n \geqslant 1$.

Définition 5.1. Les vecteurs de $\vec{V}_{\mathbb{R}^n}$ sont les matrices à n lignes et à une colonne :

$$\vec{V}_{\mathbb{R}^n} := \left\{ \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} : \ u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R} \text{ quelconques} \right\},$$

munies de l'addition composante par composante et de la multiplication par des scalaires :

$$c\,\vec{u} + d\,\vec{v} = c \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{:=} \begin{pmatrix} c\,u_1 + d\,v_1 \\ c\,u_2 + d\,v_2 \\ \vdots \\ c\,u_n + d\,v_n \end{pmatrix}.$$

Le *vecteur nul* est celui dont toutes les n composantes valent zéro :

$$\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme dans $\vec{V}_{\mathbb{R}^2}$ ou dans $\vec{V}_{\mathbb{R}^3}$, pour tout entier fixé $n \geqslant 1$, on démontre aisément les huit énoncés élémentaires suivants, car il suffit de raisonner ligne par ligne avec de simples nombres réels, et alors tout se ramène à des considérations bien connues.

Proposition 5.2. [Propriétés algébriques de $\vec{V}_{\mathbb{R}^n}$] *Pour tous vecteurs quelconques $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \vec{V}_{\mathbb{R}^n}$ et tous scalaires quelconques $c, d \in \mathbb{R}$, on a :*

(1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

(2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

(3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$.

(4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} = (-\vec{u}) + \vec{u}$*, où* $-\vec{u}$ *désigné par définition* $c\,\vec{u}$ *avec le scalaire* $c := -1$.

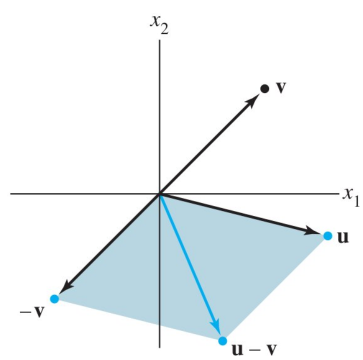
(5) $c\,(\vec{u} + \vec{v}) = c\,\vec{u} + c\,\vec{v}$.

(6) $(c + d)\,\vec{u} = c\,\vec{u} + d\,\vec{u}$.

(7) $c\,(d\,\vec{u}) = (cd)\,\vec{u}$.

(8) $1\,\vec{u} = \vec{u}$. □

Pour simplifier les notations, un vecteur tel que $\vec{u} + (-1)\,\vec{v}$ est noté $\vec{u} - \vec{v}$. Voici une petite figurette en forme de cerf-volant qui montre la construction d'une telle différence entre deux vecteurs :



6. Combinaisons linéaires générales

Étant donné un nombre $p \geqslant 1$ de vecteurs arbitraires $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \in \vec{V}_{\mathbb{R}^n}$, et de scalaires $c_1, c_2, \dots, c_p$ tout aussi arbitraires, on introduit la

Définition 6.1. [Combinaisons linéaires] Le vecteur $\vec{y}$ défini par :

$$\vec{y} := c_1\,\vec{y}_1 + c_2\,\vec{y}_2 + \cdots + c_p\,\vec{y}_p,$$

est appelé *combinaison linéaire* de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$, les scalaires $c_1, c_2, \dots, c_p$ étant appelés *coefficients* de ladite combinaison linéaire.

On observera que la propriété **(2)** ci-dessus permet d'omettre les parenthèses dans l'écriture d'une telle combinaison. On notera aussi que les coefficients d'une combinaison linéaire peuvent être des nombres réels quelconques, éventuellement nuls.

Voici quelques exemples parlants de combinaisons linéaires de deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$:

$$\sqrt{3}\,\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \qquad \tfrac{1}{2}\,\vec{v}_1\big(= \tfrac{1}{2}\,\vec{v}_1 + 0\,\vec{v}_2\big), \qquad \vec{0}\big(= 0\,\vec{v}_1 + 0\,\vec{v}_2\big).$$

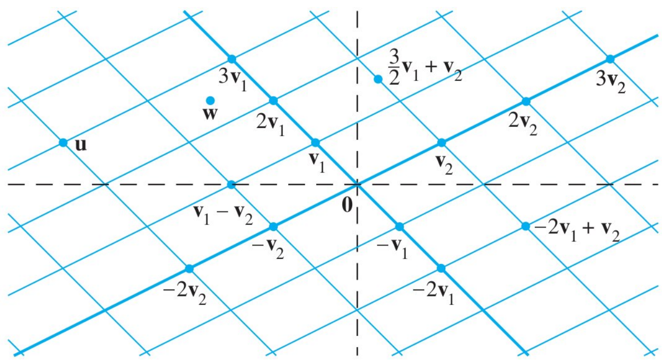
Exemple 6.2. Avec $n = 2$, dans $\vec{V}_{\mathbb{R}^2}$, soient les deux vecteurs :

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

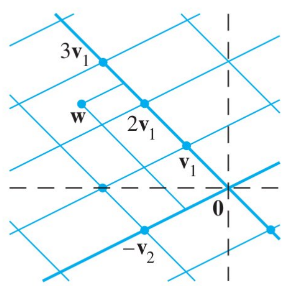
Dans la figure ci-dessous, les droites parallèles formant le quadrillage s'intersectent en les point :

$$k_1\,\vec{v}_1 + k_2\,\vec{v}_2, \qquad k_1 \in \mathbb{Z},\ k_2 \in \mathbb{Z},$$

qui sont les multiples *entiers* (relatifs) de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.



En regardant bien, on trouve dans le quadrant supérieur gauche deux points (vecteurs) $\vec{u}$ et $\vec{w}$. On pose alors la question : *Par quelles combinaisons linéaires $\vec{u}$ et $\vec{w}$ s'expriment-ils en fonction de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$?*



Tout d'abord, la règle du parallélogramme montre que $\vec{u}$ est la somme de $3\,\vec{v}_1$ et de $-2\,\vec{v}_2$, autrement dit :

$$\vec{u} = 3\,\vec{v}_1 - 2\,\vec{v}_2.$$

On peut d'ailleurs interpréter cette expression de $\vec{u}$ comme une suite d'instructions pour aller de l'origine au point $\vec{u}$ en suivant des chemins rectilignes. On parcourt d'abord trois unités dans la direction de $\vec{v}_1$ pour arriver à $3\,\vec{v}_1$, puis -2 unités dans la direction de $\vec{v}_2$, parallèlelement à la droite joignant $\vec{0}$ à $\vec{v}_2$.

Quant au vecteur $\vec{w}$, bien qu'il ne soit pas situé sur le quadrillage, il semble être à peu près à mi-chemin entre deux points de la grille, au sommet d'un parallélogramme défini par $\frac{5}{2}\,\vec{v}_1$ et $-\frac{1}{2}\,\vec{v}_2$. Une estimation raisonnable de $\vec{w}$ est donc :

$$\vec{w} = \tfrac{5}{2}\,\vec{v}_1 - \tfrac{1}{2}\,\vec{v}_2.$$

Le prochain exemple établit un lien profond et universel entre un problème concernant les combinaisons linéaires, et la question fondamentale d'existence de solutions à un système linéaire, traitée dans les chapitres précédents.

Exemple 6.3. Soient les $2 + 1$ vecteurs :

$$\vec{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} := \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\vec{b}$ peut-il s'exprimer comme combinaison linéaire de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$? Autrement dit, existe-t-il des coefficients x_1 et x_2 tels que :

$$\vec{b} \,=\, x_1\,\vec{a}_1 + x_2\,\vec{a}_2 \;? \tag{6.4}$$

En utilisant les définitions de la multiplication et de l'addition de vecteurs, écrivons l'équation vectorielle :

$$x_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{a}_1}}{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}} + x_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{a}_2}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{b}}}{\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -5x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 5x_2 \\ 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ -5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Les deux vecteurs de chaque côté de cette égalité sont égaux si et seulement si les éléments correspondants sont égaux. Autrement dit, x_1 et x_2 vérifient l'équation vectorielle (6.4) si et seulement si x_1 et x_2 sont solutions du système :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -5x_1 + 6x_2 &= -3 \end{aligned}$$

Pour résoudre ce sytème, on applique alors la méthode du pivot de Gauss à sa matrice complète, en utilisant le symbole $\sim$ pour désigner l'équivalence entre les lignes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & 32 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La solution du système linéaire se lit alors facilement, et elle est unique :

$$x_1 \,:=\, 3, \qquad\qquad x_2 \,:=\, 2.$$

Et on vérifie qu'on a bien :

$$3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Dans cet exemple simple et instructif, remarquons alors que les $2+1$ vecteurs initiaux $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ et $\vec{b}$ sont les colonnes de la matrice complète que nous avons transformée en matrice échelonnée réduite :

$$\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{bmatrix}} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{b} \end{array}$$

Si, pour abréger cela, on écrit cette matrice en mettant simplement le nom de ses colonnes, c'est-à-dire :

$$\left[\, \vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \middle| \quad \vec{b}\, \right],$$

alors on voit clairement que l'on peut écrire la matrice complète du système à partir de cette information.

Il n'est pas difficile de généraliser l'exemple qui précède, ce qui nous conduit à un énoncé très important.

Théorème 6.5. *Une équation vectorielle :*

$$x_1\, \vec{a}_1 + x_2\, \vec{a}_2 + \cdots + x_p\, \vec{a}_p \;=\; \vec{b},$$

a le même ensemble de solutions que le système linéaire dont la matrice complète est :

$$\left[\, \vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_p \quad \middle| \quad \vec{b}\, \right].$$

En particulier, on peut écrire $\vec{b}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p$ si et seulement si le système linéaire en question admet au moins une solution. □

En Algèbre Linéaire, l'une des principales questions qui se posent est l'étude de l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent comme des combinaisons linéaires d'un ensemble pré-donné de vecteurs.

Définition 6.6. Dans $\vec{V}_{\mathbb{R}^n}$, soit un nombre $p \geqslant 1$ de vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$. L'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ est noté :

$$\text{Vect}\left\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\right\} \;:=\; \Big\{c_1\, \vec{v}_1 + \cdots + c_p\, \vec{v}_p \colon\; c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}\, \text{quelconques}\Big\},$$

et il est appelé *partie de $\vec{V}_{\mathbb{R}^n}$ engendrée par les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$.*

Autrement dit, Vect $\left\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\right\}$ est l'ensemble de tous les vecteurs qui s'écrivent sous la forme :

$$c_1\, \vec{v}_1 + \cdots + c_p\, \vec{v}_p,$$

avec des scalaires quelconques $c_1, \dots, c_p$.

En particulier, on a toujours $\vec{0} \in$ Vect $\left\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\right\}$, car :

$$\vec{0} \;=\; 0\, \vec{v}_1 + \cdots + 0\, \vec{v}_p.$$

Dire qu'un vecteur $\vec{b}$ appartient à Vect $\left\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\right\}$ revient à dire que l'équation vectorielle :

$$x_1\, \vec{v}_1 + \cdots + x_p\, \vec{v}_p \;=\; \vec{b},$$

possède au moins une solution, ou, de façon équivalente, que le système linéaire de matrice complète $\left[\, \vec{v}_1 \ \cdots \ \vec{v}_p \,\middle|\, \vec{b}\, \right]$ a au moins une solution.

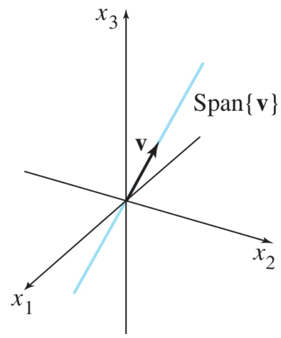
Pour terminer, faisons bien observer que Vect $\left\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\right\}$ contient toujours l'ensemble de tous les vecteurs colinéaire à l'un quelconque des vecteurs $\vec{v}_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, puisque, en prenant $c_i \in \mathbb{R}$ quelconque et les autres scalaires nuls, on a :

$$c_i\, \vec{v}_i \;=\; 0\, \vec{v}_1 + \cdots + 0\, \vec{v}_{i-1} + c_i\, \vec{v}_i + 0\, \vec{v}_{i+1} + \cdots + 0\, \vec{v}_p.$$

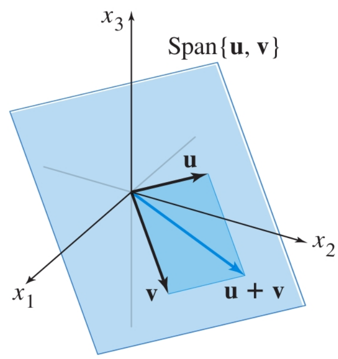
Or comme le vecteur nul $\vec{0}$ est toujours « au centre » de la droite engendrée par un vecteur donné tel que $\vec{v}_i$, on retrouve le fait, vu à l'instant, que $\vec{0}$ appartient toujours à Vect $\left\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\right\}$

7. Interprétation géométrique de $\mathsf{Vect}\,\{\vec{v}\}$ et de $\mathsf{Vect}\,\{\vec{u},\vec{v}\}$

Pour être concret, plaçons-nous dans l'espace $\vec{V}_{\mathbb{R}^3}$ à trois dimensions.



Pour un vecteur non nul $\vec{v} \in \vec{V}_{\mathbb{R}^3} \backslash \{\vec{0}\}$, re-disons que $\mathsf{Vect}\,\{\vec{v}\}$ est l'ensemble de tous les vecteurs colinéaires à $\vec{v}$, qui n'est autre que l'ensemble des points de la droite de $\mathbb{R}^3$ joignant $\vec{0}$ à $\vec{v}$.



De même, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\vec{V}_{\mathbb{R}^3}$ non nuls et non colinéaires, nous affirmons que $\mathsf{Vect}\,\{\vec{u},\vec{v}\}$ est le *plan unique* de $\mathbb{R}^3$ contenant les trois points $\vec{0}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$. En particulier, $\mathsf{Vect}\,\{\vec{u},\vec{v}\}$ contient la droite de $\mathbb{R}^3$ joignant $\vec{0}$ à $\vec{u}$, tout aussi bien que la droite joignant $\vec{0}$ à $\vec{v}$.

Exemple 7.1. Soient les $2+1$ vecteurs :

$$\vec{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_2 := \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} := \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix},$$

les deux premiers n'étant pas colinéaires, puisqu'ils ne sont pas multiples l'un de l'autre. On se pose alors la question : *le vecteur $\vec{b}$ appartient-il au plan* $\mathsf{Vect}\,\{\vec{a}_1,\vec{a}_2\}$? Autrement dit, l'équation $x_1\,\vec{a}_1 + x_2\,\vec{a}_2 = \vec{b}$ a-t-elle une solution ?

Pour répondre à cette question, on applique la méthode du pivot à la matrice complète $[\,\vec{a}_1\;\vec{a}_2 \mid \vec{b}\,]$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -2 & -13 & 8 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -18 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Mais comme la dernière équation tout à droite en bas signifie l'absurdité :

$$x_1\,0 + x_2\,0 \;=\; 0 \;=\; -\,2,$$

il est (malheureusement) clair que ce système n'a pas de solution. Donc le vecteur $\vec{b}$ n'appartient *pas* au plan $\mathsf{Vect}\,\{\vec{a}_1,\vec{a}_2\}$.

8. Exercices d'entraînement

Exercice d'entraînement 1. Démontrer véritablement la propriété **(1)** de la Proposition 5.2, c'est-à-dire que pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{V}_{\mathbb{R}^n}$, l'addition vectorielle commute :

$$\vec{u} + \vec{v} \overset{?}{=} \vec{v} + \vec{u}.$$

Empoignons donc gaillardement deux vecteurs arbitraires $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{V}_{\mathbb{R}^n}$, lesquels sont deux matrices à n lignes et à une colonne, mais notons-les sous la forme horizontale $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ plus économique en espace vertical dans ce polycopié, puis calculons-raisonnons :

$$\begin{aligned}
\vec{u} + \vec{v} &= \big(u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n\big) && \text{[Définition de l'addition vectorielle]} \\
&= \big(v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n\big) && \text{[Commutativité de l'addition dans } \mathbb{R}\text{]} \\
&= \vec{v} + \vec{u} && \text{[Définition de l'addition vectorielle]}
\end{aligned}$$

Éh oui ! Tout se ramène sur chaque ligne à l'addition dans $\mathbb{R}$!

Exercice d'entraînement 2. Soit un paramètre $h \in \mathbb{R}$ et soient les $3+1$ vecteurs :

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} := \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{pmatrix}.$$

Déterminer la ou les valeurs de h telles que le vecteur $\vec{y}$ appartienne à l'ensemble Vect $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

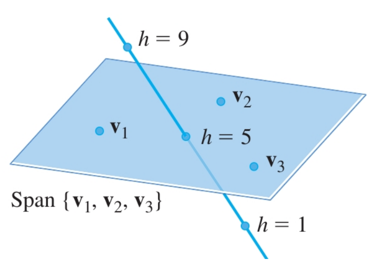
Comme nous le savons, $\vec{y}$ appartient à Vect $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ si et seulement si il existe des scalaires x_1, x_2, x_3 tels que :

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{bmatrix}$$

Cette équation vectorielle équivaut à un système de trois équations linéaires à trois inconnues. Par la méthode du pivot, on calcule :

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ -1 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & h-8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h-5 \end{bmatrix}$$

Le système est compatible si et seulement s'il n'y a pas de pivot dans la quatrième colonne tout à gauche, c'est-à-dire que $h - 5$ doit être égal à 0. En définitive, $\vec{y}$ appartient à Vect $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ si et seulement si $h = 5$.



La figure montre que Vect $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ n'est pas tout l'espace $\vec{V}_{\mathbb{R}^3}$, mais un *plan*. Elle montre aussi qu'en faisant varier le paramètre $h \in \mathbb{R}$, l'ensemble des vecteurs *paramétrés par* h :

$$\vec{y} = \vec{y}_h = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{pmatrix},$$

constitue une droite, et que cette droite n'intersecte ledit plan que pour la valeur $h = 5$. On « visualise » ainsi ce qui vient de se passer au niveau des calculs.

Exercice d'entraînement 3. Dans $\vec{V}_{\mathbb{R}^n}$ avec $n \geqslant 1$ fixé, soient $3+2$ vecteurs quelconques (comme les flèches de notre carquois mathématique) :

$$\vec{w}_1, \quad \vec{w}_2, \quad \vec{w}_3, \qquad\quad \vec{u}, \quad \vec{v}.$$

On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ appartiennent à Vect $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$. Montrer que $\vec{u}+\vec{v}$ est aussi dans Vect $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$.

Par hypothèse, comme les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ appartiennent à Vect $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$, il existe des scalaires c_1, c_2, c_3 et des scalaires d_1, d_2, d_3 tels que :

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= c_1\,\vec{w}_1 + c_2\,\vec{w}_2 + c_3\,\vec{w}_3, \\
\vec{v} &= d_1\,\vec{w}_1 + d_2\,\vec{w}_2 + d_3\,\vec{w}_3.
\end{aligned}$$

Mais alors une coagulation naturelle entre molécules :

$$\begin{aligned}
\vec{u}+\vec{v} &= c_1\,\vec{w}_1 + c_2\,\vec{w}_2 + c_3\,\vec{w}_3 + d_1\,\vec{w}_1 + d_2\,\vec{w}_2 + d_3\,\vec{w}_3 \\
&= (c_1+d_1)\,\vec{w}_1 + (c_2+d_2)\,\vec{w}_2 + (c_3+d_3)\,\vec{w}_3,
\end{aligned}$$

montre, puisque les trois coefficients $c_i + d_i$ sont encore des scalaires, que $\vec{u}+\vec{v}$ appartient bien à Vect $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$.

9. Applications linéaires du plan $\mathbb{R}^2$ dans lui-même

Donnons quelques exemples d'applications linéaires de l'espace vectoriel réel classique à deux dimensions dans lui-même :

$$f\colon \quad \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^2}.$$

Dès qu'on munit les deux espaces $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^2}$ de départ et $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^2}$ d'arrivée de la (même) base canonique constituée des deux vecteurs $\vec{e}_1 := \binom{0}{1}$ et $\vec{e}_2 := \binom{0}{1}$, on sait d'après le cours général qu'une telle application linéaire envoie un vecteur quelconque :

$$\vec{x} = x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2,$$

sur le vecteur :

$$f(\vec{x}) = x_1\,f(\vec{e}_1) + x_2\,f(\vec{e}_2),$$

et en connaissant les coordonnées des vecteurs-images :

$$f(\vec{e}_1) = a_{1,1}\,\vec{e}_1 + a_{2,1}\,\vec{e}_2 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad f(\vec{e}_2) = a_{1,2}\,\vec{e}_1 + a_{2,2}\,\vec{e}_2,$$

où les $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ sont certaines constantes bien définies par l'application f, il vient après réorganisation :

$$\begin{aligned}
f(\vec{x}) &= x_1\,\big(a_{1,1}\,\vec{e}_1 + a_{2,1}\,\vec{e}_2\big) + x_2\,\big(a_{1,2}\,\vec{e}_1 + a_{2,2}\,\vec{e}_2\big) \\
&= \big(\underbrace{a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2}_{=:\,y_1}\big)\,\vec{e}_1 + \big(\underbrace{a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2}_{=:\,y_2}\big)\,\vec{e}_2 \\
&=: y_1\,\vec{e}_1 + y_2\,\vec{e}_2.
\end{aligned}$$

Pour cette raison, on peut *identifier* l'application *linéaire* entre les deux espaces vectoriels $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^2}$ à l'application *ponctuelle* suivante entre les deux espaces de points $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ munis de coordonnées respectives (x_1, x_2) et (y_1, y_2), définie par les deux formules :

$$\begin{aligned}
y_1 &:= a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2, \\
y_2 &:= a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2.
\end{aligned}$$

Ces deux formules peuvent aussi s'écrire sous la forme matricielle compacte et mnémotechnique :

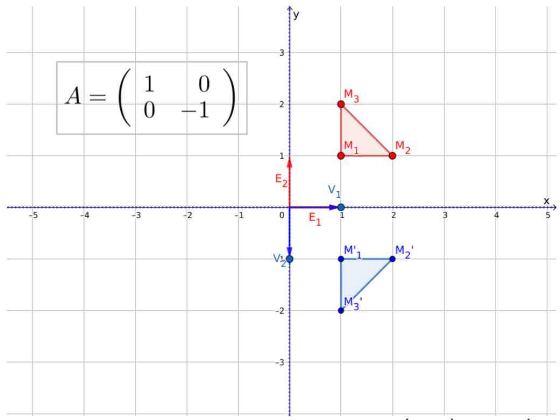
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Les figures suivantes sont tirées d'un autre cours d'« *Algèbre et Géométrie* ».

Au lieu de (x_1, x_2) et (y_1, y_2), les coordonnées sont notées (x, y) et (x', y').

De plus, trois points significatifs M_1, M_2, M_3 sont représentés dans le plan, et leurs images respectives M_1', M_2', M_3' par l'application linéaire f. La première figure représente la symétrie orthogonale d'axe $0x$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\,y \end{pmatrix}.$$



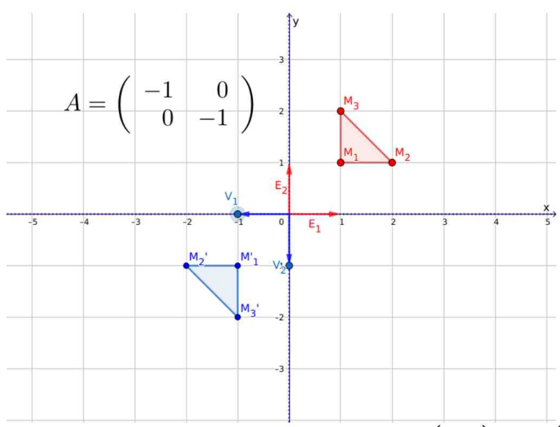
Symétrie orthogonale d'axe (Ox) : $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

En rouge sont représentés les vecteurs de base, notés $E_1 := \binom{0}{1}$ et $E_2 := \binom{0}{1}$. En bleu sont représentés les deux vecteurs-images, notés :

$$V_1 := f(E_1) \qquad \text{et} \qquad V_2 := f(E_2).$$

Ensuite, la deuxième figure représente la symétrie centrale de centre l'origine $(0,0)$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\,x \\ -\,y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

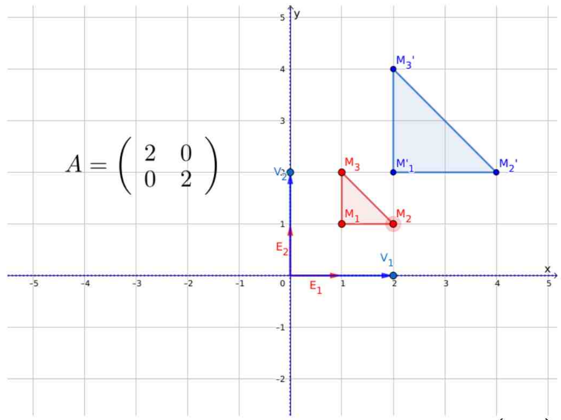


Symétrie centrale de centre l'origine O : $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

La troisième figure représente l'*homothétie* de centre l'origine $(0,0)$ et de rapport 2 :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x \\ 2\,y \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire la transformation « gonflement-doublement de ballon ». D'ailleurs, une symétrie centrale est une homothétie de rapport -1.

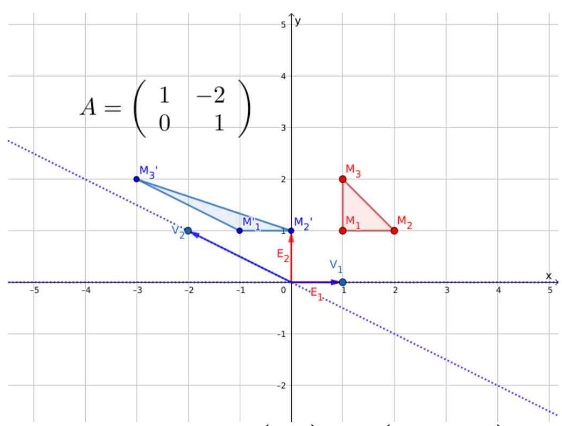


Homothétie de centre l'origine O et de rapport 2 : $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

La quatrième figure représente une *transvection* amusante :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ y \end{pmatrix},$$

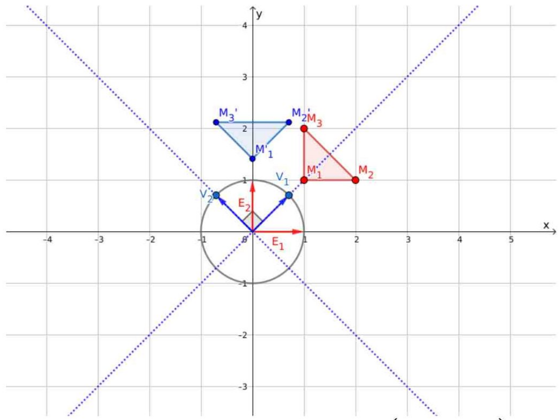
c'est-à-dire une transformation qui fait glisser les points du plan sur leurs droites horizontales respective. N'est-elle pas belle, cette transvection ! ?



Transvection : $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ y \end{pmatrix}$

La cinquième et dernière figure représente une *rotation* d'angle $\frac{\pi}{4}$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



Généralement, une rotation d'angle fixé $\theta \in \mathbb{R}$ s'exprime au moyen des nombres complexes $z = x + i\,y$ et $z' = x' + i\,y'$ comme une multiplication par $e^{i\theta}$:

$$\begin{aligned} x' + i\,y' \,=\, z' &:= e^{i\theta}\,z \\ &= \big(\cos\theta + i\sin\theta\big)\,\big(x + i\,y\big) \\ &= \cos\theta\cdot x - \sin\theta\cdot y + i\,\big(\sin\theta\cdot x + \cos\theta\cdot y\big), \end{aligned}$$

d'où en coordonnées réelles la représentation matricielle d'une rotation :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Enfin, on sait que :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \,=\, \cos\frac{\pi}{4} \,=\, \sin\frac{\pi}{4}.$$

10. Exercices

Exercice 1.

Droites dans le plan

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

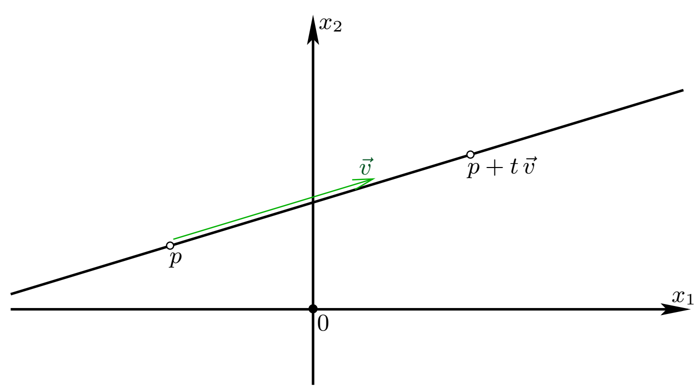
1. Introduction

2. Droites dans le plan : définition paramétrique et équations cartésiennes

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées (x_1, x_2), on se donne un point quelconque $p = (p_1, p_2)$ et un vecteur $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$, que l'on suppose *non nul*, c'est-à-dire :

$$(v_1, v_2) \neq (0, 0).$$

Plus précisément, on suppose que v_1 et v_2 ne sont pas *simultanément* égaux à 0 ; toutefois, l'un d'entre eux peut être *nul* [en doublette à la pétanque ?], pourvu que l'autre ne soit *pas* nul.



Définition 2.1. Une *droite* dans le plan $\mathbb{R}^2$ représentée de manière *paramétrique* est un ensemble de points du type :

$$D := \big\{p + t\vec{v} \colon \ t \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\} \ \subset \ \mathbb{R}^2.$$

Si jamais on avait pris le vecteur nul $\vec{v} = \vec{0} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, on n'aurait pas introduit une *droite*, on aurait bêtement introduit un ensemble réduit à l'unique point $p + t\,\vec{0} = p$.

Le paramètre $t \in \mathbb{R}$ permet de se déplacer sur la droite, dans deux directions, jusqu'aux deux infinis, pour $-\infty \longleftarrow t$ et pour $t \longrightarrow \infty$.

Autrement dit, les coordonnées (x_1, x_2) d'un point quelconque $(x_1, x_2) := (p_1, p_2) + t\,(v_1, v_2)$ situé sur une telle droite D ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + t\,v_1, \\ x_2 &= p_2 + t\,v_2, \end{aligned}$$

toujours avec $t \in \mathbb{R}$ quelconque. Attention ! Ici, x_1 et x_2 ne sont pas des inconnues !

Mais comme t est un nombre réel quelconque, il est avisé de l'*éliminer*, tout simplement en multipliant la première équation par v_2, la seconde par v_1 :

$$v_2\Big(x_1 \,=\, p_1 + t\,v_1\Big), \qquad\qquad v_2\,x_1 \,=\, p_1\,v_2 + \underline{t\,v_1\,v_2}_{\circ},$$
$$v_1\Big(x_2 \,=\, p_2 + t\,v_2\Big), \qquad\qquad v_1\,x_2 \,=\, p_2\,v_1 + \underline{t\,v_2\,v_1}_{\circ},$$

puis en soustrayant, ce qui donne :

$$v_2\,x_1 - v_1\,x_2 \,=\, p_1\,v_2 - p_2\,v_1.$$

À gauche, on a maintenant deux inconnues x_1 et x_2, avec deux coefficients fixés v_2 et $-v_1$, tandis qu'à droite, on a un coefficient $p_1v_2 - p_2v_1$, qui est une constante.

Théorème 2.2. [Équivalence entre deux définitions] *Une droite $D \subset \mathbb{R}^2$ peut être définie de deux manières équivalentes, comme :*

(i) $D := \big\{p + t\,\vec{v}\colon\ t \in \mathbb{R}\,\textit{quelconque}\big\}$*, avec un point quelconque $p \in \mathbb{R}^2$ et un vecteur* non nul $\vec{v} \in \vec{V}_{\mathbb{R}^2}\backslash\{\vec{0}\}$ *;*

(ii) $D := \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon\ a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0\big\}$*, avec des constantes $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$, telles que* $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$.

La deuxième représentation consiste en une *équation cartésienne*, bien connue des jeunes joueurs [de billes]. Autrement dit, une droite dans $\mathbb{R}^2$ peut toujours être considérée comme l'ensemble des solutions d'un système linéaire *compatible* à une unique équation et à deux inconnues, dont la forme échelonnée réduite peut être ou bien :

$$\big[\ \blacksquare\ \ *\ \ *\ \big] \qquad\qquad \text{ou bien :} \qquad\qquad \big[\ \mathbf{0}\ \ \blacksquare\ \ *\ \big],$$

mais certainement pas :

$$\big[\ \mathbf{0}\ \ \mathbf{0}\ \ \blacksquare\ \big]$$

ce qui correspondrait à $(a_1, a_2) = (0, 0)$ et à $b \neq 0$, car cette forme est la forme générale d'un système *incompatible*, comme nous le savons [de Marseille].

Démonstration. Nous venons de voir que **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)**.

Inversement, suppposons **(ii)** et cherchons à obtenir **(i)**. Partons donc d'une équation cartésienne quelconque :

$$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + b \,=\, 0,$$

et cherchons à la l'écrire sous la forme :

$$v_2\,x_1 - v_1\,x_2 \,=\, p_1\,v_2 - p_2\,v_1.$$

Clairement, par identification des coefficients et x_1 et de x_2, nous voyons qu'il faut choisir :

$$v_1 \,:=\, -\,a_2 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad v_2 \,:=\, a_1. \tag{2.3}$$

Mais le vecteur obtenu $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ est-il bien un vecteur *non nul*, comme la Définition 2.1 l'exigeait ?

Ah mais oui ! Cela tombe bien ! Nous avons supposé dans **(ii)** que $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$, et donc oui, ce vecteur $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{smallmatrix}\right)$ est bien non nul. Ouf !

Ensuite, toujours par identification, sachant que la constante $b \in \mathbb{R}$ est donnée, on voudrait trouver un point $p = (p_1, p_2)$ tel que :

$$\begin{aligned} b &\overset{?}{=} -\,p_1v_2 + p_2\,v_1 \\ &= -\,p_1\,a_1 - p_2\,a_2. \end{aligned}$$

Comme le presti-digit-agitateur tirant un beau lapin blanc de son grand chapeau noir, nous affirmons alors que le choix :

$$p_1 \,:=\, -\,\frac{b\,a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \qquad\qquad p_2 \,:=\, -\,\frac{b\,a_2}{a_1^2 + a_2^2},$$

fonctionne — notons ici qu'on peut diviser par $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$. En effet, vérifions cela par le calcul :

$$\begin{aligned} b &\overset{?}{=} -\Big(-\,\frac{b\,a_1}{a_1^2+a_2^2}\Big)\,a_1 - \Big(-\,\frac{b\,a_2}{a_1^2+a_2^2}\Big)\,a_2 \\ &= \frac{b\,a_1\,a_1}{a_1^2+a_2^2} + \frac{b\,a_2\,a_2}{a_1^2+a_2^2} \\ &= b\,\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1^2+a_2^2} \qquad\qquad \text{OUI !} \end{aligned}$$

En conclusion, nous avons trouvé un vecteur non nul et un point du plan qui nous permettent de représenter notre droite cartésienne sous une forme paramétrique. □

Nous allons encore donner deux autres définitions équivalentes des droites $D \subset \mathbb{R}^2$ dans le plan. Mais auparavant, ouvrons une parenthèse.

3. Travail mathématique avec des lettres littérales

Nous utiliserons dorénavant deux coordonnées notées (x, y) au lieu de (x_1, x_2). Nous travaillerons avec des équations cartésiennes de droites quelconques :

$$a\,x + b\,y \,=\, c,$$

où les lettres a, b, c désignent des nombres réels fixés, qui peuvent prendre n'importe quelle valeur. Dans les exercices de TD et d'examen, souvent, a, b, c, auront des valeurs précises, c'est-à-dire des nombres réels concret et parlants, comme 3, 5, 7, ou encore -1, 2, -5.

Mais le raisonnement mathématique abstrait exige de comprendre tout ce qui peut se passer en général. Après les mathématiques de l'école maternelle, il faut apprendre les mathématiques supérieures de l'école universitaire ! C'est pourquoi on utilise des lettres pour désigner des nombres réels « *formels* » quelconques, et nous serons alors fréquemment amenés à *distinguer plusieurs cas* suivant les valeurs de ces nombres a, b, c.

Si l'on devait résoudre par exemple l'équation tout simple et toute sotte :

$$a\,x \,=\, 0,$$

il est clair qu'on ne pourrait pas toujours déduire que $x = 0$, car ... ah mince alors ! Et si a était égal à 0 ? On aurait juste $0\,x = 0$, c'est-à-dire l'équation tautologique $0 = 0$, dont on ne peut rien tirer, et alors x pourrait être quelconque. Il est donc *nécessaire* de discuter les deux cas $a \neq 0$ et $a = 0$.

Le point-clé que nous verrons et reverrons intervenir de nombreuses fois, c'est qu'un nombre réel a peut être égal à 0, ou différent de 0, et qu'il faudra toujours tenir compte de ces deux éventualités. Et si on oublie de discuter les cas, cela pourra 'faire mal' en examen !

4. Produit scalaire et vecteur directeur d'une droite

Rappelons que dans $\mathbb{R}^2$, le *produit scalaire euclidien* (canonique) entre deux vecteurs $\vec{u} = \binom{u_1}{u_2}$ et $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ est défini par :

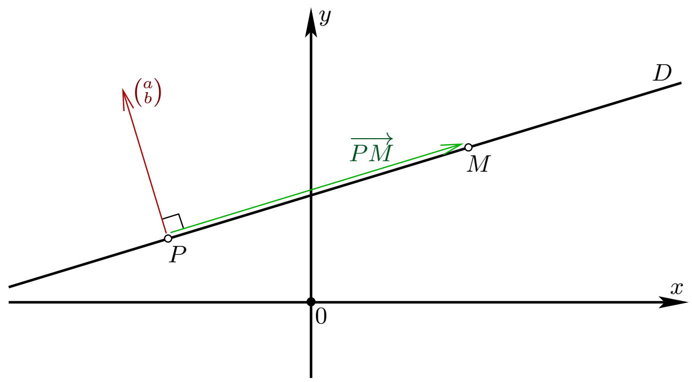
$$\vec{u} \bullet \vec{v} \,=\, \binom{u_1}{u_2} \bullet \binom{v_1}{v_2} \,:=\, u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

À tout couple de vecteurs, le produit *scalaire* associe donc un *nombre réel* (et non pas un vecteur !), ce qu'on appelle un *scalaire*.

Définition 4.1. On dit que deux vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* si $0 = \vec{u} \bullet \vec{v}$, ce qu'on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Soit une droite d'équation cartésienne :

$$a\,x + b\,y \,=\, c.$$



Proposition 4.2. *Une droite $D \subset \mathbb{R}^2$ passant par un point $P \in \mathbb{R}^2$ du plan peut être définie comme l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^2$ tels que le vecteur $\overrightarrow{PM}$ est orthogonal à un vecteur* non nul $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ *donné :*

$$D := \left\{ M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \ \overrightarrow{PM} \perp \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \right\}.$$

Autrement dit :

$$\overrightarrow{PM} \bullet \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) = 0.$$

Démonstration. En effet, si on note $P = (x_P, y_P)$, d'où $\overrightarrow{PM} = \left(\begin{smallmatrix} x - x_P \\ y - y_P \end{smallmatrix}\right)$, un calcul de produit scalaire donne :

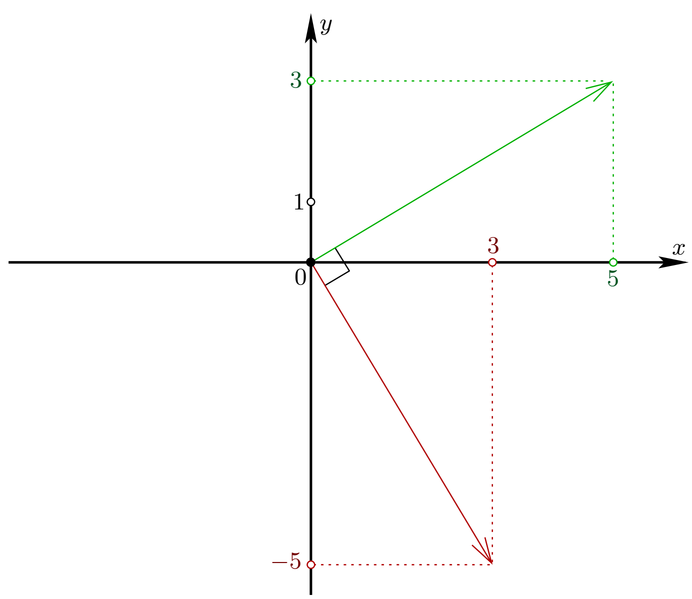
$$0 = \overrightarrow{PM} \bullet \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x - x_P \\ y - y_P \end{smallmatrix}\right) \bullet \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) = a \left(x - x_P\right) + b \left(y - y_P\right),$$

équation que l'on peut réorganiser sous la forme :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= a\,x_P + b\,y_P \\ &=: c. \end{aligned}$$

Or puisque a, b, x_P, y_P sont des constantes données, on peut abréger le membre de droite en posant $c := a\,x_P + b\,y_P$, et donc, nous trouvons bien l'équation cartésienne d'une droite.

La réciproque est laissée au lecteur comme exercice de réflexion. □



Par exemple, avec le point $P := (0, 1)$ et le vecteur $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) := \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)$, l'équation de droite est :

$$3\,x - 5\,y + 5 = 0.$$

Résumé 4.3. *Étant donné l'équation cartésienne $a\,x + b\,y = c$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ d'une droite dans le plan $\mathbb{R}^2$:*

(1) *le vecteur non nul $\binom{a}{b}$ est orthogonal à D ;*

(2) *le vecteur non nul $\vec{v}_D := \binom{-b}{a}$ est parallèle à D, c'est un vecteur directeur de D.*

Démonstration. En effet, ce vecteur $\binom{-b}{a}$ est trivialement orthogonal au vecteur $\binom{a}{b}$:

$$\binom{-b}{a} \bullet \binom{a}{b} \,=\, (-b)\,a + a\,b \,=\, 0,$$

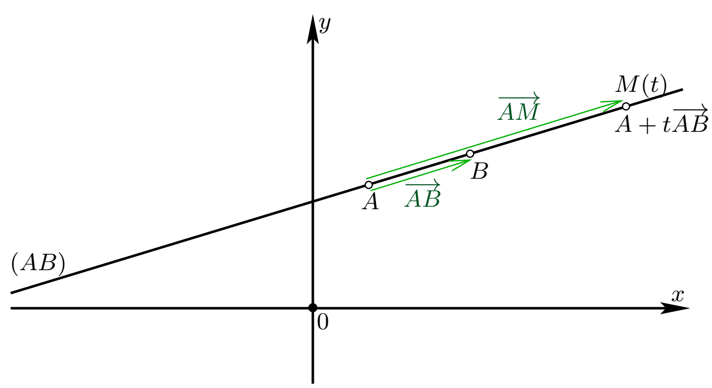
donc comme $\binom{a}{b}$ est par définition orthogonal à la droite, il est clair que $\binom{-b}{a}$ est nécessairement parallèle à la droite. □

Dans l'exemple ci-dessus, le vecteur directeur de la droite est donc $\vec{v}_D = \binom{5}{3}$.

5. Droite passant par deux points distincts

Depuis la classe de math-ernelle, on sait aussi que par deux points distincts $A \neq B$ dans le plan $\mathbb{R}^2$, il passe toujours une et une seule droite, que l'on note traditionnellement (AB). Notons $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$, avec $x_A \neq x_B$ et/ou $y_A \neq y_B$, puisque $(x_A, y_A) \neq (x_B, y_B)$.

Question 5.1. *Comment exprime-t-on qu'un point quelconque $M = (x, y)$ du plan appartient à la droite (AB) ?*



Pour un point $M = (x, y)$ quelconque du plan, considérons le vecteur :

$$\overrightarrow{AM} \,=\, M - A \,:=\, \binom{x - x_A}{y - y_A}.$$

Il est clair que ce vecteur $\overrightarrow{AM}$ doit être parallèle au vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de la droite (AB). Autrement dit, il existe $t \in \mathbb{R}$ — d'ailleurs arbitraire lorsque M parcourt tous les points de la droite (AB) — tel que :

$$\overrightarrow{AM} \,=\, t\,\overrightarrow{AB} \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad \begin{aligned} x - x_A &\,=\, t\,\big(x_B - x_A\big), \\ y - y_A &\,=\, t\,\big(y_B - y_A\big). \end{aligned}$$

Proposition 5.2. *La représentation paramétrique de* la *droite unique (AB) passant par deux points distincts $A \neq B$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ est :*

$$\begin{aligned} x &\,=\, x_A + t\,\big(x_B - x_A\big), \\ y &\,=\, y_A + t\,\big(y_B - y_A\big), \end{aligned}$$

où $t \in \mathbb{R}$ est arbitraire. □

Au « temps zéro », pour $t = 0$, le *point-mobile* :

$$M(t) \;:=\; A + t\,\overrightarrow{AB},$$

est au départ $M(0) = A$. Pour $t = 1$, il est à l'arrivée $B = A + \overrightarrow{AB} = M(1)$.

Pour $0 < t < 1$, le point $M(t)$ est (strictement) entre A et B. Pour $t < 0$, il peine en quarantaine « avant » la frontière A. Et enfin, pour $t > 0$, le point $M(t)$ s'envole au-delà de B vers l'infini !

6. Intersections d'une droite avec les axes $0x$ et $0y$

Comme nous savons que par deux points *distincts* quelconques $A \neq B$, il passe une unique droite, il est intéressant de déterminer les deux points (la plupart du temps distincts, mais pas toujours) d'intersection d'une droite D d'équation $a\,x + b\,y = c$ avec les deux axes de coordonnées $0x$ et $0y$. Et cela est très facile !

Pour être certain que notre droite va vraiment intersecter les deux axes $0x$ et $0y$, nous allons supposer simultanément :

$$a \neq 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad b \neq 0.$$

• L'axe $0x$ est l'ensemble des points $\big\{(x, 0)\colon\; x \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}$. Il peut aussi être vu comme la droite d'équation $y = 0$. Donc il suffit d'intersecter deux droites, c'est-à-dire de résoudre le petit système linéaire :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= c, \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Aussitôt, remplaçons $y = 0$ dans la première équation :

$$a\,x + 0 \;=\; c,$$

et comme on suppose que $a \neq 0$, il vient :

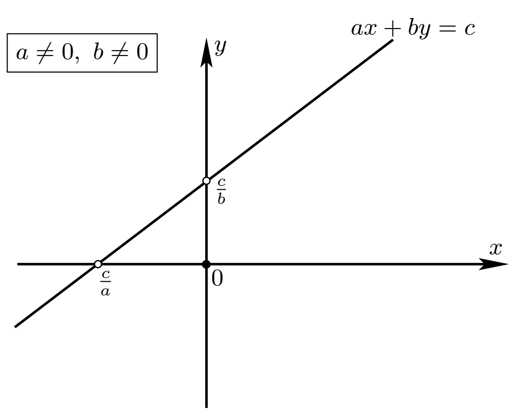
$$x \;=\; \tfrac{c}{a}.$$

• L'axe $0y$ est l'ensemble des points $\big\{(0, y)\colon\; y \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}$. Il peut aussi être vu comme la droite d'équation $x = 0$. Donc on résout de manière similaire :

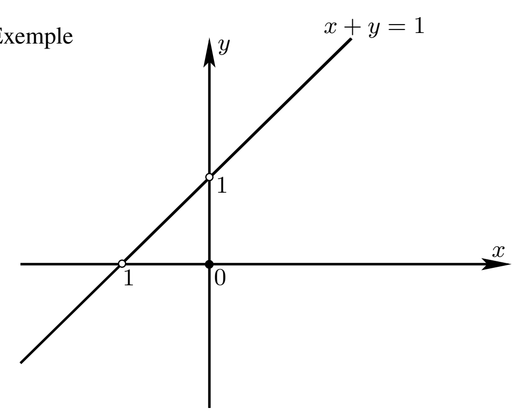
$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= c, \\ x \qquad &= 0, \end{aligned}$$

et comme on suppose que $b \neq 0$, il vient :

$$y \;=\; \tfrac{c}{b}.$$



Exemple



Proposition 6.1. *Soit une droite $D = \big\{a\,x + b\,y = c\big\}$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Les deux points d'intersection de D avec les deux axes $0x$ et $0y$ sont :*

$$\begin{aligned} D \cap \{y = 0\} \,&=\, \big(\tfrac{c}{a}, 0\big), \\ D \cap \{x = 0\} \,&=\, \big(0, \tfrac{c}{b}\big). \end{aligned}$$

Si de plus $c \neq 0$, ces deux points sont distincts, et D est la droite unique passant par ces deux points. □

Mais quand $c = 0$, ces deux points coïncident, et se réduisent à l'origine $(0, 0)$. L'équation est $a\,x + b\,y = 0$, donc la droite passe bien par $(0, 0)$. Or puisqu'on ne peut pas définir une droite avec *un seul* point, on stoppe ces considérations de mathématiques élémentaires.

7. Équation graphée pour une droite

En Analyse, on étudie les fonctions $f(x)$ d'une variable réelle, par exemple $f(x) = \sin x$ ou $f(x) = 1 + x^2 + 5\,x^3$. Et souvent, on regarde la *courbe graphée* associée $x \longmapsto \big(x, f(x)\big)$, ou le *graphe* de f :

$$\big\{\big(x,\, f(x)\big) \colon\; x \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

Mais ici, en Algèbre Linéaire, les choses sont assez simples, très simples, en fait.

Partons en effet de l'équation cartésienne d'une droite quelconque :

$$a\,x + b\,y \,=\, c,$$

où les lettres a, b, c désignent des nombres réels fixés, qui peuvent prendre n'importe quelle valeur. On souhaiterait avoir y en fonction de x. Mais attention ! L'équation étant symétrique en x, y, on pourrait tout aussi bien vouloir x en fonction de y !

Cas 1 : On suppose $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Lorsque $b \neq 0$, il est facile de résoudre :

$$b\,y \,=\, -\,a\,x + c,$$

puis :

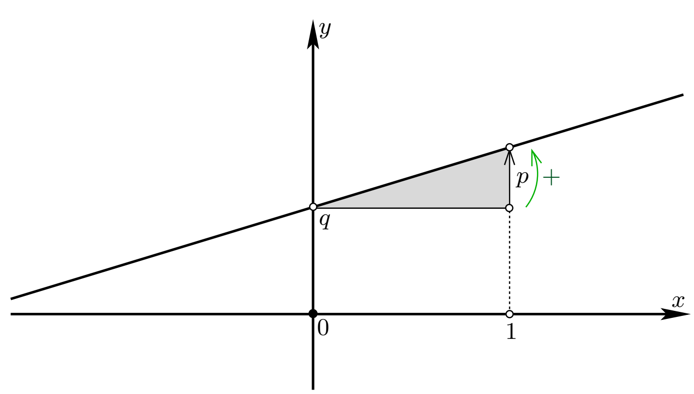
$$\begin{aligned} y \,&=\, -\,\tfrac{a}{b}\,x + \tfrac{c}{b} \\ &=: \, p\,x + q, \end{aligned}$$

où on a posé :

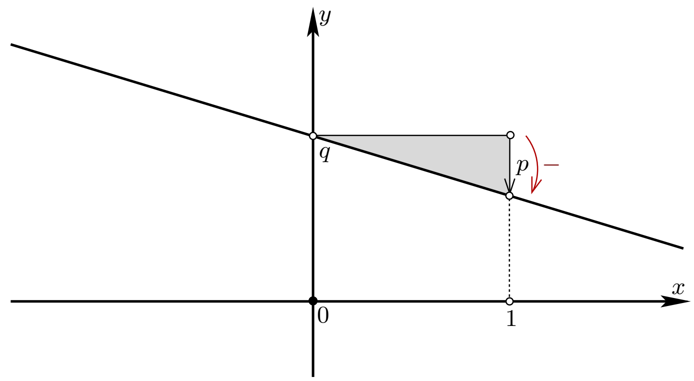
$$p \,:=\, -\,\tfrac{a}{b} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad q \,:=\, \tfrac{c}{b}.$$

On obtient donc bien y en fonction de x, comme simple polynôme de degré 1.

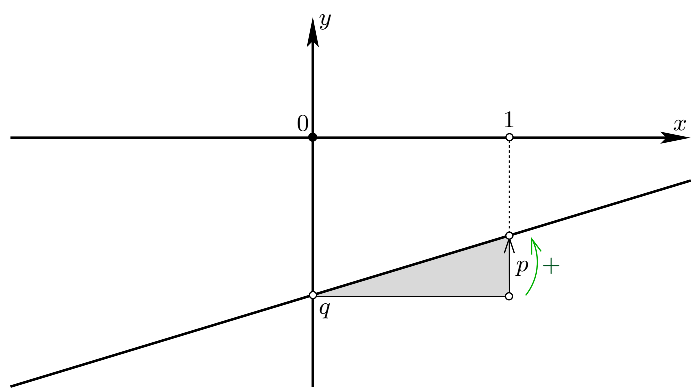
Dessinons une figure lorsque la *pente* $p > 0$ de cette droite est strictement positive — croissance, mon amour ! — :

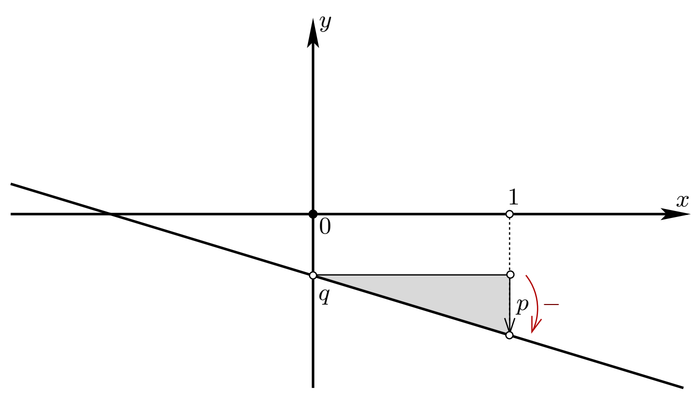


Mais avec les causes que l'on sait, la *dé*croissance [nécessaire !] existe aussi. Lorsque $p < 0$, la droite $y = p\,x + q$, de pente strictement négative < 0, *descend*.



Dans ces deux figures, le « point d'accroche » de la droite, à savoir son intersection $(0, q) = \big(0, \frac{c}{b}\big)$ avec l'axe vertical $0y$, est strictement positif. Voici aussi deux figures lorsque $q < 0$, pour une pente $p > 0$ et pour une pente $p < 0$.





Maintenant, puisqu'on suppose $a \neq 0 \neq b$, on peut *aussi*, de manière *symétrique*, résoudre x en fonction de y :

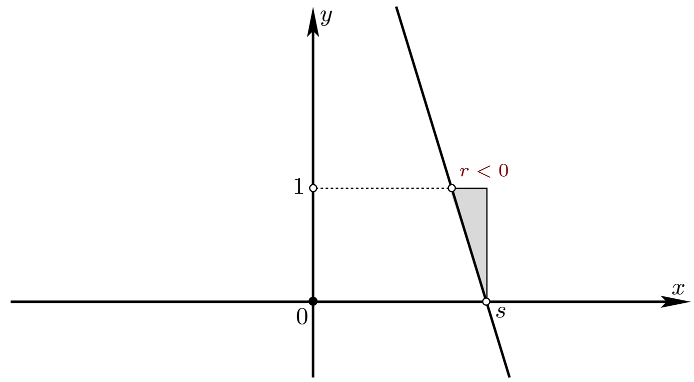
$$a\,x + b\,y \;=\; c, \qquad \text{d'où :} \quad a\,x \;=\; -\,b\,y + c,$$

$$\text{puis :} \qquad x \;=\; -\,\tfrac{b}{a}\,y + \tfrac{c}{a}$$

$$=:\; r\,y + s,$$

où on a posé :

$$r \;:=\; -\,\tfrac{b}{a} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad s \;:=\; \tfrac{c}{a}.$$



Grâce à une rotation de la tête de 90° [gare aux craquements de vertèbres cervicales, les mathématique sont un sport de la tête, dangereux !], suivie d'une symétrie, les figures sont les mêmes que lorsqu'on résout y en fonction de x. Comme on préfère faire des mathématiques la tête bien droite et bien verticale, on privilégie $y = p\,x + q$, et on se contente de discuter si l'on peut résoudre y en fonction de x dans l'équation initiale $a\,x + b\,y = c$.

Mais alors, que se passe-t-il lorsque $b = 0$? Car alors l'équation est :

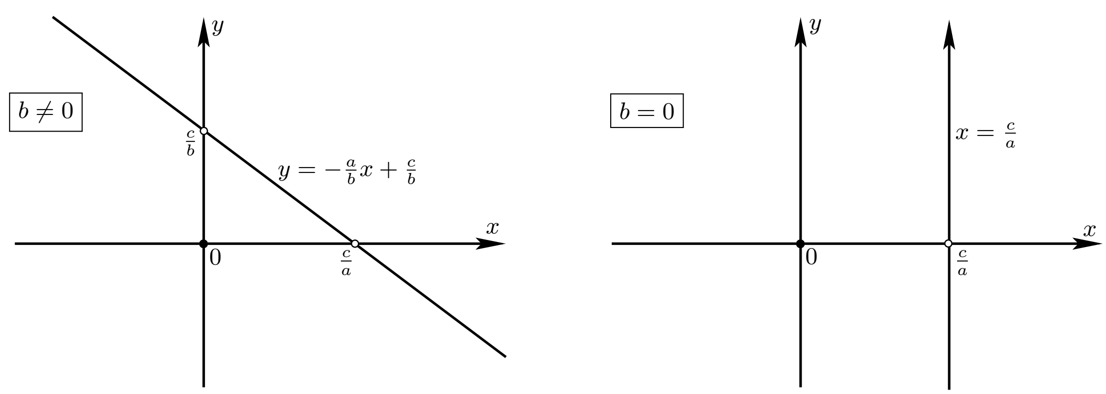
$$a\,x + 0\,y \,=\, c,$$

et on ne peut alors *jamais* résoudre y en fonction de x !

Cas 2 : Quand $b = 0$, on résout x, et l'équation de la droite devient :

$$x \,=\, \tfrac{c}{a}.$$

Géométriquement, la droite est verticale.



Proposition 7.1. *Dans le plan $\mathbb{R}^2$, étant donné une droite $D = \{a\,x + b\,y \,=\, c\}$, avec $(a,b) \neq (0,0)$:*

(1) *lorsque $b \neq 0$, il y a une représentation graphée :*

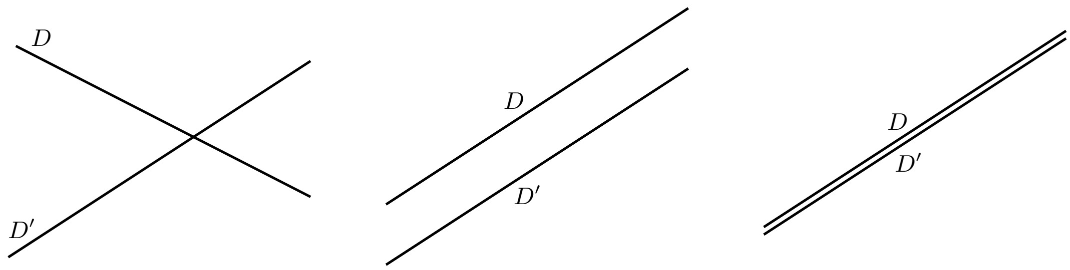
$$y \,=\, -\,\tfrac{a}{b}\,x + \tfrac{c}{b};$$

(2) *lorsque $b = 0$, d'où $a \neq 0$, il n'y pas de représentation graphée $y = f(x)$, mais la droite est verticale, d'équation :*

$$x \,=\, \tfrac{c}{a}. \qquad \square$$

8. Intersection entre deux droites planaires et systèmes linéaires

Maintenant, soient deux droites arbitraires dans le plan, $D \subset \mathbb{R}^2$ et $D' \subset \mathbb{R}^2$. Géométriquement, il est évident qu'elles s'intersectent la plupart du temps : « *Croisez le fer, Mousquetaires !* ».



Mais elles peuvent aussi être parallèles, voire même parallèles et confondues. Tout est là, tout est dit !

De même, en DM et en cours, nous avons réfléchi à toutes les formes possibles de matrices 2×2 après application de la méthode du pivot de Gauss, au moyen des jolis symboles plastiques [1] $\blacksquare$, $*$, $\mathbf{0}$, et nous avons trouvé quatre formes possibles :

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \blacksquare \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Ici, en partant de deux équations cartésiennes pour D et pour D' :

$$\begin{aligned} a\,x + \ b\,y &= \ c, \\ a'\,x + b'\,y &= c', \end{aligned}$$

de matrice complète :

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right),$$

nous voyons bien qu'il s'agit de résoudre un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues, et que l'industrie du pivot va nous être très utile.

Mais attention ! On a par hypothèse :

$$\begin{aligned} \big(a,\, b\big) &\neq (0,0), \\ \big(a',\, b'\big) &\neq (0,0). \end{aligned}$$

Donc la forme réduite de la matrice *non* complète ne pourra *jamais* aboutir à la matrice nulle :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \overset{\textsc{Impossible}}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

En définitive, il va rester **3** cas possibles pour la forme réduite de $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right]$:

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \blacksquare \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Toutefois, contrairement à une idée qui pourrait venir immédiatement à notre esprit, ces trois matrices possibles ne vont *pas* correspondre *exactement* aux trois dispositions relatives possibles de deux droites D et D' dans le plan, telles que dessinées plus haut. D'autant plus qu'il s'agit de travailler avec la matrice *complète*, de taille 2×3, et non pas avec la matrice *in*complète de taille 2×2. Une étude précise s'impose, donc.

Commençons par une discussion « express », avant de conduire réellement les bons calculs, dans la prochaine Section **9**.

1. Rappelons que $\blacksquare$ désigne un nombre réel modifiable (plastique) *non nul* ; que $*$ désigne un nombre réel modifiable (plastique), éventuellement nul ; et que $\mathbf{0}$ fait la fierté des cancres las.

Cas 1 : Supposons que $\left[\begin{smallmatrix} a \\ a' \end{smallmatrix}\right] \neq \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Alors après avoir éventuellement permuté les lignes 1 et 2, la méthode du pivot transforme la matrice complète en :

$$\begin{array}{cc} x & y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} x & y \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \underline{*} & * \end{array}\right].$$

À ce moment-là, ce sont de belles *étoiles soulignées* $\underline{*}$ qui vont (impitoyablement) décider de notre horoscope mathématique.

En effet, comme nous l'avons déjà signalé dans la Section **3**, il est nécessaire maintenant de discuter si cette étoile soulignée est non nulle, ou si elle vaut 0.

Sous-cas 1.1 : Supposons que $\underline{*} \neq 0$, ce qui se produit le plus souvent. Alors la méthode du pivot réduit encore plus avant la matrice sous la forme :

$$\begin{array}{cc} x & y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} x & y \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \underline{*} & * \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * \end{array}\right].$$

Le système transformé équivalent s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \blacksquare\, x + * \, y &= *, \\ \blacksquare\, y &= *, \end{aligned}$$

et nous savons qu'il se résout simplement en remontant du bas vers le haut :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\blacksquare}\big(* - *\,y\big) = \frac{1}{\blacksquare}\big(* - *\,*\big) = \frac{1}{\blacksquare}\,(*) = *, \\ y &= \frac{1}{\blacksquare}\,* = *. \end{aligned}$$

Ainsi, le système a une solution *unique*, et donc, les deux droites se croisent (le fer).

Sous-cas 1.2 : Supposons au contraire que $\underline{*} = 0$. Alors le système est :

$$\begin{array}{cc} x & y \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{*} \end{array}\right],$$

et il faut examiner une *autre* étoile soulignée. Car attention ! La deuxième ligne se lit :

$$\mathbf{0}\,x + \mathbf{0}\,y = \underline{*}.$$

Sous-sous-cas 1.2.1 : Une telle équation est *incompatible* toutes les fois que $\underline{*} \neq 0$. Ceci correspond à deux droites parallèles *non confondues*.

Sous-sous-cas 1.2.2 : Lorsque $\underline{*} = 0$, la deuxième ligne peut être supprimée, puisqu'elle est tautologique « $0 = 0$ », et il ne reste plus que la première ligne :

$$\blacksquare\, x + * \, y = *,$$

que l'on résout aisément :

$$x = \frac{1}{\blacksquare}\big(* - *\,y\big) = * - *\,y.$$

Donc il y a une infinité de solutions :

$$\mathsf{Sol} = \big\{\big(* + *\,y,\ y\big) \colon\ y \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\},$$

où nous rappelons que les étoiles qui apparaissent sont censées être des constantes bien définies. Ce sous-cas aboutit donc à deux droites *confondues*.

Cas 2 : Supposons au contraire que $\left[\begin{smallmatrix} a \\ a' \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Or puisque $(a, b) \neq (0, 0)$ et aussi $(a', b') \neq (0, 0)$ par hypothèse, on a alors nécessairement $b \neq 0$ et aussi $b' \neq 0$, donc la méthode du pivot se poursuit et fournit :

$$\begin{array}{cc} x & y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} x & y \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{*} \end{array}\right].$$

À nouveau, on doit discuter de la valeur de la nouvelle Madame Soleil soulignée $\underline{*}$.

Sous-cas 2.1 : Lorsque $\underline{*} \neq 0$, le système est incompatible, sans solution, c'est-à-dire que les deux droites D et D' sont parallèles et non confondues.

Sous-cas 2.2 : Lorsque $\underline{*} = 0$, le système :

$$\begin{array}{cc} x & y \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right],$$

se réduit à une seule équation (puisque la deuxième ligne est $0 = 0$), et comme la première ligne

$$\blacksquare\, y = * \qquad \text{se résout en :} \qquad y = \frac{1}{\blacksquare} * = *,$$

il y a une infinité de solutions :

$$\mathsf{Sol} = \big\{(x, *) : \ x \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

Les deux droites sont donc confondues, et qui plus est coïncident avec une unique droite *horizontale*.

Comme nous venons de le constater, cette discussion qui utilise la méthode du pivot de Gauss permet de tout comprendre, mais elle a un petit défaut : elle distingue plusieurs cas et sous-cas qui ne correspondent pas *exactement* à la distinction des trois configurations géométriques possibles de droites : sécantes ; parallèles ; confondues. En effet, les (sous-)sous-cas 1.2.1 et 2.1, puis 1.2.2 et 2.2, ont abouti à la même situation géométrique.

Question 8.1. *Est-il possible d'inventer des calculs algébriques qui correspondraient exactement aux trois dispositions géométriques possibles de deux droites D et D' dans le plan $\mathbb{R}^2$?*

Ce cours s'intitule « *Algèbre et Géométrie* », et pour les marier au mieux, il faudrait vraiment veiller à respecter la parité !

9. Formules symétriques pour l'intersection entre deux droites

Maintenant, effectuons les vrais calculs. Partons donc du système linéaire :

$$\begin{aligned} a\,x + \,b\,y &= c, \\ a'\,x + b'\,y &= c'. \end{aligned}$$

L'idée est d'éliminer à la fois x et y, de manière à *symétriser les raisonnements*.

Pour éliminer x, multiplions l'équation 1 par a' et l'équation 2 par a :

$$\begin{aligned} a'\big(\,a\,x + \,b\,y &= c\,\big) \\ a\big(\,a'\,x + b'\,y &= c'\,\big) \end{aligned} \qquad \text{ce qui donne :} \qquad \begin{aligned} \underline{a'a\,x} + a'b\,y &= a'c \\ \underline{aa'\,x} + ab'\,y &= ac' \end{aligned}$$

et soustrayons afin de faire disparaître x :

$$\big(a'b - ab'\big)\,y = a'c - ac'.$$

Nous voyons apparaître un certain facteur devant y, et pour pouvoir résoudre :

$$y \overset{?}{:=} \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'},$$

il serait nécessaire que ce facteur soit non nul, puisqu'il deviendrait le *dénominateur* d'une fraction.

Or comme les lettres a, b, a', b' désignent des nombres réels possibles variés, par exemple 1, -5, 7, -2, il peut parfois se produire que le nombre $a'b - ab'$ soit *nul*, par exemple lorsque $a = 0$ et $a' = 0$, pour toutes valeurs de b, b'. Il faudrait alors discuter la résolubilité suivant que $a'b - ab'$ vaut 0 ou est $\neq 0$. Mais oublions un instant cette (petite) difficulté (divertissante).

Pour tester, essayons d'éliminer plutôt la variable y. De manière analogue, multiplions l'équation 1 par b' et l'équation 2 par b :

$$\begin{aligned} b'\big(\,a\,x + \,b\,y &= c\,\big) \\ b\big(\,a'\,x + b'\,y &= c'\,\big) \end{aligned} \qquad \text{ce qui donne :} \qquad \begin{aligned} b'a\,x + \underline{b'b\,y} &= b'c \\ ba'\,x + \underline{bb'\,y} &= bc' \end{aligned}$$

et soustrayons afin de faire disparaître y :

$$\big(b'a - ba'\big)\, x \;=\; b'c - bc'.$$

Aïe ! Ouïe ! Au signe près, c'est-à-dire à la multplication près par -1, nous voyons apparaître *le même facteur*. La même difficulté revient ! Qu'est-ce qu'elle est « collante » !

Historiquement, c'est ainsi qu'ont été découvertes des expressions qui jouent un rôle central dans toutes les mathématiques, anciennes et contemporaines. Et on leur donne un nom.

Définition 9.1. Étant donné deux couples de nombres réels (a,b) et (a',b'), on appelle *déterminant* et on note :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \;:=\; a\,b' - a'\,b.$$

Observons qu'en permutant les colonnes, le signe change :

$$\begin{vmatrix} b & a \\ b' & a' \end{vmatrix} \;=\; b\,a' - b'\,a \;=\; -\big(a\,b' - a'\,b\big) \;=\; -\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

Dans ce cours de Licence 1 au Semestre 1, nous aurons l'« interdiction » d'élaborer la théorie générale des déterminants, qui est « hors-programme », mais cette belle théorie sera dévoilée aux étudiantes impatientes dès le Semestre 2 (de la Licence 1).

D'ailleurs, si on examine les membres de droite des deux équations ci-dessus, on réalise qu'ils s'écrivent *aussi* sous forme de déterminants ! Effectivement, nous avons obtenu premièrement :

$$-\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right|\, y \;=\; -\left|\begin{smallmatrix} a & c \\ a' & c' \end{smallmatrix}\right|,$$

et deuxièmement :

$$\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right|\, x \;=\; -\left|\begin{smallmatrix} b & c \\ b' & c' \end{smallmatrix}\right|.$$

En tout cas, dans la circonstance agréable où ce déterminant $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right| \neq 0$ est *non* nul, il est clair que l'on peut résoudre à la fois x et y :

$$x \;:=\; \frac{-bc' + b'c}{ab' - a'b}, \qquad\qquad y \;:=\; \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Mais comme nous l'avons appris dans les cours consacrés aux systèmes linéaires, nous ne devons jamais nous contenter de trouver — au petit bonheur la chance ? — une solution à un système d'équations linéaires, *il faut encore vérifier que la solution trouvée est bien une solution*.

Ce que nous pouvons faire derechef ! En effet, vérifions que la première équation est satisfaite :

$$\begin{aligned} c \;&\overset{?}{=}\; a\,\frac{-bc' + b'c}{ab' - a'b} + b\,\frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \\ &=\; \frac{-\underline{abc'}_{\circ} + ab'c + \underline{abc'}_{\circ} - a'bc}{ab' - a'b} \\ &=\; \frac{(ab' - a'b)\,c}{ab' - a'b} \qquad\qquad \text{OUI !} \end{aligned}$$

Puis, vérifions que la seconde équation est aussi satisfaite :

$$\begin{aligned} c' \;&\overset{?}{=}\; a'\,\frac{-bc' + b'c}{ab' - a'b} + b'\,\frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \\ &=\; \frac{-a'bc' + \underline{a'b'c}_{\circ} + ab'c' - \underline{a'b'c}_{\circ}}{ab' - a'b} \\ &=\; \frac{(-a'b + ab')\,c'}{ab' - a'b} \qquad\qquad \text{OUI !} \end{aligned}$$

Theorem 9.2. [Formules de Cramér] *Deux droites D et D' d'équations cartésiennes $a\,x+b\,y=c$ et $a'\,x+b'\,y=c'$* non parallèles, i.e. *telles que :*

$$0 \neq ab'-a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix},$$

se coupent toujours en un point unique, *de coordonnées :*

$$\begin{aligned} D\cap D' = \big\{\textsf{point unique}\big\} &= \left(\frac{-bc'+b'c}{ab'-a'b},\ \frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}\right) \\ &= \left(-\frac{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}},\ \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}\right). \end{aligned}$$

Démonstration. Nous avons déjà expliqué pourquoi ces formules sont vraies lorsque $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$. Dans un instant, nous verrons que cette condition *algébrique* équivaut au *fait géométrique* que les droites D et D' ne sont *pas* parallèles, et donc, sont sécantes, justement en ce point unique que nous venons de trouver. □

Question 9.3. *Quelle est la signification géométrique de l'annulation :*

$$0 = ab'-a'b\ \textbf{?}$$

Rappelons que deux vecteurs directeurs *non nuls* des deux droites D et D' sont :

$$\vec{v}_D := \binom{-b}{a} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \vec{v}_{D'} := \binom{-b'}{a'},$$

avec $\vec{v}_D \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_{D'} \neq \vec{0}$.

Affirmation 9.4. *Les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *D et D' sont parallèles.*

(ii) *Il existe un scalaire non nul $\tau \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{v}_D = \tau\,\vec{v}_{D'}$ $\big[$d'où aussi $\frac{1}{\tau}\,\vec{v}_D = \vec{v}_{D'}\big]$.*

(iii) $a\,b'-a'\,b=0$.

En fait, cette affirmation provient directement d'une vérité plus générale que nous énonçons sous la forme d'une

Proposition 9.5. *Soient deux vecteurs* non nuls $\vec{u} = \binom{u_1}{u_2}$ *et* $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$, *c'est-à-dire avec* $(u_1,u_2) \neq (0,0)$ *et* $(v_1,v_2) \neq (0,0)$. *Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants, à savoir par définition, il existe un couple de scalaires $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ non tous les deux nuls tels que :*

$$\vec{0} = \lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v}.$$

(ii) *Il existe un scalaire non nul $\tau \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{u} = \tau\,\vec{v}$ $\big[$d'où aussi $\frac{1}{\tau}\,\vec{u} = \vec{v}\big]$.*

(iii) *On a* $0 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1v_2-u_2v_1$.

Le diagramme d'implications que nous allons établir est le suivant :

$$\textbf{(i)} \overset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \textbf{(ii)} \overset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \textbf{(iii)}.$$

Démonstration. **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** : Supposons donc que $\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v}=\vec{0}$ pour certains $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$. Nous affirmons que $\lambda \neq 0$. Sinon, si on avait $\lambda=0$, d'où $\vec{0}+\mu\,\vec{v}=\vec{0}$, on déduirait que $\vec{v}=\vec{0}$ puisque $\mu\neq 0$ par hypothèse, ce qui est contraire à l'une des hypothèses de la proposition.

On se convainc de la même manière que $\mu \neq 0$. Donc on peut ré-écrire l'identité :

$$\vec{0} = \lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v} \qquad \text{sous la forme :} \qquad \vec{u} = -\tfrac{\mu}{\lambda}\,\vec{v} =:\ \tau\,\vec{v} \qquad \big(\text{poser } \tau := -\tfrac{\mu}{\lambda} \in \mathbb{R}^*\big).$$

(ii) $\Longrightarrow$ **(i)** : C'est évident, il suffit de poser $\lambda := 1$ et $\mu := -\tau$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : Cela fonctionne par un calcul direct :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau\, v_1 & v_1 \\ \tau\, v_2 & v_2 \end{vmatrix} = \tau\, v_1\, v_2 - \tau\, v_2\, v_1 = 0.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) : Partons de $0 = u_1 v_2 - u_2 v_1$. Par hypothèse, $\binom{u_1}{u_2} \neq \binom{0}{0}$.

Supposons tout d'abord que $u_1 \neq 0$, et discutons le cas $u_1 = 0$ ensuite. Alors $v_1 \neq 0$, car si on avait $v_1 = 0$, ceci entraînerait $0 = u_1 v_2 - 0$, d'où $v_2 = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $(v_1, v_2) \neq (0, 0)$.

On peut donc résoudre :

$$v_2 = \frac{u_2}{u_1}\, v_1,$$

et déduire :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{u_2}{u_1}\, v_1 \end{pmatrix} = \tfrac{v_1}{u_1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \tfrac{v_1}{u_1}\, \vec{u} =: \tfrac{1}{\tau}\, \vec{u},$$

en posant $\tau := \frac{u_1}{v_1}$, et c'est ce qu'on voulait.

Lorsque $u_1 = 0$, on a $u_2 \neq 0$ par hypothèse. Donc on peut résoudre $0 = 0 - u_2 v_1$, ce qui donne $v_1 = 0$, d'où $v_2 \neq 0$, et déduire :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} = \tfrac{v_2}{u_2} \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix} = \tfrac{v_2}{u_2}\, \vec{u} =: \tfrac{1}{\tau}\, \vec{u}. \qquad \square$$

Observons que nos deux droites $D // D'$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs *orthogonaux* $\binom{a}{b}$ et $\binom{a'}{b'}$ sont parallèles, si et seulement si $0 = \left|\begin{smallmatrix} a & a' \\ b & b' \end{smallmatrix}\right|$. Mais aussi, en termes de vecteurs directeurs $\binom{-b}{a}$ et $\binom{-b'}{a'}$, si et seulement si :

$$0 = \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = -\,b\, a' - a\,(-b') = a\, b' - a'\, b.$$

Au signe près, on retrouve toujours la même expression ! *Seccotine, tu me colles !*

Résumé 9.6. *Dans le plan $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$, deux droites D et D' d'équations $a\, x + b\, y = c$ et $a'\, x + b'\, y = c'$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$ sont* parallèles *si et seulement si :*

$$0 = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a\, b' - a'\, b. \qquad \square$$

Ensuite, sous cette hypothèse que nos deux droites sont parallèles, nous devons revenir au système linéaire que nous avons abandonné le long de notre long chemin de Saint-Jacques de Compostelle. Souvenons-nous en effet que nous avions trouvé les deux équations :

$$\begin{aligned} \big(a'b - ab'\big)\, y &= a'c - ac', \\ \big(b'a - ba'\big)\, x &= b'c - bc', \end{aligned}$$

dont les deux membres de gauche sont maintenant égaux à zéro :

$$\begin{aligned} 0 &\overset{?}{=} a'c - ac', \\ 0 &\overset{?}{=} b'c - bc', \end{aligned}$$

mais il n'y a aucune raison que les membres de droite soit aussi égaux à zéro, puisque leurs valeurs dépendent des valeurs des constantes c et c'.

Autrement dit, nous avons la certitude que notre système linéaire de 2 équations à 2 inconnues est *incompatible*, *i.e.* n'a *aucune* solution, dès que l'un de ces deux membres de droites est *non nul*.

Théorème 9.7. *Soient deux droites D et D' qui sont* parallèles*, c'est-à-dire dont les deux équations cartésiennes $a\,x + b\,y = c$ et $a'\,x + b'\,y = c'$ satisfont :*

$$0 \,=\, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \,=\, a\,b' - a'\,b.$$

(1) *$D \cap D' = \emptyset$ sont parallèles non confondues et d'intersection vide lorsque :*

$$0 \,\neq\, \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \qquad\qquad \textit{ou} \qquad\qquad \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \,\neq\, 0.$$

(2) *$D = D'$ sont confondues (coïncident) lorsque :*

$$0 \,=\, \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \qquad\qquad \textit{et} \qquad\qquad \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \,=\, 0.$$

Démonstration. Il reste seulement à comprendre ce qu'il se passe lorsque ces deux membres de droite sont nuls, c'est-à-dire lorsqu'on a simultanément *trois* annulations de déterminants :

$$0 \,=\, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \,=\, \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \,=\, \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}.$$

Supposons pour commencer que $a \neq 0$, et traitons le cas $a = 0$ ensuite. Alors nous pouvons résoudre x depuis la première équation $a\,x + b\,y = c$ de D pour obtenir :

$$x \,:=\, \tfrac{c}{a} - \tfrac{b}{a}\,y,$$

puis remplacer dans la seconde equation $0 = a'\,x + b'\,y - c'$ de D', ce qui donne :

$$\begin{aligned} 0 &\overset{?}{=} a'\left(\tfrac{c}{a} - \tfrac{b}{a}\,y\right) + b'\,y - c' \\ &= \frac{a'c - ac'}{a} + \frac{-a'b + ab'}{a}\,y, \end{aligned}$$

et comme nous avons supposé que $a'c - ac' = 0$ et que $-a'b + ab' = 0$, cette deuxième équation est satisfaite automatiquement !

Au final, toujours dans le cas $a \neq 0$, notre système linéaire ne comporte qu'une seule équation significative, la première, donc sa solution générale est infinie :

$$\mathsf{Sol} \,=\, \left\{\left(\tfrac{c}{a} - \tfrac{b}{a}\,y,\; y\right) \colon\; y \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\right\}.$$

Le cas $a = 0$ va aboutir à la même conclusion, avec quelques simplications calculatoires. En effet, on a alors $b \neq 0$ puisque $(a, b) \neq (0, 0)$. Ensuite, la relation :

$$0 \,=\, a'b - ab' \,=\, a'b - a'0 \,=\, a'b,$$

donne $a' = 0$ puisque $b \neq 0$. On résout y depuis l'équation $0\,x + b\,y - c = 0$ de D :

$$y \,:=\, \tfrac{c}{b},$$

puis on remplace dans l'équation de D' :

$$\begin{aligned} 0 &\overset{?}{=} 0\,x + b'\left(\tfrac{c}{b}\right) - c' \\ &= \frac{b'c - bc'}{b}, \end{aligned}$$

et comme nous avons supposé que $bc' - b'c = 0$, cette deuxième équation est satisfaite automatiquement !

Au final, aussi dans le cas $a = 0$, notre système linéaire ne comporte qu'une seule équation significative, donc sa solution générale est infinie :

$$\mathsf{Sol} \,=\, \left\{\left(x,\; \tfrac{c}{b}\right) \colon\; x \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\right\}.$$

Évidemment, $D = D'$ coïncident. □

10. Caractérisation de la coïncidence $D = D'$ de deux droites dans $\mathbb{R}^2$

Maintenant, nous pouvons donner une caractérisation très simple du fait que deux droites $D = D'$ coïncident.

Théorème 10.1. *Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soient deux droites D et D' d'équations cartésiennes $a\,x+b\,y = c$ et $a'\,x + b'\,y = c'$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$. Alors on a équivalence entre :*
(i) *il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ non nul tel que :*

$$a' = \lambda\, a, \qquad\qquad b' = \lambda\, b, \qquad\qquad c' = \lambda\, c\,;$$

(ii) $D = D'$.

Démonstration. **(i) $\Longrightarrow$ (ii)** est facile, car on peut diviser par λ, *i.e.* multiplier par $\frac{1}{\lambda}$:

$$\begin{aligned} D' &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ a'x + b'y - c' = 0\big\} \\ &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ \lambda\,\big(ax + by - c\big) = 0\big\} \\ &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ \tfrac{1}{\lambda}\,\lambda\,\big(ax + by - c\big) = \tfrac{1}{\lambda}\,0\big\} \\ &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ ax + by - c = 0\big\} \\ &= D. \end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : Réciproquement, supposons que $D = D'$. Par hypothèse, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Supposons $a \neq 0$ (le cas $b \neq 0$ étant similaire et symétrique), et écrivons l'équation de D en la divisant par a :

$$x = \tfrac{c}{a} - \tfrac{b}{a}\,y.$$

À toute valeur de $y \in \mathbb{R}$ quelconque, correspond donc une unique valeur de x, comme fonction de y, qui est une variable libre dans cette équation.

Comme $D \subset D'$ par hypothèse, l'équation de D' doit être satisfaite pour tout couple $\big(\frac{c}{a} - \frac{b}{a}y,\ y\big)$, quelle que soit la valeur de $y \in \mathbb{R}$:

$$a'\,\big(\tfrac{c}{a} - \tfrac{b}{a}\,y\big) + b'\,y - c' = 0 \qquad\qquad (\forall\, y \in \mathbb{R}),$$

c'est-à-dire :

$$\frac{-a'\,b + a\,b'}{a}\,y + \frac{a'\,c - a\,c'}{a} = 0 \qquad\qquad (\forall\, y \in \mathbb{R}).$$

En particulier, pour $y = 0$:

$$a'\,c - a\,c' = 0. \tag{10.2}$$

Donc ensuite :

$$\big(-a'\,b + a\,b'\big)\,y + \underbrace{a'\,c - a\,c'}_{\circ} = 0 \qquad\qquad (\forall\, y \in \mathbb{R}),$$

et pour $y = 1$, on obtient :

$$-a'\,b + a\,b' = 0. \tag{10.3}$$

Observation 10.4. *Alors $a' \neq 0$ aussi.*

Preuve. Sinon, si $a' = 0$, l'équation (10.3) devient $a\,b' = 0$, on déduirait que $b' = 0$ (car on a supposé $a \neq 0$), ce qui contredirait le fait que pour l'équation de la droite D' ait un sens, il faut que $(a', b') \neq (0, 0)$. □

Donc $a' \neq 0$. Puisque $a \neq 0$, on peut résoudre ces deux équations en :

$$c' = \tfrac{a'}{a}\,c, \qquad\qquad b' = \tfrac{a'}{a}\,b,$$

et enfin :

$$a' = \tfrac{a'}{a}\,a, \qquad\qquad b' = \tfrac{a'}{a}\,b, \qquad\qquad c' = \tfrac{a'}{a}\,c,$$

donc le nombre réel $\lambda := \frac{a'}{a} \in \mathbb{R}^*$ non nul réalise $a' = \lambda\,a$, $b' = \lambda\,b$, $c' = \lambda\,c$.

Le cas $b \neq 0$ se traite de la même manière, il est symétrique$\big/$équivalent, modulo le changement de noms de variables $x \longleftrightarrow y$, et on trouve $\lambda = \frac{b'}{b} \in \mathbb{R}^*$. $\square$

11. Intersection entre une droite cartésienne et une droite paramétrique

Ensuite, supposons que la première droite D est donnée par une équation cartésienne :

$$a\,x + b\,y - c \,=\, 0,$$

avec $(a, b) \neq (0, 0)$, et que la deuxième droite D' est représentée sous forme paramétrique :

$$\begin{aligned} x &= p_1 + t\,v_1, \\ y &= p_2 + t\,v_2, \end{aligned}$$

avec $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Question 11.1. *Comment déterminer l'intersection $D \cap D'$?*

Cela est assez simple : il suffit d'insérer la forme paramétrique de D' dans l'équation cartésienne de D :

$$a\,\big(p_1 + t\,v_1\big) + b\,\big(p_2 + t\,v_2\big) - c \,=\, 0,$$

puis de réorganiser :

$$\big(a\,v_1 + b\,v_2\big)\,t \,=\, -\,a\,p_1 - b\,p_2 + c. \tag{11.2}$$

Pour résoudre t, il est alors nécessaire de discuter de la valeur du facteur qui apparaît à gauche. Son interprétation géométrique est la suivante.

Lemme 11.3. *$D//D'$ sont parallèles si et seulement si* $0 = a\,v_1 + b\,v_2$.

Démonstration. En effet, un vecteur directeur de D est $\vec{v}_D = \left(\begin{smallmatrix} -b \\ a \end{smallmatrix}\right)$, tandis qu'un vecteur directeur de D' est $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$. Évidemment, $D//D'$ si et seulement si $\vec{v}_D//\vec{v}$. Mais alors la Proposition 9.5 nous informe que $\vec{v}_D//\vec{v}$ si et seulement si :

$$0 \,=\, \begin{vmatrix} v_1 & -b \\ v_2 & a \end{vmatrix} \,=\, v_1\,a - v_2(-b).$$ $\square$

Ainsi, lorsque D et D' ne sont *pas* parallèles, à savoir lorsque $a\,v_1 + b\,v_2 \neq 0$, on peut résoudre de manière unique :

$$t \,:=\, \frac{-a\,p_1 - b\,p_2 + c}{a\,v_1 + b\,v_2},$$

et alors le point (unique) d'intersection entre D et D' a pour première coordonnée :

$$\begin{aligned} x &= p_1 + t\,v_1, \\ &= p_1 + \frac{-a\,p_1 - b\,p_2 + c}{a\,v_1 + b\,v_2}\,v_1 \\ &= \frac{\underline{\underline{p_1\,a\,v_1}} + p_1\,b\,v_2 - \underline{a\,p_1\,v_1} - b\,p_2\,v_1 + c\,v_1}{a\,v_1 + b\,v_2} \\ &= \frac{p_1\,b\,v_2 - b\,p_2\,v_1 + c\,v_1}{a\,v_1 + b\,v_2}, \end{aligned}$$

et pour deuxième coordonnée :

$$\begin{aligned} y &= p_2 + t\,v_2, \\ &= p_2 + \frac{-a\,p_1 - b\,p_2 + c}{a\,v_1 + b\,v_2}\,v_2 \\ &= \frac{p_2\,a\,v_1 + \underline{p_2\,b\,v_2}_{\circ} - a\,p_1\,v_2 - \underline{b\,p_2\,v_2}_{\circ} + c\,v_2}{a\,v_1 + b\,v_2} \\ &= \frac{p_2\,a\,v_1 - a\,p_1\,v_2 + c\,v_2}{a\,v_1 + b\,v_2}. \end{aligned}$$

Mais quand $D // D'$ *sont* parallèles, à savoir quand $0 = a\,v_1 + b\,v_2$, on a :

- si $-\,a\,p_1 - b\,p_2 + c \neq 0$, il n'y pas de solution en t, les droites sont distinctes (non confondues) ;
- si $-\,a\,p_1 - b\,p_2 + c = 0$, il y a une infinité de solutions en t, les deux droites $D = D'$ coïncident (sont confondues).

12. Intersection entre deux droites paramétriques

Supposons maintenant que nos deux droites sont données sous forme paramétrique :

$$D\colon \quad \begin{aligned} x &= p_1 + t\,v_1, \\ y &= p_2 + t\,v_2, \end{aligned} \qquad\qquad D'\colon \quad \begin{aligned} x &= p_1' + t'\,v_1', \\ y &= p_2' + t'\,v_2'. \end{aligned}$$

Puisqu'elles ont pour vecteurs directeurs $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ et $\vec{v}' = \binom{v_1'}{v_2'}$, on sait qu'elles sont parallèles si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_1' \\ v_2 & v_2' \end{vmatrix} = v_1\,v_2' - v_2\,v_1' = 0,$$

et nous nous attendons à retrouver cette expression caractéristique dans les calculs qui suivront.

Un point de coordonnées (x, y) appartient à l'intersection (éventuellement vide) $D \cap D'$ si :

$$\begin{aligned} p_1 + t\,v_1 &= p_1' + t'\,v_1', \\ p_2 + t\,v_2 &= p_2' + t'\,v_2', \end{aligned}$$

c'est-à-dire si et seulement si il existe un premier « temps t sur la droite D » et un deuxième « temps t' sur la droite D' » tels que les points mobiles correspondants se *rencontrent*.

Autrement dit, nous devons résoudre un système linéaire à deux inconnues t et t', que nous réorganisons comme suit, en rassemblant les inconnues à gauche :

$$\begin{aligned} v_1\,t - v_1'\,t' &= p_1' - p_1, \\ v_2\,t - v_2'\,t' &= p_2' - p_2. \end{aligned}$$

Pour résoudre de manière symétrique un tel système, commençons par éliminer la variable t comme suit :

$$\begin{aligned} v_2\,\Big(v_1\,t - v_1'\,t' &= p_1' - p_1\Big), \\ v_1\,\Big(v_2\,t - v_2'\,t' &= p_2' - p_2\Big), \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \underline{v_2\,v_1\,t}_{\circ} - v_2\,v_1'\,t' &= p_1'\,v_2 - p_1\,v_2, \\ \underline{v_1\,v_2\,t}_{\circ} - v_1\,v_2'\,t' &= p_2'\,v_1 - p_2\,v_1, \end{aligned}$$

ce qui donne par soustraction :

$$\big(-\,v_2\,v_1' + v_1\,v_2'\big)\,t' = p_1'\,v_2 - p_2'\,v_1 - p_1\,v_2 + p_2\,v_1.$$

Comme promis, nous retrouvons le déterminant $\left|\begin{smallmatrix} v_1 & v_1' \\ v_2 & v_2' \end{smallmatrix}\right|$!

Nous pouvons éliminer de manière similaire la variable t' :

$$v_2' \Big(v_1\, t - v_1'\, t' \;=\; p_1' - p_1 \Big), \qquad\qquad v_2'\, v_1\, t - \underline{v_2'\, v_1'\, t'} \;=\; p_1'\, v_2' - p_1\, v_2',$$

$$v_1' \Big(v_2\, t - v_2'\, t' \;=\; p_2' - p_2 \Big), \qquad\qquad v_1'\, v_2\, t - \underline{v_1'\, v_2'\, t'} \;=\; p_2'\, v_1' - p_2\, v_1',$$

ce qui donne par soustraction :

$$\big(v_2'\, v_1 - v_1'\, v_2 \big)\, t \;=\; p_1'\, v_2' - p_2'\, v_1' - p_1\, v_2' + p_2\, v_1'.$$

Cas 1 : Lorsque $0 \neq \left|\begin{smallmatrix} v_1 & v_1' \\ v_2 & v_2' \end{smallmatrix}\right|$, il y a une solution (t, t') unique :

$$t \;:=\; \frac{p_1'\, v_2' - p_2'\, v_1' - p_1\, v_2' + p_2\, v_1'}{v_1 v_2' - v_2 v_1'}, \qquad\qquad t' \;:=\; \frac{p_1'\, v_2 - p_2'\, v_1 - p_1\, v_2 + p_2\, v_1}{v_1 v_2' - v_2 v_1'}.$$

Dans ce Cas 1, $D \cap D'$ sont sécantes en le point $P = (x_P, y_P)$ dont la première coordonnée vaut :

$$\begin{aligned} x_P \;&:= p_1 + \frac{p_1'\, v_2' - p_2'\, v_1' - p_1\, v_2' + p_2\, v_1'}{v_1 v_2' - v_2 v_1'}\, v_1, \\ &= \frac{\underline{p_1 v_1 v_2'} - p_1 v_2 v_1' + p_1' v_2' v_1 - p_2' v_1' v_1 - \underline{p_1 v_2' v_1} + p_2 v_1' v_1}{v_1 v_2' - v_2 v_1'}, \\ &= \frac{-p_1 v_2 v_1' + p_1' v_2' v_1 - p_2' v_1' v_1 + p_2 v_1' v_1}{v_1 v_2' - v_2 v_1'}, \end{aligned}$$

et dont la deuxième cooordonnée vaut :

$$\begin{aligned} y_P \;&:= p_2 + \frac{p_1'\, v_2' - p_2'\, v_1' - p_1\, v_2' + p_2\, v_1'}{v_1 v_2' - v_2 v_1'}\, v_2 \\ &= \frac{p_2 v_1 v_2' - \underline{p_2 v_2 v_1'} + p_1' v_2' v_2 - p_2' v_1' v_2 - p_1 v_2' v_2 + \underline{p_2 v_1' v_2}}{v_1 v_2' - v_2 v_1'} \\ &= \frac{p_2 v_1 v_2' + p_1' v_2' v_2 - p_2' v_1' v_2 - p_1 v_2' v_2}{v_1 v_2' - v_2 v_1'}. \end{aligned}$$

Cas 2 : Lorsque $0 = \left|\begin{smallmatrix} v_1 & v_1' \\ v_2 & v_2' \end{smallmatrix}\right|$, il n'y a aucune solution, *i.e.* le système est incompatible, dès que :

$$0 \;\neq\; p_1'\, v_2' - p_2'\, v_1' - p_1\, v_2' + p_2\, v_1' \qquad \text{ou} \qquad p_1'\, v_2 - p_2'\, v_1 - p_1\, v_2 + p_2\, v_1 \;\neq\; 0.$$

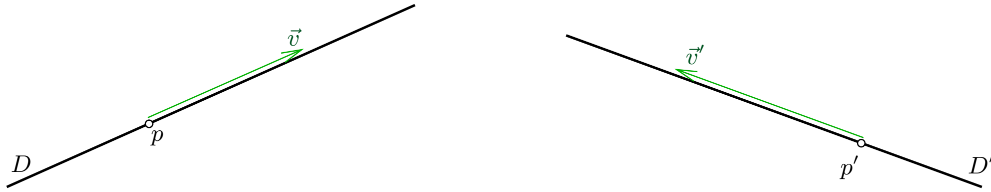
Cas 3 : Lorsque $0 = \left|\begin{smallmatrix} v_1 & v_1' \\ v_2 & v_2' \end{smallmatrix}\right|$, il y a une infinité de solutions si les *deux* équations suivantes sont satisfaites :

$$0 \;=\; p_1'\, v_2' - p_2'\, v_1' - p_1\, v_2' + p_2\, v_1', \tag{12.1}$$

$$0 \;=\; p_1'\, v_2 - p_2'\, v_1 - p_1\, v_2 + p_2\, v_1. \tag{12.2}$$

Question 12.3. *Mais quelle est donc la signification géométrique de ces deux identités compliquées ?*

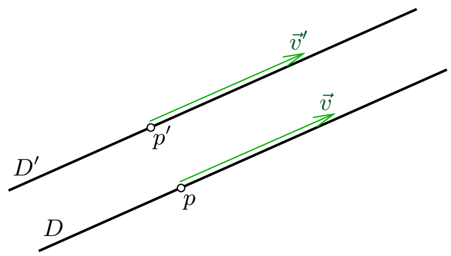
Rappelons que $p = (p_1, p_2) \in D$ et que $p' = (p_1', p_2') \in D'$.



L'observation suivante est claire sur le plan géométrique.

Lemme 12.4. *Étant donné une droite D définie par p, $\vec{v}$, et une autre droite* parallèle *D' définie par p', $\vec{v}'$, on a :*

$$D = D' \qquad\Longleftrightarrow\qquad p \in D' \qquad\Longleftrightarrow\qquad p' \in D. \qquad\square$$



Donc on doit tester si :

$$\overset{?}{\exists}\, t' \quad \begin{aligned} p_1 &= p_1' + t'\, v_1', \\ p_2 &= p_2' + t'\, v_2', \end{aligned} \qquad\qquad \text{ou si} \qquad\qquad \overset{?}{\exists}\, t \quad \begin{aligned} p_1' &= p_1 + t\, v_1, \\ p_2' &= p_2 + t\, v_2. \end{aligned}$$

Or ceci revient à considérer deux systèmes d'équations linéaires chacun à une seule inconnue, par exemple le premier système d'inconnue unique t', que l'on résout :

$$\begin{aligned} v_2' \Big(p_1 &= p_1' + t'\, v_1'\Big), \\ v_1' \Big(p_2 &= p_2' + t'\, v_2'\Big), \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} p_1\, v_2' &= p_1'\, v_2' + \underline{t'\, v_1'\, v_2'}, \\ p_2\, v_1' &= p_2'\, v_1' + \underline{t'\, v_2'\, v_1'}, \end{aligned}$$

et une soustraction montre que la relation suivante est nécessaire :

$$p_1\, v_2' - p_2\, v_1' = p_1'\, v_2' - p_2'\, v_1'.$$

On reconnaît l'équation (12.1) !

De même, en partant de l'existence de t satisfaisant le deuxième système, on aboutit (exercice) à l'équation (12.2).

Théorème 12.5. *Soient deux droites $D = p + \mathbb{R}\,\vec{v}$ et $D' = p' + \mathbb{R}\,\vec{v}\,'$ dans le plan $\mathbb{R}^2$, données sous forme paramétrique :*

$$D\colon \quad \begin{aligned} x &= p_1 + t\, v_1, \\ y &= p_2 + t\, v_2, \end{aligned} \qquad\qquad D'\colon \quad \begin{aligned} x &= p_1' + t'\, v_1', \\ y &= p_2' + t'\, v_2', \end{aligned}$$

avec deux points $p = (p_1, p_2)$ et $p' = (p_1', p_2')$ et deux vecteurs directeurs non nuls $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2} \neq \binom{0}{0}$ et $\vec{v}\,' = \binom{v_1'}{v_2'} \neq \binom{0}{0}$. Alors :

(1) *D et D' sont sécantes si et seulement si $0 \neq \begin{vmatrix} v_1 & v_1' \\ v_2 & v_2' \end{vmatrix}$, et dans ce cas, leur point d'intersection unique a pour coordonnées :*

$$D \cap D' = \left\{ \left(\frac{-p_1 v_2 v_1' + p_1' v_2' v_1 - p_2' v_1' v_1 + p_2 v_1' v_1}{v_1 v_2' - v_2 v_1'},\ \frac{p_2 v_1 v_2' + p_1' v_2' v_2 - p_2' v_1' v_2 - p_1 v_2' v_2}{v_1 v_2' - v_2 v_1'} \right) \right\}.$$

(2) *D et D' sont parallèles si et seulement si $0 = \begin{vmatrix} v_1 & v_1' \\ v_2 & v_2' \end{vmatrix}$, et dans ce cas :*

$(\mathbf{2_1})$ *si on a :*

$$p_1'\, v_2' - p_2'\, v_1' - p_1\, v_2' + p_2\, v_1' \neq 0 \qquad \textit{ou} \qquad p_1'\, v_2 - p_2'\, v_1 - p_1\, v_2 + p_2\, v_1 \neq 0,$$

alors $D // D'$ sont parallèles et non confondues $D \neq D'$;

$(\mathbf{2_2})$ *si on a :*

$$p_1'\, v_2' - p_2'\, v_1' - p_1\, v_2' + p_2\, v_1' = 0 \qquad \textit{et} \qquad p_1'\, v_2 - p_2'\, v_1 - p_1\, v_2 + p_2\, v_1 = 0,$$

alors $D = D'$ sont parallèles confondues. $\square$

13. Intersection de trois droites $D \cap D' \cap D''$ dans le plan $\mathbb{R}^2$

Avant de passer au prochain chapitre consacré aux plans et aux droites contenus dans l'espace à trois dimensions, précisons le Théorème 10.1 en ajoutant une condition équivalente qui nous sera utile pour la suite.

L'idée nouvelle est de considérer les deux vecteurs de l'espace à trois dimensions :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}.$$

Théorème 13.1. *Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soient deux droites D et D' d'équations cartésiennes :*

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= c, \\ a'\,x + b'\,y &= c', \end{aligned}$$

avec $(a, b) \neq (0, 0) \neq (a', b')$. Alors on a équivalence entre :
(i) *$D = D'$;*
(ii) *il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ non nul tel que :*

$$a' = \lambda\, a, \qquad b' = \lambda\, b, \qquad c' = \lambda\, c;$$

(iii) *les trois déterminants 2×2 suivants s'annulent :*

$$0 = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}.$$

Démonstration. Puisque l'équivalence **(i)** $\Longleftrightarrow$ **(ii)** a déjà été vue, il reste à montrer deux implications.

(ii) $\Longrightarrow$ **(iii)** Le premier déterminant s'annule alors aisément :

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \lambda\, a \\ b & \lambda\, b \end{vmatrix} = a\,\lambda\, b - b\,\lambda\, a = 0,$$

et il en va de même pour les deux autres — *peanuts !*

(iii) $\Longrightarrow$ **(ii)** Comme $(a, b) \neq (0, 0)$, on peut supposer, quitte à échanger les variables $x \longleftrightarrow y$, que $a \neq 0$. Alors l'hypothèse que les déterminants 1 et 2 s'annulent :

$$a\,b' - b\,a' = 0 \qquad \text{et} \qquad a\,c' - c\,a' = 0,$$

montre d'abord que $a' \neq 0$ aussi — sinon, si on avait $a' = 0$, on déduirait $0 = a\,b' - 0$, ce qui forcerait $b' = 0$ aussi car $a \neq 0$, contrairement à l'hypothèse $(a', b') \neq (0, 0)$.

Ensuite, ces deux annulations nous permettent de résoudre simultanément :

$$b' = \tfrac{a'}{a}\, b \qquad \text{et} \qquad c' = \tfrac{a'}{a}\, c,$$

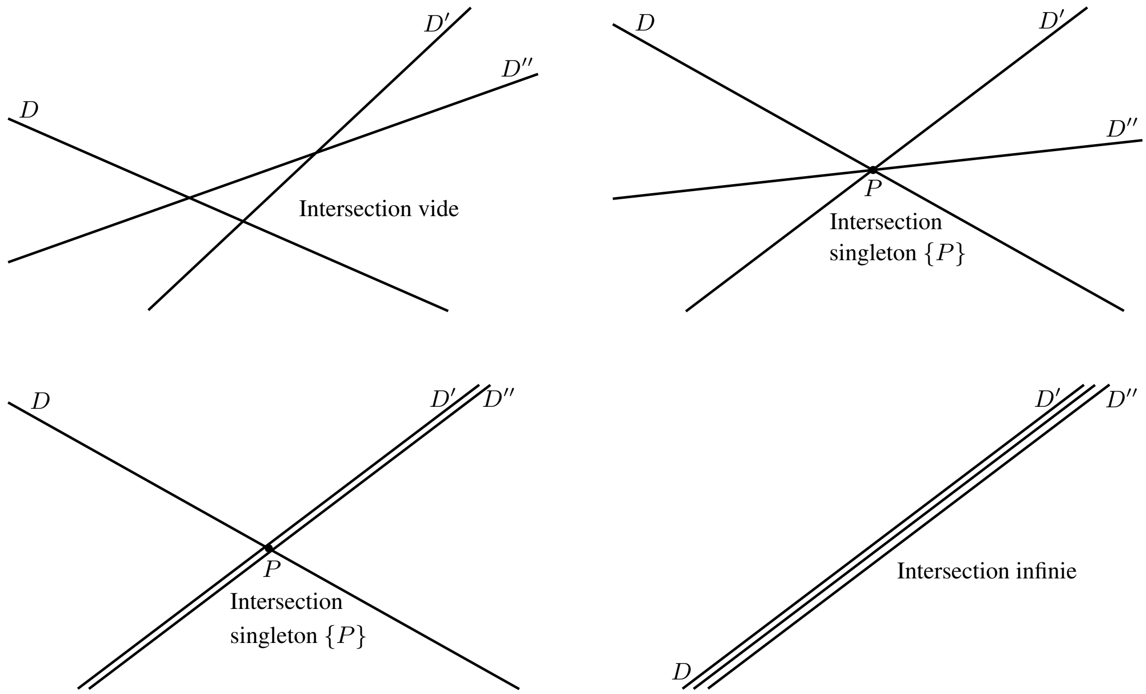
donc avec le facteur $\lambda := \frac{a'}{a} \in \mathbb{R}^*$ qui est non nul, nous concluons bien que :

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a'}{a}\, a \\ \frac{a'}{a}\, b \\ \frac{a'}{a}\, c \end{pmatrix} = \frac{a'}{a} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Maintenant, que se passe-t-il quand on prend *trois* droites D, D', D'', dans le plan, d'équations cartésiennes respectives :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= c, \\ a'\,x + b'\,y &= c', \\ a''\,x + b''\,y &= c'' \;\textbf{?} \end{aligned}$$

Géométriquement, *quatre* situations peuvent avoir lieu.



Grâce à la notion d'*indépendance linéaire* entre vecteurs dont toute la beauté conceptuelle sera dévoilée dans les prochains chapitres — suspense ! —, il est possible de caractériser ces quatre situations *géométriques* d'une manière purement *algébrique*.

Théorème 13.2. *Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soient trois droites D, D', D'', d'équations cartésiennes :*

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= c, \\ a'\,x + b'\,y &= c', \\ a''\,x + b''\,y &= c'', \end{aligned}$$

soient les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ associés :

$$\vec{v} := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}\,' := \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}\,'' := \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix},$$

et soit le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qu'ils engendrent :

$$\mathsf{Vect}\,\big(\vec{v},\,\vec{v}\,',\,\vec{v}\,''\big).$$

(1) *Les droites $D \cap D' \cap D'' = \emptyset$ sont d'intersection vide si et seulement si :*

$$3 \,=\, \mathsf{dim\,Vect}\,\big(\vec{v},\,\vec{v}\,',\,\vec{v}\,''\big).$$

(2) *Les droites $D \cap D' \cap D'' = \{P\}$ sont d'intersection un point unique sans aucune coïncidence entre paires de droites si et seulement si :*

$$\begin{aligned} 2 &\,=\, \mathsf{dim\,Vect}\,\big(\vec{v},\,\vec{v}\,',\,\vec{v}\,''\big), \\ 2 &\,=\, \mathsf{dim\,Vect}\,\big(\vec{v},\,\vec{v}\,'\big) \,=\, \mathsf{dim\,Vect}\,\big(\vec{v},\,\vec{v}\,''\big) \,=\, \mathsf{dim\,Vect}\,\big(\vec{v}\,',\,\vec{v}\,''\big). \end{aligned}$$

(3) *Les droites* $D \cap D' \cap D'' = \{P\}$ *sont d'intersection un point unique avec une seule coïncidence entre paires de droites, par exemple* $D = D'$*, si et seulement si :*

$$\begin{aligned} 2 &= \mathsf{dim\,Vect}\,\big(\vec{v},\,\vec{v}\,',\,\vec{v}\,''\big), \\ 1 &= \mathsf{dim\,Vect}\,\big(\vec{v},\,\vec{v}\,'\big), \\ 2 &= \mathsf{dim\,Vect}\,\big(\vec{v},\,\vec{v}\,''\big) = \mathsf{dim\,Vect}\,\big(\vec{v}\,',\,\vec{v}\,''\big). \end{aligned}$$

(4) *Les droites* $D = D' = D''$ *sont confondues si et seulement si :*

$$1 = \mathsf{dim\,Vect}\,\big(\vec{v},\,\vec{v}\,',\,\vec{v}\,''\big). \qquad \square$$

14. Exercices

Exercice 1.

Droites et plans dans l'espace

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

2. Indépendance linéaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $V_{\mathbb{R}^3}$

Rappelons que l'espace vectoriel $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$, consiste en des vecteurs à trois composantes :

$$\vec{u} \,=\, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} \,=\, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} \,=\, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \qquad \dots\dots,$$

qui bénéficient de l'addition et de la multiplication par des scalaires :

$$c\,\vec{u} + d\,\vec{v} \,=\, c \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \,=\, \begin{pmatrix} c\,u_1 \\ c\,u_2 \\ c\,u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d\,v_1 \\ d\,v_2 \\ d\,v_3 \end{pmatrix} \,=\, \begin{pmatrix} c\,u_1 + d\,v_1 \\ c\,u_2 + d\,v_2 \\ c\,u_3 + d\,v_3 \end{pmatrix}.$$

Rappelons aussi que l'espace des *points* $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire des triplets :

$$(x, y, z) \,\in\, \mathbb{R}^3,$$

ne doit *pas être confondu* avec de l'espace des *vecteurs* $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$. Toutefois, on produit des vecteurs en « soustrayant » deux points donnés :

$$\overrightarrow{AB} \,=\, \big(x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A\big).$$

Maintenant, pour définir la notion de 2-plan dans l'espace des *points* $\mathbb{R}^3$, il faut se donner un point « de départ » dans $\mathbb{R}^3$:

$$p_0 \,=\, \big(x_0, y_0, z_0\big),$$

ainsi que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ placés en ce point, et se déplacer dans les deux directions possibles définies par $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\begin{aligned} P \,&\overset{?}{:=}\, \big\{p_0 + s\,\vec{u} + t\,\vec{v} \colon\ s \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\ t \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\} \\ &\subset\, \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Cependant, deux vecteurs choisis au hasard ne donnent pas toujours deux directions indépendantes dans l'espace,

Question 2.1. *Comment exprimer que deux vecteurs donnés $\vec{u} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ et $\vec{v} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ sont linéairement indépendants ?*

Dans le chapitre consacré aux droites dans le plan, nous avons vu que deux vecteurs arbitraires de l'espace vectoriel réel à 2 dimensions $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad\qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

sont linéairement *indépendants* si et seulement si leur déterminant ne s'annule pas :

$$0 \neq \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1\, v_2 - u_2\, v_1.$$

En particulier, ceci implique que $\vec{u} \neq \binom{0}{0}$ et $\vec{v} \neq \binom{0}{0}$ sont chacun *non nuls* — sinon, le déterminant vaudrait 0 !

En dimension 3, avec deux vecteurs à 3 composantes :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad\qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

on peut former une matrice à 3 lignes et à 2 colonnes :

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{bmatrix},$$

et être « tenté » d'extraire les 3 couples de lignes $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$:

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ & \end{bmatrix}, \qquad\qquad \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ & \\ u_3 & v_3 \end{bmatrix}, \qquad\qquad \begin{bmatrix} & \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{bmatrix},$$

puis de former les 3 déterminants 2×2 correspondants — et c'est la bonne idée !

« En mathématiques, être tenté, c'est toujours une bonne idée ! »

Nous admettrons alors l'énoncé suivant, dont la démonstration pourra être reconstituée par les lecteurs curieux qui s'inspireront d'une proposition analogue, déjà démontrée dans le chapitre consacré aux droites dans le plan.

Mais auparavant, rappelons que :

$$\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{Au moins 1 parmi les 3 réels } a,\, b,\, c \text{ est} \neq 0.$$

Proposition 2.2. *Dans l'espace vectoriel* $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ *à* 3 *dimensions, soient deux vecteurs* non nuls :

$$\vec{u} = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \qquad \textit{et} \qquad \vec{u} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes.

(i) $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont linéairement dépendants, à savoir par définition, il existe un couple de scalaires* $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ *non tous les deux nuls tels que :*

$$\vec{0} = \lambda\, \vec{u} + \mu\, \vec{v}.$$

(ii) *Il existe un scalaire non nul* $\tau \in \mathbb{R}^*$ *tel que* $\vec{u} = \tau\, \vec{v}$ $\big[$*d'où aussi* $\frac{1}{\tau}\, \vec{u} = \vec{v}\big]$.

(iii) *Les* 3 *déterminants* 2×2 *extraits sont nuls :*

$$0 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}, \qquad 0 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \qquad 0 = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}. \qquad \square$$

Par contraposition, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont alors linéairement *indépendants* si et seulement si au moins 1 parmi ces 3 déterminants est *non nul :*

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Grâce à ces préliminaires, nous pouvons enfin formuler une définition rigoureuse du concept de 2-plan dans l'espace ponctuel $\mathbb{R}^3$.

Définition 2.3. Un *plan* dans l'espace $\mathbb{R}^3$ représenté de manière paramétrique est un ensemble de points du type :

$$P := \Big\{p_0 + s\,\vec{u} + t\,\vec{v} \colon\ s \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\ t \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\Big\},$$

où $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ est un point quelconque, et où $\vec{u} = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$ sont deux vecteurs linéairement indépendants arbitraires.

Dans la pratique, c'est-à-dire en TD, en DM, et en Examen, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seront la plupart du temps *numériques et concrets*. Vérifier qu'ils sont indépendants sera alors aisé, puisque d'après la caractérisation **(ii)**, il suffira de vérifier qu'ils ne sont *pas* colinéaires, ce que l'on pourra faire la plupart du temps « *à l'œil* », sans aucun calcul.

3. Définition d'un 2-plan dans $\mathbb{R}^3$ par une équation cartésienne

Ainsi, les trois coordonnées (x, y, z) d'un point général sur un 2-plan issu du point :

$$p_0 = (x_0, y_0, z_0),$$

et dirigé par les deux vecteurs indépendants $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s\,u_1 + t\,v_1, \\ y &= y_0 + s\,u_2 + t\,v_2, \\ z &= z_0 + s\,u_3 + t\,v_3. \end{aligned}$$

Comme s et t sont des nombres réels variables quelconques, et comme les p_i, les u_i, les v_i sont des constantes, ré-écrivons ces trois équations sous la forme d'un système de 3 équations à 2 « inconnues » s et t :

$$\begin{aligned} s\,u_1 + t\,v_1 &= x - x_0, \\ s\,u_2 + t\,v_2 &= y - y_0, \\ s\,u_3 + t\,v_3 &= z - z_0. \end{aligned}$$

Par hypothèse :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pour fixer les idées, supposons que le premier déterminant $\left|\begin{smallmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{smallmatrix}\right| \neq 0$ ne s'annule pas. (Quand le second ou le troisième déterminant est $\neq 0$, les calculs sont très analogues.) Alors nous savons que le système constitué des équations 1 et 2 :

$$\begin{aligned} s\,u_1 + t\,v_1 &= x - x_0, \\ s\,u_2 + t\,v_2 &= y - y_0, \end{aligned}$$

se résout en :

$$s := \frac{\begin{vmatrix} x-x_0 & v_1 \\ y-y_0 & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}} = \frac{(x-x_0)\,v_2-(y-y_0)\,v_1}{u_1\,v_2-u_2\,v_1},$$

$$t := \frac{\begin{vmatrix} u_1 & x-x_0 \\ u_2 & y-y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}} = \frac{u_1\,(y-y_0)-u_2\,(x-x_0)}{u_1\,v_2-u_2\,v_1}.$$

Les étudiants qui ne se souviennent pas de ces formules pourront : ou bien résoudre eux-même ce système à la main ; ou bien réviser rapidement le chapitre qui présente des formules générales pour intersecter deux droites dans le plan ; ou bien [technique la plus rapide] vérifier directement à la main que ces deux formules satisfont bien le système linéaire ci-dessus.

Puisque nous savons ce que valent s et t, nous pouvons ensuite les remplacer dans l'équation 3 :

$$\begin{aligned} z-z_0 &= s\,u_3+t\,v_3 \\ &= \Big(\frac{(x-x_0)\,v_2-(y-y_0)\,v_1}{u_1\,v_2-u_2\,v_1}\Big)\,u_3+\Big(\frac{u_1\,(y-y_0)-u_2\,(x-x_0)}{u_1\,v_2-u_2\,v_1}\Big)\,v_3, \end{aligned}$$

et continuer les calculs en commençant par faire basculer à gauche le dénominateur commun $u_1v_2-u_2v_1$:

$$\begin{aligned} \big[u_1v_2-u_2v_1\big]\,(z-z_0) &= (x-x_0)\,v_2\,u_3-(y-y_0)\,v_1\,u_3+u_1\,(y-y_0)\,v_3-u_2\,(x-x_0)\,v_3 \\ &= \big[u_3v_2-u_2v_3\big]\,(x-x_0)+\big[-\,u_3v_1+u_1v_3\big]\,(y-y_0), \end{aligned}$$

c'est-à-dire de manière équivalente :

$$\big[u_2v_3-u_3v_2\big]\,(x-x_0)+\big[u_3v_1-u_1v_3\big]\,(y-y_0)+\big[u_1v_2-u_2v_1\big]\,(z-z_0) = 0.$$

Tiens ! Des visages connus ! Au signe près, on retrouve les deux déterminants 2×2 ci-dessus ! « Ça, c'est chouette » ! Et nous avons supposé qu'au moins 1 parmi ces 3 facteurs :

$$u_2v_3-u_3v_2 \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad u_3v_1-u_1v_3 \neq 0, \qquad \text{ou} \qquad u_1v_2-u_2v_1 \neq 0,$$

était non nul. Donc nous trouvons une vraie équation, qui fait apparaître au moins une parmi les trois coordonnées $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $(z-z_0)$.

En donnant des noms plus simples à ces trois facteurs :

$$a := u_2v_3-u_3v_2, \qquad b := u_3v_1-u_1v_3, \qquad c := u_1v_2-u_2v_1,$$

nous avons donc construit une *équation cartésienne :*

$$a\,(x-x_0)+b\,(y-y_0)+c\,(z-z_0) = 0.$$

On peut aussi l'écrire :

$$a\,x+b\,y+c\,z = a\,x_0+b\,y_0+c\,z_0,$$

et même poser pour abréger :

$$d := a\,x_0+b\,y_0+c\,z_0.$$

Définition 3.1. Un 2-*plan* $P \subset \mathbb{R}^3$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini comme lieu d'annulation d'une équation cartésienne :

$$P := \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \colon\ ax+by+cz=d\big\},$$

où $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ et $d\in\mathbb{R}$ sont des constantes.

Comme pour les droites dans le plan, on peut démontrer le résultat suivant, que nous admettrons.

Théorème 3.2. [Équivalence entre deux définitions] *Un* 2*-plan* $P \subset \mathbb{R}^3$ *peut être défini de deux manières équivalentes, comme :*

(i) $P := \big\{ p_0 + s\,\vec{u} + t\,\vec{v} \colon\ s \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$ *quelconques*$\big\}$, *avec un point quelconque* $p_0 \in \mathbb{R}^3$ *et deux vecteurs* linéairement indépendants $\vec{u} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ *et* $\vec{v} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ *;*

(ii) $P := \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ ax + by + cz = d \big\}$, *avec des constantes réelles* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, *telles que* $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. □

La deuxième représentation consiste en une *équation cartésienne*, bien connue depuis le lycée. Autrement dit, un plan dans $\mathbb{R}^3$ peut toujours être considéré comme l'ensemble des solutions d'un système linéaire *compatible* à trois inconnues, constitué d'une unique équation, et dont la forme échelonnée réduite peut être ou bien :

$$\big[\,\blacksquare\ \ *\ \ *\ \ *\,\big] \qquad \text{ou bien :} \qquad \big[\,\mathbf{0}\ \ \blacksquare\ \ *\ \ *\,\big] \qquad \text{ou bien :} \qquad \big[\,\mathbf{0}\ \ \mathbf{0}\ \ \blacksquare\ \ *\,\big]$$

mais certainement pas :

$$\big[\,\mathbf{0}\ \ \mathbf{0}\ \ \mathbf{0}\ \ \blacksquare\,\big]$$

ce qui correspondrait à $(a,b,c) = (0,0,0)$ et à $d = \blacksquare$, car cette forme est la forme générale d'un système *incompatible*.

4. Produit scalaire et vecteur orthogonal directeur d'un 2-plan $P \subset \mathbb{R}^3$

Rappelons que dans $\mathbb{R}^3$, le *produit scalaire euclidien* (canonique) entre deux vecteurs $\vec{u} = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$ est défini par :

$$\vec{u} \bullet \vec{v} \;=\; \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \;:=\; u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

À tout couple de vecteurs, le produit *scalaire* associe donc un *nombre réel* (et non pas un vecteur !), ce qu'on appelle un *scalaire*.

Définition 4.1. On dit que deux vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* si $0 = \vec{u} \bullet \vec{v}$, ce qu'on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Soit un plan d'équation cartésienne :

$$a\,x + b\,y + c\,z \;=\; d.$$

Proposition 4.2. *Un plan* $P \subset \mathbb{R}^3$ *passant par un point* $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ *de l'espace peut être défini comme l'ensemble des points* $M \in \mathbb{R}^3$ *tels que le vecteur* $\overrightarrow{p_0 M}$ *est orthogonal à un vecteur* non nul $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ *donné :*

$$P \;:=\; \Big\{ M = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ \overrightarrow{p_0 M} \perp \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) \Big\}. \qquad \square$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \overrightarrow{p_0 M} \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &=\; a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0), \end{aligned}$$

et on retrouve bien une équation cartésienne de plan.

Ensuite, soit un plan quelconque donné par une équation cartésienne :

$$P \;:=\; \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ ax + by + cz = d \big\},$$

avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Un vecteur orthogonal (normal) naturel est donc :

$$\vec{n}_P \;:=\; \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Nous affirmons que les trois vecteurs suivants dont les coordonnées sont formées à partir des coefficients (a, b, c) de l'équation cartésienne du plan :

$$\vec{u}_{12} := \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_{13} := \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_{23} := \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix},$$

sont parallèles à ce plan, c'est-à-dire contenus dans ce plan à une translation près, car le plan ne passe pas forcément par l'origine $(0, 0, 0)$, à moins que $d = 0$.

En effet, il suffit de vérifier qu'ils sont *orthogonaux* au vecteur normal :

$$0 \stackrel{?}{=} \vec{u}_{12} \bullet \vec{n}_P \quad \text{OUI}, \qquad 0 \stackrel{?}{=} \vec{u}_{13} \bullet \vec{n}_P \quad \text{OUI}, \qquad 0 \stackrel{?}{=} \vec{u}_{23} \bullet \vec{n}_P \quad \text{OUI}.$$

Lemme 4.3. *Étant donné trois nombres réels $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ non tous nuls, il y a toujours, parmi les 3 vecteurs :*

$$\vec{u}_{12} := \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_{13} := \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_{23} := \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix},$$

au moins 2 vecteurs linéairement indépendants.

En fait, il ne peut pas y en avoir plus que 2 qui sont linéairement indépendants, puisqu'ils sont tous parallèles à un plan $P \subset \mathbb{R}^3$, de dimension 2.

Démonstration. Appliquons la Proposition 2.2 **(iii)** et calculons les 3 déterminants 2×2 extraits pour chacun des couples de vecteurs.

- $\vec{u}_{12}$ et $\vec{u}_{13}$:

$$\begin{vmatrix} -b & -c \\ a & 0 \end{vmatrix} = a\,c, \qquad \begin{vmatrix} -b & -c \\ 0 & a \end{vmatrix} = -\,a\,b, \qquad \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2.$$

En particulier, nous constatons que si $a = 0$, tandis que $(b, c) \neq (0, 0)$ par hypothèse, ces trois résultats valent 0, et dans ce cas, les deux vecteurs $\vec{u}_{12}$ et $\vec{u}_{13}$ ne sont *pas* linéairement indépendants. Quand $a = 0$, il est donc nécessaire de considérer aussi $\vec{u}_{23}$.

- $\vec{u}_{12}$ et $\vec{u}_{23}$:

$$\begin{vmatrix} -b & 0 \\ a & -c \end{vmatrix} = b\,c, \qquad \begin{vmatrix} -b & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = -\,b^2, \qquad \begin{vmatrix} a & -c \\ 0 & b \end{vmatrix} = a\,b.$$

- $\vec{u}_{13}$ et $\vec{u}_{23}$:

$$\begin{vmatrix} -c & 0 \\ 0 & -c \end{vmatrix} = c^2, \qquad \begin{vmatrix} -c & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = -\,b\,c, \qquad \begin{vmatrix} 0 & -c \\ a & b \end{vmatrix} = a\,c.$$

En regardant les $3 \times 3 = 9$ résultats, nous voyons des carrés a^2, $-\,b^2$, c^2, les autres étant des produits. Comme au moins 1 parmi les 3 nombres réels a, b, c est $\neq 0$ par hypothèse, nous concluons qu'au moins 1 de ces 9 déterminants est $\neq 0$, et donc, au moins 1 parmi les 3 couples de vecteurs :

$$\big(\vec{u}_{12},\, \vec{u}_{13}\big), \qquad \big(\vec{u}_{12},\, \vec{u}_{23}\big), \qquad \big(\vec{u}_{13},\, \vec{u}_{23}\big),$$

est linéairement indépendant, ce qu'il fallait démontrer. □

Résumé 4.4. *Étant donné l'équation cartésienne $a\,x + b\,y + c\,z = d$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $d \in \mathbb{R}$ d'un plan dans l'espace $\mathbb{R}^3$:*

(1) *le vecteur non nul :*

$$\vec{n}_P := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

est orthogonal à D ;

(2) *au moins 2 parmi les 3 vecteurs :*

$$\vec{u}_{12} := \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_{13} := \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_{23} := \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix},$$

sont parallèles à D, c'est-à-dire forment un couple de vecteurs directeurs de P à partir desquels on peut reconstituer une équation paramétrique de P.

5. Plan passant par trois points non alignés

Intuitivement, on « voit » que par trois points distincts et non alignés A, B, C dans l'espace $\mathbb{R}^3$, il passe toujours un et un seul plan. Notons :

$$A = (x_A, y_A, z_A), \qquad B = (x_B, y_B, z_B), \qquad C = (x_C, y_C, z_C).$$

Évidemment, si trois points A, B, C sont donnés, on commence par vérifier que les deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants, ou bien « à l'œil », ou bien en appliquant la Proposition 2.2.

Question 5.1. *Comment exprime-t-on qu'un point quelconque $M = (x, y, z)$ de l'espace appartient au plan (ABC) ?*

Pour un point $M = (x, y, z)$ quelconque du plan, considérons le vecteur :

$$\overrightarrow{AM} = M - A := \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}.$$

Il est clair que ce vecteur $\overrightarrow{AM}$ doit être combinaison linéaire des deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ du plan (ABC). Autrement dit, il existe $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$ — d'ailleurs arbitraires lorsque M parcourt tous les points du plan (ABC) — tels que :

$$\overrightarrow{AM} = s\,\overrightarrow{AB} + t\,\overrightarrow{AC},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} x - x_A &= s\,(x_B - x_A) + t\,(x_C - x_A), \\ y - y_A &= s\,(y_B - y_A) + t\,(y_C - y_A), \\ z - z_A &= s\,(z_B - z_A) + t\,(z_C - z_A). \end{aligned}$$

Proposition 5.2. *La représentation paramétrique du plan unique (AB) passant par trois points distincts et non alignés A, B, C dans l'espace $\mathbb{R}^3$ est :*

$$\begin{aligned} x &= x_A + s\,(x_B - x_A) + t\,(x_C - x_A), \\ y &= y_A + s\,(y_B - y_A) + t\,(y_C - y_A), \\ z &= z_A + s\,(z_B - z_A) + t\,(z_C - z_A), \end{aligned}$$

où $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$ sont arbitraires. □

Alors le *point-mobile* doublement paramétré :

$$M(s, t) := A + s\,\overrightarrow{AB} + t\,\overrightarrow{AC},$$

satisfait :

$$M(0, 0) = A, \qquad M(1, 0) = B, \qquad M(0, 1) = C.$$

6. Intersections d'un plan avec les plans de coordonnées $0xy$, $0xz$, $0yz$

Partir d'une équation cartésienne de plan dans $\mathbb{R}^3$:

$$a\,x + b\,y + c\,z \,=\, d.$$

Intersecter ce plan avec les trois plans de coordonnées $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$, $\{z = 0\}$. Par symétrie entre les coordonnées, étudier seulement l'intersection avec le plan horizontal $\{z = 0\}$.

Donc on résout le système linéaire :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= d \\ z &= 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y \quad &= d \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Tout se passe donc dans le plan horizontal à hauteur nulle $z = 0$. Par hypothèse, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ — sinon, ce n'est pas une équation de plan.

Si $(a, b) \neq (0, 0)$ aussi, la première équation est une équation de droite dans le plan horizontal $\{z = 0\}$. On a donc l'intersection de *deux* plans, le premier tel une feuille posée verticalement sur une table :

$$\big\{(x, y, z)\colon\;\; ax + by = d\big\},$$

dont l'équation est *indépendante* de z, et le second $\{z = 0\}$ étant le plan de la table, justement. Ces deux plans s'intersectent le long de la droite :

$$\big\{(x, y, 0)\colon\;\; ax + by = d\big\},$$

située dans le plan horizontal, comme un stylo au repos.

Mais $(a, b) = (0, 0)$ peut se produire ! En effet, la contrainte $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ peut être satisfaite avec $c \neq 0$. Dans ce cas « exceptionnel », le système est alors :

$$\begin{aligned} 0\,x + 0\,y + c\,z &= d \\ z &= 0 \end{aligned} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \begin{aligned} z &= \tfrac{d}{c} \\ z &= 0 \end{aligned}$$

il correspond à deux plans horizontaux parallèles. Leur intersection est vide lorsque $\frac{d}{c} \neq 0$, et ces deux plans horizontaux sont *confondus* lorsque $\frac{c}{d} = 0$.

Modulo une permutation des coordonnées x, y, z, l'étude générale est terminée !

7. Équations graphées de plans $P \subset \mathbb{R}^3$

Partir de :

$$a\,x + b\,y + c\,z \,=\, d.$$

Supposer $c \neq 0$. Résoudre :

$$\begin{aligned} z \,&=\, -\,\tfrac{a}{c}\,x - \tfrac{b}{c}\,y + \tfrac{d}{c} \\ &=:\, p\,x + q\,y + r, \end{aligned}$$

Voir la coordonnée verticale $z = z(x, y)$ comme fonction des coordonnées horizontales (x, y). S'imaginer une surface dans l'espace, une « nappe » (toute droite, sans bosselures, une planche bien rabotée, quoi !).

Lorsque $c = 0$, supposer $b \neq 0$, résoudre :

$$y \,=\, -\,\tfrac{a}{b}\,x + \tfrac{d}{a}.$$

Voir $y = y(x, z)$ comme une fonction de (x, z), avec les variable x, z *libres et quelconques*, dans un cas spécial où y ne dépend en fait pas de z.

Lorsque $c = 0$ et $b = 0$, d'où $a \neq 0$ nécessairement puisque pour l'équation d'un plan il faut toujours supposer $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, résoudre :

$$x = \tfrac{d}{a},$$

et obtenir un plan 'vertical', avec $x = x(y, z)$ fonction des deux variables libres y, z, et en fait, fonction constante.

8. Intersection entre deux plans $P \subset \mathbb{R}^3$ et $P' \subset \mathbb{R}^3$

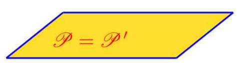
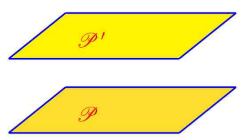
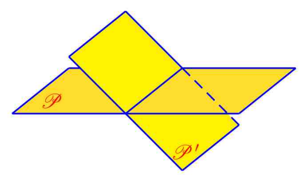
Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, considérons 2 plans $P \subset \mathbb{R}^3$ et $P' \subset \mathbb{R}^3$ d'équations cartésiennes respectives :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= d, \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z &= d', \end{aligned}$$

avec bien sûr $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$.

Question 8.1. *Quelles sont toutes les intersections possibles entre* 2 *plans donnés* $P \subset \mathbb{R}^3$ *et* $P' \subset \mathbb{R}^3$ *?*

Puisque les 8 lettres a, b, c, d, a', b', c', d' désignent des constantes réelles qui peuvent pendre des valeurs très diverses, nous nous doutons bien que de nombreux cas algébriques pourront se produire, qui correspondront aux trois situations géométriques bien connues.

Plans parallèles		Plans non parallèles
confondus	strictement parallèles	sécants en une droite
		

La matrice complète du système est :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array}\right].$$

Tout d'abord, chacune des deux lignes formées par la matrice *non* complète :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} &\neq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} a' & b' & c' \end{bmatrix} &\neq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ne peut *pas* être identiquement nulle. Par conséquent, *il y aura toujours un pivot en première ligne*.

Pour cette raison, lorsqu'on applique la méthode du pivot pour résoudre un tel système linéaire de 2 équations à 3 inconnues, seuls les trois branches suivantes de cas variés pourront se produire.

- Premièrement, quand le pivot de la ligne 1 est en position $(1, 1)$, quatre cas peuvent se produire :

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \end{array}\right]}_{\infty^1 \ \textbf{solutions}}, \quad \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * \end{array}\right]}_{\infty^1 \ \textbf{solutions}}, \quad \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare \end{array}\right]}_{\textbf{Aucune solution !}}, \quad \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\infty^2 \ \textbf{solutions}},$$

et les espaces de solutions respectifs sont :

$$\begin{aligned} \mathsf{Sol} &= \big\{\big(* + *\,z,\ * + *\,z,\ z\big) \colon\ z \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}, \\ \mathsf{Sol} &= \big\{\big(* + *\,y,\ y,\ *\big) \colon\ y \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}, \\ \mathsf{Sol} &= \emptyset, \\ \mathsf{Sol} &= \big\{\big(* + *\,y + *\,z,\ y,\ z\big) \colon\ y \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\ z \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}. \end{aligned}$$

• Deuxièmement, quand le pivot de la ligne 1 est en position $(1, 2)$, trois cas peuvent se produire :

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * \end{array}\right]}_{\infty^1 \text{ solutions}}, \quad \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare \end{array}\right]}_{\textbf{Aucune solution!}}, \quad \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\infty^2 \text{ solutions}},$$

et les espaces de solutions respectifs sont :

$$\begin{aligned} \mathsf{Sol} &= \big\{ \big(x,\ *,\ *\big) \colon\ x \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \big\}, \\ \mathsf{Sol} &= \emptyset, \\ \mathsf{Sol} &= \big\{ \big(x,\ * + * \, z,\ z\big) \colon\ x \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\ z \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \big\}. \end{aligned}$$

• Troisièmement et dernièrement, quand le pivot de la ligne 1 est en position $(1, 3)$, deux cas peuvent se produire :

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare \end{array}\right]}_{\textbf{Aucune solution!}}, \quad \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\infty^2 \text{ solutions}},$$

et les espaces de solutions respectifs sont :

$$\begin{aligned} \mathsf{Sol} &= \emptyset, \\ \mathsf{Sol} &= \big\{ \big(x,\ y,\ *\big) \colon\ x \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\ y \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \big\}. \end{aligned}$$

Ainsi, grâce à cette première approche « intuitive » qui sous-entend de nombreux calculs, nous sommes maintenant bien convaincus qu'il y a effectivement trois dispositions possibles de deux plans P et P' dans $\mathbb{R}^3$:

• les deux plans $P = P'$ sont confondus $\longleftrightarrow$ **solutions doublement infinies** ∞^2 ;

• les deux plans $P // P'$ avec $P \neq P'$ sont parallèles et non confondus $\longleftrightarrow$ **aucune solution** ;

• les deux plans $P \cap P' = D$ sont transversaux, *i.e.* sécants en une droite $\longleftrightarrow$ **solutions simplement infinies** ∞^1.

Maintenant, nous pouvons donner une caractérisation très simple du fait que deux droites $D = D'$ coïncident.

Théorème 8.2. *Dans l'espace* $\mathbb{R}^3$*, soient deux plans* P *et* P' *d'équations cartésiennes* $a\,x + b\,y + c\,z = d$ *et* $a'\,x + b'\,y + c'\,z = d'$*, avec* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ *et* $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$*. Alors on a équivalence entre :*

(i) *il existe* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *non nul tel que :*

$$a' = \lambda\, a, \qquad b' = \lambda\, b, \qquad c' = \lambda\, c, \qquad d' = \lambda\, d;$$

(ii) $P = P'$ *;*

De même, on a équivalence entre :

(iii) $P // P'$ *sont parallèles ;*

(iv) *il existe* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *non nul tel que :*

$$a' = \lambda\, a, \qquad b' = \lambda\, b, \qquad c' = \lambda\, c.$$

Démonstration. Un énoncé analogue a déjà été démontré pour caractériser la coïncidence de, ainsi que le parallélisme entre, 2 droites $D \subset \mathbb{R}^2$ et $D' \subset \mathbb{R}^2$ dans le plan, en travaillant avec deux variables x, y. Le lecteur courageux élaborera aisément une généralisation de cette démonstration au cas de 3 variables x, y, z. □

Terminologie 8.3. Deux plans $P \subset \mathbb{R}^3$ et $P' \subset \mathbb{R}^3$ d'équations cartésiennes :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= d, \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z &= d', \end{aligned}$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$, seront dits *transversaux* quand leurs 2 vecteurs normaux :

$$\vec{n}_P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \vec{n}_{P'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

sont *non colinéaires*, *i.e.* sont linéairement indépendants.

Rappelons que tel et le cas si et seulement si l'un au moins parmi les 3 déterminants 2×2 suivants :

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0,$$

est non nul.

Théorème 8.4. *Deux plans $P \subset \mathbb{R}^3$ et $P' \subset \mathbb{R}^3$ sont transversaux si et seulement si leur intersection est une droite.* □

Afin de déterminer cette droite, nous pouvons enfin entreprendre un calcul ! Pour fixer les idées, supposons que :

$$0 \neq \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}.$$

Pour résoudre le système linéaire de 2 équations à 3 inconnues associé à nos deux plans P et P', ré-écrivons ces 2 équations sous la forme :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= d - c\,z, \\ a'\,x + b'\,y &= d' - c'\,z. \end{aligned}$$

Une application directe de formules déjà vues dans le chapitre consacré aux droites dans le plan, ou une résolution manuelle *ad hoc* (exercice), fournit l'expression premièrement de :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} d-cz & b \\ d'-c'z & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(d-cz)\,b' - (d'-c'z)\,b}{ab' - a'b} \\ &= \frac{db' - d'b}{ab' - a'b} + \frac{-\,cb' + c'b}{ab' - a'b}\,z, \end{aligned}$$

puis deuxièmement de :

$$\begin{aligned} y &= \frac{\begin{vmatrix} a & d-cz \\ a' & d'-c'z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \\ &= \frac{a\,(d'-c'z) - a'\,(d-cz)}{ab' - a'b} \\ &= \frac{ad' - a'd}{ab' - a'b} + \frac{-\,ac' + a'c}{ab' - a'b}\,z. \end{aligned}$$

Théorème 8.5. *Sous l'hypothèse $0 \neq \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, la droite d'intersection entre deux plans transversaux :*

$$D := P \cap P',$$

a pour équations paramétriques :

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{db'-d'b}{ab'-a'b} + \tfrac{-cb'+c'b}{ab'-a'b}\, z, \\ y &= \tfrac{ad'-a'd}{ab'-a'b} + \tfrac{-ac'+a'c}{ab'-a'b}\, z, \\ z &= z, \end{aligned}$$

avec $z \in \mathbb{R}$ quelconque jouant le rôle du paramètre temporel $t \in \mathbb{R}$. □

Certainemant, dans la « vraie vie » d'un étudiant de Licence 1, tous les calculs de ce type seront la plupart du temps à effectuer, non pas avec des lettres formelles a, b, c, d, a', b', c', d', mais avec des quantités numériques précises.

Enfin, traitons l'intersection entre un premier plan P donné sous forme cartésienne :

$$a\,x + b\,y + c\,z = d,$$

et un deuxième plan P' donné sous forme paramétrique :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s\,u_1 + t\,v_1, \\ y &= y_0 + s\,u_2 + t\,v_2, \\ z &= z_0 + s\,u_3 + t\,v_3. \end{aligned}$$

Naturellement, on injecte cette représentation dans l'équation cartésienne, on réorganise :

$$\begin{aligned} 0 &= a\big(x_0 + s\,u_1 + t\,v_1\big) + b\big(y_0 + s\,u_2 + t\,v_2\big) + c\big(z_0 + s\,u_3 + t\,v_3\big) - d \\ &= a\,x_0 + b\,y_0 + c\,y_0 - d + \big[a\,u_1 + b\,u_2 + c\,u_3\big]\,s + \big[a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3\big]\,t, \end{aligned}$$

et on obtient une relation de la forme :

$$0 = \alpha + \beta\,s + \gamma\,t.$$

La plupart du temps (mais pas toujours), on a $\beta \neq 0$ ou $\gamma \neq 0$. Quand $\gamma \neq 0$, on peut donc résoudre t en fonction de s, ce qui donne :

$$t = -\tfrac{\alpha}{\gamma} - \tfrac{\beta}{\gamma}\,s,$$

et en remplaçant dans la représentation paramétrique, on obtient la *droite d'intersection* $D := P \cap P'$ *:*

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \tfrac{\alpha}{\gamma}\,v_1 + \big[u_1 - \tfrac{\beta}{\gamma}\,v_1\big]\,s, \\ y &= y_0 - \tfrac{\alpha}{\gamma}\,v_2 + \big[u_2 - \tfrac{\beta}{\gamma}\,v_2\big]\,s, \\ z &= z_0 - \tfrac{\alpha}{\gamma}\,v_3 + \big[u_3 - \tfrac{\beta}{\gamma}\,v_3\big]\,s. \end{aligned}$$

À nouveau, dans la vraie vie, ces calculs seront à effectuer non pas avec des lettres, mais avec des nombres (rationnels) explicites.

9. Intersection entre trois plans $P, P', P'' \subset \mathbb{R}^3$ et déterminant 3×3 formel

Avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, avec $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$, avec $(a'', b'', c'') \neq (0, 0, 0)$, donnons-nous trois plans P, P', P'' dans l'espace $\mathbb{R}^3$ sous forme cartésienne :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= d, \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z &= d', \\ a''\,x + b''\,y + c''\,z &= d''. \end{aligned}$$

Les 3 vecteurs normaux correspondants sont :

$$\vec{n}_P := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad \vec{n}_{P'} := \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \qquad \vec{n}_{P''} := \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}.$$

Géométriquement, on se doute bien que :

- P, P', P'' sont *parallèles* si et seulement si :

$$1 = \dim \operatorname{Vect}\big(\vec{n}_P, \vec{n}_{P'}, \vec{n}_{P''}\big);$$

- Deux parmi les trois plans P, P', P'' sont *parallèles* si et seulement si :

$$2 = \dim \operatorname{Vect}\big(\vec{n}_P, \vec{n}_{P'}, \vec{n}_{P''}\big);$$

- P, P', P'' s'intersectent en un point *unique* si et seulement si :

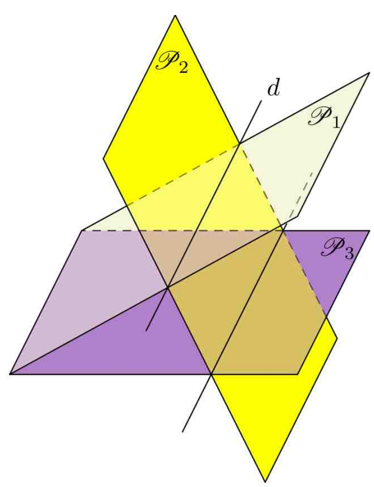
$$3 = \dim \operatorname{Vect}\big(\vec{n}_P, \vec{n}_{P'}, \vec{n}_{P''}\big).$$

En réfléchissant plus, on trouve les situations géométriques suivantes.

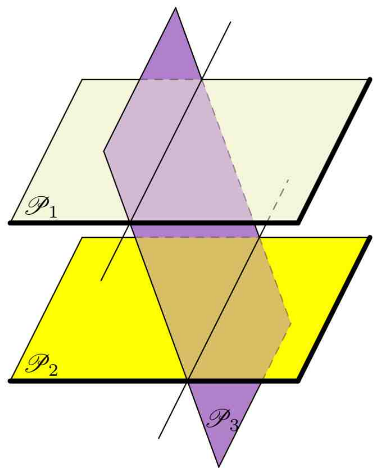
On considère trois plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ et $\overrightarrow{n_3}$.

- **Point de vue géométrique**

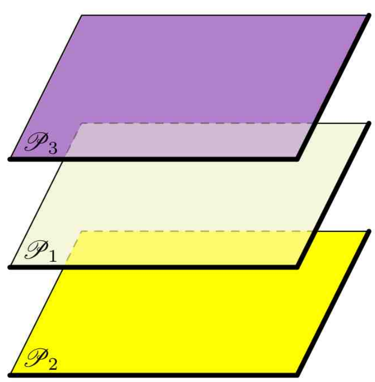
  1. L'intersection des plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ peut être **vide**.



Deux plans sont sécants suivant une droite d et le troisième plan est strictement parallèle à d

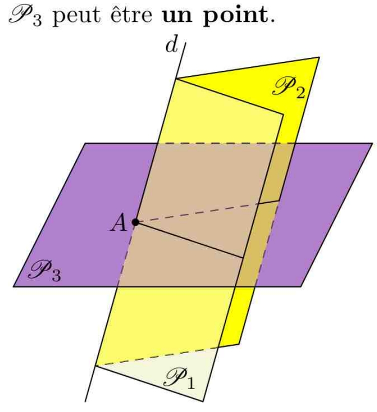


Deux plans sont strictement parallèles et le
troisième les coupe suivant deux droites parallèles



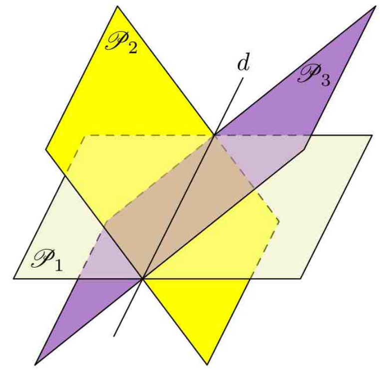
Deux plans sont strictement parallèles, le troisième est parallèle aux précédents

2. L'intersection des plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ peut être **un point**.



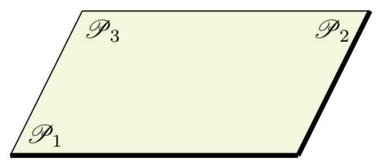
Deux plans sont sécants suivant une droite d et le troisième coupe d en un point A.

3. L'intersection des plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ peut être **une droite**.



Les trois plans sont sécants suivant une droite d

4. L'intersection des plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ peut être **un plan**.



Les trois plans sont confondus

Problème 9.1. *Décrire algébriquement toutes les situations respectives possibles de* 3 *plans quelconques* P, P', P'' *dans l'espace* $\mathbb{R}^3$.

La matrice complète du système linéaire décrivant l'intersection $P \cap P' \cap P''$ des trois plans est :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array}\right].$$

Tout d'abord, chacune des trois lignes formées par la matrice *non* complète :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} &\neq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} a' & b' & c' \end{bmatrix} &\neq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} &\neq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ne peut *pas* être identiquement nulle. Par conséquent, *il y aura toujours un pivot en première ligne*.

Pour cette raison, lorsqu'on applique la méthode du pivot pour résoudre un tel système linéaire de 2 équations à 3 inconnues, seuls les trois branches suivantes de cas variés pourront se produire.

- Premièrement, quand le pivot de la ligne 1 est en position $(1,1)$, six cas peuvent se produire :

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * \end{array}\right]}_{1 \textbf{ solution}}, \quad \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare \end{array}\right]}_{\textbf{Aucune solution !}}, \quad \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare \end{array}\right]}_{\textbf{Aucune solution !}}, \quad \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\infty^1 \textbf{ solutions}},$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\textbf{Aucune solution !}}, \quad \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\infty^2 \textbf{ solutions}}.$$

- Deuxièmement, quand le pivot de la ligne 1 est en position $(2,1)$, quatre cas peuvent se produire :

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare \end{array}\right]}_{\textbf{Aucune solution !}}, \quad \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\infty^1 \textbf{ solutions}}, \quad \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\textbf{Aucune solution !}}, \quad \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\infty^2 \textbf{ solutions}}.$$

- Troisièmement, quand le pivot de la ligne 1 est en position $(3,1)$, deux cas peuvent se produire :

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\textbf{Aucune solution !}}, \quad \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\infty^2 \textbf{ solutions}}.$$

Terminologie 9.2. Trois plans $P, P', P'' \subset \mathbb{R}^3$, d'équations cartésiennes :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= d, \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z &= d', \\ a''\,x + b''\,y + c''\,z &= d'', \end{aligned}$$

avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, $(a'',b'',c'') \neq (0,0,0)$, $(a',b',c') \neq (0,0,0)$ seront dits *transversaux* quand leurs 3 vecteurs normaux :

$$\vec{n}_P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad \vec{n}_{P'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_{P''} = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants.

Maintenant, nous ne savons toujours pas comment caractériser l'indépendance entre trois vecteurs.

Pour l'instant, essayons de résoudre notre système linéaire. Commençons par éliminer x entre les équations 1 et 2 :

$$\begin{aligned} a'\big(a\,x + b\,y + c\,z &= d\big), \\ a\big(a'\,x + b'\,y + c'\,z &= d'\big), \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\big(a'b - ab'\big)\,y + \big(a'c - ac'\big)\,z = a'd - ad'.$$

De même, éliminons x entre les équations 1 et 3 :

$$\begin{aligned} a''\big(a\,x + b\,y + c\,z &= d\big), \\ a\big(a''\,x + b''\,y + c''\,z &= d''\big), \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\big(a''b - ab''\big)\,y + \big(a''c - ac''\big)\,z = a''d - ad''.$$

Nous obtenons ainsi un système de 2 équations à 2 inconnues de la forme :

$$\begin{aligned} \alpha\,y + \beta\,z &= \gamma, \\ \alpha'\,y + \beta'\,z &= \gamma', \end{aligned}$$

et on sait ce qu'il faut faire pour le résoudre, modulo le fait que ici, les constantes α, β, γ, α', β', γ', sont un petit peu compliquées.

En tout cas, nous pouvons calculer courageusement afin d'éliminer la variable y :

$$\begin{aligned} \big(a''b - ab''\big)\Big(\big(a'b - ab'\big)\,y + \big(a'c - ac'\big)\,z\Big) &= a'd - ad', \\ \big(a'b - ab'\big)\Big(\big(a''b - ab''\big)\,y + \big(a''c - ac''\big)\,z\Big) &= a''d - ad'', \end{aligned}$$

et nous obtenons une équation en z seulement :

$$\Big[\big(a''b-ab''\big)\,\big(a'c-ac'\big)-\big(a'b-ab'\big)\,\big(a''c-ac''\big)\Big]\,z \;=\; \big(a''b-ab''\big)\,\big(a'd-ad'\big)-\big(a'b-ab'\big)\,\big(a''d-ad''\big).$$

Maintenant, développons tous les termes :

$$\begin{bmatrix} \underline{a''ba'c_\circ} - a''bac' - ab''a'c + ab''ac' \\ -\,\underline{a'ba''c_\circ} + a'bac'' + ab'a''c - ab'ac'' \end{bmatrix} z \;=\; \begin{matrix} \underline{a''ba'd_\circ} - a''bad' - ab''a'd + ab''ad' \\ -\,\underline{a'ba''d_\circ} + a'bad'' + ab'a''d - ab'ad'' \end{matrix}$$

observons que 2 paires de termes s'annihilent, et que tout se factorise par a :

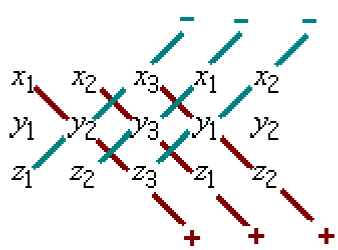
$$-\,a\,\Big[ab'c''+a'b''c+a''bc'-a''b'c-a'bc''-ab''c'\Big]\,z \;=\; -\,a\,\Big(ab'd''+a'b''d+a''bd'-a''b'd-a'bd''-ab''d'\Big).$$

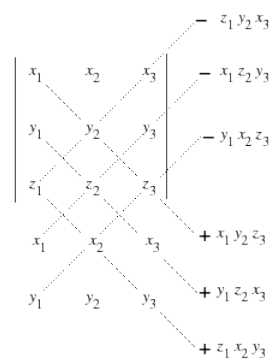
Définition 9.3. Le *déterminant* d'une matrice 3×3 :

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix},$$

est le scalaire noté avec des barres verticales, et calculé mentalement grâce à la « *règle de Sarrus* » :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} := u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1 - u_2v_1w_3 - u_1v_3w_2.$$





Après échange entre lignes et colonnes, le déterminant reste le même :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

On peut démontre la

Proposition 9.4. *Trois vecteurs dans l'espace* $\mathbb{R}^3$ *:*

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

sont linéairement dépendants *si et seulement si leur déterminant s'annule :*

$$0 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

□

Par contraposition, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont linéairement *in*dépendants ssi :

$$0 \neq \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

En revenant à l'équation laissée sur le bord du chemin plus haut, on constate, après division par a (que l'on suppose $\neq 0$), que z se résout sour la forme d'un quotient de deux déterminants :

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}.$$

Théorème 9.5. [Formules de Cramér en dimension 3**]** *Dans l'espace* $\mathbb{R}^3$*, trois plans donnés sous forme cartésienne :*

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= d, \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z &= d', \\ a''\,x + b''\,y + c''\,z &= d'', \end{aligned}$$

avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$*, avec* $(a',b',c') \neq (0,0,0)$*, avec* $(a'',b'',c'') \neq (0,0,0)$*, s'intersectent en un point unique* $Q := P \cap P' \cap P''$ *si et seulement si leurs* 3 *vecteurs normaux :*

$$\vec{n}_P := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad \vec{n}_{P'} := \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \qquad \vec{n}_{P''} := \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix},$$

sont linéairement indépendants, si et seulement si :

$$0 \neq \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Dans ce cas, les coordonnées du point $Q = P \cap P' \cap P''$ *sont :*

$$x_Q := \frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}, \qquad y_Q := \frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}, \qquad z_Q := \frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}. \qquad \square$$

10. Droites $D \subset \mathbb{R}^3$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, soit un point fixé :

$$p_0 = \big(x_0, y_0, z_0\big),$$

et soit un vecteur *non nul* fixé :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Question 10.1. *Comment définir la droite passant par le point* p_0 *qui est dirigée par le vecteur non nul* $\vec{v}$ *?*

C'est très simple ! Un point quelconque $M = (x,y,z)$ appartient à cette droite si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{p_0M}$ est colinéaire au vecteur $\vec{v}$. Autrement dit, avec $t \in \mathbb{R}$ quelconque, ssi :

$$\overrightarrow{p_0M} = t\,\vec{v}.$$

En coordonnées, nous obtenons la *représentation paramétrique d'une droite* $D \subset \mathbb{R}^3$ *dans l'espace :*

$$\begin{aligned} x - x_0 &= t\,\alpha, \\ y - y_0 &= t\,\beta, \\ z - z_0 &= t\,\gamma. \end{aligned}$$

Au *paramètre* quelconque t est donc associé le point mobile sur la droite :

$$M(t) := \Big(x_0 + t\,\alpha,\ y_0 + t\,\beta,\ z_0 + t\,\gamma\Big),$$

qui se situe bien évidemment au point de départ p_0 à l'origine des temps $t = 0$:

$$M(0) = p_0 = \big(x_0,\, y_0,\, z_0\big).$$

Une autre manière de voir une droite $D \subset \mathbb{R}^3$ dans l'espace consiste à éliminer la variable t entre ces 3 équations. De manière équivalente, on peut aussi partir de la matrice 3×2 des coordonnées des deux vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{p_0 M}$:

$$\begin{bmatrix} \alpha & x - x_0 \\ \beta & y - y_0 \\ \gamma & z - z_0 \end{bmatrix},$$

puis appliquer la Proposition 2.2 afin d'exprimer que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants si et seulement si les trois déterminants 2×2 extraits suivants s'annulent :

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha & x - x_0 \\ \beta & y - y_0 \end{vmatrix}, \qquad 0 = \begin{vmatrix} \alpha & x - x_0 \\ \gamma & z - z_0 \end{vmatrix}, \qquad 0 = \begin{vmatrix} \beta & y - y_0 \\ \gamma & z - z_0 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire que les 3 équations cartésiennes suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\,\big(y - y_0\big) - \beta\,\big(x - x_0\big), \\ 0 &= \alpha\,\big(z - z_0\big) - \gamma\,\big(x - x_0\big), \\ 0 &= \beta\,\big(z - z_0\big) - \gamma\,\big(y - y_0\big). \end{aligned}$$

En général, 2 équations parmi ces 3 équations suffisent toujours, ce qui est naturel, puisqu'une droite est de dimension $1 = 3 - 2$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, et qu'il est intuitivement clair qu'une droite s'obtient toujours en intersectant 2 plans transversaux chacun défini par 1 équation cartésienne. Dans chaque cas particulier, il faut donc *sélectionner* 2 parmi ces 3 équations cartésiennes.

Par exemple, quand toutes les composantes $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ du vecteur $\vec{v}$ sont *non nulles*, on peut écrire ces 3 équations cartésiennes sous la forme symétrique :

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}.$$

Implicitement, une *troisième égalité* à lieu, en partant du dernier terme pour revenir au premier terme :

$$\frac{z - z_0}{\gamma} = \frac{x - x_0}{\alpha}.$$

Supposons maintenant que $\alpha = 0$, d'où $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$ par hypothèse. Supposons même que $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$. Les 3 équations plus haut deviennent :

$$\begin{aligned} 0 &= - \beta\,\big(x - x_0\big), \\ 0 &= - \gamma\,\big(x - x_0\big), \\ 0 &= \beta\,\big(z - z_0\big) - \gamma\,\big(y - y_0\big), \end{aligned}$$

et il est clair dans ce cas que les deux premières équations se ramènent à une seule équation :

$$0 = x - x_0,$$

et donc la droite est effectivement définie par $2 = 3 - 1$ équations cartésiennes indépendantes :

$$\begin{aligned} 0 &= x - x_0, \\ 0 &= \beta\,\big(z - z_0\big) - \gamma\,\big(y - y_0\big), \end{aligned}$$

comme on s'y attendait sur le plan géométrique.

Sans produire de démonstration précise par manque de temps, nous admettrons l'énoncé suivant, que le lecteur-étudiant comprendra sans mal grâce aux considérations qui précèdent. En fait, la plupart du temps, en TD, en DM, et en Examen, toutes les données seront numériques et concrètes, et on aura une intuition claire concernant l'indépendance et l'équivalence entre représentation paramétrique et systèmes de deux équations cartésiennes.

Théorème 10.2. *Une droite $D \subset \mathbb{R}^3$ peut être définie de deux manières équivalentes, comme :*
(i) $D := \big\{p_0 + t\,\vec{v}\colon\ t \in \mathbb{R}$ *quelconque*$\big\}$*, avec un point quelconque $p_0 \in \mathbb{R}^3$ et un vecteur arbitraire* non nul $\vec{v} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3} \backslash \{\vec{0}\}$ *;*
(ii) *une intersection entre deux plans $P \subset \mathbb{R}^3$ et $P' \subset \mathbb{R}^3$ d'équations cartésiennes :*

$$D\colon \qquad \begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z \,=\, d, \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z \,=\, d', \end{cases}$$

qui sont transversaux *au sens où leurs 2 vecteurs normaux :*

$$\vec{n}_P \,=\, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad\qquad \textit{et} \qquad\qquad \vec{n}_{P'} \,=\, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

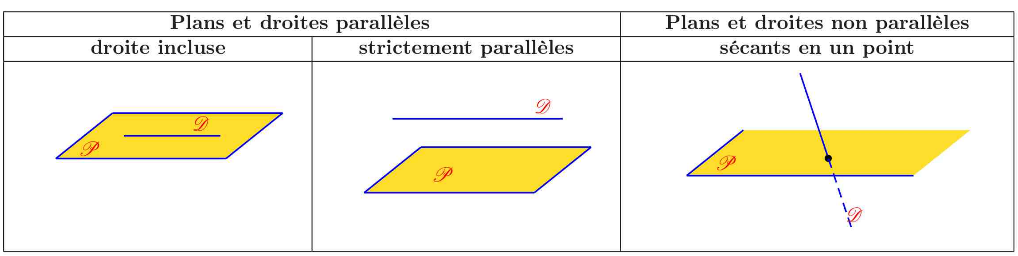
sont non colinéaires, i.e. *linéairement indépendants.*

Rappelons que tel et le cas si et seulement si l'un au moins parmi les 3 déterminants 2×2 :

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0,$$

est non nul.

11. Intersection entre une droite $D \subset \mathbb{R}^3$ et un plan $P \subset \mathbb{R}^3$



Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, comme la figure ci-dessus le montre, il existe *trois* situations géométriques « évidentes » pour l'intersection d'une droite quelconque $D \subset \mathbb{R}^3$ avec un plan quelconque $P \subset \mathbb{R}^3$.

Notre objectif est de comprendre cela, d'un point de vue purement algébrique. Nous allons traiter deux circonstances, suivant que D est donnée sous forme cartésienne ou sous forme paramétrique, avec P toujours donné sous forme cartésienne.

Première circonstance. La droite D est donnée sous forme cartésienne, et de même pour le plan P :

$$D\colon \quad \begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z \,=\, d, \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z \,=\, d', \end{cases} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad P\colon \quad \big\{ a''\,x + b''\,y + c''\,z \,=\, d''.$$

D'après le Théorème 10.2, les deux équations cartésiennes de D sont indépendantes au sens où les deux vecteurs normaux :

$$\vec{n}_P \,=\, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \vec{n}_{P'} \,=\, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

sont *non colinéaires*, *i.e.* linéairement indépendants.

Par conséquent, après application de la méthode du pivot de Gauss, et après une permutation éventuelle des trois coordonnées (x, y, z), nous pouvons supposer que les deux équations cartésiennes de la droite D s'écrivent :

$$D\colon \quad \begin{cases} x \qquad\qquad + c\,z \,=\, d, \\ \qquad\qquad y + c'\,z \,=\, d', \end{cases}$$

$$P\colon \quad \begin{cases} a''\,x + b''\,y + c''\,z \,=\, d'', \end{cases}$$

avec des nouveaux coefficients c, d, c', d' pour lesquels nous ré-utilisons la même notation.

Si nous écrivons en-dessous l'équation cartésienne de P aussi, nous devinons alors immmédiatement qu'après deux transformations de Gauss évidentes, les points de l'intersection $D \cap P$ seront donnés par un système de 3 équations linéaires à 3 inconnues du type :

$$D \cap P\colon \quad \begin{cases} x \qquad + c\,z \,=\, d, \\ \qquad y + c'\,z \,=\, d', \\ \qquad\quad c''\,z \,=\, d'', \end{cases}$$

avec des nouveaux coefficients c'', d'' pour lesquels nous utilisons à nouveau la même notation.

Notre connaissance des systèmes linéaires nous permet alors de comprendre instantanément l'énoncé suivant, sans avoir besoin de produire une démonstration.

Théorème 11.1. *Dans $\mathbb{R}^3$, l'intersection générale entre une droite D quelconque donnée sous forme cartésienne, et un plan P quelconque donné aussi sous forme cartésienne, se ramène, après permutation éventuelle des coordonnées x, y, z, et après des transformations de Gauss, à un système linéaire du type :*

$$D\colon \quad \begin{cases} x \qquad + c\,z \,=\, d, \\ \qquad y + c'\,z \,=\, d', \end{cases}$$

$$P\colon \quad \begin{cases} \qquad\quad c''\,z \,=\, d''. \end{cases}$$

(1) *Si $c'' \neq 0$, alors $D \cap P = \{M\}$ est le point unique :*

$$M \,:=\, \Big(d - c\,\tfrac{d''}{c''},\;\; d' - c'\,\tfrac{d''}{c''},\;\; \tfrac{d''}{c''}\Big).$$

(2) *Si $c'' = 0 \neq d''$, alors $D \cap P = \emptyset$, c'est-à-dire que la droite $D // P$ est parallèle au plan P sans être contenue dans P.*

(3) *Si $c'' = 0 = d''$, alors la droite $D \subset P$ est contenue dans le plan P.* □

Deuxième circonstance, la plus fréquente. La droite D est donnée sous forme paramétrique, et le plan P est donné sous forme cartésienne :

$$D\colon \quad \begin{cases} x \,=\, x_0 + t\,\alpha, \\ y \,=\, y_0 + t\,\beta, \\ z \,=\, z_0 + t\,\gamma, \end{cases} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad P\colon \quad \begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z \,=\, d. \end{cases}$$

Les points de D sont alors paramétrés par $t \in \mathbb{R}$, donc il est évident que les points éventuels de l'intersection $D \cap P$ peuvent être « chassés » avec un filet à papillons en injectant l'équation paramétrique de D dans l'équation cartésienne de P :

$$a\,\big(x_0 + t\,\alpha\big) + b\,\big(y_0 + t\,\beta\big) + c\,\big(z_0 + t\,\gamma\big) \,=\, d,$$

ce qui donne après réorganisation, :

$$t\,\big[a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma\big] \,=\, d - a\,x_0 - b\,y_0 - c\,z_0.$$

Les calculs sont donc beaucoup plus rapides, car il n'exigent pas l'application de la méthode du pivot de Gauss. Et la discussion est tout aussi rapide, car il n'y a qu'une inconnue à résoudre, t.

Théorème 11.2. *Dans $\mathbb{R}^3$, l'intersection générale entre une droite D quelconque donnée sous forme paramétrique, et un plan P quelconque donné sous forme cartésienne :*

$$D\colon\quad \begin{cases} x \,=\, x_0 + t\,\alpha, \\ y \,=\, y_0 + t\,\beta, \\ z \,=\, z_0 + t\,\gamma, \end{cases} \qquad\qquad \textit{et} \qquad\qquad P\colon\quad \begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z \,=\, d, \end{cases}$$

se ramène aux 3 situations algébrico-géométriques différentes suivantes.

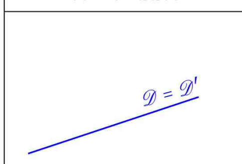
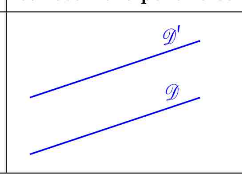
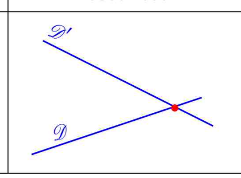
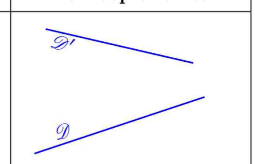
(1) *Si $a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma \neq 0$, l'intersection $D \cap P$ est un point unique M repéré par le temps :*

$$t_M \,:=\, \frac{d - a\,x_0 - b\,y_0 - c\,z_0}{a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma}.$$

(2) *Si $a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma = 0$ tandis que $0 \neq d - a\,x_0 - b\,y_0 - c\,z_0$, alors $D \cap P = \emptyset$ est l'ensemble vide, c'est-à-dire que la droite D est parallèle au plan P sans être contenue dans P.*

(3) *Si $a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma = 0$ et si $0 = d - a\,x_0 - b\,y_0 - c\,z_0$ aussi, alors $D \subset P$.* □

12. Intersection entre deux droites $D \subset \mathbb{R}^3$ et $D' \subset \mathbb{R}^3$

Droites parallèles		Droites non parallèles	
confondues	strictement parallèles	sécantes	non coplanaires
			
coplanaires			non coplanaires

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, comme la figure ci-dessus le montre, il existe *quatre* situations géométriques « évidentes » pour l'intersection de deux droites $D \subset \mathbb{R}^3$ et $D' \subset \mathbb{R}^3$.

Notre objectif est de comprendre cela, d'un point de vue purement algébrique. Nous allons traiter deux circonstances, suivant que D et D' sont données sous forme cartésienne ou suivant que D est donnée sous forme paramétrique, tandis que D' est donnée sous forme cartésienne.

Première circonstance. La droite D est donnée sous forme cartésienne, et de même pour la droite D' :

$$D\colon\quad \begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z \,=\, d, \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z \,=\, d', \end{cases} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad D'\colon\quad \begin{cases} a''\,x + b''\,y + c''\,z \,=\, d'', \\ a'''\,x + b'''\,y + c'''\,z \,=\, d''', \end{cases}$$

Il s'agit alors de résoudre un système linéaire de 4 équations linéaires aux trois inconnues x, y, z :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z \,&=\, d, \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z \,&=\, d', \\ a''\,x + b''\,y + c''\,z \,&=\, d'', \\ a'''\,x + b'''\,y + c'''\,z \,&=\, d'''. \end{aligned}$$

Mais d'après le Théorème 10.2, chacune des deux paires d'équations cartésiennes pour D et pour D' sont indépendantes. Après application de la méthode du pivot de Gauss, et permutation éventuelle des coordonnées, le système se ramène donc — sans changer le nom des coefficients — d'abord à :

$$\begin{aligned} x \qquad\quad + c\,z &= d, \\ y + c'\,z &= d', \\ a''\,x + b''\,y + c''\,z &= d'', \\ a'''\,x + b'''\,y + c'''\,z &= d''', \end{aligned}$$

puis à :

$$\begin{aligned} x \qquad + c\,z &= d, \\ y + c'\,z &= d', \\ c''\,z &= d'', \\ c'''\,z &= d''', \end{aligned}$$

Traitons premièrement le cas où $c'' \neq 0$, qui est équivalent au cas $c''' \neq 0$.

Théorème 12.1. *Lorsque $c'' \neq 0$, et $c''' \frac{d''}{c''} = d'''$, les deux droites $D \cap D' = \{P\}$ ont comme intersection un point unique.*

Lorsque $c'' \neq 0$, tandis que $c''' \frac{d''}{c''} \neq d'''$, les deux droites $D \cap D' = \emptyset$ sont d'intersection vide et non coplanaires. □

Traitons deuxièmement le cas $c'' = 0 = c'''$.

Théorème 12.2. *Lorsque $c'' = c''' = 0$ et lorsque $d'' = d''' = 0$, les deux droites $D = D'$ sont confondues.*

Lorsque $c'' = c''' = 0$ et lorsque $d'' \neq 0$, les deux droites $D \cap D' = \emptyset$ sont d'intersection vide. Elles sont de plus coplanaires, lorsque $0 = d'''$. □

Deuxième circonstance. La droite D est donnée sous forme paramétrique, et la droite D' est donnée sous forme cartésienne :

$$D\colon \quad \begin{cases} x = x_0 + t\,\alpha, \\ y = y_0 + t\,\beta, \\ z = z_0 + t\,\gamma, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad D'\colon \quad \begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z = d, \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z = d'. \end{cases}$$

Les points éventuels de l'intersection $D \cap D'$ peuvent être « chassés » avec douceur en injectant l'équation paramétrique de D dans les deux équations cartésiennes de $D \cap D'$:

$$\begin{aligned} a\,\big(x_0 + t\,\alpha\big) + b\,\big(y_0 + t\,\beta\big) + c\,\big(z_0 + t\,\gamma\big) &= d, \\ a'\,\big(x_0 + t\,\alpha\big) + b'\,\big(y_0 + t\,\beta\big) + c'\,\big(z_0 + t\,\gamma\big) &= d', \end{aligned}$$

ce qui donne après réorganisation :

$$\begin{aligned} t\,\big[a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma\big] &= d - a\,x_0 - b\,y_0 - c\,z_0, \\ t\,\big[a'\,\alpha + b'\,\beta + c'\,\gamma\big] &= d' - a'\,x_0 - b'\,y_0 - c'\,z_0. \end{aligned}$$

Il n'y a qu'une inconnue à résoudre, t, pour deux équations, que l'on peut abréger comme suit :

$$\begin{aligned} \lambda\,t &= \delta, \\ \lambda'\,t &= \delta'. \end{aligned}$$

La discussion, facile, est proposée comme exercice laissé au lecteur-étudiant studieux.

13. Exercices

Exercice 1.

Systèmes linéaires homogènes

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

2. Représentation vectorielle des solutions d'un système linéaire

Exemple 2.1. Soit le système de 3 équations linéaires à 4 variables :

$$\begin{aligned} x_1 + \ 2\,x_2 + \ 3\,x_3 + \ 4\,x_4 &= 7, \\ 5\,x_1 + \ 6\,x_2 + \ 7\,x_3 + \ 8\,x_4 &= 11, \\ 9\,x_1 + 10\,x_2 + 11\,x_3 + 12\,x_4 &= 15, \end{aligned}$$

dont la matrice complète est :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 11 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 15 \end{array}\right].$$

Une application de la méthode du pivot montre (exercice) que la réduction à une forme échelonnée réduite est :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 11 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 15 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Ainsi, le système est compatible, les inconnues principales (résolubles) sont x_1 et x_2, tandis que les inconnues paramétriques (secondaires) sont x_3 et x_4.

Sur cette matrice mise sous forme échelonnée *réduite*, on lit directement l'espace des solutions :

$$\mathsf{Sol} := \big\{\big(-5+x_3+2\,x_4,\ 6-2\,x_3-3\,x_4,\ x_3,\ x_4\big) :\ x_3 \in \mathbb{R}\,\text{quelconque},\ x_4 \in \mathbb{R}\,\text{quelconque}\big\}.$$

Question 2.2. *Peut-on mettre cet espace de solutions sous forme de combinaison linéaire de vecteurs ?*

Réponse : oui sur cet exemple, et oui aussi pour tous les systèmes linéaires quelconques étudiés dans ce cours !

En effet, écrivons :

$$\begin{pmatrix} -5+x_3+2\,x_4 \\ 6-2\,x_3-3\,x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si donc nous introduisons les vecteurs-colonnes appartenant à $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$:

$$\vec{x}_0 := \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

les solutions générales du système sont les vecteurs de la forme :

$$\vec{x}_0 + t_1\,\vec{v}_1 + t_2\,\vec{v}_2,$$

avec $t_1 \in \mathbb{R}$ et $t_2 \in \mathbb{R}$ quelconques, qui sont des noms nouveaux pour x_3 et x_4.

Ce phénomène est général. Rappelons qu'un système linéaire de m équations linéaires à n inconnues $x_1, \dots, x_n$ est *compatible* si et seulement si, après application de la méthode du pivot, la dernière ligne d'une forme échelonnée (réduite ou non) n'est *pas* :

$$\big[\mathbf{0}\;\mathbf{0}\;\cdots\;\mathbf{0}\;|\;\blacksquare\big],$$

avec un nombre réel non nul $\blacksquare \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, car en effet, s'il existait une telle ligne qui signifierait :

$$\mathbf{0}\,x_1 + \cdots + \mathbf{0}\,x_n \;=\; \blacksquare,$$

on en déduirait $\mathbf{0} =$ nonzero, ce qui est impossible, donc le système serait incompatible.

Par conséquent, après mise sous forme échelonnée, tout système qui possède *au moins une* solution est de la forme :

$$\begin{array}{cccccccccccc|c}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}.
\end{array}$$

Dernière ligne non nulle compatible !

Évidemment, on s'empresse de supprimer les lignes nulles, puisqu'elles se réduisent à la tautologie $\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Ensuite, on poursuit la méthode des pivots-saumons remonteurs de rivières glaciaires afin de parvenir à la forme échelonnée *réduite* (unique) :

$$\begin{array}{cccccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & * & * & \mathbf{0} & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & * & * & \mathbf{0} & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & * & * & * & \mathbf{0} & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & * & * & * & \mathbf{0} & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & * & *
\end{array}$$

Ici, on illustre la méthode avec $n = 12$ inconnues $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$.

Donnons des noms aux étoiles :

$$\begin{array}{cccccccccccc|c}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & c_{1,5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & c_{1,8} & c_{1,9} & c_{1,10} & \mathbf{0} & c_{1,12} & d_1 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & c_{2,5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & c_{2,8} & c_{2,9} & c_{2,10} & \mathbf{0} & c_{2,12} & d_2 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & c_{3,8} & c_{3,9} & c_{3,10} & \mathbf{0} & c_{3,12} & d_3 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & c_{4,8} & c_{4,9} & c_{4,10} & \mathbf{0} & c_{4,12} & d_4 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & c_{5,12} & d_5,
\end{array}$$

et résolvons les 5 inconnues principales x_3, x_4, x_6, x_7, x_{11} :

$$\begin{aligned}
x_3 &= d_1 - c_{1,5}\,x_5 - c_{1,8}\,x_8 - c_{1,9}\,x_9 - c_{1,10}\,x_{10} - c_{1,12}\,x_{12},\\
x_4 &= d_2 - c_{2,5}\,x_5 - c_{2,8}\,x_8 - c_{2,9}\,x_9 - c_{2,10}\,x_{10} - c_{2,12}\,x_{12},\\
x_6 &= d_3 \qquad\qquad - c_{3,8}\,x_8 - c_{3,9}\,x_9 - c_{3,10}\,x_{10} - c_{3,12}\,x_{12},\\
x_7 &= d_4 \qquad\qquad - c_{4,8}\,x_8 - c_{4,9}\,x_9 - c_{4,10}\,x_{10} - c_{4,12}\,x_{12},\\
x_{11} &= d_5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - c_{5,12}\,x_{12}.
\end{aligned}$$

Ensuite, écrivons le vecteur solution générale à 12 composantes :

$$\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\\x_8\\x_9\\x_{10}\\x_{11}\\x_{12}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ d_1-c_{1,5}\,x_5-c_{1,8}\,x_8-c_{1,9}\,x_9-c_{1,10}\,x_{10}-c_{1,12}\,x_{12}\\ d_2-c_{2,5}\,x_5-c_{2,8}\,x_8-c_{2,9}\,x_9-c_{2,10}\,x_{10}-c_{2,12}\,x_{12}\\ x_5\\ d_3-c_{3,8}\,x_8-c_{3,9}\,x_9-c_{3,10}\,x_{10}-c_{3,12}\,x_{12}\\ d_4-c_{4,8}\,x_8-c_{4,9}\,x_9-c_{4,10}\,x_{10}-c_{4,12}\,x_{12}\\ x_8\\ x_9\\ x_{10}\\ d_5-c_{5,12}\,x_{12}\\ x_{12}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\d_1\\d_2\\0\\d_3\\d_4\\0\\0\\0\\0\\d_5\end{pmatrix} + x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + x_5\begin{pmatrix}0\\0\\-c_{1,5}\\-c_{2,5}\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + x_8\begin{pmatrix}0\\0\\-c_{1,8}\\-c_{2,8}\\0\\-c_{3,8}\\-c_{4,8}\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + x_9\begin{pmatrix}0\\0\\-c_{1,9}\\-c_{2,9}\\0\\-c_{3,9}\\-c_{4,9}\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + x_{10}\begin{pmatrix}0\\0\\-c_{1,10}\\-c_{2,10}\\0\\-c_{3,10}\\-c_{4,10}\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + x_{12}\begin{pmatrix}0\\0\\-c_{1,12}\\-c_{2,12}\\0\\-c_{3,12}\\-c_{4,12}\\0\\0\\0\\-c_{5,12}\\1\end{pmatrix}.$$

De cette manière, on a représenté la solution générale du système linéaire initial sous une forme vectorielle :

$$\vec{x} = \vec{x}^{\,0} + t_1\,\vec{v}_1 + t_2\,\vec{v}_2 + t_3\,\vec{v}_3 + t_4\,\vec{v}_4 + t_5\,\vec{v}_5 + t_6\,\vec{v}_6 + t_7\,\vec{v}_7,$$

où t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7 sont des nombres réels quelconques, et sont des nouveaux noms pour les variables libres x_1, x_2, x_5, x_8, x_9, x_{10}, x_{12}.

3. Système linéaire homogène associé à un système linéaire

Considérons à nouveau un système linéaire quelconque de $m \geqslant 1$ équations à $n \geqslant 1$ inconnues :

$$\begin{aligned}
a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,n}\,x_n &= b_1,\\
a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,n}\,x_n &= b_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\
a_{m,1}\,x_1 + a_{m,2}\,x_2 + \cdots + a_{m,n}\,x_n &= b_m,
\end{aligned}
\qquad
\left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right],$$

écrit de manière détaillé, ou représenté par sa matrice complète.

Mieux encore, un tel système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix},$$

c'est-à-dire de manière très abrégée :

$$(S_{A,\vec{b}}) \qquad\qquad A\,\vec{x} = \vec{b}.$$

Définition 3.1. Le *système linéaire homogène* associé :

$$(S_{A,\vec{0}}) \qquad\qquad A\,\vec{y} = \vec{0},$$

est le système linéaire dans lequel on remplace le vecteur constant $\vec{b}$ du membre de droite par le vecteur nul $\vec{0}$, c'est-à-dire sous forme développée :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En mathématiques, on appelle *homogène* une fonction $f(x)$ qui satisfait $f(\lambda\, x) = \lambda\, f(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ici, on a aussi *homogénéité* au sens où :

$$A\,(\lambda\,\vec{y}) \,=\, \lambda\, A\,\vec{y} \,=\, \lambda\,\vec{0} \,=\, \vec{0},$$

de telle sorte que si $\vec{y}$ est une solution, alors $\lambda\,\vec{y}$ est *aussi* une solution, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ [1].

Volontairement, nous avons utilisé les lettres y_j au lieu des lettres x_j, ci-dessus, afin de mieux différencier les deux espaces de solutions. Et il est clair que :

$$\boldsymbol{S}_{A,\vec{0}} \,:=\, \boldsymbol{S}_{A,\vec{b}}\Big|_{\vec{b}=\vec{0}}.$$

Ces deux systèmes se *ressemblent* donc presque comme deux jumeaux ! Car il ont la même matrice :

$$A \,=\, \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i\leqslant m \text{ lignes}}^{1\leqslant j\leqslant n \text{ colonnes}}.$$

Introduisons leurs deux espaces respectifs de solutions :

$$\begin{aligned} \mathsf{Sol}\,\big(\boldsymbol{S}_{A,\vec{b}}\big) \,&:=\, \big\{\vec{x} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^n} :\ A\,\vec{x} = \vec{b}\big\}, \\ \mathsf{Sol}\,\big(\boldsymbol{S}_{A,\vec{0}}\big) \,&:=\, \big\{\vec{y} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^n} :\ A\,\vec{y} = \vec{0}\big\}. \end{aligned}$$

Question 3.2. *Ces deux espaces de solutions sont ils liés l'un à l'autre, et si oui, comment ?*

Évidemment, quand $\vec{b} = \vec{0}$, ces deux espaces de solutions *coïncident*, mais ce n'est pas vraiment cette réponse un peu trop simplette que nous espérions, car le vecteur constant $\vec{b}$ du membre de droite n'est pas toujours égal à $\vec{0}$.

Observation 3.3. *Si deux solutions $\vec{x}\,'$ et $\vec{x}\,''$ du système linéaire sont connues, alors leurs différence est solution du système homogène :*

$$\Big(A\,\vec{x}\,' = \vec{b} \quad \text{et} \quad A\,\vec{x}\,'' = \vec{b}\Big) \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad A\,\big(\vec{x}\,' - \vec{x}\,''\big) = \vec{0}.$$

Démonstration. Cela est essentiellement évident par simple soustraction :

$$A\,\big(\vec{x}\,' - \vec{x}\,''\big) \,=\, A\,\vec{x}\,' - A\,\vec{x}\,'' \,=\, \vec{b} - \vec{b} \,=\, \vec{0}. \qquad \square$$

Une représentation développée de cette soustraction « bancaire » est la suivante. En partant de :

$$\begin{aligned} a_{1,1}\,x_1' + \cdots + a_{1,n}\,x_n' \,&=\, b_1, \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}\,x_1' + \cdots + a_{m,n}\,x_n' \,&=\, b_m, \end{aligned} \qquad \text{et de :} \qquad \begin{aligned} a_{1,1}\,x_1'' + \cdots + a_{1,n}\,x_n'' \,&=\, b_1, \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}\,x_1'' + \cdots + a_{m,n}\,x_n'' \,&=\, b_m, \end{aligned}$$

1. En revanche, lorsque le vecteur constant $\vec{b} \neq \vec{0}$ n'est *pas* nul, cette propriété n'est pas vraie pour le système $A\,\vec{x} = \vec{b}$, c'est-à-dire que si $\vec{x}$ est une solution, il n'est pas vrai que $\lambda\,\vec{x}$ est aussi une solution pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, simplement parce que $\lambda\,\vec{b}$ n'est pas toujours égal à $\vec{b}$:

$$A\,\big(\lambda\,\vec{x}\big) \,=\, \lambda\,A\,\vec{x} \,=\, \lambda\,\vec{b} \neq \vec{b} \qquad\qquad \text{(en général)}.$$

il vient :

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}\left(x_1'-x_1''\right)+\cdots+a_{1,n}\left(x_n'-x_n''\right) \;&=\; b_1-b_1 \;=\; 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{m,1}\left(x_1'-x_1''\right)+\cdots+a_{m,n}\left(x_n'-x_n''\right) \;&=\; b_m-b_m \;=\; 0.
\end{aligned}
$$

Autrement dit, le vecteur :

$$\vec{y} := \vec{x}\,'-\vec{x}\,''$$

est solution du système linéaire *homogène* associé $\boldsymbol{S}_{A,\vec{0}}$. Voilà donc un premier lien naturel :

$$\boldsymbol{S}_{A,\vec{b}} \rightsquigarrow \boldsymbol{S}_{A,\vec{0}}.$$

Or il existe aussi un « lien inverse », avec une flèche zigzagante dans l'autre sens.

Supposons en effet que, par chance, ou parce qu'on a réussi à copier sur son voisin de table, on connaisse une certaine solution « particulière » $\vec{x}^{\,0}$ du système linéaire, c'est-à-dire avec :

$$A\,\vec{x}^{\,0} \,=\, \vec{b}.$$

Parfois en effet, on peut « deviner à l'oeil » des solutions, sans avoir à entreprendre un calcul de pivot. Mieux vaut avoir une vue d'aigle — surtout en examen !

Alors là, c'est super ! Car on peut *prendre avantage* de la connaissance d'une telle solution particulière $A\,\vec{x}^{\,0}=\vec{b}$ pour comprendre la solution générale de $A\,\vec{x}=\vec{b}$, en effectuant une simple soustraction [2] :

$$A\,\big(\underbrace{\vec{x}-\vec{x}^{\,0}}_{=:\,\vec{y}}\big) \,=\, A\,\vec{x}-A\,\vec{x}^{\,0} \,=\, \vec{b}-\vec{b} \,=\, \vec{0},$$

puisqu'on constate alors que le vecteur $\vec{y} := \vec{x}-\vec{x}^{\,0}$ est solution du système linéaire homogène associé :

$$A\,\vec{y} \,=\, \vec{0}.$$

Une réponse satisfaisante à la Question 3.2 peut alors être énoncée sous la forme d'un

Théorème 3.4. *La solution générale $\vec{x}$ d'un système linéaire :*

$$(\boldsymbol{S}_{A,\vec{b}}) \qquad\qquad A\,\vec{x} \,=\, \vec{b},$$

est toujours la somme *:*

$$\vec{x} \,=\, \vec{x}^{\,0}+\vec{y},$$

d'une solution particulière $\vec{x}^{\,0}$ satisfaisant $A\,\vec{x}^{\,0}=\vec{b}$ avec la solution générale *$\vec{y}$ du système homogène associé :*

$$(\boldsymbol{S}_{A,\vec{0}}) \qquad\qquad A\,\vec{y} \,=\, \vec{0}.$$

Démonstration. En réfléchissant et en relisant le raisonnement qui précède, on se convainc que $\vec{x}=\vec{x}^{\,0}+\vec{y}$ est solution générale de $\boldsymbol{S}_{A,\vec{b}}$ *si et seulement si* $\vec{y}$ est solution générale de $\boldsymbol{S}_{A,\vec{0}}$. □

Maintenant, discutons de la résolution d'un système linéaire homogène $A\,\vec{x}=\vec{0}$, c'est-à-dire d'un système :

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}\,x_1+a_{1,2}\,x_2+\cdots+a_{1,n}\,x_n \;&=\; 0,\\
a_{2,1}\,x_1+a_{2,2}\,x_2+\cdots+a_{2,n}\,x_n \;&=\; 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
a_{m,1}\,x_1+a_{m,2}\,x_2+\cdots+a_{m,n}\,x_n \;&=\; 0,
\end{aligned}
$$

dont les seconds membres sont tous égaux à 0.

2. En mathématiques, il n'y a rien de plus beau et de plus utile qu'un signe moins $-$!

Clairement, sa matrice complète est de la forme :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & 0 \end{array}\right],$$

avec que des 0 à la dernière colonne. En reprenant l'exemple général de la Section **2**, avec $n = 12$, nous pouvons nous imaginer que la méthode du pivot transforme cette matrice en une matrice du type :

$$\begin{array}{cccccccccccc|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}. \end{array}$$

Dernière ligne non nulle *toujours* compatible !

Observation 3.5. *Quand on effectue des combinaisons linéaires sur les lignes par la méthode du pivot, la dernière colonne conserve tous ses* $\mathbf{0}$.

Preuve. En effet, ou bien on permute deux lignes et le dernier $\mathbf{0}$ demeure, ou bien on multiplie une ligne par un nombre réel non nul $\tau \in \mathbb{R}^*$, ou bien on additionne μ fois une ligne à une autre ligne. Dans les deux derniers cas :

$$\tau\,\mathbf{0} = \mathbf{0}, \qquad\qquad \mathbf{0} + \mu\,\mathbf{0} = \mathbf{0}. \qquad \square$$

Par conséquent, il est impossible d'obtenir une dernière ligne non nulle de la forme *incompatible :*

$$\mathbf{0}\;\mathbf{0}\;\cdots\;\mathbf{0}\;|\;\blacksquare.$$

Par contraposition, ce raisonnement justifie l'

Observation 3.6. *Un système linéaire* homogène $A\,\vec{y} = \vec{0}$ *est toujours compatible.*

Preuve. Une autre explication de ce fait, plus simple, est la suivante :

$$A\,\vec{0} = \vec{0},$$

donc $\vec{y} := \vec{0}$ est toujours une solution — triviale, évidente ! Il fallait y penser !

Or d'après la théorie générale de la résolution des systèmes linéaires, nous savons que trois cas, et trois cas seulement, peuvent se produire :

(i) le système n'a *aucune* solution [est incompatible] ;

(ii) le système a une solution unique [est compatible] ;

(iii) le système possède une *infinité* de solutions [est compatible].

Ici, pour un système linéaire homogène $A\,\vec{y} = \vec{0}$, les deux cas **(ii)** et **(iii)** peuvent se produire, mais jamais le (mauvais) cas **(i)**, puisque nous venons de constater que $\vec{y} := \vec{0}$ est toujours solution ! $\square$

Pour terminer cette section, admettons maintenant que nous ayons poursuivi la méthode du pivot jusqu'à mettre la matrice complète du système homogène $A\,\vec{y} = \vec{0}$ sous forme échelonnée réduite :

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} & & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{1}} & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & * & * & \mathbf{0} & * & \big| & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{1}} & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & * & * & \mathbf{0} & * & \big| & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{1}} & \mathbf{0} & * & * & * & \mathbf{0} & * & \big| & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{1}} & * & * & * & \mathbf{0} & * & \big| & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{1}} & * & \big| & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \big| & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \big| & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \big| & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \big| & \mathbf{0},
\end{array}
$$

toujours avec que des $\mathbf{0}$ à la dernière colonne. Ici, nous traitons un cas de $m = 9$ équations à $n = 12$ variables.

Supprimons les 4 dernières lignes, donnons des noms aux étoiles :

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & c_{1,5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & c_{1,8} & c_{1,9} & c_{1,10} & \mathbf{0} & c_{1,12} & \big| & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & c_{2,5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & c_{2,8} & c_{2,9} & c_{2,10} & \mathbf{0} & c_{2,12} & \big| & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & c_{3,8} & c_{3,9} & c_{3,10} & \mathbf{0} & c_{3,12} & \big| & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & c_{4,8} & c_{4,9} & c_{4,10} & \mathbf{0} & c_{4,12} & \big| & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & c_{5,12} & \big| & \mathbf{0}.
\end{array}
$$

Cet exemple est essentiellement le même qu'à la fin de la Section **2**, mais avec :

$$d_1 \,=\, d_2 \,=\, d_3 \,=\, d_4 \,=\, d_5 \,=\, \mathbf{0}.$$

Résolvons les 5 inconnues principales y_3, y_4, y_6, y_7, y_{11} :

$$
\begin{aligned}
y_3 &= -\,c_{1,5}\,y_5 - c_{1,8}\,y_8 - c_{1,9}\,y_9 - c_{1,10}\,y_{10} - c_{1,12}\,y_{12}, \\
y_4 &= -\,c_{2,5}\,y_5 - c_{2,8}\,y_8 - c_{2,9}\,y_9 - c_{2,10}\,y_{10} - c_{2,12}\,y_{12}, \\
y_6 &= -c_{3,8}\,y_8 - c_{3,9}\,y_9 - c_{3,10}\,y_{10} - c_{3,12}\,y_{12}, \\
y_7 &= -c_{4,8}\,y_8 - c_{4,9}\,y_9 - c_{4,10}\,y_{10} - c_{4,12}\,y_{12}, \\
y_{11} &= -c_{5,12}\,y_{12}.
\end{aligned}
$$

Ensuite, écrivons le vecteur solution générale à 12 composantes :

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
y_1 \\
y_2 \\
-c_{1,5}\,y_5 - c_{1,8}\,y_8 - c_{1,9}\,y_9 - c_{1,10}\,y_{10} - c_{1,12}\,y_{12} \\
-c_{2,5}\,y_5 - c_{2,8}\,y_8 - c_{2,9}\,y_9 - c_{2,10}\,y_{10} - c_{2,12}\,y_{12} \\
y_5 \\
-c_{3,8}\,y_8 - c_{3,9}\,y_9 - c_{3,10}\,y_{10} - c_{3,12}\,y_{12} \\
-c_{4,8}\,y_8 - c_{4,9}\,y_9 - c_{4,10}\,y_{10} - c_{4,12}\,y_{12} \\
y_8 \\
y_9 \\
y_{10} \\
d_5 - c_{5,12}\,y_{12} \\
y_{12}
\end{pmatrix}
$$

$$
= y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
+ y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
+ y_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_{1,5} \\ -c_{2,5} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
+ y_8 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_{1,8} \\ -c_{2,8} \\ 0 \\ -c_{3,8} \\ -c_{4,8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
+ y_9 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_{1,9} \\ -c_{2,9} \\ 0 \\ -c_{3,9} \\ -c_{4,9} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
+ y_{10} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_{1,10} \\ -c_{2,10} \\ 0 \\ -c_{3,10} \\ -c_{4,10} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
+ y_{12} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_{1,12} \\ -c_{2,12} \\ 0 \\ -c_{3,12} \\ -c_{4,12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -c_{5,12} \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

De cette manière, on a représenté la solution générale du système linéaire initial sous une forme vectorielle :

$$\vec{x} \,=\, t_1\,\vec{v}_1 + t_2\,\vec{v}_2 + t_3\,\vec{v}_3 + t_4\,\vec{v}_4 + t_5\,\vec{v}_5 + t_6\,\vec{v}_6 + t_7\,\vec{v}_7,$$

où t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7 sont des nombres réels quelconques, et sont des nouveaux noms pour les variables libres y_1, y_2, y_5, y_8, y_9, y_{10}, y_{12}.

Ici, quand on compare avec la fin de la Section **2**, il n'y a pas de vecteur constant $\vec{x}^{\,0}$, mais c'est mieux, puisqu'on a une vraie combinaison linéaire de 7 vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$, $\vec{v}_5$, $\vec{v}_6$, $\vec{v}_7$.

Résumé 3.7. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire* homogène $A\,\vec{y} = \vec{0}$ *:*

$$\mathsf{Sol}\,\big(S_{A,\vec{0}}\big) \;=\; \mathsf{Vect}\,\big\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\big\},$$

est un espace vectoriel, engendré par r vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$, pour un certain entier r.

Évidemment, le nombre r est le nombre d'inconnues paramétriques dans la forme échelonnée réduite (unique) de la matrice A.

4. Interprétation vectorielle des systèmes linéaires

Dans l'espace vectoriel $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$ à $m \geqslant 1$ dimensions, soient $n \geqslant 1$ vecteurs $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, et soit un autre vecteur $\vec{b}$.

Question 4.1. *Existe-t-il des coefficients scalaires $x_1, \dots, x_n$ tels que :*

$$x_1\,\vec{a}_1 + \cdots + x_n\,\vec{a}_n \;=\; \vec{b}\ \textbf{?}$$

C'est-à-dire : *Le vecteur $\vec{b}$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$?*

Si nous déployons les m composantes verticales de chacun de ces $n+1$ vecteurs :

$$\vec{a}_1 \;=\; \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \qquad \dots, \qquad \vec{a}_n \;=\; \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} \;=\; \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

la question :

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \;\overset{?}{=}\; \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

revient évidemment à résoudre le bon vieux système linéaire-camembert des familles :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\overset{?}{=}\; \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Et dans les chapitres qui précèdent, nous avons déjà vu de nombreux exemples de tels systèmes.

L'objectif, maintenant, est de montrer que l'algorithme du pivot de Gauss possède une interprétation vectorielle. Rappelons la

Définition 4.2. Le *sous-espace vectoriel* de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^n}$ engendré par n vecteurs :

$$\vec{a}_1,\, \dots,\, \vec{a}_n \;\in\; \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m},$$

est l'ensemble noté :

$$\mathsf{Vect}\,\big(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\big) \;:=\; \Big\{x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n \colon\;\; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\ \text{quelconques}\Big\}.$$

Il a la propriété presque évidente d'être invariant par combinaisons linéaires.

Proposition 4.3. *Pour tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et pour tous vecteurs :*

$$\begin{aligned}\vec{x} &= x_1\,\vec{a}_1 + \cdots + x_n\,\vec{a}_n \;\in\; \mathsf{Vect}\,\big(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\big),\\ \vec{y} &= y_1\,\vec{a}_1 + \cdots + y_n\,\vec{a}_n \;\in\; \mathsf{Vect}\,\big(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\big),\end{aligned}$$

on a encore :

$$\lambda\,\vec{x} + \mu\,\vec{y} \;\in\; \mathsf{Vect}\,\big(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\big).$$

Preuve. En effet :

$$\begin{aligned}\lambda\,\vec{x} + \mu\,\vec{y} &= \lambda\,x_1\,\vec{a}_1 + \cdots + \lambda\,x_n\,\vec{a}_n\\ &\quad + \mu\,y_1\,\vec{a}_1 + \cdots + \mu\,y_n\,\vec{a}_n\\ &= \big(\lambda\,x_1 + \mu\,y_1\big)\,\vec{a}_1 + \cdots + \big(\lambda\,x_n + \mu\,y_n\big)\,\vec{a}_n.\end{aligned}$$

□

5. Familles libres de vecteurs $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$

Si un vecteur $\vec{a}_1 \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$ n'est pas le vecteur nul $\vec{0}$, l'espace vectoriel qu'il engendre :

$$\mathsf{Vect}\,\big(\vec{a}_1\big) \;=\; \mathbb{R}\,\vec{a}_1,$$

est la droite vectorielle dirigée par $\vec{a}_1$, dans l'espace vectoriel ambiant $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$.

Autre exemple : si deux vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ ne sont *pas* colinéaires, c'est-à-dire ne sont *pas* situés sur une même droite vectorielle, alors :

$$\mathsf{Vect}\,\big(\vec{a}_1, \vec{a}_2\big) \;=\; \mathbb{R}\,\vec{a}_1 + \mathbb{R}\,\vec{a}_2,$$

est un *plan vectoriel*, de dimension 2, contenu dans l'espace ambiant $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$.

Définition 5.1. Dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$, on dit que $n \geqslant 1$ vecteurs $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sont *linéairement indépendants*, ou que la famille $\big\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\big\}$ est *libre*, si on a l'implication :

$$x_1\,\vec{a}_1 + \cdots + x_n\,\vec{a}_n \;=\; \vec{0} \qquad\Longrightarrow\qquad \Big(\, x_1 \;=\; 0, \quad \dots, \quad x_n \;=\; 0 \,\Big).$$

Inversement, on dit que $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sont *linéairement dépendants*, ou que la famille $\big\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\big\}$ est *liée*, s'il existe des scalaires non tous nuls :

$$\big(x_1, \dots, x_n\big) \;\neq\; (0, \dots, 0),$$

tels que :

$$x_1\,\vec{a}_1 + \cdots + x_n\,\vec{a}_n \;=\; \vec{0}.$$

En revenant aux cas simples $n = 1$ et $n = 2$ on a la

Proposition 5.2. **(1)** *Un système de un vecteur $\{\vec{a}_1\}$ est libre si et seulement si $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$.*

(2) *Un système de deux vecteurs $\big\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\big\}$ est libre si et seulement si $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ ne sont pas colinéaires.*

Pour ce qui concerne **(2)**, nous allons en fait établir la *contraposition* c'est-à-dire que plutôt que d'établir l'équivalence :

$$\mathsf{P} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \mathsf{Q}$$

où P et Q sont deux énoncés, nous allons établir l'équivalence :

$$\mathsf{non\ P} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \mathsf{non\ Q},$$

ce qui est logiquement équivalent.

Démonstration. **(1)** Si $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$, en partant de $x_1\, \vec{a}_1 = \vec{0}$, ceci implique $x_1 = 0$, donc $\{\vec{a}_1\}$ est libre.

Au contraire, si $\vec{a}_1 = \vec{0}$, pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, on a aussi $x_1\, \vec{a}_1 = \vec{0}$, en particulier avec $x_1 \neq 0$, donc $\{\vec{a}_1\}$ est liée.

(2) La contraposition en question est l'équivalence :

$$\big\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\big\} \text{ est liée} \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad \vec{a}_1,\ \vec{a}_2 \text{ sont colinéaires.}$$

Premièrement, supposons que $\big\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\big\}$ liée, c'est-à-dire qu'il existe $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ avec :

$$x_1\, \vec{a}_1 + x_2\, \vec{a}_2 \,=\, \vec{0}.$$

Par symétrie, on peut supposer que $\lambda_1 \neq 0$. Donc on peut résoudre :

$$\vec{a}_1 \,=\, -\,\tfrac{x_2}{x_1}\, \vec{a}_2,$$

ce qui montre que $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont colinéaires.

Deuxièmement, et réciproquement, on peut supposer par symétrie que $\vec{a}_1 = \mu\, \vec{a}_2$ avec $\mu \in \mathbb{R}$, ce qui équivaut à :

$$\vec{a}_1 - \mu\, \vec{a}_2 \,=\, \vec{0},$$

donc avec $(x_1, x_2) := (1, -\mu) \neq (0, 0)$, on a une relation de dépendance linéaire entre $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$. □

Voici une reformulation de la Définition 5.1.

Proposition 5.3. *Une famille* $\big\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\big\}$ *de vecteurs dans* $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^n}$ *est linéairement* dépendante *si et seulement si le système linéaire* homogène :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

admet au moins une solution non nulle $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$. □

Appliquons la méthode du pivot de Gauss, et supposons qu'elle a été conduite jusqu'à produire une matrice équivalente sous forme échelonnée :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * & \cdots \\ \mathbf{0} & \blacksquare & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} a'_{1,1} & \cdots & a'_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m,1} & \cdots & a'_{m,n} \end{bmatrix},$$

que nous noterons dorénavant avec des primes (non salariales).

Théorème 5.4. *Dans* $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$*, on a équivalence entre :*

(i) $\big\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\big\}$ *est libre ;*

(ii) *une matrice échelonnée* $\big(a'_{i,j}\big)$ *associée à* $\big(a_{i,j}\big)$ *possède un pivot sur chaque colonne.*

La matrice complète $\left[a'_{i,j} \,\middle|\, 0\right]$ du système gaussifié doit donc être du type :

$$
\begin{array}{cccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & \\
\blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{array}
$$

Il est alors clair que son nombre de ligne $m \geqslant n$ doit nécessairement être supérieur ou égal à son nombre de colonnes.

Démonstration. Puisqu'il faut déduire que toutes les variables $x_1 = 0$, …, $x_n = 0$, sont nulles, aucune variable ne peut être indépendante. Autrement dit, toutes les variables sont dépendantes, c'est-à-dire que toutes les variables $x_1, \dots, x_n$ doivent pouvoir se résoudre, et cela se produit si et seulement si chaque colonne contient un pivot (un carré noir). $\square$

Théorème 5.5. *Dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$, toute famille de $n \geqslant m+1$ vecteurs $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ est toujours nécessairement* liée.

Démonstration. En effet, on vient de dire, pour la liberté, qu'il est nécessaire que $n \leqslant m$. Donc quand $n \geqslant m+1$, la liberté est terminée : présentez vos poignets et vos chevilles, chaînes dans les prisons de l'universités !

Plus sérieusement, il y a au moins $n - m \geqslant 1$ variables indépendantes, que l'on peut choisir toutes $\neq 0$, et en résolvant le système linéaire, on trouve donc une relation de dépendance linéaire $x_1\,\vec{a}_1 + \cdots + x_n\,\vec{a}_n = \vec{0}$ dont les coefficients $x_1, \dots, x_n$ ne sont pas tous nuls, puisque au moins $n - m \geqslant 1$ d'entre eux sont non nuls. $\square$

6. Familles génératrices de vecteurs $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$

Dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^2}$, les deux vecteurs :

$$\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ont la propriété que, pour tout vecteur $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \end{smallmatrix}\right)$, il existe x_1 et x_2 tels que :

$$x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 = \vec{b},$$

avec évidemment $x_1 := b_1$ et $x_2 := b_2$.

Définition 6.1. On dit qu'une famille $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ de vecteurs dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$ est *génératrice* si, pour tout vecteur $\vec{b} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$, il existe des scalaires $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x_1\,\vec{a}_1 + \cdots + x_n\,\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Autrement dit, tout vecteur $\vec{b}$ est combinaison linéaire de $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$.

À nouveau, cette propriété va pouvoir s'exprimer grâce à une forme échelonnée de la matrice complète du système :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right] \quad \rightsquigarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & * & \cdots & & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & \cdots & & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & & * \end{array}\right] =: \left[\begin{array}{ccc|c} a'_{1,1} & \cdots & a'_{1,n} & b'_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a'_{m,1} & \cdots & a'_{m,n} & b'_m \end{array}\right],$$

avec un second membre à droite de la barre verticale qui demeure quelconque, et que nous noterons $\vec{b}'$.

Théorème 6.2. *Dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$, on a équivalence entre :*

(i) $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ *est génératrice ;*

(ii) *dans une matrice échelonnée $[a'_{i,j} \,|\, b'_i]$ associée à $[a_{i,j} \,|\, b_i]$, il n'y a aucune ligne (en bas) de la forme :*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & b'_i \end{array}\right];$$

(iii) *il existe un pivot sur chaque ligne.*

La matrice complète $[a'_{i,j} \,|\, b'_i]$ du système gaussifié doit donc être du type :

$$\begin{array}{cccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & \\ \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * & b'_1 \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & b'_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & b'_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & b'_4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & b'_5 \end{array}$$

Il est alors clair que le nombre de lignes $m \leqslant n$ doit nécessairement être inférieur ou égal au nombre de colonnes.

Démonstration. **(ii)** $\Longleftrightarrow$ **(iii)** découle aisément du principe général de l'algorithme de Gauss.

(i) $\Longrightarrow$ **(ii)** Par contraposition, s'il existe une mauvaise ligne, en choisissant un vecteur $\vec{b}'$ avec $b'_j \neq 0$, on voit que $\vec{b}'$ ne peut *pas* être combinaison linéaire de $\vec{a}'_1, \vec{a}'_n$.

(i) $\Longleftarrow$ **(ii)** Comme il existe un pivot sur chaque ligne, et comme les colonnes [3] la condition **(iii)** est aussi satisfaite, et nous avons déjà plusieurs fois constaté que c'est la condition nécessaire et suffisante pour que le système linéaire de matrice gaussifiée $[a'_{i,j} \,|\, b'_i]$ ait toujours au moins une solution. □

7. Familles libres et génératrices de vecteurs $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$

Lorsque $n = m$, *i.e.* lorsqu'on a un nombre de vecteurs *égal* à la dimension de l'espace ambiant, les Théorèmes 5.4 et 6.2 donnent le

Théorème 7.1. *Dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$, on a équivalence entre :*

(i) $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ *est libre ;*

(ii) $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ *est génératrice.* □

8. Exercices

Exercice 1. EE

Exercice 2. EE

3. Elle sont « co*mmes* », les colo*mmes* ? Impossible de résister à ce petit calembour polisson de passage !

Décomposition $A = LU$ de matrices A quelconques

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

Une *factorisation* d'une matrice A est une équation $A = B\,C\,\dots$ qui la représente comme un produit de deux matrices ou plus. Tandis que la multiplication matricielle effectue une *synthèse* des données, au sens où deux ou plusieurs effets sont combinés, la factorisation matricielle réalise une *analyse* des données.

En informatique, une expression de A sous forme d'un produit permet de décomposer les données en plusieurs parties utiles, chaque partie étant souvent plus accessible au calcul.

Ce court chapitre présente une factorisation classique, implicite à l'algorithme du pivot, et qui se trouve au cœur de plusieurs programmes informatiques couramment utilisés dans les applications en ingénierie et dans l'industrie.

2. La factorisation LU

Dans les mathématiques *très* appliquées, il est en effet courant d'avoir à résoudre une collection d'équations linéaires à plusieurs dizaines voir centaines d'inconnues dont la matrice *non* complète A est toujours la même :

$$A\,\vec{x}_1 = \vec{b}_1, \qquad A\,\vec{x}_2 = \vec{b}_2, \qquad A\,\vec{x}_3 = \vec{b}_3, \qquad \dots$$

Quand A est inversible, ce qui arrive fréquemment, on est naturellement tenté de calculer son inverse A^{-1}, pour trouver les solutions :

$$\vec{x}_1 = A^{-1}\,\vec{b}_1, \qquad \vec{x}_2 = A^{-1}\,\vec{b}_2, \qquad \vec{x}_3 = A^{-1}\,\vec{b}_3, \qquad \dots$$

Cette technique semble être la meilleure, mais en fait, il existe une technique plus économique, que nous présentons maintenant.

Cette technique consiste à commencer par résoudre avec la méthode du pivot le premier système linéaire $A\,\vec{x}_1 = \vec{b}_1$, et à *conserver la mémoire des calculs intermédiaires afin d'accélérer la résolution des systèmes linéaires suivants*. Cette mémoire va se cristalliser en représentant A sous forme d'un produit matriciel $A = L\,U$ du type :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{1,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{1,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{1,5} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & 1 & \mathbf{0} \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{U}.$$

Les notations L et U sont assez universelles, et proviennent respectivement des termes anglais *lower* (inférieur) et *upper* (supérieur).

Avant d'étudier la façon de construire L et U, expliquons pourquoi ces deux matrices, L triangulaire inférieure, et U triangulaire supérieure, sont si utiles. En partant de $A = L\,U$, le système linéaire :

$$A\,\vec{x} = \vec{b} \qquad \text{peut s'écrire :} \qquad L\,\big(U\,\vec{x}\big) = \vec{b}.$$

Alors si l'on introduit l'*inconnue intermédiaire :*

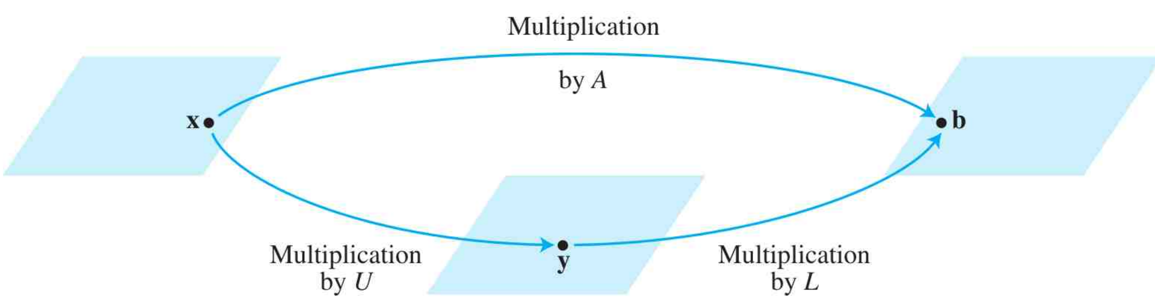
$$\vec{y} := U\,\vec{x},$$

on peut résoudre le système initial $A\,\vec{x} = \vec{b}$ en résolvant successivement les *deux* systèmes linéaires :

$$\boxed{\begin{aligned} L\mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ U\mathbf{x} &= \mathbf{y} \end{aligned}}$$

Mais il semblerait qu'on n'ait rien gagné dans cette opération ?! En effet, comment prétendre accélérer la résolution en remplaçant *un* système à résoudre par *deux* systèmes à résoudre ?

En tout cas, avant de dévoiler pourquoi les calculs se simplifient (un peu) quand on a affaire à *un grand nombre* de systèmes $A\,\vec{x}_k = \vec{b}_k$ linéaires de *même* matrice A, piratons un diagramme qui représente la composition $A = L\,U$:



La première idée, c'est que chacun des deux systèmes linéaires en question :

$$L\,\vec{y} = \vec{b}, \qquad \text{puis :} \qquad U\,\vec{x} = \vec{y},$$

le premier d'inconnue $\vec{y}$ et le second d'inconnue $\vec{x}$, sont faciles à résoudre, parce que les deux matrices L et U sont triangulaires, inférieure et supérieure. La deuxième idée, c'est que les calculs intermédiaires de résolution de chacun de ces deux systèmes vont se *répéter* pour tous les systèmes à résoudre $A\,\vec{x}_1 = \vec{b}_1$, $A\,\vec{x}_2 = \vec{b}_2$, $A\,\vec{x}_3 = \vec{b}_3$, *etc.* Et c'est surtout là que les ingénieurs peuvent gagner à réduire le nombre total de calculs.

Exemple 2.1. On peut vérifier (exercice direct) que l'on a :

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = L\,U.$$

Proposons-nous d'utiliser cette factorisation $A = L\,U$ afin de résoudre le système $A\,\vec{x} = \vec{b}$, où l'on a posé :

$$\vec{b} := \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Pour résoudre le premier système intermédiaire $L\,\vec{y} = \vec{b}$, formons sa matrice complète :

$$\begin{bmatrix} L & \vec{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & 7 \\ -3 & 8 & 3 & 1 & 11 \end{array}\right].$$

La résolution de ce système en utilisant la méthode du pivot procède, comme on le sait, selon les colonnes 1, 2, 3 :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L & \vec{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -9 \\ -1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & \mathbf{1} & 0 & 7 \\ -3 & 8 & 3 & \mathbf{1} & 11 \end{array}\right] & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -9 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & -4 \\ \mathbf{0} & -5 & \mathbf{1} & 0 & 25 \\ \mathbf{0} & 8 & 3 & \mathbf{1} & -16 \end{array}\right] \\ & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -9 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & -4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3 & \mathbf{1} & 16 \end{array}\right] \\ & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -9 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & -4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Chaque colonne permet de lire les nombres en-dessous des pivots $\mathbf{1}$ par lesquels on doit multiplier une ligne à soustraire. Mais on sait à l'avance que toutes les entrées en-dessous d'un pivot $\mathbf{1}$ seront forcément égales à $\mathbf{0}$!

Par conséquent, et c'est le point-clé, *les calculs à faire concernent seulement la dernière colonne ! Inutile de traiter ou d'écrire les autres colonnes !*

Dès qu'on se sera donné un vecteur $\vec{b}_k$, on ne travaillera qu'avec ses coordonnées ! Et c'est là que, sur le plan informatique, on gagnera à économiser de la mémoire !

Comme il y a 3 nombres, puis 2 nombres, puis 1 nombre en-dessous des trois pivots $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$, on n'a fait que $6 = 3 + 2 + 1$ multiplications et que $6 = 3 + 2 + 1$ additions, en jouant seulement avec les coordonnées de $\vec{b}$.

Ensuite, pour résoudre le deuxième système intermédiaire $U\,\vec{x} = \vec{y}$ — sachant que le membre de droite :

$$\vec{y} := \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vient d'être trouvé —, les calculs vont être un tout petit peu plus "compliqués", parce qu'il faudra commencer à diviser les pivots pour les rendre tous égaux à $\mathbf{1}$.

En effet, la phase de remontée avec la méthode du pivot commence par le bas en divisant le dernier pivot $-\mathbf{1}$ par lui-même pour trouver $\mathbf{1}$, puis en créant des $\mathbf{0}$ au-dessus de lui, dans la colonne 4 :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U & \vec{y} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & -7 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & -\mathbf{2} & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 \end{array}\right] & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & -7 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & -\mathbf{2} & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right] \\ & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & -7 & -2 & \mathbf{0} & -7 \\ 0 & -\mathbf{2} & -1 & \mathbf{0} & -2 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Ceci nécessite 1 division, puis 3 paires de multiplications-additions. *À nouveau, les calculs à effectuer ne concernent que la dernière colonne !*

Ensuite, on divise le pivot $-\mathbf{1}$ de la colonne 3 par lui-même pour trouver $\mathbf{1}$, et on continue jusqu'à remonter à la source :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & -7 & -2 & \mathbf{0} & -7 \\ 0 & -\mathbf{2} & -1 & \mathbf{0} & -2 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & -7 & -2 & \mathbf{0} & -7 \\ 0 & -\mathbf{2} & -1 & \mathbf{0} & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & -7 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -19 \\ 0 & -\mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -8 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & -7 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -19 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 9 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right].$$

Pour cette deuxième partie des calculs, on a effectué $1+1+1+1 = 4$ divisions, et $3+2+1+0 = 6$ paires de multiplications-additions. Il importe de remarquer à nouveau que dans cette phase de remontée, *les calculs à faire concernent aussi surtout la dernière colonne*.

Ainsi, la solution du système initial $A\,\vec{x} = \vec{b}$ est la dernière colonne trouvée ci-dessus :

$$\vec{x} := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix},$$

ce que l'on peut vérifier comme suit :

$$A\,\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-28+12-2 \\ -9+20-6 \\ 18-16+5 \\ -27+20+30-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \vec{b}.$$

Au total, si l'on ne tient pas compte des calculs requis pour obtenir L et U[1], il faut donc 28 opérations arithmétiques, appelées « *flops* » en informatique, pour déterminer la solution $\vec{x}$.

Or si l'on comptait précisément le nombre d'opérations requises pour transformer $\big[A\ \vec{b}\big]$ en $\big[I\ \vec{x}\big]$, on trouverait $62 > 28$ opérations arithmétiques.

L'efficacité algorithmique de la factorisation $A = L\,U$ repose sur la connaissance préalable de L et de U. L'algorithme présenté dans la Section **3** suivante montre qu'en déterminant une forme échelonnée U de A, on détermine du même coup la factorisation $A = L\,U$, car on obtient alors L pratiquement sans travail supplémentaire. Une fois la réduction initiale effectuée, on dispose des matrices L et U pour résoudre d'autres systèmes $A\,\vec{x}_k = \vec{b}_k$ dont la matrice est A.

3. Algorithme de factorisation $A = L\,U$

Pour simplifier, nous allons supposer que la matrice A peut être réduite à une forme échelonnée uniquement par des opérations de remplacement qui consistent à additionner un multiple d'une ligne à une autre ligne, *toujours située au-dessous*.

1. — sachant que ces calculs peuvent être supposés effectués à l'avance pour traiter ensuite tous les systèmes suivants $A\,\vec{x}_k = \vec{b}_k$ avec $k = 2, 3, 4, 5, \dots$ —

Dans ce cas, il existe un nombre fini $p \geqslant 1$ de matrices élémentaires $E_1, \dots, E_p$ triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale, et un seul autre nombre non nul, c'est-à-dire du type :

$$E_\bullet \,=\, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad E_\bullet \,=\, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

telles que la concaténation de ces opérations élémentaires, qui équivaut à la multiplication de A par $E_p, \dots, E_1$ à gauche :

$$E_p \cdots E_1 \cdot A \,=\, U,$$

fournisse une certaine matrice échelonnée U, triangulaire supérieure — *Upper triangular* en anglais.

Alors il vient :

$$A \,=\, \underbrace{\big(E_p \cdots E_1\big)^{-1}}_{=:\, L} \cdot U$$
$$=:\, L\,U,$$

ce qui définit une certaine matrice L. Or comme les matrices $E_1, \dots, E_p$ sont toutes triangulaires inférieures, ainsi que leurs inverses $E_1^{-1}, \dots, E_p^{-1}$ (exercice), la matrice :

$$L \,=\, E_1^{-1} \cdots E_p^{-1}$$

est elle aussi triangulaire inférieure — *Lower triangular* en anglais.

Enfin, on peut vérifier (exercice) que L n'a que des 1 sur sa diagonale.

Exemple 3.1. Proposons-nous de déterminer une factorisation $A = L\,U$ de la matrice :

$$A \,=\, \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Puisque A comporte 4 lignes, la matrice L associée doit être une matrice de taille 4×4. Puisque l'on cherche à atteindre $A = L\,U$, c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \,=\, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare \end{bmatrix},$$

le carré noir en haut à gauche doit valoir :

$$\mathbf{2} \cdot 1 \,=\, \blacksquare.$$

Par conséquent, en effectuant le début de la multiplication matricielle, on déduit que la première colonne de L est nécessairement égale à la première colonne de A divisée par ce coefficient-pivot **2** :

$$L \,=\, \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & * & 1 & 0 \\ -3 & * & * & 1 \end{bmatrix}.$$

Ensuite, on compare les premières colonnes de A et de L.

Observation 3.2. *Les opérations élémentaires sur les lignes qui créent des* **0** *dans la première colonne de A font alors également apparaître des* **0** *dans la première colonne de L.*

Preuve. Cela est vrai parce que la première colonne de A est un multiple non nul de la première colonne de L. □

Ensuite, on crée réellement les **0** nécessaires dans la première colonne de A, et on regarde la deuxième colonne, à partir de la deuxième ligne :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{bmatrix} = A_1$$

Après cela, il faut diviser cette deuxième colonne par son pivot **3** en position $(2, 2)$, ce qui produit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ -9 \\ 12 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

et permet de continuer à compléter :

$$L = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & * & 1 \end{bmatrix}.$$

Ensuite, on crée des **0** en-dessous ce nouveau pivot **1**, ce qui donne (observer que l'on saute alors de la colonne 2 à la colonne 4, et on sait que cela peut arriver dans la méthode du pivot) :

$$\sim A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U$$

Après cela, il faut diviser cette colonne 3 par son pivot **2** en position $(3, 4)$, ce qui produit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ 4 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ 2 \end{bmatrix}$$

et permet de terminer la complétion de :

$$L = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 1 & -3 & \mathbf{1} & 0 \\ -3 & 4 & 2 & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Enfin, on termine l'application de la méthode du pivot, et on trouve la matrice U, écrite un peu plus haut.

Ainsi, on a *encadré en bleu les coefficients* utilisés dans chaque matrice pour déterminer la suite d'opérations qui transforment A en U, et on a *conservé en mémoire ces données dans une matrice auxiliaire L :*

$$\begin{bmatrix}2\\-4\\2\\-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-9\\12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc}\div 2 & \div 3 & \div 2 & \div 5\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}1&&&\\-2&1&&\\1&-3&1&\\-3&4&2&1\end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad L = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-3&1&0\\-3&4&2&1\end{bmatrix}$$

Une vérification simple montre que l'on a bien $LU = A$.

Algorithme: Factorisation LU

1. Transformer la matrice A en une matrice échelonnée U par la méthode du pivot.
2. À chaque étape, recopier dans une matrice auxiliaire L les coefficients qui se trouvent en-dessous du pivot normalisé 1 de chaque colonne.

Il reste à discuter de la situation où des échanges de lignes sont parfois nécessaires, dans la matrice A, pour continuer à appliquer la méthode du pivot, et assurer de cette manière que l'on produise bien une matrice L qui est triangulaire *inférieure*.

Notamment, cela devient vraiment nécessaire quand on utilise une « *stratégie de pivot partiel* », c'est-à-dire une stratégie qui consiste à choisir, parmi tous les pivots possibles, un coefficient qui a la plus grande valeur absolue.

On peut alors admettre de parler d'une *matrice triangulaire inférieure permutée*, c'est-à-dire une matrice triangulaire (avec des 1 sur la diagonale) dont on a permuté, d'une certaine manière, les lignes.

On peut aussi décider de recommencer les calculs après avoir réordonné les lignes de A.

REMARQUES NUMÉRIQUES

Le décompte d'opérations suivant s'applique à une matrice $n \times n$ dense A (c'est-à-dire dont la plupart des coefficients sont non nuls) pour n relativement grand, typiquement[6] $n \geq 30$.

1. Le calcul de la factorisation LU de A prend environ $2n^3/3$ flops (à peu près autant que pour appliquer la méthode du pivot à $[\,A \quad \mathbf{b}\,]$), tandis que le calcul de A^{-1} nécessite environ $2n^3$ flops.
2. Résoudre $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ et $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ nécessite environ $2n^2$ flops, car tout système triangulaire $n \times n$ se résout en environ n^2 flops.
3. La multiplication de $\mathbf{b}$ par A^{-1} nécessite aussi environ $2n^2$ flops, mais le résultat peut être moins précis que celui obtenu à partir de L et U (à cause des erreurs d'arrondi pouvant survenir lors des calculs de A^{-1} et $A^{-1}\mathbf{b}$).
4. Si A est creuse (comportant beaucoup de 0), alors L et U pourront, elles aussi, être creuses, alors que A^{-1} a plus de chances d'être dense. Dans ce cas, la résolution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ par une factorisation LU est *beaucoup* plus rapide que l'utilisation de A^{-1} (voir exerçice 31).

Produit scalaire, produit vectoriel, produit mixte

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

2. Produit scalaire dans l'espace vectoriel euclidien $V_{\mathbb{R}^3}$

L'espace $\mathbb{R}^3$ est un espace de points. On lui associe l'espace vectoriel $V_{\mathbb{R}^3}$. Les éléments de $V_{\mathbb{R}^3}$ sont tous les vecteurs d'origine le point $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ et d'extrémité un point quelconque $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

On notera donc parfois les vecteurs $\vec{x} \in V_{\mathbb{R}^3}$ sous forme d'une matrice colonne :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

et plus souvent aussi, sous forme horizontale $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

En fait, avec la base canonique de $V_{\mathbb{R}^3}$, constituée des trois vecteurs :

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &:= (1,0,0), \\ \vec{e}_2 &:= (0,1,0), \\ \vec{e}_3 &:= (0,0,1), \end{aligned}$$

il est clair que :

$$\vec{x} = x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 + x_3\,\vec{e}_3.$$

Maintenant, comment parler de la *longueur* d'un vecteur quelconque $\vec{x}$? La réponse à cette question est bien connue, elle date de l'Antiquité, et l'on sait bien que la quantité :

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

définit une *norme* sur l'espace vectoriel $V_{\mathbb{R}^3}$, au sens où les deux propriétés évidentes suivantes sont satisfaites :

$$\|\vec{x}\| \geqslant 0 \qquad (\forall\, \vec{x} \in V_{\mathbb{R}^3}),$$

$$\|\lambda\,\vec{x}\| = |\lambda|\,\|\vec{x}\| \qquad (\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, \vec{x} \in V_{\mathbb{R}^3}),$$

et au sens où on a l'*inégalité triangulaire :*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \qquad (\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in V_{\mathbb{R}^3}).$$

On observera que cette norme dite *euclidienne* attribue la longueur 1 aux trois vecteurs de base :

$$1 = \|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\|.$$

On observera aussi que la *norme au carré :*

$$\|\vec{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^3 + x_3^2$$

satisfait le *Théorème de Pythagore :*

$$\begin{aligned}\left\| x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \right\|^2 &= x_1^2 \left\|\vec{e}_1\right\|^2 + x_2^2 \left\|\vec{e}_2\right\|^2 + x_3^2 \left\|\vec{e}_3\right\|^2 \\ &= x_1^2\, 1 + x_2^2\, 1 + x_3^2\, 1 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\end{aligned}$$

ce qui s'explique par le fait que les trois vecteurs de base $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ sont *orthogonaux* entre eux.

Vous avez dit *orthogonaux* ? Oui, je l'ai dit. Car dans l'espace vectoriel physique $V_{\mathbb{R}^3}$ à 3 dimensions, entre deux vecteurs quelconques $\vec{x} \in V_{\mathbb{R}^3}$ et $\vec{y} \in V_{\mathbb{R}^3}$, il est bien connu qu'existe le *produit scalaire euclidien*, défini par :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Nous laissons au lecteur-étudiant la tâche aisée de vérifier dans les moindres détails la véracité du

Lemme 2.1. *Le produit scalaire euclidien $(\bullet) \cdot (\bullet)$ satisfait une propriété de bilinéarité par rapport à ses deux arguments :*

$$\begin{aligned}\big(\lambda \vec{x} + \lambda' \vec{x}'\big) \cdot \vec{y} &= \lambda \vec{x} \cdot \vec{y} + \lambda' \vec{x}' \cdot \vec{y}, \\ \vec{x} \cdot \big(\mu \vec{y} + \mu' \vec{y}'\big) &= \mu \vec{x} \cdot \vec{y} + \mu' \vec{x} \cdot \vec{y}',\end{aligned}$$

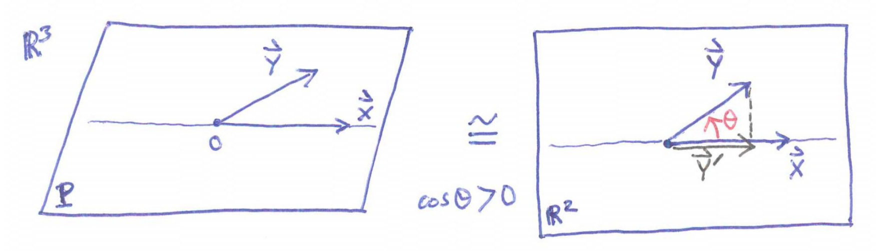
où $\vec{x}, \vec{x}', \vec{y}, \vec{y}' \in V_{\mathbb{R}^3}$ sont des vecteurs quelconques, et où $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbb{R}$ sont des scalaires arbitraires. $\square$

En fait, ces deux propriétés sont équivalentes, car on aura déjà remarqué que le produit scalaire est *symétrique :*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x} \qquad (\forall\, \vec{x} \in V_{\mathbb{R}^3},\ \forall\, \vec{y} \in V_{\mathbb{R}^3}).$$

De plus, le produit scalaire possède une définition géométrique plus éclairante que la formule $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ ci-dessus, et nous pouvons maintenant rappeler cette définition géométrique, connue depuis la classe maternelle, cela va sans dire.

Si $\vec{x} = 0$ ou si $\vec{y} = 0$, on déclare que $\vec{x} \cdot \vec{y} := 0$ — rien de plus.



Nous pouvons donc supposer que $\vec{x} \neq 0$ et que $\vec{y} \neq 0$, ce qui sera commode pour dessiner des figures. Dans les figures, on va même supposer que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ ne sont pas colinéaires, de telle sorte que le couple $\big(\vec{x}, \vec{y}\big)$ définit un plan 2-dimensionnel dans l'espace $V_{\mathbb{R}^3}$, plan que nous noterons P.

Ce plan P est alors isomorphe au plan euclidien $V_{\mathbb{R}^2}$ que nous connaissons bien, et pour parler du produit scalaire, on peut alors raisonner entièrement dans ce plan, comme on a appris à le faire en classe de mathématiques maternelles.

Alors si $\vec{y}'$ est la projection orthogonale du vecteur $\vec{y}$ sur la droite que dirige $\vec{x}$, on définit le produit scalaire par la formule :

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot \vec{y} &:= \overline{x} \cdot \overline{y}' \\ &= \vec{x} \cdot \vec{y}',\end{aligned}$$

où $\overline{x}$ et $\overline{y}'$ désignent les longueurs *algébriques*, sur la droite dirigée par $\vec{x}$, des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}'$, la valeur de ce produit $\overline{x} \cdot \overline{y}'$ ne dépendant pas d'une orientation choisie sur cette droite, puisque $(-1) \cdot (-1) = 1$.

En introduisant l'angle :

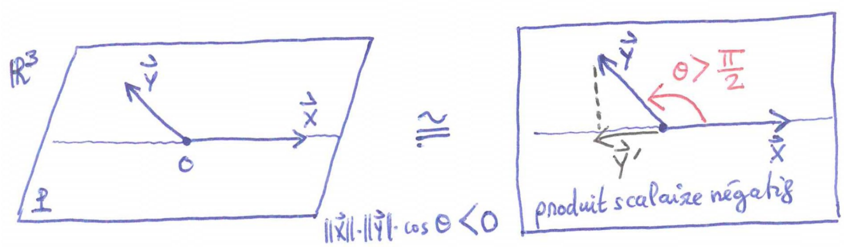
$$\theta := \mathsf{Angle}(\vec{x}, \vec{y}'),$$

nous constatons que la définition alternative :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cos\theta,$$

est équivalente.

La première figure ci-dessus illustrait un cas où $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. En voici une autre qui illustre le cas où $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ dans lequel le produit scalaire est *négatif*.



Évidemment :

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = \|\vec{x}\|^2 \qquad\qquad (\forall\, \vec{x} \in V_{\mathbb{R}^3}).$$

3. Présentation des deux (seules) orientations dans l'espace $V_{\mathbb{R}^3}$

L'espace euclidien 3-dimensionnel peut être muni d'une *orientation*, tout comme l'espace 2-dimensionnel, *cf.* ce qu'on appelle le *sens trigonométrique*.

Nous considérerons en effet comme déjà connu le fait que dans $\mathbb{R}^2$, ou dans $V_{\mathbb{R}^2}$, il existe exactement *deux* orientations, opposées l'une de l'autre.

Dans cette section, nous allons présenter une manière de définir les deux orientations possibles — il y en a exactement deux, aussi — de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, ou de l'espace vectoriel associé $V_{\mathbb{R}^3}$, qui repose sur un procédé dit d'*orthonormalisation de Gram-Schmidt*.

Soient trois vecteurs quelconques :

$$\vec{u} \in V_{\mathbb{R}^3}, \qquad\qquad \vec{v} \in V_{\mathbb{R}^3}, \qquad\qquad \vec{w} \in V_{\mathbb{R}^3},$$

que nous supposerons *linéairement indépendants*. Il faut se les imaginer se baladant dans l'espace, comme trois doigts de la main qui vole. On considère le triplet *ordonné :*

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

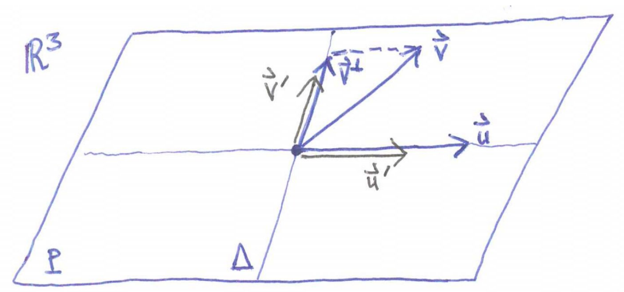
Pour toutes les opérations qui suivent, l'ordre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ devra être respecté.

Commençons par remplacer $\vec{u}$ par le vecteur renormalisé :

$$\vec{u}' := \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},$$

qui devient de norme unité :

$$\|\vec{u}'\| = \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = 1.$$



Ensuite, considérons le plan vectoriel V_P engendré par les deux premiers vecteurs — on s'occupera de $\vec{w}$ dans quelques instants — :

$$V_P \;:=\; \mathsf{Vect}\big(\vec{u},\,\vec{v}\big) \;\cong\; V_{\mathbb{R}^2}.$$

On distingue V_P, constitué de *vecteurs* d'origine 0 contenus dans le plan P, du plan $P \subset \mathbb{R}^3$ lui-même, qui est constitué de *points*.

Comme cela est illustré sur la figure, en travaillant dans ce plan P, projetons orthogonalement le deuxième vecteur $\vec{v}$ sur la droite, notée $\Delta \subset P$, qui est orthogonale à la droite engendrée par le premier vecteur $\vec{u}$.

On obtient ainsi un certain vecteur $\vec{v}^\perp \in V_\Delta$, qui n'est *pas* nul, puisqu'on a supposé que la famille $\big\{\vec{u},\vec{v}\big\}$ est linéairement indépendante.

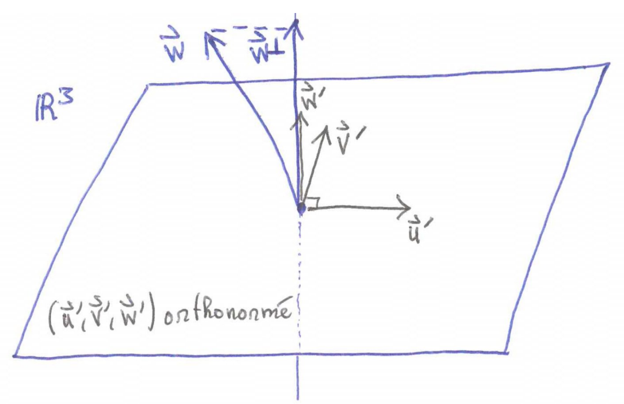
Comme $\vec{v}^\perp$ n'est pas forcément de norme unité, renormalisons-le en introduisant :

$$\vec{v}' \;:=\; \frac{\vec{v}^\perp}{\|\vec{v}^\perp\|},$$

vecteur qui devient de norme $1 = \big\|\vec{v}'\big\|$.

Voilà ! dans le plan vectoriel V_P, on est content ! on a remplacé le couple *ordonné* de vecteurs indépendants $\big(\vec{u},\vec{v}\big)$ par un nouveau couple ordonné $\big(\vec{u}',\vec{v}'\big)$ qui constitue maintenant une *base orthonormale* du plan vectoriel V_P. Si on travaillait en dimension 2, c'est-à-dire dans $V_{\mathbb{R}^2}$, on s'arrêterait là.

Mais on travaille en dimension 3, et il nous reste encore à malmener $\vec{w}$ — et d'ailleurs, que va-t-on lui faire ?



Soit D la droite orthogonale au plan P. Comme le lecteur l'a deviné, projetons notre troisième et dernier vecteur $\vec{w}$ orthogonalement sur D.

Nous obtenons ainsi un certain vecteur $\vec{w}^\perp \in V_D$, qui n'est *pas* nul, parce qu'on a supposé que la famille $\big\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\big\}$ est linéairement indépendante.

Comme $\vec{w}^\perp$ n'est pas forcément de norme unité, renormalisons-le en introduisant :

$$\vec{w}' := \frac{\vec{w}^\perp}{||\vec{w}^\perp||},$$

vecteur qui devient de norme $1 = ||\vec{w}'||$.

Voilà ! on a atteint notre objectif ! on a remplacé le triplet *ordonné* de vecteurs indépendants $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ par un nouveau triplet ordonné $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ qui constitue maintenant une *base orthonormale ordonnée* de l'espace vectoriel euclidien $V_{\mathbb{R}^3}$. En termes moins élégants, on a « *Gram-Schmidté* » nos trois vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Or $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ constitue aussi une base orthonormale ordonnée de $V_{\mathbb{R}^3}$, et c'est une référence à laquelle on peut donc comparer $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$.

Pour effectuer une telle comparaison, il suffit de déplacer la main dans l'espace (sans oublier d'emporter les trois doigts importants avec lesquels on mange le couscous).

Théorème 3.1. [Admis] *Après application du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à une famille libre quelconque* ordonnée *de* 3 *vecteurs dans l'espace* $V_{\mathbb{R}^3}$ *:*

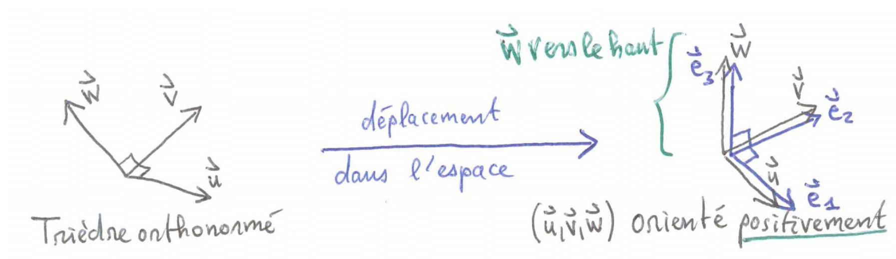
$$\begin{array}{ccl} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) & \rightsquigarrow & (\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}') \\ V_{\mathbb{R}^3} = \mathsf{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) & & 1 = ||\vec{u}'|| = ||\vec{v}'|| = ||\vec{w}'|| \\ & & 0 = \vec{u}' \cdot \vec{v}' = \vec{u}' \cdot \vec{w}' = \vec{v}' \cdot \vec{w}', \end{array}$$

si on déplace dans l'espace $\vec{u}'$ pour l'amener à coïncider avec $\vec{e}_1$, et si en même temps, on déplace $\vec{v}'$ pour l'amener à coïncider avec $\vec{e}_2$, alors exactement deux situations peuvent se produire concernant $\vec{w}'$:

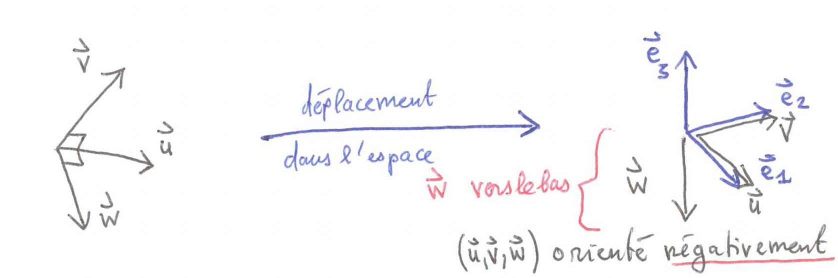
$$\vec{w}' = \vec{e}_3 \qquad \textit{ou} \qquad \vec{w}' = -\vec{e}_3. \qquad \square$$

Tête au-dessus, ou tête en-dessous : tout est là !

Définition 3.2. Dans le premier cas, on dira que la famille libre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est orientée *positivement*, ou encore, que le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est *direct*.



Dans le deuxième cas, on dira que la famille libre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est orientée *négativement*, ou encore, que le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est *indirect*.



4. Produit vectoriel dans $V_{\mathbb{R}^3}$

Maintenant, le Théorème 3.1 s'applique pour faire voir que l'espace vectoriel $V_{\mathbb{R}^3}$ peut être muni d'exactement *deux* orientations opposées.

En effet, nous avons implicitement convenu que le trièdre $\big(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big)$ était positif. Une application dudit théorème montre qu'alors le trièdre $\big(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3\big)$ est négatif. Or nous aurions tout à fait pu commencer la théorie en déclarant que c'est *ce* trièdre $\big(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3\big)$ qui est le trièdre de référence positif, et alors, ce qui était positif devient négatif, et vice-versa.

Je laisse en exercice de visualisation géométrique la vérification du fait que les trois trièdres :

$$\big(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big), \qquad \big(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1\big), \qquad \big(\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2\big), \tag{4.1}$$

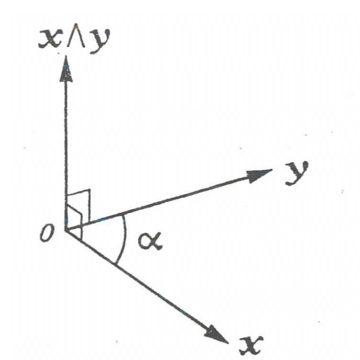
sont toujours en même temps positifs, ou en même temps négatifs, et de même pour les trois trièdres :

$$\big(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3\big), \qquad \big(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2\big), \qquad \big(\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1\big).$$

Pour commencer la théorie du produit vectoriel, il faut donc seulement faire un choix parmi les deux orientations possibles de l'espace $V_{\mathbb{R}^3}$. Nous avons fait le choix de déclarer que $\big(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big)$ était *positif* : c'est le choix le plus standard et le plus fréquent, donc nous le maintiendrons, tout en répétant qu'il est aussi possible de déclarer au début que $\big(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big)$ est *négatif*, ce qui changerait tous les signes partout !

Le point important à retenir, c'est qu'il y a un choix d'orientation de l'espace à effectuer au départ.

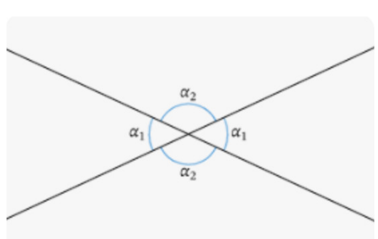
Venons-en maintenant à un concept qu'on apprenait, au siècle précédent (*i.e.* dans l'ancien millénaire), en classe de 2nde au Lycée !



Dans cette figure, l'angle représenté α est supposé satisfaire :

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire qu'il est l'angle *aigu* entre les deux droites $\mathbb{R}\,\vec{x}$ et $\mathbb{R}\,\vec{y}$ engendrées par $\vec{x}$ et $\vec{y}$.



Pour calculer l'angle entre deux *droites* dans le plan, on cherche l'angle aigu, c'est-à-dire compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, ou 90 degrés. Sur la figure, c'est α_1 qu'il faut choisir.

En commençant par $\vec{y}$ plutôt que par $\vec{x}$, on a égalité :

$$\beta \;:=\; \mathsf{Angle}\big(\mathbb{R}\vec{y},\, \mathbb{R}\vec{x}\big) \;=\; \mathsf{Angle}\big(\mathbb{R}\vec{x},\, \mathbb{R}\vec{y}\big) \;=\; \alpha.$$

Évidemment, les sinus sont positifs :

$$\sin\beta \;=\; \sin\alpha \;\geqslant\; 0.$$

Définition 4.2. À tout couple ordonné $\big(\vec{x}, \vec{y}\big)$ de vecteurs de $V_{\mathbb{R}^3}$, on associe un vecteur noté :

$$\vec{x}\wedge\vec{y} \qquad\qquad (\in V_{\mathbb{R}^3}),$$

nommé *produit vectoriel de $\vec{x}$ par $\vec{y}$*, et qui est défini en plusieurs étapes.

(1) Lorsque $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires, on déclare que $\vec{x}\wedge\vec{y} := \vec{0}$.

(2) Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ ne sont pas colinéaires, alors $\vec{x}\wedge\vec{y}$ est défini de manière unique par les trois conditions suivantes.

(a) $\vec{x}\wedge\vec{y}$ est perpendiculaire $\vec{x}$ et à $\vec{y}$;

(b) le trièdre $\big(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x}\wedge\vec{y}\big)$ est *positif;*

(c) en termes de la mesure d'angle entre les deux droites engendrées par $\vec{x}$ et $\vec{y}$:

$$\alpha \;:=\; \mathsf{Angle}\big(\mathbb{R}\vec{x},\, \mathbb{R}\vec{y}\big),$$

la norme de $\vec{x}\wedge\vec{y}$ doit valoir :

$$\big\|\vec{x}\wedge\vec{y}\big\| \;:=\; \big\|\vec{x}\big\|\,\big\|\vec{y}\big\|\,\sin\alpha.$$

Dans peu de temps, le Théorème 4.4 ci-dessous va mieux expliquer pourquoi ces trois conditions **(a)**, **(b)**, **(c)** définissent bien de manière unique le vecteur $\vec{x}\wedge\vec{y}$.

Pour l'instant, constatons que le symbole '$\wedge$' constitue une application :

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{R}^3}\times V_{\mathbb{R}^3} &\longrightarrow V_{\mathbb{R}^3} \\ \big(\vec{x}, \vec{y}\big) &\longmapsto \vec{x}\wedge\vec{y}. \end{aligned}$$

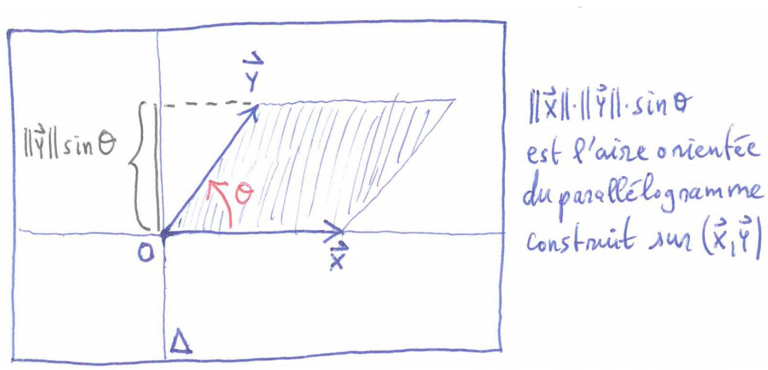
Observons aussi que le produit vectoriel $\vec{x}\wedge\vec{y}$ n'est nul que lorsque $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires, ce qui correspond à $\alpha\equiv 0 \bmod \pi$.

Dans le cas où $\vec{x}$ et $\vec{y}$ ne sont pas colinéaires, il existe alors une unique droite D orthogonale au plan vectoriel qu'ils engendrent :

$$\mathsf{Vect}\big(\vec{x}, \vec{y}\big),$$

et alors la condition **(a)** demande que le vecteur défini soit dirigé par cette droite perpendiculaire :

$$\vec{x}\wedge\vec{y} \;\in\; V_D.$$



Il est très important de dire aussi qu'en prenant plutôt le « vrai » angle entre les vecteurs :

$$\theta \,:=\, \mathsf{Angle}\,\big(\vec{x}, \vec{y}\big),$$

avec maintenant :

$$0 \,\leqslant\, \theta \,<\, 2\,\pi,$$

le sinus de θ peut être *négatif*, et donc l'expression :

$$\big\|\vec{x}\big\|\,\big\|\vec{y}\big\|\,\sin\theta,$$

représente l'aire *orientée* du parallélogramme construit sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$ — dans le plan $\mathsf{Vect}\,(\vec{x}, \vec{y})$ que ces deux vecteurs engendrent lorsqu'ils sont non colinéaires. (Comme dans la figure, on suppose implicitement que ce plan est déjà muni d'une orientation.)

Cette aire orientée est (strictement) *négative* lorsque :

$$\pi \,<\, \theta \,<\, 2\,\pi.$$

Et d'ailleurs, le signe de $\sin\theta$ indique de quel côté il faut placer le vecteur produit vectoriel $\vec{x}\wedge\vec{y}$ par rapport au plan $\mathsf{Vect}\,(\vec{x}, \vec{y})$:

- « au-dessus » du plan lorsque $0 < \theta < \pi$;
- « par-dessous » le plan lorsque $\pi < \theta < 2\,\pi$.

Le lecteur est invité à se représenter ces deux cas possibles mentalement dans l'espace.

Proposition 4.3. *Quels que soient les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans l'espace, on a :*

$$\vec{y}\wedge\vec{x} \,=\, -\,\vec{x}\wedge\vec{y}.$$

En particulier, pour tout *vecteur $\vec{x}$, on a :*

$$\vec{x}\wedge\vec{x} = \vec{0}.$$

Démonstration. Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires, c'est évident, car $0 = -\,0$ est bien vrai.

Quand $\vec{x}$ et $\vec{y}$ ne sont pas colinéaires, la droite orthogonale D et les normes des vecteurs sont les mêmes dans les deux côtés de l'équation à vérifier.

Mais l'orientation du trièdre change d'un côté à l'autre, car comme on s'en convainc en visualisant les choses dans l'espace (ou en tournant le pouce du haut vers le bas), on a :

$$\begin{aligned} \big(\vec{x},\, \vec{y},\, \vec{x}\wedge\vec{y}\big)\ \text{positif} \qquad & \Longrightarrow \qquad \big(\vec{x},\, \vec{y},\, -\,\vec{x}\wedge\vec{y}\big)\ \text{négatif} \\ & \Longrightarrow \qquad \big(\vec{y},\, \vec{x},\, -\,\vec{x}\wedge\vec{y}\big)\ \text{positif.} \end{aligned}$$

Enfin, en choisissant $\vec{y} := \vec{x}$, l'identité que nous venons de démontrer conclut :

$$\vec{x}\wedge\vec{x} \,=\, -\,\vec{x}\wedge\vec{x} \qquad \Longrightarrow \qquad 2\,\vec{x}\wedge\vec{x} \,=\, \vec{0}. \qquad \square$$

Théorème 4.4. *Dans l'espace vectoriel euclidien* 3*-dimensionnel $V_{\mathbb{R}^3}$, soit un vecteur non nul $\vec{x} \neq$* 0*, et soit le plan orthogonal :*

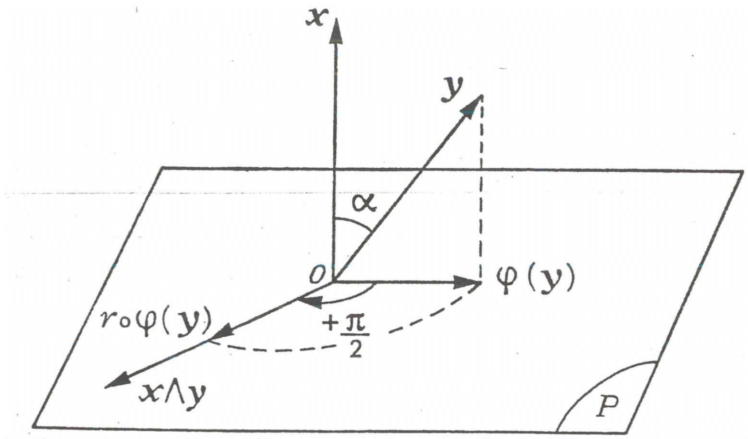
$$P \,:=\, \big(\mathsf{Vect}\,\vec{x}\big)^{\perp}.$$

Alors en termes des 3 *transformations :*

$$\begin{aligned} \varphi \quad & \textit{le projecteur orthogonal sur } V_P, \\ \boldsymbol{r} \quad & \textit{la rotation d'axe } \vec{x} \text{ et d'angle } +\tfrac{\pi}{2}, \\ h \quad & \textit{l'homothétie de rapport } \|\vec{x}\|, \end{aligned}$$

le produit vectoriel par $\vec{x}$ de tout vecteur $\vec{y}$ s'exprime comme :

$$\vec{x}\wedge\vec{y} \,=\, h\circ\boldsymbol{r}\circ\varphi\big(\vec{y}\big).$$



L'intérêt de cet énoncé, c'est qu'il *redéfinit* le produit vectoriel d'une manière beaucoup plus géométrique que précédemment : c'est une vraie recette !

Démonstration. Lorsque $\vec{y}$ est colinéaire à $\vec{x}$, sa projection $\varphi(\vec{y}) = \vec{0}$ sur P est nulle, et donc on retrouve bien ce qu'on avait déclaré dans la Définition 4.2.

Supposons donc $\vec{y}$ non colinéaire à $\vec{x}$. Alors le trièdre — attention ! la figure ci-dessous a choisi l'orientation opposée — :

$$\big(\vec{x},\, \varphi(\vec{y}),\, \vec{x}\wedge\vec{y}\big) \qquad \text{est trirectangle positif.} \tag{4.5}$$

Constatons que ce trièdre est de même signe que le trièdre $\big(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x}\wedge\vec{y}\big)$, grâce à une propriété élémentaire de la projection orthogonale φ sur P parallèlement à $\vec{x}$; cette constatation est d'ailleurs en accord avec la présentation que nous avons faite du procédé de Gram-Schmidt pour déterminer le sens, direct ou indirect, d'un trièdre.

D'autre part, si α désigne la mesure de l'angle $\mathsf{Angle}\big(\vec{x}, \vec{y}\big)$, on a évidemment :

$$\big\|\varphi(\vec{y})\big\| \;=\; \big\|\vec{y}\big\|\,\sin\alpha,$$

et par conséquent :

$$\big\|\vec{x}\wedge\vec{y}\big\| \;=\; \big\|\vec{x}\big\|\;\big\|\varphi(\vec{y})\big\|. \tag{4.6}$$

Comme ci-dessus, soit ensuite $\boldsymbol{r}$ la rotation d'axe $\vec{x}$ et d'angle $+\frac{\pi}{2}$. Elle envoie le vecteur $\varphi(\vec{y})$, orthogonal à $\vec{x}$, sur le vecteur $r\circ\varphi(\vec{y})$ tel que :

$$\Big(\vec{x},\, \varphi(\vec{y}),\, \boldsymbol{r}\circ\varphi(\vec{y})\Big) \qquad \text{est trirectangle positif,}$$

en préservant les normes :

$$\big\|\boldsymbol{r}\circ\varphi(\vec{y})\big\| \;=\; \big\|\varphi(\vec{y})\big\|.$$

Enfin, soit h l'homothétie de rapport strictement positif égal à $\|\vec{x}\|$. Elle applique le vecteur $\boldsymbol{r}\circ\varphi(\vec{y})$ sur le vecteur :

$$\vec{z} \;:=\; h\circ\boldsymbol{r}\circ\varphi(\vec{y}),$$

tel que :

$$\big(\vec{x},\, \varphi(\vec{y}),\, \vec{z}\big) \qquad \text{est trirectangle positif,} \tag{4.7}$$

et que :

$$\big\|\vec{z}\big\| \;=\; \big\|\vec{x}\big\|\;\big\|\varphi(\vec{y})\big\| \tag{4.8}$$

En comparant alors (4.5) et (4.7) d'une part, (4.6) et (4.8) d'autre part, nous obtenons bien :

$$\vec{z} \;=\; \vec{x}\wedge\vec{y}. \qquad \square$$

Proposition 4.9. *Quels que soient les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ ainsi que le nombre réel $a \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\big(a\,\vec{x}\big) \wedge \vec{y} \;=\; \vec{x} \wedge \big(a\,\vec{y}\big) \;=\; a\,\big(\vec{x} \wedge \vec{y}\big).$$

Démonstration. La propriété est évidente pour $\vec{x} = 0$. Supposons donc $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Puisque les applications φ, $\boldsymbol{r}$, h qui interviennent dans le Théorème 4.4 sont des endomorphismes linéaires de l'espace vectoriel $V_{\mathbb{R}^3}$, alors la composée :

$$h \circ \boldsymbol{r} \circ \varphi$$

est aussi un endomorphisme linéaire de $V_{\mathbb{R}^3}$. Par suite, on a :

$$h \circ \boldsymbol{r} \circ \varphi\big(a\,\vec{y}\big) \;=\; a\,h \circ \boldsymbol{r} \circ \varphi(\vec{y}),$$

c'est-à-dire, en appliquant le Théorème 4.4 :

$$\vec{x} \wedge \big(a\,\vec{y}\big) \;=\; a\,\big(\vec{x} \wedge \vec{y}\big).$$

Enfin, grâce à l'antisymétrie du produit vectoriel, ce premier résultat permet d'obtenir sans effort l'autre résultat comme suit :

$$\big(a\,\vec{x}\big) \wedge \vec{y} \;=\; -\,\vec{y} \wedge \big(a\,\vec{x}\big) \;=\; -\,a\,\big(\vec{y} \wedge \vec{x}\big) \;=\; a\,\big(\vec{x} \wedge \vec{y}\big). \qquad \square$$

Montrons maintenant que le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition vectorielle.

Proposition 4.10. *Quels que soient les vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_{\mathbb{R}^3}$, on a :*

$$\begin{aligned}\big(\vec{x} + \vec{y}\big) \wedge \vec{z} \;&=\; \vec{x} \wedge \vec{z} + \vec{y} \wedge \vec{z},\\ \vec{x} \wedge \big(\vec{y} + \vec{z}\big) \;&=\; \vec{x} \wedge \vec{y} + \vec{x} \wedge \vec{z}.\end{aligned}$$

Démonstration. Grâce à l'antisymétrie du produit vectoriel qui vient d'être exploitée, la première propriété de distributivité se déduit de la deuxième sans effort aussi.

Cette deuxième propriété est évidente lorsque $\vec{x} = \vec{0}$. Supposons donc $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Puisque $h \circ \boldsymbol{r} \circ \varphi$ est un endomorphisme linéaire de $V_{\mathbb{R}^3}$, on a, pour tous vecteurs $\vec{y}, \vec{z}$:

$$h \circ \boldsymbol{r} \circ \varphi\big(\vec{y} + \vec{z}\big) \;=\; h \circ \boldsymbol{r} \circ \varphi(\vec{y}) + h \circ \boldsymbol{r} \circ \varphi(\vec{z}).$$

En appliquant alors le Théorème 4.4, nous concluons bien que :

$$\vec{x} \wedge \big(\vec{y} + \vec{z}\big) \;=\; \vec{x} \wedge \vec{y} + \vec{x} \wedge \vec{z}. \qquad \square$$

Maintenant, que se passe-t-il avec les vecteurs de base $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$? Comme la base $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big\}$ est orthonormée, on a unitarité :

$$1 \;=\; \big\|\vec{e}_1\big\| \;=\; \big\|\vec{e}_2\big\| \;=\; \big\|\vec{e}_3\big\|,$$

ainsi qu'orthogonalité :

$$\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3, \qquad\qquad \vec{e}_3 \perp \vec{e}_1, \qquad\qquad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2,$$

c'est-à-dire :

$$0 \;=\; \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \;=\; \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 \;=\; \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2.$$

Comme la base $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big\}$ et celles (4.1) qui s'en déduisent pas permutation circulaire sont toutes positives, alors les relations précédentes entraînent :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \;&=\; \vec{e}_1,\\ \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 \;&=\; \vec{e}_2,\\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \;&=\; \vec{e}_3.\end{aligned}} \tag{4.11}$$

Considérons maintenant deux vecteurs quelconques $\vec{x}$ et $\vec{y}$, donnés par leurs coordonnées dans la base de référence :

$$\begin{aligned}\vec{x} \;&=\; x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 + x_3\,\vec{e}_3,\\ \vec{y} \;&=\; y_1\,\vec{e}_1 + y_2\,\vec{e}_2 + y_3\,\vec{e}_3.\end{aligned}$$

Grâce aux Propositions 4.9 et 4.10, le produit vectoriel $\vec{x} \wedge \vec{y}$ se calcule aisément :

$$\begin{aligned}
\vec{x} \wedge \vec{y} &= \Big(x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 + x_3\,\vec{e}_3\Big) \wedge \Big(y_1\,\vec{e}_1 + y_2\,\vec{e}_2 + y_3\,\vec{e}_3\Big) \\
&= x_1\,y_1\,\underline{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1}_{\circ} + x_1\,y_2\,\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + x_1\,y_3\,\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 \\
&\quad + x_2\,y_1\,\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 + x_2\,y_2\,\underline{\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2}_{\circ} + x_2\,y_3\,\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \\
&\quad + x_3\,y_1\,\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 + x_3\,y_2\,\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 + x_3\,y_3\,\underline{\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3}_{\circ}.
\end{aligned}$$

Comme d'habitude, nous avons souligné les termes qui s'annulent. En utilisant :

$$\vec{e}_{i_1} \wedge \vec{e}_{i_2} = -\,\vec{e}_{i_2} \wedge \vec{e}_{i_1} \qquad\qquad (1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant 3),$$

nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned}
\vec{x} \wedge \vec{y} = 0 \qquad\qquad & + x_1\,y_2\,\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 - x_1\,y_3\,\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 \\
- x_2\,y_1\,\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + 0 \qquad\qquad & + x_2\,y_3\,\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \\
+ x_3\,y_1\,\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 - x_3\,y_2\,\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 + 0. &
\end{aligned}$$

et enfin regrouper par paires les 6 termes restants pour obtenir un résultat fondamental.

Théorème 4.12. *Dans la base orthonormale canonique $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big\}$ de l'espace, le produit vectoriel entre deux vecteurs quelconques :*

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 + x_3\,\vec{e}_3, \\
\vec{y} &= y_1\,\vec{e}_1 + y_2\,\vec{e}_2 + y_3\,\vec{e}_3,
\end{aligned}$$

vaut :

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \big(x_2y_3 - y_2x_3\big)\,\vec{e}_1 + \big(x_3y_1 - y_3x_1\big)\,\vec{e}_2 + \big(x_1y_2 - y_1x_2\big)\,\vec{e}_3.$$

□

5. Applications bilinéaires

Nous savons que le produit scalaire euclidien est une application bilinéaire :

$$\begin{aligned}
V_{\mathbb{R}^3} \times V_{\mathbb{R}^3} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\big(\vec{x},\, \vec{y}\big) &\longmapsto \vec{x} \cdot \vec{y},
\end{aligned}$$

à savoir qu'il satisfait, comme l'a déjà énoncé le Lemme 2.1 :

$$\begin{aligned}
\big(\lambda\,\vec{x} + \lambda'\,\vec{x}\,'\big) \cdot \vec{y} &= \lambda\,\vec{x} \cdot \vec{y} + \lambda'\,\vec{x}\,' \cdot \vec{y}, \\
\vec{x} \cdot \big(\mu\,\vec{y} + \mu'\,\vec{y}\,'\big) &= \mu\,\vec{x} \cdot \vec{y} + \mu'\,\vec{x} \cdot \vec{y}\,'.
\end{aligned}$$

On parle de *bilinéarité*, car quand $\vec{y}$ est fixé, l'application $\vec{x} \longmapsto \vec{x} \cdot \vec{y}$ est linéaire, et de manière symétrique, quand $\vec{x}$ est fixé, l'application $\vec{y} \longmapsto \vec{x} \cdot \vec{y}$ est linéaire.

À travers les Proposition 4.9 et 4.10, nous venons de voir que le produit vectoriel :

$$\begin{aligned}
V_{\mathbb{R}^3} \times V_{\mathbb{R}^3} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\big(\vec{x},\, \vec{y}\big) &\longmapsto \vec{x} \wedge \vec{y},
\end{aligned}$$

est aussi une application bilinéaire, c'est-à-dire qu'il satisfait :

$$\begin{aligned}
\big(\lambda\,\vec{x} + \lambda'\,\vec{x}\,'\big) \wedge \vec{y} &= \lambda\,\vec{x} \wedge \vec{y} + \lambda'\,\vec{x}\,' \wedge \vec{y}, \\
\vec{x} \wedge \big(\mu\,\vec{y} + \mu'\,\vec{y}\,'\big) &= \mu\,\vec{x} \wedge \vec{y} + \mu'\,\vec{x} \wedge \vec{y}\,'.
\end{aligned}$$

Ainsi, quand $\vec{y}$ est fixé, l'application $\vec{x} \longmapsto \vec{x} \wedge \vec{y}$ est linéaire, et de manière symétrique, quand $\vec{x}$ est fixé, l'application $\vec{y} \longmapsto \vec{x} \wedge \vec{y}$ est linéaire.

Toutes ces observations motivent une conceptualisation générale « *en abstraction* » de ces propriétés. Revenons à un corps arbitraire $\mathbb{K}$ — penser $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.

Définition 5.1. Soient E, F, G trois espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. Une application f de $E \times F$ dans G sera dite *bilinéaire* si, quels que soient les vecteurs :

$$\vec{x},\, \vec{x}' \in E \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \vec{y},\, \vec{y}' \in F,$$

et quel que soit le scalaire $a \in \mathbb{K}$, elle satisfait :

$$\begin{aligned} f\big(a\,\vec{x},\, \vec{y}\big) &= f\big(\vec{x},\, a\,\vec{y}\big) = a\,f\big(\vec{x},\, \vec{y}\big), \\ f\big(\vec{x}+\vec{x}',\, \vec{y}\big) &= f\big(\vec{x},\, \vec{y}\big) + f\big(\vec{x}',\, \vec{y}\big), \\ f\big(\vec{x},\, \vec{y}+\vec{y}'\big) &= f\big(\vec{x},\, \vec{y}\big) + f\big(\vec{x},\, \vec{y}'\big). \end{aligned}$$

En d'autres termes, l'application $(\vec{x},\vec{y}) \longmapsto f(\vec{x},\vec{y})$ est, pour $\vec{y}$ fixé, linéaire selon la variable $\vec{x}$, et pour $\vec{x}$ fixé, linéaire selon la variable $\vec{y}$. C'est bien pourquoi f est nommée *bi*linéaire.

Terminologie 5.2. Maintenant, lorsque l'espace d'arrivée G où f prend ses valeurs coïncide avec le corps $\mathbb{K}$ lui-même, f est nommée *forme bilinéaire*.

Par exemple, le produit scalaire est une forme bilinéaire de $V_{\mathbb{R}^3} \times V_{\mathbb{R}^3}$ dans $\mathbb{R}$. À ce sujet, remarquons que le produit scalaire $f := \cdot$ est de plus commutatif :

$$f(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{y},\vec{x}),$$

ce qui n'est *pas* le cas pour toute application bilinéaire.

Terminologie 5.3. Quand $f(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{y},\vec{x})$ pour tous vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$, on dit que la forme bilinéaire f est *symétrique*. Et quand $E = F$ avec :

$$f(\vec{y},\vec{x}) = -\,f(\vec{x},\vec{y}) \qquad\qquad (\forall\,\vec{x}\in E,\, \forall\,\vec{y}\in E),$$

on dit que la forme f est *antisymétrique*.

Supposons donc maintenant que $E = F$.

Définition 5.4. Une application bilinéaire de $E \times E$ dans G est dite *alternée* si, quel que soit le vecteur $\vec{x} \in E$, elle satisfait :

$$f(\vec{x},\vec{x}) = \vec{0}.$$

Par exemple, le produit vectoriel est une application bilinéaire alternée de $V_{\mathbb{R}^3} \times V_{\mathbb{R}^3}$ dans $V_{\mathbb{R}^3}$, car nous savons que :

$$\vec{x} \wedge \vec{x} = \vec{0} \qquad\qquad (\forall\,\vec{x}\in V_{\mathbb{R}3}).$$

Cependant, le produit scalaire euclidien n'est *pas* alterné, car on sait que :

$$\vec{x}\cdot\vec{x} = \big\|\vec{x}\big\|^2 \qquad\qquad (\forall\,\vec{x}\in V_{\mathbb{R}3}),$$

et on sait que :

$$0 = \big\|\vec{x}\big\| \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad \vec{x} = \vec{0}.$$

Il est évident qu'une application antisymétrique est alternée, car :

$$f(\vec{x},\vec{x}) = -\,f(\vec{x},\vec{x}) \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad 2\,f(\vec{x},\vec{x}) = \vec{0}.$$

Mais le fait d'être alterné est équivalent au fait d'être antisymétrique, comme le fait voir la

Proposition 5.5. *Si f est une application bilinéaire alternée de $E \times E$ dans G, alors quels que soient les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de E, on a :*

$$f(\vec{x},\vec{y}) = -\,f(\vec{y},\vec{x}).$$

Démonstration. Partons de :

$$\vec{0} = f\big(\vec{x}+\vec{y},\, \vec{x}+\vec{y}\big),$$

utilisons la bilinéarité pour développer :

$$\vec{0} = \underline{f\big(\vec{x},\vec{x}\big)}_{\circ} + f\big(\vec{x},\vec{y}\big) + f\big(\vec{y},\vec{x}\big) + \underline{f\big(\vec{y},\vec{y}\big)}_{\circ},$$

et appliquons l'hypothèse que f est alternée pour obtenir effectivement :

$$\vec{0} = f\big(\vec{x},\vec{y}\big) + f\big(\vec{y},\vec{x}\big). \qquad \square$$

Nous allons maintenant étudier les applications bilinéaires alternées dans le cas où E et de dimension 2 sur le corps $\mathbb{K}$, l'espace vectoriel G étant quelconque. Ceci va nous permettre d'introduire pour la toute première fois des objets nouveaux dont nous reparlerons énormément au chapitre suivant, les *déterminants*, ici dans le cas prototypique des déterminants de taille 2×2, les plus simples d'entre tous.

Théorème 5.6. *Soient E et G deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$, avec :*

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\, E = 2.$$

Pour toute base $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\big\}$ de E, et pour tout vecteur $\vec{k} \in G$, il existe une application bilinéaire alternée, et une seule, $f\colon E \times E \longrightarrow G$ telle que :

$$f\big(\vec{e}_1, \vec{e}_2\big) = \vec{k}.$$

Démonstration. Toute paire de vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ sera rapportée à la base choisie :

$$\begin{aligned}\vec{x} &= x_1\, \vec{e}_1 + x_2\, \vec{e}_2,\\ \vec{y} &= y_1\, \vec{e}_1 + y_2\, \vec{e}_2.\end{aligned}$$

Commençons par établir l'*unicité* de $f\colon E \times E \longrightarrow G$. Comme f est supposée alternée, on a :

$$\begin{aligned}\vec{0} = f\big(\vec{e}_1,\vec{e}_1\big) &= f\big(\vec{e}_2,\vec{e}_2\big),\\ f\big(\vec{e}_1,\vec{e}_2\big) &= -\, f\big(\vec{e}_2,\vec{e}_1\big).\end{aligned}$$

Comme f est bilinéaire, on peut développer :

$$\begin{aligned}f(\vec{x},\vec{y}) &= f\Big(x_1\, \vec{e}_1 + x_2\, \vec{e}_2,\ y_1\, \vec{e}_1 + y_2\, \vec{e}_2\Big)\\ &= x_1\, y_1\, \underline{f\big(\vec{e}_1,\vec{e}_1\big)}_{\circ} + x_1\, y_2\, f\big(\vec{e}_1,\vec{e}_2\big) + x_2\, y_1\, f\big(\vec{e}_2,\vec{e}_1\big) + x_2\, y_2\, \underline{f\big(\vec{e}_2,\vec{e}_2\big)}_{\circ}\\ &= \big(x_1\, y_2 - y_1\, x_2\big)\, f\big(\vec{e}_1,\vec{e}_2\big).\end{aligned}$$

Ceci prouve que, si f existe, elle coïncide nécessairement avec l'application uniquement déterminée :

$$f(\vec{x},\vec{y}) := \big(x_1\, y_2 - y_1\, x_2\big)\, \vec{k}.$$

Ensuite, pour faire voir l'*existence réelle* de f, prouvons que l'application ainsi définie en termes de $\vec{k}$ est bien bilinéaire alternée.

Pour $\vec{y} \in E$ fixé, on a en effet, quels que soient $\vec{x}, \vec{x}\,' \in E$ et quels que soient $a, a' \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}f\,\big(a\,\vec{x} + a'\,\vec{x}\,',\ \vec{y}\big) &= \Big[\big(a\,x_1 + a'\,x_1'\big)\,y_2 - y_1\,\big(a\,x_2 + a'\,x_2'\big)\Big]\,\vec{k}\\ &= a\,\big(x_1\,y_2 - y_1 x_2\big)\,\vec{k} + a'\,\big(x_1'\,y_2 - y_1 x_2'\big)\,\vec{k}\\ &= a\, f(\vec{x},\vec{y}) + a'\, f(\vec{x}\,',\vec{y}).\end{aligned}$$

Ainsi, $f(\vec{x},\vec{y})$ est bien linéaire en $\vec{x}$. On prouverait de même qu'elle est aussi linéaire en $\vec{y}$.

Enfin, f est trivialement alternée, car :

$$f(\vec{x},\vec{x}) = \big(x_1\, x_2 - x_1\, x_2\big)\, \vec{k} = \vec{0}. \qquad \square$$

Nous pouvons maintenant introduire les déterminants d'ordre 2. Plaçons-nous dans les hypothèses du Théorème 5.6, avec de plus :

$$G := \mathbb{K}.$$

Choisissons comme vecteur $\vec{k}$ le « vecteur » 1 de l'espace vectoriel $\mathbb{K}$. Ledit théorème affirme alors qu'il existe une unique *forme* bilinéaire alternée f telle que :

$$f\big(\vec{e}_1, \vec{e}_2\big) = 1.$$

Terminologie 5.7. Une telle forme se nomme alors *déterminant des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ par rapport à la base $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\big\}$*.

On note ce déterminant :

$$x_1\, y_2 - y_1\, x_2 =: \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Ce tableau encadré de deux barres verticales — belle escorte ! — est constitué de par les deux colonnes des coordonnées des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans la base considérée.

Attention ! Il ne faut *absolument pas* confondre cette notation avec celle d'une matrice carrée d'ordre 2, pour laquelle les escortes sont deux grandes parenthèses.

D'ailleurs, si on part d'une matrice de $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$:

$$M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

on appelle *déterminant de M* la quantité notée :

$$\mathsf{det}\, M := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Observons au passage que d'après cette définition concrète, on voit immédiatement — exercice visuel, crayon non interdit en cas de panne de cervelle — que :

$$\mathsf{det}\,\big({}^{\mathsf{t}}M\big) = \mathsf{det}\, M.$$

De plus, on constate que si on échange deux lignes, le déterminant change de signe, et pareillement si on change deux colonnes.

Le prochain chapitre montrera cela à l'envi, et beaucoup, beaucoup plus !

6. Produit mixte

Revenons à l'espace vectoriel $V_{\mathbb{R}^3}$ de la géométrie euclidienne.

Définition 6.1. À tout triplet ordonné $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ de trois vecteurs de $V_{\mathbb{R}^3}$, on associe un nombre réel, nommé *produit mixte* des trois vecteurs, noté et défini par :

$$\big(\vec{x}\,|\,\vec{y}\,|\,\vec{z}\big) := \big(\vec{x}\wedge\vec{y}\big)\cdot\vec{z}.$$

C'est le produit scalaire de $\vec{z}$ par le produit vectoriel $\vec{x}\wedge\vec{y}$.

Le produit mixte établit donc une application :

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{R}^3}\times V_{\mathbb{R}^3}\times V_{\mathbb{R}^3} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \big(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\big) &\longmapsto \big(\vec{x}\,|\,\vec{y}\,|\,\vec{z}\big). \end{aligned}$$

Par construction, le produit mixte est nul si et seulement si l'une des trois éventualités suivantes est satisfaite.

(1) L'un des vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ est nul.

(2) Les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires, propriété équivalente à $\vec{0} = \vec{x}\wedge\vec{y}$.

(3) Les vecteurs $\vec{x}\wedge\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont non nuls et orthogonaux. Dans ce cas, le vecteur $\vec{z}$ appartient alors au sous-espace à deux dimensions V_P défini par $\vec{x}$ et $\vec{y}$, où $P := \mathsf{Vect}\big(\vec{x},\vec{y}\big)$.

Définition 6.2. Trois vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ sont dits *coplanaires* lorsqu'il existe un sous-espace V_P à deux dimensions qui les contient tous les trois.

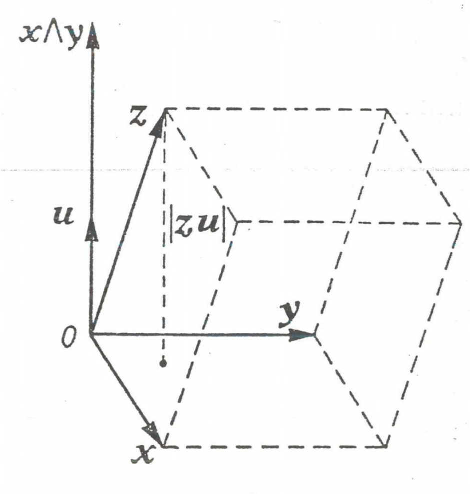
En d'autres termes, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ sont coplanaires s'ils sont tous parallèles à un même plan vectoriel. D'après ce qui précède, on peut donc énoncer en résumé une

Proposition 6.3. *Pour que trois vecteurs soient coplanaires, il faut et il suffit que leur produit mixte soit nul.* □

Maintenant, à quoi sert au juste le produit mixte ? Possède-t-il une signification géométrique éclairante ? Ah, que oui, tu l'as dis, Petzi !

En effet, on peut interpréter le produit mixte $\big(\vec{x}\,|\,\vec{y}\,|\,\vec{z}\big)$ comme le *volume signé* du parallélépipède construit sur $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

On sait déjà que $\big\|\vec{x}\wedge\vec{y}\big\|$ est la mesure de l'aire (positive) du parallélogramme construit sur les deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$.



Produit mixte: $(\boldsymbol{x}\,|\,\mathbf{y}\,|\,\mathbf{z})$

Désignons alors par $\vec{u}$ le vecteur unitaire unique tel que :

$$\vec{x}\wedge\vec{y} = \big\|\vec{x}\wedge\vec{y}\big\|\,\vec{u} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \vec{u} := \frac{\vec{x}\wedge\vec{y}}{\|\vec{x}\wedge\vec{y}\|}.$$

On a alors, pour le produit mixte :

$$\big(\vec{x}\,|\,\vec{y}\,|\,\vec{z}\big) = \big\|\vec{x}\wedge\vec{y}\big\|\,\big(\vec{u}\cdot\vec{z}\big).$$

La valeur absolue $\big|\vec{u}\cdot\vec{z}\big|$ du produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{z}$ est la mesure de la hauteur du parallélépipède, relative à la base constituée par $\mathsf{Vect}\big(\vec{x},\vec{y}\big)$. Par conséquent on a un

Théorème 6.4. *Le volume du parallélépipède construit sur trois vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ dans l'espace euclidien $V_{\mathbb{R}^3}$ vaut :*

$$\mathsf{Volume} = \Big|\big(\vec{x}\,|\,\vec{y}\,|\,\vec{z}\big)\Big|.$$

On peut, si l'on veut, interpréter le signe du produit mixte en introduisant la notion de *volume signé*. En effet, on dira qu'un parallélépipède construit sur trois vecteurs linéairement indépendants $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ est *positif* ou *négatif* suivant que le trièdre est positif ou négatif, et on posera, sans valeur absolue :

$$\mathsf{Volume\,sign\acute{e}} := \big(\vec{x}\,|\,\vec{y}\,|\,\vec{z}\big).$$

Maintenant, comment calculer le produit mixte en coordonnées ? À cette fin, choisissons la base orthonormée canonique $\big\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\big\}$ que nous avons plusieurs fois utilisée. Dans cette base, soient

(x_1, x_2, x_3) les coordonnées de $\vec{x}$, soient (y_1, y_2, y_3) les coordonnées de $\vec{y}$, soient (z_1, z_2, z_3) les coordonnées de $\vec{z}$.

Nous savons que les trois coordonnées de :

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \big(x_2y_3 - y_2x_3\big)\,\vec{e}_1 + \big(x_3y_1 - y_3x_1\big)\,\vec{e}_2 + \big(x_1y_2 - y_1x_2\big)\,\vec{e}_3,$$

sont :

$$\big(x_2y_3 - y_2x_3\big), \qquad \big(x_3y_1 - y_3x_1\big), \qquad \big(x_1y_2 - y_1x_2\big).$$

Par conséquent, la valeur du produit mixte en question est :

$$\begin{aligned}\big(\vec{x}\,|\,\vec{y}\,|\,\vec{z}\big) &= \big(\vec{x} \wedge \vec{y}\big) \cdot \vec{z} \\ &= \big(x_2y_3 - y_2x_3\big)\,z_1 + \big(x_3y_1 - y_3x_1\big)\,z_2 + \big(x_1y_2 - y_1x_2\big)\,z_3,\end{aligned}$$

et si nous développons et réorganisons les termes, nous obtenons une formule finalisée et harmonieuse :

$$\big(\vec{x}\,|\,\vec{y}\,|\,\vec{z}\big) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2.$$

En effet, remarquons que les produits $x_iy_jz_k$ sont précédés du signe '$+$' ou du signe '$-$' selon que $\{i, j, k\}$ est l'image de $\{1, 2, 3\}$ par une permutation *paire* ou *impaire* :

permutations paires : $\big\{1, 2, 3\big\}$, $\big\{2, 3, 1\big\}$, $\big\{3, 1, 2\big\}$,

permutations impaires : $\big\{2, 1, 3\big\}$, $\big\{1, 3, 2\big\}$, $\big\{3, 2, 1\big\}$.

Il importe de remarquer que, d'après sa définition même, le produit mixte est indépendant de la base orthonormée choisie.

Proposition 6.5. *Le produit mixte $\big(\vec{x}\,|\,\vec{y}\,|\,\vec{z}\big)$ est linéaire en chacun des trois vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.*

Démonstration. Puisque nous savons que le produit vectoriel est bilinéaire, nous avons en particulier pour tous vecteurs $\vec{x}, \vec{x}\,', \vec{y} \in V_{\mathbb{R}^3}$ et tous scalaires $a, a' \in \mathbb{R}$:

$$\big(a\,\vec{x} + a'\,\vec{x}\,'\big) \wedge \vec{y} = a\,\big(\vec{x} \wedge \vec{y}\big) + a'\,\big(\vec{x}\,' \wedge \vec{y}\big).$$

En multipliant scalairement cela par $\vec{z}$, nous obtenons, puisque le produit scalaire $\big(\vec{v}, \vec{z}\big) \longmapsto \vec{v} \cdot \vec{z}$ est linéaire en $\vec{v}$:

$$\big(a\,\vec{x} + a'\,\vec{x}\,'\,\big|\,\vec{y}\,\big|\,\vec{z}\big) = a\,\big(\vec{x}\,|\,\vec{y}\,|\,\vec{z}\big) + a'\,\big(\vec{x}\,'\,|\,\vec{y}\,|\,\vec{z}\big).$$

Donc le produit mixte est linéaire en son premier argument $\vec{x}$.

On prouverait de même qu'il est linéaire en $\vec{y}$ et en $\vec{z}$: ceci résulte du fait que le produit scalaire et le produit vectoriel sont tous deux bilinéaires. □

Proposition 6.6. *Le produit mixte change de signe quand on échange deux vecteurs quelconques.*

Démonstration. La démonstration est immédiate si l'on considère le parallélépipède orienté construit sur le triplet ordonné $\big(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\big)$.

Si l'on échange deux vecteurs du triplet, le parallélépipède change simplement d'orientation, et son volume signé change alors de signe. □

7. Applications trilinéaires alternées

Prenons deux espaces vectoriels E et G sur le même corps $\mathbb{K}$.

Définition 7.1. Une application :

$$\begin{aligned} f\colon \quad E \times E \times E &\longrightarrow G \\ \big(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\big) &\longmapsto f\big(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\big) \end{aligned}$$

est dite *trilinéaire alternée* si :

(1) elle est linéaire en chacun des vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$;

(2) $f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \vec{0}$ dès que deux parmi trois vecteurs coïncident.

En d'autres termes, si l'on fixe l'un quelconque des trois vecteurs, l'application f est *bilinéaire alternée* en les deux autres vecteurs.

Par conséquent :

Observation 7.2. *$f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ change de signe dès que l'on échange deux vecteurs.* □

D'autre part :

Observation 7.3. *Si l'un des trois vecteurs est combinaison linéaire des deux autres, alors $f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \vec{0}$.* □

Par exemple, avec :

$$\vec{z} \,=\, a\,\vec{x} + b\,\vec{y},$$

on trouve l'annulation complète :

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \,&=\, a\,\underline{f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x})} + b\,\underline{f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{y})} \\ &=\, 0 \qquad\qquad\quad + 0. \end{aligned}$$

Il en résulte un énoncé très important dans la pratique.

Proposition 7.4. *Tout application trilinéaire alternée $f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ne change pas quand on ajoute à l'un des vecteurs une combinaison linéaire quelconque des deux autres :*

$$\boxed{f\big(\vec{x},\ \vec{y},\ \ \vec{z} + a\,\vec{x} + b\,\vec{y}\big) \,=\, f(\vec{x}, \vec{y},\ \vec{z}).}$$ □

Terminologie 7.5. Lorsque l'espace vectoriel G coïncide avec le corps $\mathbb{K}$, une application trilinéaire prend le nom de *forme trilinéaire*.

Par exemple, le produit mixte est une forme trilinéaire alternée de $V_{\mathbb{R}^3}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Nous allons maintenant étudier les applications trilinéaires alternées dans le cas où E est de dimension 3 sur le corps $\mathbb{K}$, toujours avec un $\mathbb{K}$-espace vectoriel G quelconque. Ceci nous permettra d'introduire de manière naturelle les déterminants de taille 3×3.

Théorème 7.6. *Soient E et G deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec $\dim_{\mathbb{K}} E = 3$. Pour toute base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de E et tout vecteur $\vec{k} \in G$, il existe une unique application trilinéaire $f\colon E \times E \times E \longrightarrow G$ telle que :*

$$f\big(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big) \,=\, \vec{k}.$$

Démonstration. Commençons par établir l'*unicité* de $f\colon E \times E \times E \longrightarrow G$. Décomposons dans la base :

$$\vec{x} \,=\, \sum_{i=1}^{3} x_i\,\vec{e}_i, \qquad\qquad \vec{y} \,=\, \sum_{j=1}^{3} y_j\,\vec{e}_j, \qquad\qquad \vec{z} \,=\, \sum_{k=1}^{3} z_k\,\vec{e}_k.$$

Puisque f est trilinéaire :

$$\begin{aligned} f\big(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\big) \,&=\, f\Big(\sum_i x_i\,\vec{e}_i,\ \sum_j y_j\,\vec{e}_j,\ \sum_k z_k\,\vec{e}_k\Big) \\ &=\, \sum_i \sum_j \sum_k f\big(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k\big). \end{aligned}$$

Ici, la somme est étendue à tous les indices i, j, k dans $\{1, 2, 3\}$, donc il y a au total $3^3 = 27$ termes.

Or puisqu'on sait que $f\big(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k\big) = \vec{0}$ dès que deux indices sont égaux, il ne reste à considérer que les termes de la sommation où les trois indices i, j, k sont distincts, c'est-à-dire les cas où l'ensemble $\{i, j, k\}$ est l'image de $\{1, 2, 3\}$ par une permutation.

Il y a au total $3! = 6$ termes de cette espèce. De plus, ce que nous venons de dire garantit que les $27 - 6 = 21$ autres termes sont *tous* nuls.

Assertion 7.7. *Les six $f\big(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k\big)$ restants s'expriment tous en fonction de :*

$$\vec{k} \,=\, f\big(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big).$$

Preuve. En effet, puisque f est alternée, on a :

$$\begin{aligned} f\big(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3\big) &= -\vec{k}, \\ f\big(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2\big) &= -\vec{k} \,=\, -f\big(\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2\big), \\ f\big(\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1\big) &= -\vec{k} \,=\, -f\big(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1\big). \end{aligned}$$

Ici, nous voyons les 6 permutations de $\{1,2,3\}$, ce qui finit. □

On remarquera que $f\big(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big)$ vaut $\vec{k}$ ou $-\vec{k}$ selon que la permutation :

$$\big\{1,2,3\big\} \,\longmapsto\, \big\{\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \vec{e}_3\big\}$$

est paire ou impaire.

Nous obtenons par conséquent :

$$f\big(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\big) \,=\, \Big(x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2\Big)\,\vec{k}, \tag{7.8}$$

ce qui établit l'*unicité* de l'application trilinéaire f recherchée.

Il reste à démontrer son *existence*, car ce n'est pas parce que le *Monstre du Loch Ness* est unique qu'il existe — soit dit en passant !

À cette fin, prouvons que l'application f de $E \times E \times E$ à valeurs dans G qui est définie par (7.8) est bien trilinéaire alternée.

Établissons, par exemple, que f est trilinéaire en $\vec{x}$, les deux autres vecteurs $\vec{y}$ et $\vec{z}$ restant fixes. Comme les coordonnées de $\vec{x}$ interviennent une fois et une fois seulement dans chacun des six termes de la somme (7.8), et que les coordonnées de $a\,\vec{x}$ sont $a\,x_1$, $a\,x_2$, $a\,x_3$, alors, en remplaçant dans (7.8), nous obtenons :

$$f\big(a\,\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\big) \,=\, a\,f\big(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\big).$$

Comme les coordonnesses — oh la faute, oh la monstresse ! — de $\vec{x} + \vec{x}\,'$ sont $x_1 + x_1'$, $x_2 + x_2'$, $x_3 + x_3'$, alors, en remplaçant dans (7.8), nous obtenons :

$$f\big(\vec{x} + \vec{x}\,',\, \vec{y}, \vec{z}\big) \,=\, f\big(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\big) + f\big(\vec{x}\,', \vec{y}, \vec{z}\big).$$

On prouverait de même la linéarité de f en $\vec{y}$ ou en $\vec{z}$.

Enfin, si deux des trois vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ sont égaux, alors la relation (7.8) montre immédiatement que $f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \vec{0}$.

Ceci conclut la démonstration du Théorème 7.6. □

8. Déterminants d'ordre 3

Plaçons-nous dans les hypothèses du Théorème 7.6, avec :

$$G \,:=\, \mathbb{K}.$$

Choisissons pour vecteur $\vec{k}$ le vecteur 1 du corps $\mathbb{K}$. Il existe alors une unique forme trilinéaire alternée f telle que $f\big(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big) = 1$.

Terminologie 8.1. Une telle forme f se nomme *déterminant des vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ par rapport à la base $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big\}$*, et se note :

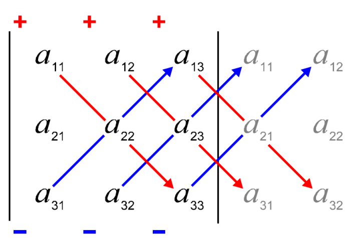
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

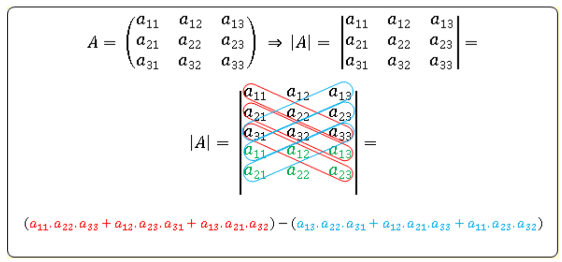
D'après (7.8), ce déterminant vaut :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2.$$

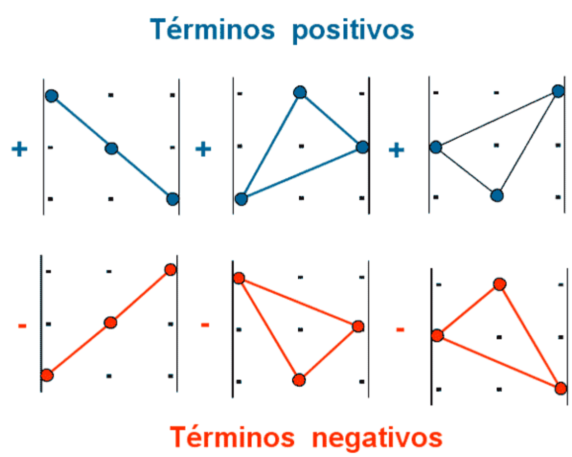
On dit que l'on a *développé* le déterminant selon la *règle de Sarrus :* les trois produits précédés du signe '$+$' contiennent soit les termes de la diagonale principale, soit deux termes d'une parallèle à cette diagonale. Pour les trois produits précédés du signe '$-$', il y a une règle analogue en remplaçant la diagonale principale par l'autre diagonale.

Donnons deux premiers diagrammes colorés :

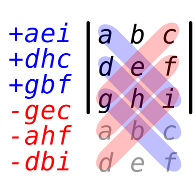


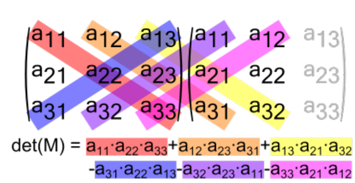


En fait, l'idée principale concernant les signes est illustrée comme suit :



Allez ! Encore deux autres illustrations bien flashys !





Soit une matrice carrée d'ordre 3 :

$$M := \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}.$$

Définition 8.2. On appelle *déterminant* de M le scalaire :

$$\begin{aligned}\det M \ :=& \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \\ :=& \ ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - ab''c' - a'bc''.\end{aligned}$$

De cette définition, il résulte immédiatement que le déterminant de la matrice transposée ${}^{\mathtt{t}}M$ est le même que le déterminant de M :

$$\det\left({}^{\mathtt{t}}M\right) = \det M.$$

Par conséquent, toute propriété de $\det M$ valable pour les lignes est aussi valable pour les colonnes.

Formulons précisément ces propriétés qui découlent de celles d'une application trilinéaire alternée.

Proposition 8.3. **(1)** *Avec des déterminants* 3×3, *on peut factoriser un facteur commun aux éléments d'une rangée :*

$$\begin{vmatrix} \lambda a & a' & a'' \\ \lambda b & b' & b'' \\ \lambda c & c' & c'' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

(2) *Si les éléments d'une rangée sont des sommes, on peut mettre le déterminant sous la forme d'une somme de déterminants :*

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a' & a'' \\ b_1 + b_2 & b' & b'' \\ c_1 + c_2 & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a' & a'' \\ b_1 & b' & b'' \\ c_1 & c' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a' & a'' \\ b_2 & b' & b'' \\ c_2 & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

(3) *Quand on échange deux lignes (ou deux colonnes), le déterminant change de signe :*

$$\begin{vmatrix} b & b' & b'' \\ a & a' & a'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

(4) *Si une ligne (ou une colonne) est combinaison linéaire des autres, le déterminant est nul :*

$$\begin{vmatrix} a & a' & \lambda a + \mu a' \\ b & b' & \lambda b + \mu b' \\ c & c' & \lambda c + \mu c' \end{vmatrix} = 0.$$

□

Maintenant, dans la formule de la Définition 8.2, portons notre attention sur les éléments a', b', c' de la seconde colonne, par exemple. Groupons les termes contenant a', puis ceux contenant b', et enfin ceux contenant c', pour obtenir :

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a'\left(b''c - bc''\right) + b'\left(ac'' - a''c\right) + c'\left(a''b - ab''\right).$$

On peut alors écrire cela :

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = -a' \begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + b' \begin{vmatrix} a & a'' \\ c & c'' \end{vmatrix} - c' \begin{vmatrix} a & a'' \\ b & b'' \end{vmatrix}.$$

On dit que l'on a développé le déterminant selon les termes de sa seconde colonne.

Les coefficients de a', de b', de c' sont nommés les *cofacteurs* de ces éléments. On a en effet reconnu trois déterminants 2×2. Le *cofacteur* d'un élément est un déterminant de taille 2×2 affecté d'un certain signe :

(a) le déterminant est obtenu en supprimant la ligne et la colonne de l'élément considéré ;

(b) le signe du cofacteur est '$+$' ou '$-$' selon que la somme des rangs de la ligne et de la colonne de l'élément considéré est paire ou impaire.

On peut obtenir des développements du déterminant, analogues au précédent, selon les termes d'une colonne quelconque, ou d'une ligne quelconque.

9. Exercices

Exercice 1. EE

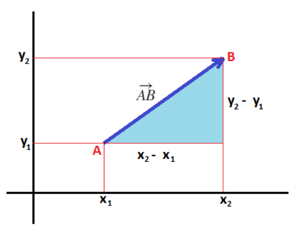
Exercice 2. EE

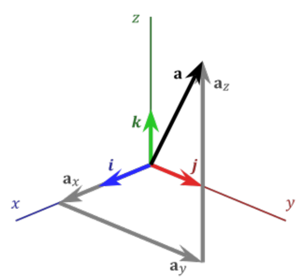
Espaces vectoriels

François DE MARÇAY
Département de Mathématique d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

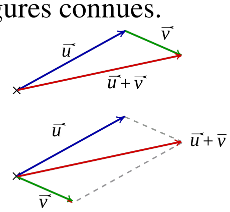
1. Introduction

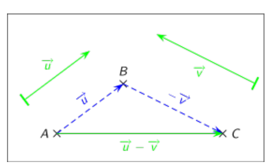
Dans l'enseignement secondaire, on parle de vecteurs dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de coordonnées (x, y), et aussi dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni de coordonnées (x, y, z).

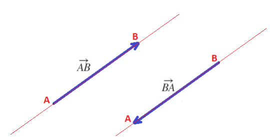


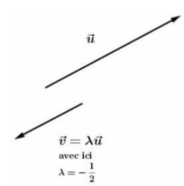


On peut aussi parler abstraitement des vecteurs, sans référence à aucun système de coordonnées. Sommes, soustractions, multiplications par un scalaire peuvent alors être représentées par des figures connues.



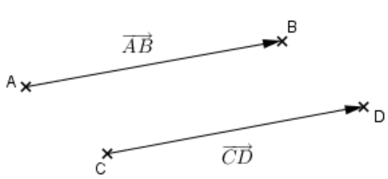


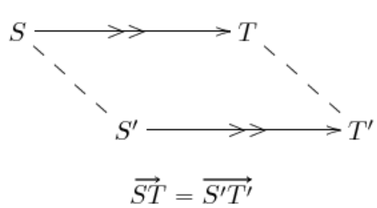


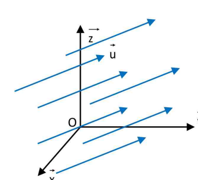


Une notion fondamentale est alors la relation d'*équipollence* entre paires de vecteurs, qui s'illustre d'une manière claire dans le cadre de la géométrie plane euclidienne. En premier lieu, on introduit la notion de *vecteur lié* ou *segment orienté*, caractérisé par :

- une longueur ou norme ;
- une direction ou support,
- un sens ou orientation ;
- une origine ou point d'application.







En comparant des vecteurs liés entre eux, on constate que certains d'entre eux sont « les mêmes », à l'origine près : ils sont parallèles, de même longueur et de même direction. On dit alors que deux vecteurs liés sont *équipollents* s'ils ont même direction, même sens, et même longueur.

L'équipollence est ainsi une *relation d'équivalence* dont les classes peuvent être représentées comme des vecteurs dont l'origine n'est pas fixe : ce sont donc des vecteurs libres, par opposition aux vecteurs liés, dont l'origine est fixe.

La notion de vecteur lié est une notion de géométrie euclidienne, qui n'a de sens que dans un espace affine euclidien. Les vecteurs libres obtenus appartiennent ainsi à un espace vectoriel euclidien.

Plus précisément, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, la classe d'un bipoint (A, B) est un vecteur libre dit vecteur généralisé et noté :

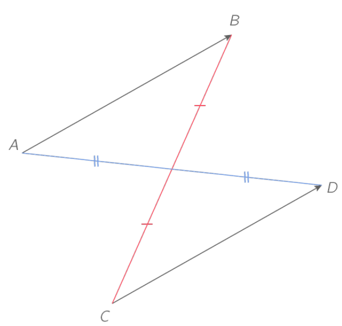
$$\overrightarrow{AB}$$

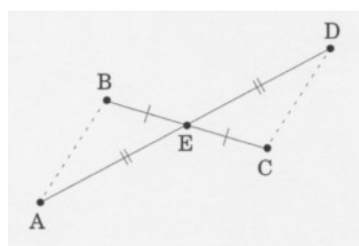
On sait alors démontrer que si deux vecteurs sont équipollents :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD},$$

le quadrilatère $ABCD$ est un *parallélogramme*, et on démontre ensuite que cela implique l'équipollence de l'autre paire de côtés opposés :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$





Il est possible de généraliser les propriétés « évidentes » de l'espace euclidien en une définition qui s'applique à un ensemble quelconque non vide, grâce une définition axiomatique abstraite.

Soit donc E un ensemble non vide. On considère dans $E \times E$ une relation d'équivalence notée $\sim$, qui doit satisfaire deux conditions postulées.

Axiome 1. Pour tous points A, B, C dans E, il existe un unique point D dans E tel que le vecteur issu de (C, D) soit égal à celui issu de (A, B) :

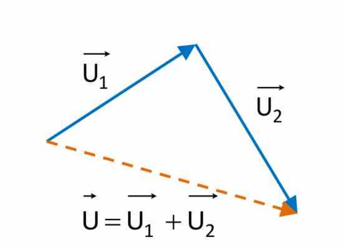
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

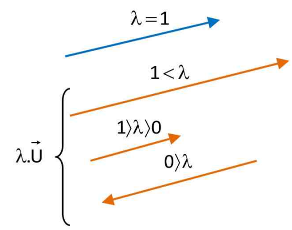
Axiome 1. Pour tous A, B, C dans E, si le vecteur issu de (A, B) est égal à celui issu de (C, D), alors les vecteurs issus des bipoints obtenus en échangeant les extrémités finales sont encore égaux entre eux :

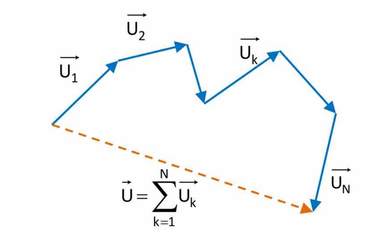
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \qquad \Longrightarrow \qquad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

Cette dernière formule est parfois appelée *formule du croisement des équipollences*.

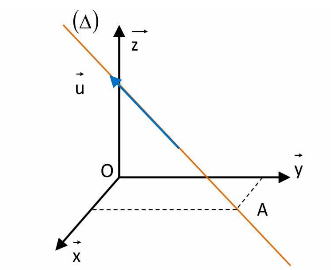
Ensuite, on démontre que les vecteurs sont satisfont les règles usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire. L'espace des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ainsi que l'espace des vecteurs-bipoints de E, constitue un *espace de vecteurs*, un type d'espace que nous allons définir axiomatiquement dans ce chapitre en introduisant le concept mathématique d'*espace vectoriel*.







En physique, on introduit la notion de *vecteur glissant*. Un vecteur glissant est défini par sa droite d'action (support), son sens et sa valeur, son point d'application pouvant être quelconque sur la droite d'action.



Par exemple, une force appliquée à un solide indéformable peut glisser sur sa droite d'action sans modifier l'effet qu'elle produit. On dira que la force est représentée par un vecteur glissant.

En contraste, un vecteur lié est défini par sa droite d'action son sens, sa valeur *et* son point d'application.

Par exemle, le poids d'un corps $P \subset \mathbb{R}^3$ dans l'espace est un vecteur lié. C'est un vecteur qui a un point d'application bien défini qui est le barycentre ou le centre de gravité du corps.

On peut remplacer un vecteur libre par un vecteur équipollent quelconque, dans tout l'espace.

On peut glisser un vecteur glissant le long de son support.

Mais un vecteur lié ne peut pas être remplacé par un autre vecteur.

En résumé, on distingue les vecteurs liés, glissants et libres comme suit :

- Un vecteur lié a un point d'application bien défini.
- Un vecteur glissant a un point d'application variant sur une droite qui est son support.
- Un vecteur libre a un point d'application quelconque.

L'histoire de l'algèbre linéaire commence avec Al-Khawarizmi qui a traduit des textes de mathématiques indiens, réinterprété les travaux de l'école grecque et qui est la source du développement conscient de l'algèbre qui s'étendra pendant des siècles après lui. Elle a été reprise par René Descartes qui pose des problèmes de géométrie, comme la détermination de l'intersection de deux droites, en termes d'équation linéaire, établissant dès lors un pont entre deux branches mathématiques jusqu'alors séparées : l'algèbre et la géométrie. S'il ne définit pas la notion de base de l'algèbre linéaire qu'est celle d'espace vectoriel, il l'utilise déjà avec succès, et cette utilisation naturelle des aspects linéaires des équations manipulées demeurera utilisée de manière *ad hoc*, fondée essentiellement sur les idées géométriques sous-jacentes. Après cette découverte, les progrès en algèbre linéaire vont se limiter à des études ponctuelles comme la définition et l'analyse des premières propriétés des déterminants par Jean d'Alembert.

Ce n'est qu'au XIX$^{\text{ième}}$ siècle que l'algèbre linéaire devient une branche des mathématiques à part entière. Carl Friedrich Gauss trouve une méthode générique pour la résolution des systèmes d'équations linéaires et Camille Jordan résout définitivement le problème de la réduction des endomorphismes. En 1843, William Rowan Hamilton (inventeur du terme '*vector*') découvre les quaternions (extension de degré 4 du corps des nombres réels). En 1844, Hermann Grassmann publie son traité *Die lineale Ausdehnungslehre*, *La théorie de l'extension linéaire*, qui est la première tentative de formalisation générale de la notion d'espace vectoriel. Si son œuvre resta grandement inaperçue, elle contenait l'essentiel des idées modernes de l'algèbre linéaire, et cette étape fondamentale dans le développement de l'algèbre linéaire est reconnue comme telle tant par Hamilton que par Giuseppe Peano, qui axiomatise entièrement la théorie en 1888. Les espaces vectoriels deviennent alors une structure générale omniprésente dans presque tous les domaines mathématiques, notamment en analyse (espaces de fonctions).

Sous leur forme la plus simple, les applications linéaires dans les espaces vectoriels représentent intuitivement les déplacements dans les espaces géométriques élémentaires comme la droite, le plan ou notre espace physique. Les bases de cette théorie remplacent maintenant la représentation construite par Euclide au III$^{\text{ième}}$ siècle av. J.-C. La construction moderne permet de généraliser la notion d'espace à des dimensions quelconques.

L'algèbre linéaire permet de résoudre tout un ensemble d'équations dites linéaires utilisées non seulement en mathématiques ou en mécanique, mais aussi dans de nombreuses autres branches comme les sciences naturelles ou les sciences sociales.

Les espaces vectoriels forment aussi un outil fondamental pour les sciences de l'ingénieur et servent de base à de nombreux domaines dans la recherche opérationnelle.

Enfin, c'est un outil utilisé en mathématiques dans des domaines aussi divers que la théorie des groupes, des anneaux ou des corps, l'analyse fonctionnelle, la géométrie différentielle ou la théorie des nombres.

L'algèbre linéaire moderne s'intéresse beaucoup aux espaces de dimension arbitraire, éventuellement infinie. La plupart des résultats obtenus en dimension 2 ou 3 peuvent être étendus aux dimensions finies supérieures. Les vecteurs étant des listes ordonnées à n composantes, on peut manipuler ces données efficacement dans cet environnement. Par exemple en économie, on peut créer et utiliser des vecteurs à huit dimensions pour représenter le produit national brut de huit pays.

Les espaces vectoriels forment le support et le fondement de l'algèbre linéaire. Ils sont aussi présents dans de nombreux domaines distincts. S'il n'est pas possible d'indiquer ici tous les cas d'utilisation, on peut tout de même citer pour les principales structures objet de théories, des exemples significatifs. Leurs rôles dans de vastes théories ne traitant pas d'une structure particulière, comme celles des nombres algébriques ou de Galois peuvent aussi être évoqués.

Les espaces vectoriels utilisés sont d'une grande diversité. On y trouve les classiques espaces vectoriels de dimension 2 ou 3 sur les nombres réels, cependant la dimension peut être quelconque, même infinie. Les nombres complexes sont aussi très utilisés, ainsi que les rationnels. Il n'est pas rare qu'une partie des nombres réels ou complexes soit considérés comme un espace vectoriel rationnel. Le corps de base peut aussi contenir un nombre fini d'éléments, définissant parfois un espace vectoriel fini.

Les propriétés géométriques de la structure permettent la démonstration de nombreux théorèmes. Elles ne se limitent pas aux cas où l'espace est réel, même dans le cas de corps plus insolites comme les corps finis ou les extensions finies des rationnels, les propriétés géométriques s'avèrent parfois essentielles.

En algèbre, on rencontre des êtres mathématiques qui semblent très éloignés des vecteurs, par exemple l'espace $\mathbb{R}[x]$ des polynômes :

$$P(x) \,=\, a_0\,x^d + a_1\,x^{d-1} + \cdots + a_{d-1}\,x + a_d \qquad\qquad (a_0 \neq 0),$$

à coefficients réels $a_i \in \mathbb{R}$. Toutefois, cet espace $\mathbb{R}[x]$ jouit des mêmes propriétés de stabilité par addition et multiplication par des scalaires quelconques $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\Big(P(x) \,\in\, \mathbb{R}[x] \quad \text{et} \quad Q(x) \,\in\, \mathbb{R}[x]\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda\,P(x) + \mu\,\mathbb{Q}(x) \,\in\, \mathbb{R}[x].$$

Dans ce premier chapitre du Cours d'Algèbre Linéaire, nous nous proposons donc d'étudier d'une manière systématique tout espace abstrait vérifiant les axiomes d'*espace vectoriel*, en un sens que nous allons préciser.

2. Structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et premières propriétés

Nous travaillerons la plupart du temps avec les nombres réels $\mathbb{R}$. De temps à autre, nous considérerons plus généralement un *corps commutatif* quelconque $\mathbb{K}$, mais nous garderons en tête que seulement deux corps concrets nous intéressent réellement :

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \qquad \text{ou} \qquad \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

En mathématiques, la notion de *corps commutatif* est une des structures algébriques les plus fondamentales de l'algèbre générale. Il s'agit d'un ensemble muni de deux opérations binaires rendant possibles les additions, soustractions, multiplications et divisions. Plus précisément, un corps commutatif est un anneau commutatif dans lequel l'ensemble des éléments non nuls est un groupe commutatif pour la multiplication. Si cela est nécessaire, rappelons la formulation mathématique rigoureuse.

Définition 2.1. Un *corps commutatif* est un ensemble $\mathbb{K}$ muni de deux lois internes, notées en général $+$ et $\times$, vérifiant les conditions suivantes.

(1) $(\mathbb{K}, +)$ forme un groupe abélien — on dit aussi groupe commutatif —, dont l'élément neutre est noté 0.

(2) $(\mathbb{K}\backslash 0, \times)$ forme un groupe abélien multiplicatif, dont l'élément neutre est noté 1.

(3) La multiplication est *distributive*, à gauche comme à droite, pour l'addition c'est-à-dire que :

$$\forall\,(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}^3 \qquad \lambda\times(\mu+\nu) = \lambda\times\mu+\lambda\times\nu \qquad \text{et} \qquad (\lambda+\mu)\times\nu = \lambda\times\nu+\mu\times\nu.$$

On parle alors du *corps commutatif* $(\mathbb{K}, +, \times)$.

En fait, la multiplication $\lambda \cdot \nu$ est souvent notée avec un simple $\cdot$, voire même $\lambda\,\nu$ sans aucun signe.

Les trois exemples canoniques de corps commutatifs élémentaires sont :

- l'ensemble des nombres rationnels $(\mathbb{Q}, +, \times)$;
- l'ensemble des nombres réels $(\mathbb{R}, +, \times)$;
- l'ensemble des complexes $(\mathbb{C}, +, \times)$.

L'Appendice **9** à la fin de ce chapitre expose des rappels de base sur les nombres complexes.

Définition 2.2. Un *sous-corps* d'un corps commutatif $\mathbb{K}$ est une partie $\mathbb{L} \subset K$, stable par $+$ et $\times$, telle que $\mathbb{L}$ munie des lois induites soit un corps.

Évidemment, on a les inclusions de sous-corps :

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Nous pouvons enfin entrer dans le vif du sujet.

Définition 2.3. On dit qu'un ensemble E, dont les éléments seront appelés des *vecteurs*, est un *espace vectoriel* sur $\mathbb{R}$, ou un $\mathbb{R}$-*espace vectoriel*, s'il satisfait les deux axiomes suivants.

Axiome I. E est un groupe commutatif pour une loi additive notée $+$, c'est-à-dire que pour tous vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) &= (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}, & \qquad \vec{x} + \vec{y} &= \vec{y} + \vec{x}, \\ \vec{x} + (-\,\vec{x}) &= \vec{0}, & \qquad \vec{x} + \vec{0} &= \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}, \end{aligned}$$

où $-\,\vec{x}$ est l'opposé de $\vec{x}$ pour l'addition, et où $\vec{0} \in E$ est le vecteur nul.

Axiome II. E est muni d'une loi de composition externe sur $\mathbb{R}$, notée :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, \vec{x}) &\longmapsto \lambda\,\vec{x}, \end{aligned}$$

satisfaisant les propriétés suivantes, pour tous vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in E$, et tous nombres réels $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

(1) $\lambda \big(\vec{x} + \vec{y}\big) = \lambda \, \vec{x} + \lambda \, \vec{y}$;

(2) $\big(\lambda + \mu\big) \, \vec{x} = \lambda \, \vec{x} + \mu \, \vec{y}$;

(3) $\lambda \big(\mu \, \vec{x}\big) = (\lambda \, \mu) \, \vec{x}$;

(4) $1 \, \vec{x} = \vec{x}$.

En particulier, un espace vectoriel E est toujours *non vide :*

$$E \neq \emptyset,$$

puisqu'il contient toujours au moins le vecteur nul $\vec{0} \in E$!

Il importe d'exprimer que la caractéristique fondamentale d'un espace vectoriel est la stabilité de ses éléments par combinaisons linéaires quelconques :

$$\forall \, \vec{x} \in E, \;\; \forall \, \vec{y} \in E, \;\; \forall \, \lambda \in \mathbb{R}, \;\; \forall \, \mu \in \mathbb{R} \qquad \lambda \, \vec{x} + \mu \, \vec{y} \, \in \, E.$$

Pour les différencier des *vecteurs* $\vec{x} \in E$, les éléments $\lambda \in \mathbb{R}$ seront nommés des *scalaires*. Cette définition se généralise en remplaçant $\mathbb{R}$ par n'importe quel corps commutatif $\mathbb{K}$.

En se basant sur ces axiomes, on développe une théorie que l'on nomme *Algèbre linéaire*, qui est une généralisation, à des espaces abstraits vérifiant ces axiomes, des propriétés que l'on rencontre en géométrie euclidienne.

Assertion 2.4. *Pour tout vecteur $\vec{x} \in E$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, les quatre propriétés suivantes sont satisfaites.*

(1) $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

(2) $\lambda \, \vec{0} = \vec{0}$.

(3) $\lambda \, \vec{x} = \vec{0} \Longleftrightarrow \big(\lambda = 0 \; ou \; \vec{x} = \vec{0}\big)$.

(4) $(-\lambda) \, \vec{x} = -(\lambda \, x) = \lambda \, (-\vec{x})$.

Preuve. **(1)** En effet :

$$\lambda \, \vec{x} \, = \, \big(\lambda + 0\big) \, \vec{x} \, = \, \lambda \, \vec{x} + 0 \, \vec{x},$$

d'où par soustraction $\vec{0} = 0 \, \vec{x}$.

(2) En effet :

$$\lambda \, \vec{x} \, = \, \lambda \, \big(\vec{x} + \vec{0}\big) \, = \, \lambda \, \vec{x} + \lambda \, \vec{0},$$

d'où par soustraction $\vec{0} = \lambda \, \vec{0}$.

(3) Il reste à voir l'implication '$\Longrightarrow$'. En partant de $\vec{0} = \lambda \, \vec{x}$, où on peut supposer $\lambda \neq 0$ grâce à **(1)**, et en multipliant par λ^{-1}, on obtient bien :

$$\vec{0} \, = \, \lambda^{-1} \, \vec{0} \, = \, \lambda^{-1} \big(\lambda \, \vec{x}\big) \, = \, \big(\lambda^{-1} \lambda\big) \, \vec{x} \, = \, \vec{x}.$$

(4) En effet, d'après **(1)** :

$$0 \, = \, \lambda + (-\lambda) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} \vec{0} \, &= \, \big[\lambda + (-\lambda)\big] \, \vec{x} \\ &= \, \lambda \, \vec{x} + (-\lambda) \, \vec{x}, \end{aligned}$$

ce qui donne la première égalité $-\lambda \, \vec{x} = (-\lambda) \, \vec{x}$. Avec $\lambda = 1$, on en déduit en particulier :

$$(-1) \, \vec{x} \, = \, - \big(1 \, \vec{x}\big) \, = \, - \, \vec{x}.$$

Alors la déuxième égalité va s'en déduire *via :*

$$\lambda \, \big(- \vec{x}\big) \, = \, \lambda \, \big[(-1) \, \vec{x}\big] \, = \, \big(\lambda \, (-1)\big) \, \vec{x} \, = \, (-\lambda) \, \vec{x}. \qquad \square$$

Exemple 2.5. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque (on peut s'imaginer qu'il s'agit de $\mathbb{R}$). Munissons l'ensemble $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ des lois suivantes :

$$\begin{aligned} (a,b) + (a',b') &= \big(a+a',\, b+b'\big), \\ \lambda\,(a,b) &= \big(\lambda\, a,\, \lambda\, b\big). \end{aligned}$$

La première loi définit sur $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ une structure de groupe commutatif : l'associativité et la commutativité résultent de l'associativité et de la commutativité de l'addition dans $\mathbb{K}$; l'élément neutre est $(0,0)$; l'opposé de (a,b) est $(-a,-b)$.

La seconde loi vérifie les 4 Axiomes II de la Définition 2.3.

$$\begin{aligned}
&\textbf{(1)} & \lambda\big[(a,b)+(a',b')\big] &= \lambda\big(a+a',\, b+b'\big) = \big(\lambda\, a + \lambda\, a',\ \lambda\, b + \lambda\, b'\big) \\
& & &= \big(\lambda\, a,\, \lambda\, b\big) + \big(\lambda\, a',\, \lambda\, b'\big) = \lambda\,(a,b) + \lambda\,(a',b'), \\
&\textbf{(2)} & \big(\lambda+\mu\big)\,(a,b) &= \big[(\lambda+\mu)\,a,\, (\lambda+\mu)\,b\big] = \big(\lambda\, a + \mu\, a,\, \lambda\, b + \mu\, b\big) \\
& & &= \big(\lambda\, a,\, \lambda\, b\big) + \big(\mu\, a,\, \mu\, b\big) = \lambda\,(a,b) + \mu\,(a,b), \\
&\textbf{(3)} & \lambda\big[\mu\,(a,b)\big] &= \lambda\big(\mu\, a,\, \mu\, b\big) = \big(\lambda\mu\, a,\, \lambda\mu\, b\big) = (\lambda\mu)\,(a,b), \\
&\textbf{(4)} & 1\,(a,b) &= \big(1\, a,\, 1\, b\big) = (a,b).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ constitue un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 2.6. Plus généralement, considérons l'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets ordonnés :

$$\vec{a} := \big(a_1, a_2, \dots, a_n\big),$$

de nombres $a_i \in \mathbb{K}$. Si on munit $\mathbb{K}^n$ des lois suivantes :

$$\begin{aligned} \big(a_1, a_2, \dots, a_n\big) + \big(b_1, b_2, \dots, b_n\big) &= \big(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n\big), \\ \lambda\big(a_1, a_2, \dots, a_n\big) &= \big(\lambda\, a_1,\, \lambda\, a_2,\, \dots, \lambda\, a_n\big), \end{aligned}$$

on vérifie, comme précédemment, que les Axiomes I et II de la Définition 2.3 sont satisfaits. De la sorte, $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.

Observons que dans le cas $n=1$, *tout corps commutatif* $\mathbb{K}$ *est un espace vectoriel sur lui-même*. De plus, pour $n=1$, les scalaires sont *en même temps* des vecteurs.

Ensuite, si $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$, alors tout espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{K}'$, lorsqu'on prend pour loi de composition externe la restriction à $\mathbb{K}' \times \mathbb{E}$ de la loi définie sur $\mathbb{K} \times E$.

C'est ainsi qu'un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, lequel est à son tour un espace vectoriel sur les corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, au vu des inclusions de corps :

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}.$$

3. Sous-espaces vectoriels

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, constitué des vecteurs (a,b,c) comme ci-dessus, l'ensemble des vecteurs $(a,b,0)$ dont la troisième coordonnées est nulle est encore stable par les Axiomes I et II. Plus généralement, énonçons une

Définition 3.1. On appelle *sous-espace vectoriel*, ou simplement *sous-espace*, d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, tout sous-ensemble $F \subset E$ qui est à lui tout seul un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

En particulier, un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E est toujours *non vide*, puisqu'il contient toujours le vecteur nul $\vec{0} \in F$.

En d'autres termes, une partie F d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est dite sous-espace lorsque les deux conditions suivantes sont réalisées :

(1) F est un sous-groupe de E pour l'addition ;

(2) la restriction à $\mathbb{R} \times F$ de la loi externe, définie sur $\mathbb{R} \times E$, est une application à valeurs dans F.

Lemme 3.2. *Pour que F soit un sous-espace vectoriel de E, il faut et il suffit que :*

$$\forall\, \lambda,\, \mu \,\in\, \mathbb{R} \qquad \big(\vec{x} \in F \quad et \quad \vec{y} \in F\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda\, \vec{x} + \mu\, \vec{y} \,\in\, F.$$

Preuve. La condition est évidemment nécessaire. Prouvons qu'elle suffit, c'est-à-dire qu'une telle partie $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel. En prenant d'abord $\lambda = 1$ et $\mu = -1$, il vient :

$$\big(\vec{x} \in F \quad \text{et} \quad \vec{y} \in F\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{x} - \vec{y} \,\in\, F,$$

ce qui montre que F est un sous-groupe, pour l'addition, de E.

Ensuite, en prenant $\mu = 0$, il vient :

$$\big(\lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \vec{x} \in F\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda\, \vec{x} \,\in\, F.$$

Par conséquent, la loi externe $(\lambda, \vec{x}) \longmapsto \lambda\, \vec{x}$ applique $\mathbb{R} \times F$ dans F, ce qui conclut. □

Exemples 3.3. **(1)** Le singleton $\{\vec{0}\}$ contenant comme unique élément l'élément neutre de l'addition des vecteurs de E est un sous-espace vectoriel de E.

(2) Soit $\vec{x} \in E$. L'ensemble F des vecteurs $\lambda\, \vec{x}$ quand λ parcourt $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E. Il se réduit à $\{\vec{0}\}$ quand $\vec{x} = \vec{0}$.

(3) Soient deux vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in E$. L'ensemble des vecteurs $\lambda\, \vec{x} + \mu\, \vec{y}$ quand λ et μ parcourent $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E. Dans un instant, cet exemple va être généralisé aux combinaisons linéaires d'une famille quelconque finie de vecteurs.

(4) Dans l'espace vectoriel V des vecteurs de la géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^3$, toute partie V_D consistant en les vecteurs de même direction qu'une droite D donnée est un sous-espace vectoriel de V. Toute partie V_P consistant en les vecteurs parallèles à un plan donné est un sous-espace vectoriel de V.

Lemme 3.4. *L'intersection $F_1 \cap F_2$ de deux sous-espaces $F_1 \subset E$ et $F_2 \subset E$ est encore un sous-espace de E.*

Preuve. En effet, si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ appartiennent à $F_1 \cap F_2$, alors ils appartiennent à la fois à F_1 et à F_2. Par suite, quels que soient les scalaires λ et μ, l'élément $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$ appartient à la fois à F_1 et à F_2, donc à $F_1 \cap F_2$. □

En géométrie euclidienne, si P et Q sont deux plans sécants le long d'une droite D, alors l'intersection des sous-espaces V_P et V_Q est le sous-espace V_D.

4. Combinaisons linéaires de vecteurs

Une partie finie d'un espace vectoriel E se nomme *famille finie de vecteurs*.

Définition 4.1. Pour toute famille finie $\big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\big\}$ d'un nombre $p \geqslant 1$ de vecteurs de E, on appelle *combinaison linéaire* de ces vecteurs tout vecteur $\vec{x} \in E$ qui s'écrit sous la forme :

$$\vec{x} \,=\, \lambda_1\, \vec{x}_1 + \lambda_2\, \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_p\, \vec{x}_p,$$

avec des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \,\in\, \mathbb{R}$ quelconques. Ces scalaires sont nommés *coefficients* de la combinaison linéaire.

Exemples 4.2. **(1)** Le vecteur nul $\vec{0}$ est combinaison linéaire de toute famille finie de vecteurs, les coefficients étant tous nuls.

(2) Tout vecteur $\vec{x}$ est combinaison linéaire de toute famille contenant $\vec{x}$, le coefficient de $\vec{x}$ étant égal à 1, tous les autres égaux à 0.

(3) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, soient :

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &:= \big(1,0,0\big),\\ \vec{e}_2 &:= \big(0,1,0\big),\\ \vec{e}_3 &:= \big(0,0,1\big).\end{aligned}$$

Tout vecteur (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de la famille $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big\}$, car :

$$\begin{aligned}\big(a,b,c\big) &= \big(a,0,0\big) + \big(0,b,0\big) + \big(0,0,c\big)\\ &= a\,\vec{e}_1 + b\,\vec{e}_2 + c\,\vec{e}_3.\end{aligned}$$

Venons-en maintenant au concept de sous-espace engendré par une famille de vecteurs.

Théorème 4.3. *Soit $\big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\big\}$ une famille de $p \geqslant 1$ vecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. L'ensemble F des combinaisons linéaires de cette famille :*

$$F := \Big\{\lambda_1\,\vec{x}_1 + \lambda_2\,\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_p\,\vec{x}_p \colon\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}\,\textit{quelconques}\Big\},$$

est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de E.

De plus c'est le plus petit sous-espace contenant la famille donnée.

Démonstration. Partons de deux éléments quelconques de F :

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \lambda_1\,\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_p\,\vec{x}_p,\\ \vec{y} &= \mu_1\,\vec{x}_1 + \cdots + \mu_p\,\vec{x}_p.\end{aligned}$$

Quels que soient les scalaires γ et δ, on a :

$$\gamma\,\vec{x} + \delta\,\vec{y} = \big(\gamma\,\lambda_1 + \delta\,\mu_1\big)\,\vec{x}_1 + \cdots + \big(\gamma\,\lambda_p + \delta\,\mu_p\big)\,\vec{x}_p.$$

On obtient une combinaison linéaire de la famille proposée, donc un élément de F, qui est par conséquent un sous-espace vectoriel de E.

Ensuite, F contient clairement chacun des vecteurs $\vec{x}_i$ de la famille : pour chaque rang i, prendre $a_i = 1$, et tous les autres coefficients nuls.

D'autre part, tout sous-espace contenant la famille $\big\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\big\}$ doit contenir $\lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_p\vec{x}_p$ quels que soient les coefficients, et donc doit contenir aussi la somme $\lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_p\vec{x}_p$. Un tel sous-espace coïncide donc avec F qui est, par conséquent, le plus petit sous-espace contenant $\big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\big\}$. □

Terminologie 4.4. Le sous-espace vectoriel $F \subset E$ est dit *engendré* par la famille $\big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\big\}$, et on note :

$$F = \mathsf{Vect}\,\big(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\big).$$

Inversement, $\big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\big\}$ est dite une *famille de générateurs* de F.

5. Trois opérations sur Vect $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$

Dans le chapitre consacré à la méthode du pivot de Gauss, nous avons insisté sur l'existence de trois (seulement) opérations fondamentales qui permettaient de résoudre des systèmes linéaires arbitraires. Ces trois opérations ont des analogues naturels lorsqu'on travaille avec des sous-espaces vectoriels engendrés par une famille de vecteurs.

Soit donc E un espace vectoriel, soit un nombre $p \geqslant 1$ de vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p \in E$, et soit l'espace vectoriel qu'ils engendrent, grâce au Théorème 4.3 vu à l'instant, par combinaisons linéaires arbitraires :

$$\begin{aligned} F &:= \mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\big) \\ &= \Big\{\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_p \vec{v}_p \colon \; \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \, \text{quelconques}\Big\}. \end{aligned}$$

L'idée, c'est qu'on peut changer les vecteurs-générateurs sans changer le sous-espace F qu'ils engendre.

Par exemple avec $p = 1$ et avec un constante non nulle $c \in \mathbb{R}^*$ fixée, nous affirmons que :

$$\mathsf{Vect}\big(\vec{x}_1\big) \;=\; \mathsf{Vect}\big(c\,\vec{x}_1\big).$$

En effet, on a bien :

$$\big\{\lambda_1 \vec{v}_1 \in E \colon \; \lambda_1 \in \mathbb{R}\big\} \;\overset{?}{=}\; \big\{\mu_1 \, c \, \vec{v}_1 \in E \colon \; \mu_1 \in \mathbb{R}\big\},$$

car après identification :

$$\lambda_1 \;=\; \mu_1 \, c \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad \tfrac{1}{c}\,\lambda_1 \;=\; \mu_1,$$

on voit bien que se donner un scalaire quelconque $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ est équivalent à se donner un scalaire quelconque μ_1, modulo le facteur constant c (ou $\frac{1}{c}$).

Deuxième exemple : avec $p = 2$, nous affirmons que :

$$\mathsf{Vect}\big(\vec{x}_1, \vec{x}_2\big) \;=\; \mathsf{Vect}\big(\vec{x}_2, \vec{x}_1\big).$$

En effet, l'égalité en question :

$$\big\{\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 \in E \colon \; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\big\} \;\overset{?}{=}\; \big\{\mu_1 \vec{v}_2 + \mu_2 \vec{v}_1 \in E \colon \; \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}\big\},$$

est bien satisfaite grâce à la correspondance évidente suivante entre scalaires queconques :

$$\lambda_1 \;=\; \mu_2 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \lambda_2 \;=\; \mu_2.$$

Troisième exemple, encore avec $p = 2$: nous affirmons que, pour une constante réelle fixée quelconque $e \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1, \vec{v}_2\big) \;=\; \mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1, \; \vec{v}_2 + e\,\vec{v}_1\big).$$

En effet, l'égalité en question :

$$\begin{aligned} \big\{\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 \in E \colon \; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\big\} \;&\overset{?}{=}\; \big\{\mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \big(\vec{v}_2 + e\,\vec{v}_1\big) \in E \colon \; \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}\big\} \\ &=\; \big\{\big(\mu_1 + e\,\mu_2\big)\,\vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 \in E \colon \; \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}\big\}, \end{aligned}$$

est satisfaite grâce à l'identification suivante entre scalaires arbitraires :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_1 + e\,\mu_2, \\ \lambda_2 &= \mu_2 \end{aligned} \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad \begin{aligned} \lambda_1 - e\,\lambda_2 &= \mu_1, \\ \lambda_2 &= \mu_2, \end{aligned}$$

où on constate agréablement que les $\lambda_\bullet$ arbitraires s'expriment en fonction des $\mu_\bullet$, et inversement, le tout par des formules simples.

Ces trois exemples simples illustrent trois opérations fondamentales que l'ont peut faire sur un sous-espace vectoriel *général* engendré par un nombre fini de vecteurs.

Théorème 5.1. *Dans un espace vectoriel E, les trois opérations suivantes laissent* inchangé *le sous-espace vectoriel $F = \mathsf{Vect}\big(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\big)$ engendré par un nombre $p \geqslant 1$ de vecteurs $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$.*

(Op1) *Remplacer un vecteur $\vec{v}_i \longmapsto c\,\vec{v}_i$ par son dilaté au moyen d'une constante* non nulle *$c \in \mathbb{R}^*$:*

$$\mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p\big) \;=\; \mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1, \dots, c\,\vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p\big) \qquad\qquad (c \neq 0).$$

(Op2) *Permuter deux vecteurs :*

$$\mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_j, \dots \vec{v}_p\big) \;=\; \mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_i, \dots \vec{v}_p\big).$$

(Op3) *Additionner à un vecteur, un multiple quelconque d'un* autre *vecteur :*

$$\mathsf{Vect}\,\big(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_i,\dots,\vec{v}_j,\dots\vec{v}_p\big)\;=\;\mathsf{Vect}\,\big(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_i,\dots,\vec{v}_j+e\,\vec{v}_i,\dots\vec{v}_p\big)$$

où $i \neq j$.

Pour $c = 0$, la première opération serait évidemment fausse !

Avec $i = j$, la troisième opération serait dangereusement fausse ! Accident de montagne garanti en examen !

Démonstration. Les arguments sont les mêmes dans le cas général que pour les trois exemples simples traités avant d'énoncer ce théorème.

Notamment, pour la troisième (et la plus « complexe ») opération, tout se passe entre deux vecteurs, les autres vecteurs demeurant inchangés. Écrire la démonstration détaillée avec plus d'indices n'apporterait donc quasiment aucune information supplémentaire par rapport aux exemples traités. Nous nous dispenserons donc d'une tâche aussi inutile. □

6. Familles libres et familles liées

Voici un concept important qui signifie qu'on ne peut pas supprimer des vecteurs.

Définition 6.1. On dit qu'une famille $\big\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_p\big\}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est *libre*, ou que les vecteurs $\vec{x}_i$ sont *linéairement indépendants*, si la relation :

$$a_1\,\vec{x}_1+a_2\,\vec{x}_2+\cdots+a_p\,\vec{x}_p\;=\;\vec{0}$$

entraîne :

$$a_1\;=\;a_2\;=\;\cdots\;=\;a_p\;=\;0.$$

Exemples 6.2. (1) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, les trois vecteurs :

$$\begin{aligned}\vec{x}_1&:=\big(1,0,0,0\big),\\ \vec{x}_2&:=\big(0,1,0,0\big),\\ \vec{x}_3&:=\big(0,0,1,0\big),\end{aligned}$$

constituent une famille libre. En effet :

$$a_1\,\vec{x}_1+a_2\,\vec{x}_2+a_3\,\vec{x}_3\;=\;\big(a_1,a_2,a_3,0\big),$$

et :

$$\big(a_1,a_2,a_3,0\big)\;=\;\vec{0}\qquad\Longrightarrow\qquad a_1\;=\;a_2\;=\;a_3\;=\;0.$$

(2) Toujours dans $\mathbb{R}^4$, les trois vecteurs :

$$\begin{aligned}\vec{x}_1&:=\big(1,0,0,0\big),\\ \vec{x}_2&:=\big(0,1,0,0\big),\\ \vec{x}_3&:=\big(1,1,0,0\big),\end{aligned}$$

ne sont *pas* linéairement indépendants. En effet :

$$a_1\,\vec{x}_1+a_2\,\vec{x}_2+a_3\,\vec{x}_3\;=\;\big(a_1+a_3,\;a_2+a_3,\;0,0\big),$$

et il existe des scalaires non nuls tels que cette combinaison linéaire soit nulle, car il suffit de prendre par exemple :

$$a_1\;=\;a_2\;=\;-\,a_3\;\neq\;0.$$

Exprimons cela comme suit.

Définition 6.3. Si une famille $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est *liée*, ou que les vecteurs $\vec{x}_i$ sont *linéairement dépendants*, ou encore qu'ils ne sont *pas linéairement indépendants*. Il existe alors des scalaires $a_i \in \mathbb{R}$ non tous nuls avec :

$$\vec{0} = a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2 + \cdots + a_p \vec{x}_p.$$

Si dans la famille $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\}$, il existe un indice k avec $1 \leqslant k \leqslant p$ tel que $\vec{x}_k = \vec{0}$, alors cette famille est liée. En effet, on satisfait à :

$$a_1 \vec{x}_1 + \cdots + a_k \vec{x}_k + \cdots + a_p \vec{x}_p = \vec{0},$$

en prenant tous les $a_i = 0$ nuls, sauf a_k. En résumé, on a une

Observation 6.4. *Une famille est liée dès lors qu'elle contient un vecteur nul.* □

Nous pouvons maintenant prouver un premier résultat technique déterminant pour enclencher ce cours d'algèbre linéaire.

Théorème 6.5. *Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E qui est engendré par $p \geqslant 1$ vecteurs. Alors toute famille d'au moins $p+1$ vecteurs de F est toujours nécessairement liée.*

Il importe que ces $p+1$ vecteurs soient tous dans F.

Démonstration. Par hypothèse :

$$F = \mathsf{Vect}\,(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p),$$

est engendré par une certaine famille $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\}$ de vecteurs $\vec{x}_i \in E$.

Il s'agit de prouver que toute famille de $p+1$ vecteurs de F :

$$\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_p, \vec{y}_{p+1}\} \subset F$$

est liée. Toute famille de F, dont le cardinal est supérieur à $p+1$, sera alors liée *a fortiori*.

Raisonnons par récurrence sur l'entier p.

• Pour $p = 1$, l'ensemble F est engendré par un unique vecteur $\{\vec{x}_1\}$, et alors :

$$\begin{array}{lcl} \vec{y}_1 \in F & \Longrightarrow & \exists\, a_1 \in \mathbb{R}, \quad \vec{y}_1 = a_1 \vec{x}_1, \\ \vec{y}_2 \in F & \Longrightarrow & \exists\, a_2 \in \mathbb{R}, \quad \vec{y}_2 = a_2 \vec{x}_1. \end{array}$$

On *élimine* $\vec{x}_1$, ce qui donne :

$$a_2 \vec{y}_1 - a_1 \vec{y}_2 = \vec{0}.$$

Si les scalaires a_1 et a_2 ne sont pas simultanément nuls, alors la famille $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$ est liée par définition.

Si les deux scalaires sont nuls, c'est que $\vec{y}_1 = \vec{y}_2 = \vec{0}$, et la famille $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$ est encore liée, parce que par exemple :

$$1 \cdot \vec{0} + 1 \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Par conséquent, le théorème est prouvé pour $p = 1$.

• Ensuite, supposons le théorème vrai pour $p-1$ vecteurs, avec $p \geqslant 2$, et démontrons-le pour p vecteurs. Alors, si on désigne par F' le sous-espace engendré par la famille des $p-1$ premiers vecteurs :

$$F' := \mathsf{Vect}\,\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{p-1}\},$$

l'hypothèse de récurrence s'applique à F', et donc, toute famille de $\geqslant p$ vecteurs de F' est liée.

Maintenant, tout vecteur $\vec{y}$ de F, c'est-à-dire toute combinaison linéaire des vecteurs $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{p-1}, \vec{x}_p$, peut se mettre sous la forme :

$$\vec{y} = \vec{z} + a\,\vec{x}_p \qquad \text{avec} \qquad \vec{z} \in F' \quad \text{et} \quad a \in \mathbb{R}.$$

En conséquence, pour tout j avec $1 \leqslant j \leqslant p+1$, il existe :

$$\vec{z}_j \in F' \qquad \text{et} \qquad a_j \in \mathbb{R},$$

tels que, pour tout $1 \leqslant j \leqslant p+1$:

$$\vec{y}_j = \vec{z}_j + a_j\,\vec{x}_p, \tag{6.6}$$

en particulier pour $j = p+1$:

$$\vec{y}_{p+1} = \vec{z}_{p+1} + a_{p+1}\,\vec{x}_p.$$

On a ainsi $p+1$ relations. Envisageons alors deux cas.

Premier cas : Tous les $a_j = 0$ sont nuls. Alors :

$$\vec{y}_j = \vec{z}_j \in F' \qquad (\forall\, 1 \leqslant j \leqslant p+1).$$

L'hypothèse de récurrence s'applique à F', et dit que p vecteurs quelconques — *a fortiori* les $p+1$ vecteurs $\vec{y}_j$ — constituent toujours une famille liée. Le théorème est donc prouvé sans aucun effort dans ce cas.

Deuxième cas : Il existe (au moins) un $a_j \neq 0$ non nul. En changeant au besoin l'ordre de la numérotation des $\vec{y}_j$, on peut supposer par exemple que $a_{p+1} \neq 0$. Alors, de la dernière des relations (6.6), *i.e.* celle pour $j = p+1$, on tire, puisque a_{p+1} possède un inverse $\frac{1}{a_{p+1}}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\vec{x}_p = \tfrac{1}{a_{p+1}}\big(\vec{y}_{p+1} - \vec{z}_{p+1}\big).$$

En portant cela dans les p premières relations (6.6), on *élimine* $\vec{x}_p$:

$$\vec{y}_j = \vec{z}_j + \tfrac{a_j}{a_{p+1}}\big(\vec{y}_{p+1} - \vec{z}_{p+1}\big) \qquad (\forall\, 1 \leqslant j \leqslant p),$$

d'où l'on tire :

$$\vec{y}_j - \tfrac{a_j}{a_{p+1}}\,\vec{y}_{p+1} = \vec{z}_j - \tfrac{a_j}{a_{p+1}}\,\vec{z}_{p+1},$$

ce qui prouve que les p vecteurs $\vec{y}_j - \frac{a_j}{a_{p+1}}\,\vec{y}_{p+1}$ des premiers membres appartiennent, comme ceux $\vec{z}_j - \frac{a_j}{a_{p+1}}\,\vec{z}_{p+1}$ des seconds membres, à F'.

Par hypothèse de récurrence, ces p vecteurs constituent une famille liée. Il existe par conséquent des scalaires $b_1, \ldots, b_p$ *non tous nuls* tels que :

$$b_1\big(\vec{y}_1 - \tfrac{a_1}{a_{p+1}}\,\vec{y}_{p+1}\big) + \cdots + b_p\big(\vec{y}_p - \tfrac{a_p}{a_{p+1}}\,\vec{y}_{p+1}\big) = \vec{0}.$$

Si l'on pose alors :

$$b_{p+1} := -\tfrac{1}{a_{p+1}}\big(a_1\,b_1 + \cdots + a_p\,b_p\big),$$

on obtient :

$$b_1\,\vec{y}_1 + \cdots + b_p\,\vec{y}_p + b_{p+1}\,\vec{y}_{p+1} = \vec{0},$$

les scalaires $b_1, \ldots, b_p, b_{p+1}$ n'étant pas tous nuls. La famille $\big\{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_p, \vec{y}_{p+1}\big\}$ est donc liée. Le Théorème 6.5 est démontré. □

Exemple 6.7. Soient, dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, une famille $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$. Prenons :

$$\begin{aligned}
\vec{y}_1 &= \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3,\\
\vec{y}_2 &= \vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{x}_3,\\
\vec{y}_3 &= \vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x}_3,\\
\vec{y}_4 &= -\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3.
\end{aligned}$$

Nous affirmons que quels que soient $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, la famille $\big\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4\big\}$ est liée. Une relation de dépendance s'obtient facilement en ajoutant membre à membre :

$$\vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \vec{y}_3 + \vec{y}_4 = 2\,\vec{x}_1 + 2\,\vec{x}_2 + 2\,\vec{x}_3 = 2\,\vec{y}_1,$$

d'où :

$$-\vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \vec{y}_3 + \vec{y}_4 \,=\, \vec{0}.$$

La démonstration du Théorème 6.5 est basée sur l'élimination. Recommençons la démonstration sur cet exemple, en tirant $\vec{x}_3$ de la dernière relation :

$$\vec{x}_3 \,=\, \vec{y}_4 + \vec{x}_1 - \vec{x}_2,$$

et remplaçons dans les trois autres, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\vec{y}_1 &= 2\,\vec{x}_1 + \vec{y}_4,\\ \vec{y}_2 &= 2\,\vec{x}_1 - 2\,\vec{x}_2 + \vec{y}_4,\\ \vec{y}_3 &= 2\,\vec{x}_2 - \vec{y}_4.\end{aligned}$$

Si une relation ne contient plus les $\vec{x}_i$ — ce n'est pas le cas ici —, elle offre une relation de dépendance entre les $\vec{y}_j$, et on s'arrête. Sinon, on réitère le procédé : on tire $2\,\vec{x}_2$ de la dernière :

$$2\,\vec{x}_2 \,=\, \vec{y}_3 + \vec{y}_4,$$

et on porte cela dans les précédentes, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\vec{y}_1 &= 2\,\vec{x}_1 + \vec{y}_4,\\ \vec{y}_2 &= 2\,\vec{x}_1 - \vec{y}_3.\end{aligned}$$

En réitérant encore une fois le procédé, on élimine $\vec{x}_1$, et on obtient finalement la relation de dépendance cherchée :

$$\vec{y}_1 \,=\, \vec{y}_2 + \vec{y}_3 + \vec{y}_4.$$

Corollaire 6.8. *Pour qu'une famille $\big\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\big\}$ soit liée, il faut et il suffit qu'il existe un indice i avec $1 \leqslant i \leqslant p$ tel que $\vec{x}_i$ appartienne au sous-espace engendré par les $\vec{x}_j$ d'indices $j \neq i$.*

Preuve. En effet, s'il existe un tel indice i tel que $\vec{x}_i$ soit une combinaison linéaire des autres vecteurs :

$$\vec{x}_i \,=\, \mu_1\,\vec{x}_1 + \cdots + \mu_{i-1}\,\vec{x}_{i-1} + \mu_{i+1}\,\vec{x}_{i+1} + \cdots + \mu_n\,\vec{x}_n,$$

on applique le Théorème 6.5, et la famille $\big\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\big\}$ est liée.

Réciproquement, supposons que $\big\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\big\}$ soit liée. Alors il existe des scalaires $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que :

$$a_1\,\vec{x}_1 + a_2\,\vec{x}_2 + \cdots + a_p\,\vec{x}_p \,=\, \vec{0}.$$

En changeant au besoin l'ordre de la numérotation, on peut supposer que $a_1 \neq 0$. On en déduit alors :

$$\vec{x}_1 \,=\, -\tfrac{a_2}{a_1}\,\vec{x}_2 - \cdots - \tfrac{a_p}{a_1}\,\vec{x}_p.$$

Cette relation prouve que $\vec{x}_1$ appartient au sous-espace vectoriel engendré par $\big\{\vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\big\}$. □

Par contraposition, on a immédiatement un énoncé équivalent à celui du corollaire qui précède.

Corollaire 6.9. *Pour que la famille $\big\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\big\}$ soit libre, il faut et il suffit que, pour tout indice $1 \leqslant i \leqslant p$, le vecteur $\vec{x}_i$ n'appartienne* pas *au sous-espace engendré par tous les $\vec{x}_j$ d'indices $j \neq i$.* □

On a aussi le théorème suivant, qui établit l'*unicité* de la représentation.

Théorème 6.10. *Pour qu'une famille $\big\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\big\}$ soit libre, il faut et il suffit qu'à tout vecteur $\vec{x}$ du sous-espace vectoriel qu'elle engendre :*

$$\vec{x} \,\in\, F \,:=\, \mathsf{Vect}\big(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\big),$$

il corresponde une unique *famille $\{a_1, \dots, a_p\}$ de scalaires tels que :*

$$\vec{x} \,=\, a_1\,\vec{x}_1 + \cdots + a_p\,\vec{x}_p.$$

Démonstration. Supposons qu'à un vecteur $\vec{x} \in F$ correspondent deux familles $\{a_1, \ldots, a_p\}$ et $\{b_1, \ldots, b_p\}$ de scalaires tels que :

$$\vec{x} \; = \; a_1 \, \vec{x}_1 + \cdots + a_p \, \vec{x}_p \; = \; b_1 \, \vec{x}_1 + \cdots + b_p \, \vec{x}_p.$$

Par soustraction, on déduit :

$$(6.11) \qquad \big(a_1 - b_1\big) \, \vec{x}_1 + \cdots + \big(a_p - b_p\big) \, \vec{x}_p \; = \; \vec{0}.$$

Démontrons l'implication '$\Longrightarrow$'. Si $\big\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\big\}$ est une famille libre, alors cette relation (6.11) entraîne :

$$a_1 - b_1 \; = \; \cdots \; = \; a_p - b_p \; = \; 0,$$

c'est-à-dire :

$$a_1 \; = \; b_1, \; \ldots\ldots, \; a_p \; = \; b_p.$$

Ainsi, à tout $\vec{x}$ du sous-espace F engendré par la famille libre correspond une *unique* famille de scalaires tels que $\vec{x} = a_1 \, \vec{x}_1 + \cdots + a_p \, \vec{x}_p$.

Démontrons l'implication inverse '$\Longleftarrow$'. Par contraposition, si $\big\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\big\}$ n'est pas libre, la relation (6.11) est vérifiée par certains scalaires $a_i - b_i$ non tous nuls. Au vecteur $\vec{x}$ de F correspondent alors deux familles *distinctes* de scalaires $\{a_1, \ldots, a_p\}$ et $\{b_1, \ldots, b_p\}$ vérifiant :

$$\vec{x} \; = \; a_1 \, \vec{x}_1 + \cdots + a_p \, \vec{x}_p \; = \; b_1 \, \vec{x}_1 + \cdots + b_p \, \vec{x}_p.$$

Le Théorème 6.10 est démontré. □

Exemples 6.12. [en Géométrie] Voici trois illustrations dans l'espace $V = \mathbb{R}^3$ de la géométrie euclidienne spatiale.

(1) Une famille $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ de deux vecteurs est libre si l'un deux, par exemple $\vec{x}_1$, n'appartient pas au sous-espace engendré par l'autre, c'est-à-dire si $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ ne sont *pas colinéaires*.

(2) Une famille $\big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\big\}$ de trois vecteurs est libre si l'un quelconque d'entre eux n'appartient pas au sous-espace engendré par les deux autres : cette propriété exige que les trois vecteurs ne soient *pas coplanaires*.

(3) Nous affirmons que pour $p \geqslant 4$, une famille $\big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots, \vec{x}_p\big\}$ est toujours liée. En effet, supposons au contraire cette famille libre, toujours avec $p \geqslant 4$, et prouvons qu'on aboutit à une contradiction.

L'hypothèse entraîne que $\big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\big\}$ est libre, aussi. Or nous savons, en prenant ces trois vecteurs pour directions d'axes de coordonnées dans l'espace, que tout vecteur quelconque $\vec{x} \in V$ est alors combinaison linéaire de ces trois-là. En particulier, $\vec{x}_4$ serait combinaison linéaire de $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, et l'hypothèse serait contredite. Donc quand $p \geqslant 4$, la famille est nécessairement liée.

Dans cet exemple de l'espace vectoriel $V = \mathbb{R}^3$ de la géométrie euclidienne, on voit que toute famille libre contient au plus trois vecteurs. C'est pour cela que $V = \mathbb{R}^3$ est dit en physique *espace vectoriel à* 3 *dimensions*, la famille libre $\big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\big\}$ constituant une *base* de cet espace. Nous allons maintenant définir mathématiquement ces notions pour un espace vectoriel quelconque.

7. Bases, dimensions, coordonnées

Commençons par deux définitions très importantes.

Définition 7.1. On dit qu'un espace vectoriel E est *de dimension finie* s'il existe une famille *finie* de générateurs de E.

Définition 7.2. On appelle *base* d'un espace vectoriel E toute famille libre $\big\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\big\}$ de générateurs de E.

Dans la notion de base, les deux conditions sont importantes et indépendantes :

- liberté ;
- générativité.

Si la famille finie $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ engendre l'espace E tout entier, alors, pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, il existe au moins une collection $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de scalaires $a_i \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\vec{x} \,=\, a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + \cdots + a_n\,\vec{e}_n.$$

Si, de plus, la famille $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ est libre, c'est-à-dire si elle constitue une base de E, alors, pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, la famille de scalaires $\{a_1, \dots, a_n\}$ est de plus *unique*, d'après le Théorème 6.10.

Terminologie 7.3. Les scalaires $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont alors appelés *coordonnées de $\vec{x}$ dans la base* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$.

Exemples 7.4. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, considérons les trois vecteurs :

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= (1,0,0),\\ \vec{e}_2 &= (0,1,0),\\ \vec{e}_3 &= (0,0,1).\end{aligned}$$

Quel que soit le vecteur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(a,b,c) \,=\, a\,\vec{e}_1 + b\,\vec{e}_2 + c\,\vec{e}_3.$$

Par conséquent, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ est une famille de générateurs de $\mathbb{R}^3$, qui est donc de dimension finie.

De plus, cette famille est libre, car :

$$a\,\vec{e}_1 + b\,\vec{e}_2 + c\,\vec{e}_3 \,=\, \vec{0}$$

entraîne :

$$(a,b,c) \,=\, \vec{0},$$

ce qui exige :

$$a \,=\, b \,=\, c \,=\, 0.$$

Donc $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) L'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des polynômes réels à une indéterminée sur le corps $\mathbb{R}$ n'est *pas* de dimension finie. Montrons en effet que toute famille finie incluse dans $\mathbb{R}[x]$ ne peut pas être famille de générateurs de $\mathbb{R}[x]$. En effet, l'ensemble des degrés des polynômes est une partie finie de $\mathbb{N}$; elle admet donc un plus grand élément m.

Tout polynôme de degré strictement supérieur à m, et il en existe dans $\mathbb{R}[x]$, ne peut s'obtenir comme combinaison linéaire de polynômes de degré au plus égal à m, puisque le degré d'une combinaison linéaire est toujours inférieur ou égal au maximum des degrés de ses composants. Donc $\mathbb{R}[x]$ n'est pas de dimension finie.

(3) Par contre, donnons-nous un nombre naturel $n \geqslant 0$, et considérons la partie de $\mathbb{R}[x]$, notée $\mathbb{R}_n[x]$, constituée des polynômes de degrés au plus égaux à n :

$$\mathbb{R}_n[x] \,:=\, \big\{p \in \mathbb{R}[x] \colon\, \mathsf{deg}\,p \leqslant n\big\}.$$

Prouvons d'abord que $\mathbb{R}_n[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$. En effet, quels que soient les scalaires λ et μ, et les polynômes p et q, on a :

$$\mathsf{deg}\,(\lambda\,p + \mu\,q) \,\leqslant\, \mathsf{max}\,\big\{\mathsf{deg}\,p,\, \mathsf{deg}\,q\big\}.$$

Par suite :

$$\Big(\mathsf{deg}\,p \leqslant n \qquad \text{et} \qquad \mathsf{deg}\,q \leqslant n\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathsf{deg}\,(\lambda\,p + \mu\,q) \leqslant n.$$

Donc $\mathbb{R}_n[x]$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$.

Montrons maintenant que la famille :

$$B \,:=\, \big\{1,\, x^1,\, x^2,\, x^3,\, x^4,\, x^5,\, \dots,\, x^n\big\}$$

des puissances successives $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$ de x constitue une *base* de $\mathbb{R}_n[x]$.

Assertion 7.5. *B est une famille de générateurs de $\mathbb{R}_n[x]$.*

Preuve. En effet, pour tout polynôme $p \in \mathbb{R}_n[x]$, il existe une famille de scalaires $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que :

$$p \,=\, a_0 + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n.$$

Donc tout polynôme $p \in \mathbb{R}_n[x]$ est une combinaison linéaire des « vecteurs » de B, qui est par conséquent une famille de générateurs de $\mathbb{R}_n[x]$. Donc $\mathbb{R}_n[x]$ est de dimension finie. □

Assertion 7.6. *B est une famille libre.*

Preuve. En effet, la relation :

$$a_0 + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n \,=\, 0$$

veut dire que le polynôme du premier membre est le polynôme nul, donc tous ses coefficients sont nuls :

$$a_0 \,=\, a_1 \,=\, \cdots \,=\, a_n \,=\, 0.$$

Par conséquent, B est bien une famille libre, donc constitue une base de $\mathbb{R}_n[x]$. □

Les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ du polynôme p sont alors les *coordonnées* de p dans cette base B.

Nous allons maintenant parler de l'existence de bases dans tout espace vectoriel de dimension finie. Remarquons d'abord que, dans tout espace vectoriel $E \neq \{\vec{0}\}$ non réduit au vecteur nul, il existe des familles *libres* et *finies* — par exemple, pour tout $\vec{x} \neq \vec{0}$, la partie $\{\vec{x}\}$ est libre et finie.

Théorème 7.7. [de la base incomplète] *Pour toute famille libre et finie L d'un espace vectoriel $E \neq \{\vec{0}\}$ de dimension finie, il existe une base B finie de E telle que $B \supset L$.*

Démonstration. Puisque E est un espace de dimension finie, il existe une famille G finie de générateurs de E. Si on opère la réunion de G et d'une famille quelconque de générateurs de E, on obtient évidemment encore une famille de générateurs de E.

Soit donc L une famille libre et finie de E. La réunion :

$$F \,:=\, G \cup L$$

est encore une famille de générateurs de E. De plus, F est finie et :

$$L \,\subset\, F.$$

Rappelons que l'on note $\mathscr{P}(F)$ l'ensemble des *parties* de F, c'est-à-dire des *sous-ensembles* de F :

$$\mathscr{P}(F) \,:=\, \big\{F' \subset F\big\}.$$

Rappelons aussi que l'on démontre que :

$$\mathsf{Card}\, \mathscr{P}(F) \,=\, 2^{\mathsf{Card}\, F}.$$

Ainsi, puisque $\mathsf{Card}\, F < \infty$, on a aussi la finitude de :

$$\mathsf{Card}\, \mathscr{P}(F) \,<\, \infty.$$

Maintenant, introduisons l'ensemble $\mathscr{L}$ de toutes les parties de F libres qui contiennent L :

$$\mathscr{L} \,:=\, \big\{F' \in \mathscr{P}(F) \colon\, F' \text{ libre et } F' \supset L\big\}.$$

Cet ensemble $\mathscr{L}$ n'est pas vide, puisque $L \in \mathscr{L}$. De plus, $\mathsf{Card}\, \mathscr{L} \,<\, \infty$ est fini, puisque $\mathsf{Card}\, \mathscr{P}(F) < \infty$, et puisque $\mathscr{L} \subset \mathscr{P}(F)$.

L'ensemble des cardinaux des éléments F' de $\mathscr{L}$ est alors une partie non vide de $\mathbb{N}$ qui admet par conséquent un plus grand élément n.

Soit alors B un élément de $\mathscr{L}$ ayant ce nombre maximal n d'éléments :

$$L \subset B \subset F.$$

Observons que :

$$\mathsf{Card}\, L \leqslant \mathsf{Card}\, B = n \leqslant \mathsf{Card}\, F.$$

À présent, envisageons deux cas.

Cas 1. $n = \mathsf{Card}\, F$. Alors, évidemment, $B = F$. La famille F de générateurs est libre. Elle constitue par conséquent une base de E. Le théorème est prouvé sans travail dans ce cas.

Cas 2. $n \leqslant \mathsf{Card}\, F - 1$. Alors, par définition de l'élément maximum n, pour tout $\vec{x}$ appartenant à $F \backslash B$, la famille $B \cup \{\vec{x}\}$ n'est *pas* libre, puisque c'est une partie de F à $n+1$ éléments. Si on écrit :

$$B = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\big\},$$

il existe alors des scalaires non tous nuls $a_1, \dots, a_n, b$ tels que :

$$a_1\, \vec{e}_1 + \cdots + a_n\, \vec{e}_n + b\, \vec{x} = \vec{0}.$$

On a nécessairement $b \neq 0$, sinon les vecteurs de B vérifieraient une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls, et B ne serait pas libre. Donc, dans le corps $\mathbb{R}$ des scalaires, l'inverse $\frac{1}{b}$ existe, et :

$$\vec{x} = -\tfrac{1}{b}\,\big(a_1\, \vec{e}_1 + \cdots + a_n\, \vec{e}_n\big).$$

Tout vecteur $\vec{x}$ de la famille F des générateurs de E est une combinaison linéaire des vecteurs de B. Donc B est elle-même une famille de générateurs de E, et par conséquent, une base de E.

Le Théorème 7.7 est démontré. □

Ce Théorème 7.7 exprime deux propriétés importantes.

Corollaire 7.8. [Existence de bases] *Dans tout espace vectoriel de dimension finie, il existe des bases.* □

L'espace vectoriel nul $\{\vec{0}\}$ réduit au seul vecteur $\vec{0}$ comporte aussi une base, réduite à l'ensemble vide. Ainsi, la dimension de l'espace vectoriel nul $\{\vec{0}\}$ est égale à 0.

Corollaire 7.9. [Complétion d'une famille libre pour obtenir une base] *Dans tout espace vectoriel de dimension finie, toute famille libre peut être complétée en une base.* □

Ceci veut dire que L peut être complétée par les vecteurs de $B \backslash L$ pour obtenir la base B de E.

Théorème 7.10. *Si, dans un espace vectoriel E, une base B possède n éléments, alors toute famille L libre dans E vérifie :*

$$\mathsf{Card}\, L \leqslant n.$$

Preuve. Appliquons le Théorème 6.5 : puisque B engendre E, une famille de $n+1$ (ou plus) vecteurs quelconques de E est liée. Il ne peut donc pas exister dans E de famille *libre* L vérifiant $\mathsf{Card}\, L \geqslant n+1$. □

Théorème 7.11. *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal.*

Preuve. En effet, si B et B' sont deux bases de E, alors en appliquant le Théorème 7.10 à la base B et à la famille libre B', on obtient :

$$\mathsf{Card}\, B' \leqslant \mathsf{Card}\, B.$$

En échangeant B et B' qui jouent le même rôle, il vient :

$$\mathsf{Card}\, B \leqslant \mathsf{Card}\, B'.$$

Par conséquent :

$$\mathsf{Card}\, B \,=\, \mathsf{Card}\, B'. \qquad \square$$

Maintenant, recommençons à travailler avec un corps commutatif $\mathbb{K}$ quelconque, au lieu de $\mathbb{R}$. Les nombres de $\mathbb{K}$ se comportent exactement de la même manière que les nombres réels, vis-à-vis de l'addition et de la multiplication. Le lecteur qui éprouverait des réticences à penser en cette généralité est invité à remplacer mentalement $\mathbb{K}$ par $\mathbb{R}$ jusqu'à la fin de ce chapitre. Il va de soi que tous les résultats qui précèdent sont valables, avec la même démonstration, pour un corps $\mathbb{K}$ quelconque.

Puisque toutes les bases de E ont même cardinal, la définition suivante est justifiée.

Définition 7.12. [de la dimension] Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle *dimension* de E le cardinal de toute base de E.

La dimension de E sur $\mathbb{K}$ sera notée :

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\, E.$$

Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, notamment lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on notera simplement :

$$\mathsf{dim}\, E.$$

On convient que :

$$\mathsf{dim}\,\{\vec{0}\} \,=\, 0.$$

Exemple 7.13. $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{K}^n$ sont de dimension n sur le corps $\mathbb{R}$ et sur le corps $\mathbb{K}$:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, \mathbb{R}^n \,=\, n \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\, \mathbb{K}^n \,=\, n.$$

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, de dimension $n \geqslant 1$, et soit :

$$B \,=\, \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\big\}$$

une base de E.

Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on peut voir E aussi comme espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Rappelons que l'on note :

$$i \,:=\, \sqrt{-1}.$$

Assertion 7.14. *L'ensemble :*

$$B' \,:=\, \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n,\, i\,\vec{e}_1,\, i\,\vec{e}_2,\, \dots,\, i\,\vec{e}_n\big\}$$

constitue une base de E sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, E \,=\, 2\,\mathsf{dim}_{\mathbb{C}}\, E.$$

Démonstration. En effet, pour tout vecteur $\vec{x}$ de E, il existe une famille de scalaires *complexes* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que :

$$\vec{x} \,=\, \alpha_1\,\vec{e}_1 + \cdots + \alpha_n\,\vec{e}_n. \tag{7.15}$$

Ces α_i sont les *coordonnées* de $\vec{x}$ dans la base B.

Pour tout indice k avec $1 \leqslant k \leqslant n$, faisons intervenir les parties réelle et imaginaire de α_k :

$$\alpha_k \,=\, a_k + i\,b_k \qquad\qquad (a_k \in \mathbb{R},\, b_k \in \mathbb{R}).$$

La relation (7.15) s'écrit alors :

$$\vec{x} \,=\, a_1\,\vec{e}_1 + \cdots + a_n\,\vec{e}_n + b_1\,\big(i\,\vec{e}_1\big) + \cdots + b_n\,\big(i\,\vec{e}_n\big). \tag{7.16}$$

Ainsi, pour tout $\vec{x} \in E$, il existe une famille de scalaires réels $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ vérifiant la relation (7.16). Par conséquent, B' est une famille de générateurs de E sur $\mathbb{R}$.

De plus, puisque B est une base de E sur $\mathbb{C}$, à tout $\vec{x}$ de E correspond une *unique* famille $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de scalaires de $\mathbb{C}$ vérifiant (7.15). Comme à tout $\alpha \in \mathbb{C}$ correspond un couple unique

$(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $\alpha = a + i\, b$, alors la famille $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ de scalaires de $\mathbb{R}$ correspondant à $\vec{x}$ est unique aussi. Par conséquent, d'après le Théorème 6.10, B' est une famille libre de E sur $\mathbb{R}$, donc une base de ce espace.

Enfin, comme $\mathsf{Card}\, B' = 2\, \mathsf{Card}\, B$, on a bien :

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, E \,=\, 2\, \mathsf{dim}_{\mathbb{C}}\, E. \qquad \square$$

Théorème 7.17. *Tout sous-espace F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie est lui-même de dimension finie, avec :*

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\, F \,\leqslant\, \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\, E.$$

Démonstration. Soit donc E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $F \subset E$ un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de E.

Le théorème est évident lorsque $F = \{\vec{0}\}$.

Supposons donc que $F \neq \{\vec{0}\}$, et introduisons l'ensemble $\mathscr{A}$ des cardinaux de toutes les familles *libres* dans F.

Cet ensemble $\mathscr{A}$ n'est pas vide, car pour tout vecteur de F non nul $\vec{x} \in F \backslash \{\vec{0}\}$, la famille $\{\vec{x}\}$ est libre, donc $1 \in \mathscr{A}$.

D'autre part, toute famille libre incluse dans F est une famille libre incluse dans E, puisque $F \subset E$. Alors d'après le Théorème 7.10, $\mathscr{A}$ est majoré par $n = \mathsf{dim}\, E$.

Comme $\mathscr{A}$ est un ensemble non vide de $\mathbb{N}$ et majoré, il admet un élément maximum :

$$p \,:=\, \mathsf{max}\, A \qquad\qquad \text{avec} \qquad\qquad p \,\leqslant\, n.$$

Cela veut dire qu'une famille quelconque d'au moins $p + 1$ vecteurs de F est liée.

Soit B' une famille libre incluse dans F et ayant ce nombre maximum p d'éléments. Désignons par F' le sous-espace engendré par B'. Comme B' est finie, F' est de dimension finie, et comme B' est libre, alors $\mathsf{dim}\, F' = \mathsf{Card}\, B' = p$, ce qui entraîne :

$$\mathsf{dim}\, F' \,\leqslant\, \mathsf{dim}\, E.$$

Pour finir, nous allons prouver que $F' = F$, ce qui établira complètement le Théorème 7.17.

Comme F' est le plus petit sous-espace contenant B' d'après le Théorème 4.3, on a :

$$F' \,\subset\, \mathsf{Vect}\, B' \,\subset\, F.$$

D'autre part, pour tout $\vec{x} \in F \backslash B'$, la famille $B' \cup \{\vec{x}\}$, de cardinal $p + 1$, est nécessairement liée, donc le Corollaire 6.8 assure que $\vec{x}$ appartient au sous-espace F' engendré par B'. Par suite :

$$F \,\subset\, F',$$

et en définitive :

$$F \,=\, F'. \qquad \square$$

8. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Étudions l'ensemble H des $\vec{z} \in E$ tels qu'il existe un $\vec{x} \in F$ et un $\vec{y} \in G$ de façon que :

$$\vec{z} \,=\, \vec{x} + \vec{y}.$$

En d'autres termes, étudions :

$$\begin{aligned} H \,&:= F + G \\ &= \big\{\vec{z} \in E\colon\ \exists\, \vec{x} \in F,\ \ \exists\, \vec{y} \in G,\ \ \vec{z} = \vec{x} + \vec{y}\big\}. \end{aligned}$$

Assertion 8.1. *H est un sous-espace vectoriel de E, c'est-à-dire que, quels que soient les scalaires a et a' on a :*

$$\big(\forall\, a \in \mathbb{R},\ \ \forall\, \vec{z} \in H \qquad \textit{et} \qquad \forall\, a' \in \mathbb{R},\ \ \forall\, \vec{z}\,' \in H\big) \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad a\, \vec{z} + a'\, \vec{z}\,' \,\in\, H.$$

Preuve. Par hypothèse, il existe $\vec{x}$ et $\vec{x}\,'$ dans F et il existe $\vec{y}$ et $\vec{y}\,'$ dans G tels que :

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} \qquad \text{et} \qquad \vec{z}\,' = \vec{x}\,' + \vec{y}\,'.$$

Or :

$$a\,\vec{z} + a'\,\vec{z}\,' = a\,\vec{x} + a'\,\vec{x}\,' + b\,\vec{y} + b'\,\vec{y}\,'.$$

Comme F et G sont deux sous-espaces de E :

$$\begin{aligned}
\big(\vec{x} \in F \quad \text{et} \quad \vec{x}\,' \in F\big) \quad &\Longrightarrow \quad a\,\vec{x} + a'\,\vec{x}\,' \in F,\\
\big(\vec{y} \in G \quad \text{et} \quad \vec{y}\,' \in G\big) \quad &\Longrightarrow \quad a\,\vec{y} + a'\,\vec{y}\,' \in G.
\end{aligned}$$

Par conséquent, par définition de H :

$$\big(a\,\vec{x} + a'\,\vec{x}\,'\big) + \big(a\,\vec{y} + a'\vec{y}\,'\big) \in H,$$

ce qui montre bien que H est un sous-espace vectoriel de E. □

Assertion 8.2. *H est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $F \cup G$.*

Preuve. En prenant $\vec{y} = \vec{0}$, on voit que $H \supset F$. En prenant $\vec{x} = \vec{0}$, on voit que $H \supset G$. Par conséquent :

$$H \supset F \cup G.$$

D'autre part, tout sous-espace contenant $F \cup G$ doit contenir tout $\vec{x}$ de F, tout $\vec{y}$ de G, puis la somme $\vec{x} + \vec{y}$. Donc tout sous-espace contenant $F \cup G$ contient aussi H.

En conclusion, H est le plus petit sous-espace contenant $F \cup G$. □

Définition 8.3. Le plus petit sous-espace contenant la réunion $F \cup G$ de deux sous-espaces F et G d'un espace vectoriel E est appelé *somme* de F et de G, et se note :

$$F + G := \big\{\vec{z} \in E \colon \exists\,\vec{x} \in F,\ \exists\,\vec{y} \in G,\ \vec{z} = \vec{x} + \vec{y}\big\}.$$

On démontre aisément (exercice) que cette addition entre sous-espaces vectoriels est associative, commutative, et admet comme élément neutre l'espace vectoriel nul $\{\vec{0}\}$. De plus :

$$F \subset G \qquad \Longleftrightarrow \qquad F + G = G.$$

Introduisons maintenant le concept de *somme directe* de deux sous-espaces vectoriels.

Considérons un élément quelconque $\vec{z}$ de la somme $F + G$ définie à l'instant. Alors il existe $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G$ tels que :

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}.$$

En d'autres termes, $\vec{z}$ est l'image du couple $(\vec{x}, \vec{y})$ par l'application :

$$\begin{aligned}
f\colon \quad F \times G &\longrightarrow E\\
\big(\vec{x}, \vec{y}\big) &\longmapsto \vec{x} + \vec{y}.
\end{aligned}$$

L'image de $F \times G$ par f vient précisément d'être notée $F + G$.

Cette application f n'est pas nécessairement injective, ce qui veut dire qu'un vecteur $\vec{z}$ de $F + G$ peut être l'image de deux couples distincts $(\vec{x}, \vec{y})$ et $\big(\vec{x}\,', \vec{y}\,'\big)$. Or de :

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} = \vec{x}\,' + \vec{y}\,',$$

on tire :

$$\vec{x} - \vec{x}\,' = \vec{y}\,' - \vec{y}, \tag{8.4}$$

avec :

$$\vec{x} - \vec{x}\,' \in F \qquad \text{et} \qquad \vec{y}\,' - \vec{y} \in G.$$

La coïncidence de ces deux éléments exige leur appartenance à $F \cap G$. Remarquons que deux sous-espaces ont toujours $\vec{0}$ en commun, et envisageons deux cas.

Premier cas : $F \cap G \neq \{\vec{0}\}$. Alors si $\vec{u} \neq \vec{0}$ est un élément non nul de cette intersection, on a :

$$\begin{aligned} \vec{x} \in F \qquad &\Longrightarrow \qquad \vec{x} + \vec{u} \in F, \\ \vec{y} \in G \qquad &\Longrightarrow \qquad \vec{y} - \vec{u} \in G, \end{aligned}$$

et :

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} = \big(\vec{x} + \vec{u}\big) + \big(\vec{y} - \vec{u}\big).$$

Ainsi, $\vec{z}$ est l'image par f de deux éléments distincts $(\vec{x}, \vec{y})$ et $\big(\vec{x} + \vec{u},\, \vec{y} - \vec{u}\big)$ de $F \times G$.

L'appplication f de $F \times G$ sur $F + G$ n'est donc *pas* injective.

Deuxième cas : $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Alors l'égalité (8.4) ne peut être réalisée que si :

$$\vec{x} - \vec{x}\,' = \vec{0} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \vec{y}\,' - \vec{y} = \vec{0},$$

d'où :

$$\big(\vec{x}, \vec{y}\big) = \big(\vec{x}\,', \vec{y}\,'\big).$$

L'application est donc *injective :* tout $\vec{z}$ de $F + G$ admet alors une *décomposition unique* $\vec{x} + \vec{y}$ avec $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G$.

Ces considérations motivent les définitions suivantes.

Définition 8.5. Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E sont dits *linéairement indépendants* lorsque :

$$F \cap G = \{\vec{0}\}.$$

Définition 8.6. La somme $F+G$ de deux sous-espaces F et G linéairement indépendants se nomme *somme directe* de F et de G, et se note :

$$F \oplus G.$$

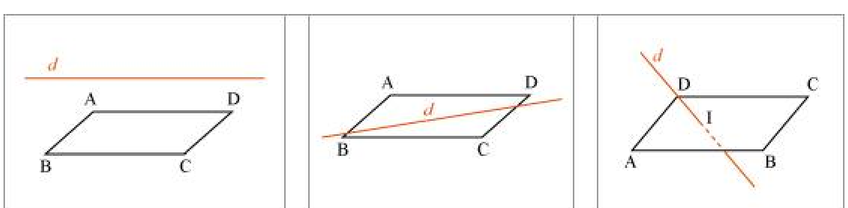
Les raisonnements que nous venons de conduire donnent alors :

$$F \cap G = \{\vec{0}\} \qquad \Longrightarrow \qquad F + G = F \oplus G.$$

Pour terminer ce chapitre, présentons la notion de *sous-espaces supplémentaires.*

Définition 8.7. Si F et G sont linéairement indépendants, et si $F \oplus G = E$, alors F et G sont dits *supplémentaires* dans E.

Par exemple, considérons, en géométrie euclidienne dans l'espace $V = \mathbb{R}^3$, une droite D et un plan P. Soit V_D l'espace des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de même direction que la droite D. Soit aussi V_P l'espace des vecteurs parallèles au plan P. Deux cas peuvent se produire.



La droite d est strictement parallèle au plan (ABC). | La droite d est contenue dans le plan (ABC). | Le plan (ABC) et la droite d sont sécants en I.

Premier cas : La droite $D \| P$ est parallèle au plan. Alors $V_D \subset V_P$, et par conséquent :

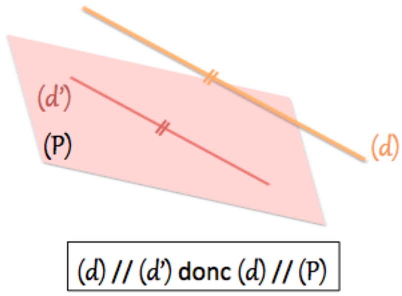
$$V_D + V_P = V_P.$$

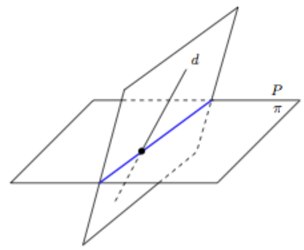
Les espaces V_D et V_P ne sont *pas* linéairement indépendants, et on ne peut donc *pas* parler ici de somme directe $V_D \oplus V_P$.

D'ailleurs, on peut voir directement que l'application $(\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \vec{x} + \vec{y}$ de $V_D \times V_P$ dans E n'est pas injective. En effet, pour tout $\vec{x}\,' \in V_D$, on a :

$$\vec{z} \,=\, \vec{x} + \vec{y} \,=\, \big(\vec{x} + \vec{x}\,'\big) + \big(\vec{y} - \vec{x}\,'\big).$$

On obtient là deux décompositions distinctes de $\vec{z}$.





Deuxième cas : La droite $D \not\parallel P$ n'est pas parallèle au plan. Alors :

$$V_D \cap V_P \,=\, \{\vec{0}\}.$$

Les deux sous-espaces V_D et V_P sont linéairement indépendants. Leur somme se nomme somme directe :

$$V_D + V_P \,=\, V_D \oplus V_P.$$

Le résultat de cette somme est ici l'espace vectoriel $V = \mathbb{R}^3$ tout entier : pour tout vecteur $\vec{z} \in V$, il existe un unique $\vec{x} \in V_D$ et un unique $\vec{y} \in V_P$ tels que $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$.

L'application $(\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \vec{x} + \vec{y}$ de $V_D \times V_P$ dans V est ici *bijective*. Ainsi, V_D et V_P sont supplémentaires dans V.

D'une façon générale, de l'étude qui précède, on déduit la propriété suivante.

Théorème 8.8. *Si, dans un espace vectoriel E, deux sous-espaces F et G sont supplémentaires, alors à tout $\vec{z} \in E$ correspond un unique couple $(\vec{x}, \vec{y})$ de $F \times G$ tel que :*

$$\vec{z} \,=\, \vec{x} + \vec{y}. \qquad \square$$

En d'autres termes :

$$F \oplus G \,=\, E$$

veut dire :

$$\forall\, \vec{z} \in E \qquad \exists\,!\, x \in F \qquad \exists\,!\, y \in G$$

tels que :

$$\vec{z} \,=\, \vec{x} + \vec{y}.$$

Le point d'exclamation $\exists\,!$ derrière le symbole $\exists$ signifie « *il existe un unique* » ceci ou cela.

9. Appendice : Nombres complexes et similitudes complexes

Un *nombre complexe* prend la forme :

$$z = x + i\, y,$$

où x et y sont deux nombres réels et où i est un nombre (abstrait) satisfaisant :

$$i^2 = -1,$$

que les mathématiciens asiatiques préfèrent noter systématiquement :

$$\sqrt{-1},$$

mais il s'agit d'un autre continent, où l'on ne craint aucun caractère. Classiquement, on note :

$$\boxed{\mathbb{C}}$$

l'ensemble de ces nombres.

On appelle x la *partie réelle* de z et y la *partie imaginaire* de z :

$$x = \mathsf{Re}\, z,$$
$$y = \mathsf{Im}\, z.$$

Les nombres réels sont donc précisément les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle, et les nombres *purement imaginaires :*

$$\{i\, y \colon\, y \,\in\, \mathbb{R}\},$$

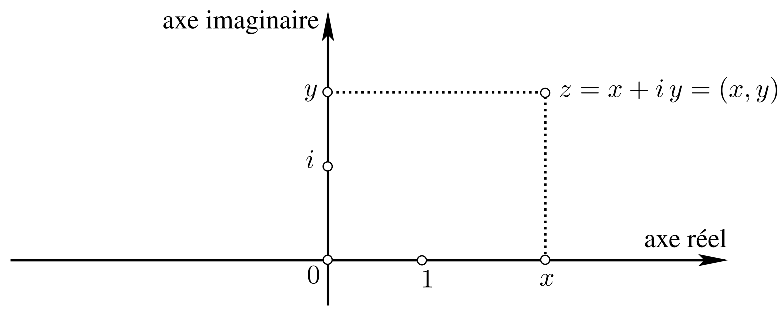
ceux dont la partie réelle est nulle.

Grâce à Argand et à Gauss, on peut visualiser les nombres complexes dans le plan euclidien usuel $\mathbb{R}^2$ en identifiant :

$$\mathbb{C} \,\ni\, x + i\, y \,\longleftrightarrow\, (x, y) \,\in\, \mathbb{R}^2.$$

Par exemple, $0 \in \mathbb{C}$ correspond à l'origine $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, et le nombre $i = \sqrt{-1}$ correspond au point $(0,1) \in \mathbb{R}^2$.

Naturellement, l'axe des x est appelé l'*axe réel*, tandis que l'axe des y est appelé l'*axe imaginaire*.



Les règles pour additionner et pour soustraire les nombres complexes sont naturelles : il suffit de conserver en mémoire que $i^2 = -1$.

Par exemple, étant donné deux nombres complexes :

$$z_1 = x_1 + i\, y_1 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad z_2 = x_2 + i\, y_2,$$

leur somme vaut :

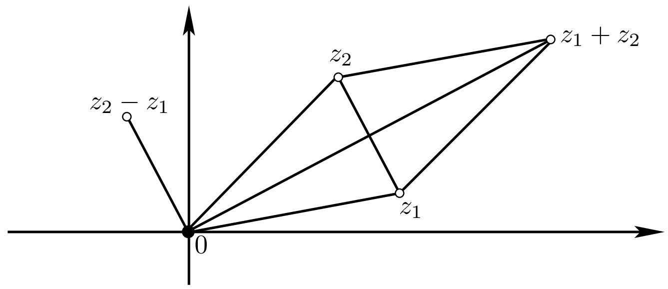
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2),$$

et leur produit vaut :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + i\, y_1)\,(x_2 + i\, y_2) \\ &= x_1 x_2 + i\, x_1 y_2 + i\, y_1\, x_2 + i^2\, y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + y_1 x_2). \end{aligned}$$

Si l'on prend ces deux expressions pour définitions de l'addition et de la multiplication, il est facile de vérifier les trois propriétés suivantes.

- Commutativité : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ et $z_1 z_2 = z_2 z_1$ pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- Associativité : $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ et $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.
- Distributivité : $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.



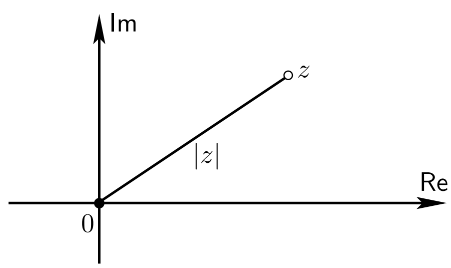
Géométriquement, l'addition des nombres complexes correspond à l'addition des vecteurs dans le plan $\mathbb{R}^2$. La multiplication quant à elle consiste en une rotation suivie d'une dilatation, un fait qui devient intuitivement transparent une fois qu'on a introduit la forme polaire d'un nombre complexe (voir ci-dessous). À ce stade, observons au moins que *la multiplication par i correspond à une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.*

La notion de valeur absolue d'un nombre complexe est identique à la norme euclidienne des vecteurs dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 9.1. La *valeur absolue* ou le *module* d'un nombre complexe $z = x + i\,y$ est la quantité positive :

$$|z| := \big(x^2 + y^2\big)^{\frac{1}{2}},$$

de telle sorte que $|z|$ est précisément la *distance euclidienne* entre l'origine $(0,0)$ et le point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.



Bien entendu, $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$, et l'*inégalité du triangle* est tout aussi valable :

$$|z + w| \leqslant |z| + |w| \qquad\qquad (z, w \in \mathbb{C}).$$

D'autres inégalités seront aussi utiles. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} \big|\mathrm{Re}\, z\big| &\leqslant |z|, \\ \big|\mathrm{Im}\, z\big| &\leqslant |z|, \end{aligned}$$

et pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a :

$$\big||z| - |w|\big| \leqslant |z - w|,$$

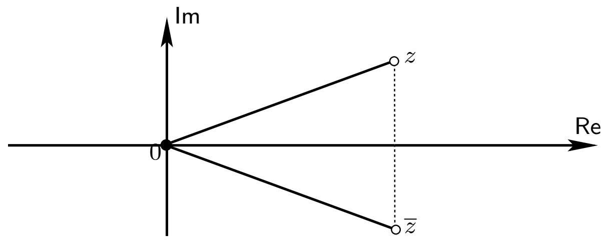
ce qui découle par soustraction de l'inégalité du triangle, puisque :

$$|z| \leqslant |z - w| + |w| \qquad \text{et} \qquad |w| \leqslant |z - w| + |z|.$$

Définition 9.2. Le *conjugué* d'un nombre complexe $z = x + i\,y$ est le nombre :

$$\overline{z} = x - i\,y,$$

que l'on obtient géométriquement en appliquant la symétrie le long de l'axe réel du plan complexe.



Évidemment, un nombre complexe z est réel si et seulement si :

$$z = \overline{z},$$

et il est imaginaire pur si et seulement si :

$$z = -\,\overline{z}.$$

On vérifie aussi sans difficulté que :

$$\begin{aligned}\mathsf{Re}\, z &= \frac{z+\overline{z}}{2},\\ \mathsf{Im}\, z &= \frac{z-\overline{z}}{2\,i}.\end{aligned}$$

De plus :

$$|z|^2 = z\,\overline{z},$$

et aussi :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \qquad\qquad (z\neq 0).$$

Définition 9.3. Un nombre complexe quelconque $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ non nul peut toujours s'écrire sous forme *polaire :*

$$z = r\,e^{i\,\theta},$$

avec $r > 0$ réel égal au module $|z|$ et $\theta \in \mathbb{R}$ appelé l'*argument* de z, qui est défini à un multiple entier $\in \mathbb{Z}$ de 2π près, traditionellement noté :

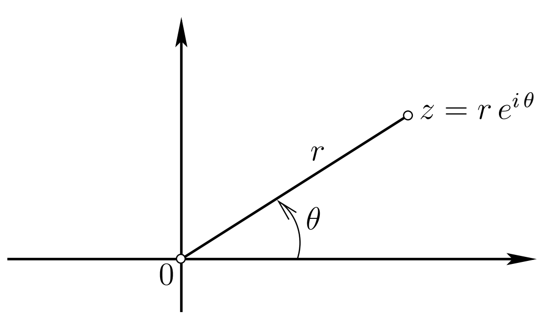
$$\theta = \mathsf{arg}\, z,$$

sachant que :

$$\begin{aligned}e^{i\,\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta,\\ e^{i(\theta+2k\pi)} &= \cos\big(\theta+2k\pi\big) + i\sin\big(\theta+2k\pi\big)\\ &= \cos\theta + i\sin\theta,\end{aligned}$$

pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ en effet.

Puisque $|e^{i\,\theta}| = 1$, le nombre θ est l'*angle* que fait la demi-droite $0z$ avec l'axe des réels positifs.



Enfin, notons que la multiplication entre deux nombres complexes $z = r\,e^{i\,\theta}$ et $w = s\,e^{i\,\varphi}$ donne :

$$z\,w = rs\,e^{i(\theta+\varphi)},$$

de telle sorte que *la multiplication complexe consiste toujours, géométriquement, en une homothétie composée (commutativement) avec une rotation*.

10. Exercices

Exercice 1. EE

Applications linéaires

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Introduction

2. Homomorphismes linéaires entre espaces vectoriels

Les concepts et définitions de ce chapitre sont valables sur n'importe quel corps commutatif $\mathbb{K}$, mais nous travaillerons le plus souvent avec le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ des nombres réels.

Définition 2.1. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Une application $f\colon E \longrightarrow F$ est dite *linéaire* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned}
&\forall\,\vec{x}\in E \quad \forall\,\vec{y}\in E && f\big(\vec{x}+\vec{y}\big) \,=\, f(\vec{x})+f(\vec{y}),\\
&\forall\,\vec{x}\in E \quad \forall\,a\in\mathbb{R} && f\big(a\,\vec{x}\big) \,=\, a\,f(\vec{x}).
\end{aligned}$$

La première condition exprime que f est un *homomorphisme* de E dans F pour l'addition. C'est pourquoi, au lieu d'application linéaire, on parle parfois d'*homomorphisme linéaire* entre espaces vectoriels.

Terminologie 2.2. Dans le cas où l'espace-arrivée $F = E$ coïncide avec l'espace-source, on dit que f est un *endomorphisme linéaire* de E.

Exemples 2.3. **(1)** La notion d'application linéaire dans le plan euclidien $V = \mathbb{R}^2$ ou dans l'espace euclidien $V = \mathbb{R}^3$ est connue dans les cours de géométrie de l'enseignement secondaire, puisqu'on y parle de *projections*, sur une droite, ou sur un plan. Si f est un projecteur quelconque, alors la relation :

$$f\big(\vec{x}+\vec{y}\big) \,=\, f(\vec{x})+f(\vec{y})$$

est nommée *théorème des projections*.

La relation :

$$f\big(a\,\vec{x}\big) \,=\, a\,f(\vec{x}) \qquad\qquad (\forall\,a\in\mathbb{R}),$$

est le fameux *Théorème de Thalès*.

Tout projecteur dans $V = \mathbb{R}^2$ ou $V = \mathbb{R}^3$ est un endomorphisme linéaire — nous y reviendrons au cours de ce chapitre.

(2) Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, fixons un scalaire a, et définissons une application h de E dans E comme suit :

$$\forall\,\vec{x}\in E \qquad\qquad h(\vec{x}) \,:=\, a\,\vec{x}.$$

On a évidemment :

$$h\big(\vec{x}+\vec{y}\big) \,=\, a\,\big(\vec{x}+\vec{y}\big) \,=\, a\,\vec{x}+a\,\vec{y} \,=\, h(\vec{x})+h(\vec{y}),$$

et aussi, puisque $\mathbb{R}$ est commutatif :

$$\forall\,b\in\mathbb{R} \qquad\qquad h\big(b\,\vec{x}\big) \,=\, a\,\big(b\,\vec{x}\big) \,=\, b\,\big(a\,\vec{x}\big) \,=\, b\,h(\vec{x}).$$

Par conséquent, l'application h est un endomorphisme linéaire de E. On la nomme *homothétie de rapport* a, et on la note parfois h_a.

Assertion 2.4. *Pour $a \neq 0$ fixée, l'homothétie h_a est une bijection de E.*

Preuve. Pour vérifier qu'on a en effet :

$$\forall\, \vec{y} \in E \qquad \exists\,!\, \vec{x} \in E \qquad \vec{y} \,=\, h(\vec{x}),$$

partons de :

$$\vec{y} \,=\, a\,\vec{x}.$$

Comme $a \neq 0$, son inverse a^{-1} pour la multiplication dans $\mathbb{R}$ existe, et donc l'existence de $\vec{x}$ est assurée par :

$$a^{-1}\,\vec{y} \,=\, \big(a^{-1}\,a\big)\,\vec{x} \,=\, \vec{x}.$$

Enfin, l'unicité de $\vec{x}$ résulte de :

$$a\,\vec{x} \,=\, a\,\vec{x}\,' \qquad \Longrightarrow \qquad a\,\big(\vec{x}-\vec{x}\,'\big) \,=\, \vec{0} \qquad \overset{a\neq 0}{\Longrightarrow} \qquad \vec{x}-\vec{x}\,' \,=\, \vec{0}. \qquad \square$$

Terminologie 2.5. Une application linéaire $h\colon E \longrightarrow E$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E dans lui même qui est *bijective* sera nommée *automorphisme linéaire* de E.

D'une façon plus générale, il se peut que la bijection linéaire s'exerce entre deux espaces distincts.

Terminologie 2.6. Une application linéaire bijective $h\colon E \longrightarrow F$ entre deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels E et F qui est *bijective* sera nommée *isomorphisme linéaire* entre E et F.

On dit aussi que E et F sont *isomorphes*. Quand $E = F$, on parle donc d'un *automorphisme*.

Proposition 2.7. [Critère de linéarité] *Pour qu'une application $f\colon E \longrightarrow F$ entre deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels soit linéaire, il faut et il suffit que :*

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \qquad \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E \qquad\qquad f\big(a\,\vec{x} + b\,\vec{y}\big) \,=\, a\,f(\vec{x}) + b\,f(\vec{y}).$$

Démonstration. Prouvons '$\Longrightarrow$'. Si l'application f est linéaire, alors on a :

$$f\big(a\,\vec{x}\big) \,=\, a\,f(\vec{x}), \qquad\qquad f\big(b\,\vec{x}\big) \,=\, b\,f(\vec{x}), \qquad\qquad f\big(a\,\vec{x} + b\,\vec{y}\big) \,=\, f\big(a\,\vec{x}\big) + f\big(b\,\vec{y}\big),$$

d'où :

$$f\big(a\,\vec{x} + b\,\vec{y}\big) \,=\, a\,f(\vec{x}) + b\,f(\vec{y}).$$

Inversement, prouvons '$\Longleftarrow$'. Partons donc de cette dernière relation. Puisqu'elle est vraie pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et tous vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in E$, nous pouvons prendre $a = b = 1$ pour obtenir la première condition de la Définition 2.1 ; ensuite, prenons $b = 0$ pour obtenir la deuxième condition. En définitive, f est bien linéaire. $\square$

Observation 2.8. *Toute application linéaire $f\colon E \longrightarrow F$ entre $\mathbb{R}$-espaces vectoriels satisfait :*

$$f(\vec{0}_E) \,=\, \vec{0}_F.$$

Preuve. Il suffit de prendre $a = 0$ dans la deuxième condition de la Définition 2.1. $\square$

3. Image et noyau d'une application linéaire

Commençons par étudier l'image d'une application linéaire.

Théorème 3.1. *Soit $f\colon E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels E et F. Alors pour tout sous-espace vectoriel $E' \subset E$, l'image :*

$$\begin{aligned} f(E') &:= \big\{\vec{y} \in F\colon\, \exists\,\vec{x}\,' \in E',\;\; \vec{y} = f(\vec{x}\,')\big\} \\ &= \big\{f(\vec{x}\,')\colon\; \vec{x}\,' \in E' \textit{ quelconque}\big\}, \end{aligned}$$

est aussi un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration. Prouvons que $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F, c'est-à-dire :

$$\Big(a,\, a' \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \vec{y},\, \vec{y}\,' \in f(E')\Big) \qquad \overset{?}{\Longrightarrow} \qquad a\,\vec{y} + a'\,\vec{y}\,' \,\in\, f(E').$$

En effet, si $\vec{y}$ et $\vec{y}\,'$ appartiennent à $f(E')$, c'est qu'il existe deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{x}\,'$ dans E' tels que :

$$\vec{y} \,=\, f(\vec{x}) \qquad \text{et} \qquad \vec{y}\,' \,=\, f(\vec{x}\,').$$

Comme E' est un sous-espace de E, alors, quels que soient les scalaires a et a', on a :

$$\big(\vec{x} \in E' \quad \text{et} \quad \vec{x}\,' \in E'\big) \qquad \Longrightarrow \qquad a\,\vec{x} + a'\,\vec{x}\,' \,\in\, E' \qquad \Longrightarrow \qquad f\big(a\,\vec{x} + a'\,\vec{x}'\big) \,\in\, f(E').$$

Mais comme f est linéaire :

$$f\big(a\,\vec{x} + a'\,\vec{x}\,'\big) \,=\, a\,f(\vec{x}) + a'\,f(\vec{x}'\,).$$

Par conséquent :

$$a\,\vec{y} + a'\vec{y}\,' \,\in\, f(E').$$

Le théorème est démontré. □

Définition 3.2. Quand le sous-espace $E' = E$ coïncide avec l'espace vectoriel ambiant tout entier, alors $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F que l'on nomme *image de* f, et que l'on note :

$$\begin{aligned} \mathsf{Im}\, f \,&:=\, f(E) \\ &=\, \big\{ f(\vec{x}) \in F\colon\; \vec{x} \in E \,\text{quelconque}\big\}. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant introduire le concept de *noyau* d'une application linéaire.

Définition 3.3. Soit $f\colon E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. L'ensemble des vecteurs de E qui ont pour image le vecteur $\vec{0} \in F$ se nomme *noyau* de f et se note :

$$\mathsf{Ker}(f) \,:=\, \big\{\vec{x} \in E\colon\; f(\vec{x}) = \vec{0}\big\}.$$

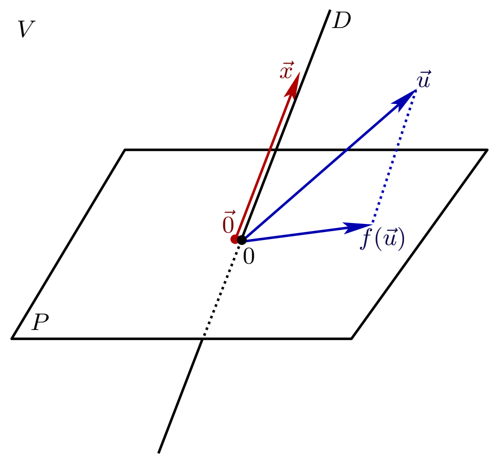
Noyau se dit *kernel* en anglais, et *Kern* en allemand. C'est pourquoi on rencontre très souvent la notation $\mathsf{Ker}(f)$, que nous adopterons.

Observons que $\mathsf{Ker}(f)$ n'est jamais vide, car, quelle que soit l'application linéaire f, on a $f(\vec{0}) = \vec{0}$, donc :

$$\vec{0} \,\in\, \mathsf{Ker}(f) \qquad\qquad \text{(toujours)}.$$

Exemple 3.4. [en géométrie euclidienne] Dans l'espace euclidien $V = \mathbb{R}^3$, soit un plan $P \ni 0$ passant par l'origine, et soit une droite $D \ni 0$ passant par l'origine, avec $D \not\parallel P$ non parallèle au plan.

Rappelons que les vecteurs $\vec{y} \in P$ sont les vecteurs liés ayant comme point-origine $0 \in V$, dont la flèche-extrémité appartient à P. De même, les vecteurs $\vec{x} \in D$ ont pour point-origine $0 \in D$, et une flèche-extrémité appartenant à D. On peut donc voir P et V comme deux sous-espaces vectoriels de V, de dimensions 2 et 1.



Désignons par f la projection de V sur P parallèle à D. On sait que f est une application linéaire de V dans lui-même, avec $f(V) = P$.

Cherchons le noyau de f.

Pour qu'un vecteur $\vec{x} \in V$ vérifie $f(\vec{v}) = \vec{0}$, c'est-à-dire ait une projection nulle dans V, il faut et il suffit que $\vec{x}$ appartienne à D. Ainsi :

$$\mathsf{Ker}(f) \;=\; D.$$

Théorème 3.5. *Pour toute application linéaire $f\colon E \longrightarrow F$ entre $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, le noyau $\mathsf{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve. En effet, partons de :

$$\vec{x} \;\in\; \mathsf{Ker}(f) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \vec{x}\,' \;\in\; \mathsf{Ker}(f),$$

ce qui équivaut à :

$$f(\vec{x}) \;=\; \vec{0} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad f(\vec{x}\,') \;=\; \vec{0}.$$

Comme f est linéaire, alors, quels que soient les scalaires a et a' :

$$f\big(a\,\vec{x} + a'\,\vec{x}\,'\big) \;=\; a\,f(\vec{x}) + a'\,f(\vec{x}\,') \;=\; \vec{0} + \vec{0} \;=\; \vec{0}.$$

Par conséquent :

$$a\,\vec{x} + a'\,\vec{x}\,' \;\in\; \mathsf{Ker}(f).$$

Le théorème est démontré. □

Voici maintenant une caractérisation des applications linéaires injectives.

Théorème 3.6. *Pour une application linéaire $f\colon E \longrightarrow F$ entre $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, on a l'équivalence :*

$$f \text{ est injective} \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad \mathsf{Ker}(f) \;=\; \{\vec{0}\}.$$

Démonstration. Prouvons '$\Longrightarrow$'. Supposons donc que l'application linéaire f est injective. Alors $\vec{x} \in \mathsf{Ker}(f)$ signifie :

$$f(\vec{x}) \;=\; \vec{0} \;=\; f(\vec{0}).$$

Comme f est injective, on en déduit que $\vec{x} = \vec{0}$, ce qui conclut :

$$\mathsf{Ker}(f) \;=\; \{\vec{0}\}.$$

Inversement, prouvons '$\Longleftarrow$'. Supposons $\mathsf{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$. Alors, quels que soient $\vec{x}$ et $\vec{x}\,'$ dans E :

$$
\begin{aligned}
f(\vec{x}) = f(\vec{x}\,') \quad &\iff \quad f(\vec{x}) - f(\vec{x}\,') = \vec{0} &&\iff \quad f\big(\vec{x} - \vec{x}\,'\big) = \vec{0} \\
&\iff \quad \vec{x} - \vec{x}\,' \in \mathsf{Ker}(f) &&\iff \quad \vec{x} - \vec{x}\,' = \vec{0} \\
& &&\iff \quad \vec{x} = \vec{x}\,'.
\end{aligned}
$$

Ceci signifie que f est injective, conclut l'implication inverse, et termine la démonstration du théorème. □

Parlons maintenant de l'image d'une famille de générateurs.

Théorème 3.7. **(1)** *Une application linéaire f de E dans F applique toute famille L de générateurs d'un sous-espace vectoriel $E' \subset E$, à savoir une famille L satisfaisnt :*

$$
\mathsf{Vect}\, L = E',
$$

sur une famille de générateurs de $f(E')$, à savoir :

$$
\mathsf{Vect}\, f(L) = f(E').
$$

(2) *Si f est de plus injective, elle applique toute famille libre de E sur une famille libre de F.*

Démonstration. Soit donc une famille de vecteurs de E :

$$
L := \big\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\big\}.
$$

Par une application linéaire $f\colon E \longrightarrow F$, elle devient la famille de vecteurs de F :

$$
f(F) = \big\{f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_p)\big\}.
$$

(1) Désignons par $E' := \mathsf{Vect}(L)$ le sous-espace de E engendré par L. Prouvons que $f(L)$ engendre le sous-espace $f(E')$. En effet :

$$
\vec{y} \in f(E') \qquad \text{signifie} \qquad \exists\, \vec{x} \in E' \quad \vec{y} = f(\vec{x}).
$$

Puisque L est une famille de générateurs de E', à un vecteur $\vec{x} \in E'$ correspond une famille $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ de scalaires tels que :

$$
\vec{x} = a_1\, \vec{x}_1 + \cdots + a_p\, \vec{x}_p.
$$

Par linéarité de f, on obtient :

$$
f(\vec{x}) = a_1\, f(\vec{x}_1) + \cdots + a_p\, f(\vec{x}_p).
$$

Tout vecteur $\vec{y}$ de $f(E')$ est donc une combinaison linéaire de vecteurs de $f(L)$. La première partie du théorème est prouvée.

(2) Supposons de plus la famille L *libre*, et l'application f *injective* ; prouvons que $f(L)$ est libre. En effet :

$$
a_1\, f(\vec{x}_1) + \cdots + a_p\, f(\vec{x}_p) = \vec{0} \qquad \Longrightarrow \qquad f(\vec{x}) = \vec{0} \qquad \iff \qquad \vec{x} \in \mathsf{Ker}(f).
$$

Comme f est injective, cela force $\vec{x} = \vec{0}$, grâce au Théorème 3.6. Comme $L = \big\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\big\}$ est libre, il vient :

$$
\vec{0} = \vec{x} = a_1\, \vec{x}_1 + \cdots + a_p\, \vec{x}_p \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = \cdots = a_p = 0.
$$

En définitive, la famille $f(L)$ est bien libre, ce qui termine la démonstration de la seconde partie du théorème. □

Corollaire 3.8. *Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et si F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel,* pas forcément de dimension finie*, alors pour toute application linéaire $f\colon E \longrightarrow F$, l'image $f(E) \subset F$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie $\leqslant \mathsf{dim}_{\mathbb{R}} E$.*

Preuve. En effet, l'hypothèse que E est de dimension finie veut dire qu'il existe une famille finie L de générateurs de E. Alors d'après le Théorème 3.7 qui précède, $f(L)$ est une famille *finie* de générateurs de $f(E)$. Si L est de plus une base de E, on déduit bien que :

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, f(E) \,\leqslant\, \mathsf{Card}\, L \,=\, \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, E \,<\, \infty. \qquad \square$$

Voici un résultat central qui exprime qu'une application linéaire est complètement déterminée lorsqu'on connaît seulement les images d'un nombre fini de vecteurs qui forment une *base* de l'espace vectoriel source.

Théorème 3.9. *Soit $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ une* base *d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$, et soit $C = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}$ une famille* quelconque *de n vecteurs d'un autre $\mathbb{R}$-espace vectoriel F.*

(1) *Alors il existe une application linéaire, et une seule, $f \colon E \longrightarrow F$ telle que :*

$$f(\vec{e}_1) \,=\, \vec{c}_1, \quad f(\vec{e}_2) \,=\, \vec{c}_2, \quad \dots\dots, \quad f(\vec{e}_n) \,=\, \vec{c}_n.$$

(2) *De plus, si la famille C est libre, alors f est injective.*

Démonstration. Commençons par l'existence de f. Définissons une application f de E dans F de la manière suivante : à tout vecteur $\vec{x} \in E$, associons d'abord l'unique famille de scalaires $a_1, \dots, a_n$ qui sont les coordonnées de $\vec{x}$ dans la base B :

$$\vec{x} \,=\, a_1\, \vec{e}_1 + \cdots + a_n\, \vec{e}_n.$$

À cet $\vec{x}$, faisons alors correspondre le vecteur $\vec{y} \in F$ défini par :

$$\vec{y} \,=\, f(\vec{x}) \,=\, a_1\, \vec{c}_1 + \cdots + a_n\, \vec{c}_n. \tag{3.10}$$

Le domaine de définition de f est bien sûr E tout entier, et l'image $f(E)$ est bien incluse dans F.

Prouvons que f est linéaire. Partons de deux vecteurs $\vec{x}, \vec{x}\,' \in E$, que nous écrirons sous forme condensée :

$$\vec{x} \,=\, \sum_i a_i\, \vec{e}_i \qquad \text{et} \qquad \vec{x}\,' \,=\, \sum_i a_i'\, \vec{e}_i.$$

Pour deux scalaires quelconques b et b', on a :

$$b\, \vec{x} + b'\, \vec{x}\,' \,=\, \sum_i b\, a_i\, \vec{e}_i + \sum_i b'\, a_i'\, \vec{e}_i \,=\, \sum_i \big(b\, a_i + b'\, a_i'\big)\, \vec{e}_i.$$

Par définition de l'application linéaire f, on a alors :

$$f(\vec{x}) \,=\, \sum_i a_i\, \vec{c}_i, \qquad f(\vec{x}\,') \,=\, \sum_i a_i'\, \vec{c}_i\,',$$

$$f\big(b\, \vec{x} + b'\, \vec{x}\,'\big) \,=\, \sum_i \big(b\, a_i + b'\, a_i'\big)\, \vec{c}_i.$$

Dans l'espace vectoriel F, on voit immédiatement que :

$$\sum_i \big(b\, a_i + b'\, a_i'\big)\, \vec{c}_i \,=\, b \sum_i a_i\, \vec{c}_i + b' \sum_i a_i'\, \vec{c}_i.$$

c'est-à-dire :

$$f\big(b\, \vec{x} + b'\, \vec{x}\,'\big) \,=\, b\, f(\vec{x}) + b'\, f(\vec{x}\,'),$$

ce qui montre que f est bien linéaire.

Passons à l'unicité de f. Par définition, toute autre application linéaire g de E dans F envoie :

$$\vec{x} \,=\, a_1\, \vec{e}_1 + \cdots + a_n\, \vec{e}_n$$

sur :

$$g(\vec{x}) \,=\, a_1\, g(\vec{e}_1) + \cdots + a_n\, g(\vec{e}_n).$$

Par conséquent, si on fixe dans F comme pour f :

$$g(\vec{e}_1) \,:=\, \vec{c}_1, \quad \dots\dots, \quad g(\vec{e}_n) \,:=\, \vec{c}_n,$$

on obtient une application g particulière qui vérifie :

$$g(\vec{x}) \,=\, f(\vec{x}) \qquad\qquad (\forall\,\vec{x}\in E),$$

d'où :

$$g \,=\, f,$$

ce qui montre l'unicité de l'application f.

Terminons l'argumentation en montrant que f sera de plus injective, quand on suppose que $C=\{\vec{c}_1,\dots,\vec{c}_n\}$ est libre.

Soit donc $\vec{x}\in E$ avec $f(\vec{x})=\vec{0}$. Comme $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ est une base, on peut décomposer selon cette base $\vec{x}=a_1\,\vec{e}_1+\cdots+a_n\,\vec{e}_n$, d'où :

$$\vec{0} \,=\, f(\vec{x}) \,=\, a_1\,\vec{c}_1+\cdots+a_n\,\vec{c}_n \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 \,=\, \cdots \,=\, a_n \,=\, 0,$$

puisque $\{\vec{c}_1,\dots,\vec{c}_n\}$ est libre. Ainsi, nous avons bien démontré que :

$$\Big(f(\vec{x}) \,=\, \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} \,=\, \vec{0}\Big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathsf{Ker}(f) \,=\, \{\vec{0}\}. \qquad \square$$

Des deux Théorèmes 3.7 et 3.9, on déduit immédiatement le

Corollaire 3.11. *Pour qu'une application $f\colon E\longrightarrow F$ entre $\mathbb{R}$-espaces vectoriels soit injective, il faut et il suffit que l'image d'une base de E soit une base de $f(E)$.* $\square$

4. Applications linéaires et dimension

Nous savons que l'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uplets $(a_1,\dots,a_n)$ constitués de n réels $a_i\in\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 4.1. On appelle *base canonique* de $\mathbb{R}^n$ la base $\big\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\big\}$ suivante :

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 \,&:=\, \big(1,0,\dots,0\big),\\
\vec{u}_2 \,&:=\, \big(0,1,\dots,0\big),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\vec{u}_n \,&:=\, \big(0,0,\dots,1\big).
\end{aligned}$$

Pour tout indice $1\leqslant i\leqslant n$, le vecteur $\vec{u}_i$ est le n-uplet dont tous les termes sont nuls, sauf celui de rang i qui vaut 1. Dans tout ce qui suit, nous supposerons toujours que $\mathbb{R}^n$ est rapporté à la base canonique :

$$\big(a_1,\,a_2,\,\dots,\,a_n\big) \,=\, a_1\,\vec{u}_1+a_2\,\vec{u}_2+\cdots+a_n\,\vec{u}_n.$$

Voici un théorème qui exprime une propriété fondamentale d'isomorphisme.

Théorème 4.2. *Pour qu'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E soit de dimension n, il faut et il suffit qu'il soit* isomorphe *à $\mathbb{R}^n$, à savoir qu'il existe un isomorphisme linéaire :*

$$f\colon\quad E \overset{\sim}{\longrightarrow} \mathbb{R}^n.$$

L'isomorphisme est alors déterminé de façon unique dès qu'on fixe une base de E comme image de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Prouvons l'implication '$\Longrightarrow$'. Supposons donc que $\dim_{\mathbb{R}} E=n$, et soit une base de E :

$$B \,:=\, \big\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\big\}.$$

Comme ci-dessus, soit $C=\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

D'après le Théorème 3.9, il existe une application linéaire f et une seule telle que :

$$f(\vec{e}_1) \,=\, \vec{u}_1,\ \ \ldots\ldots,\ \ f(\vec{e}_n) \,=\, \vec{u}_n,$$

et de plus, f est injective. Mais elle est aussi surjective, car C engendre à la fois $f(E)$ et $\mathbb{R}^n$, donc $f(E) = \mathbb{R}^n$.

Puisque f est bijective, elle établit bien un *isomorphisme* de E sur $\mathbb{R}^n$.

Observons que f est d'ailleurs l'unique application linéaire de E dans F qui envoie B sur C.

Prouvons maintenant l'implication inverse '$\Longleftarrow$'. Si donc il existe un isomorphisme f de E sur $\mathbb{R}^n$, posons :

$$\vec{e}_1 := f^{-1}(\vec{u}_1), \;\; \ldots\ldots, \;\; \vec{e}_n := f^{-1}(\vec{u}_n).$$

D'après le Théorème 3.7, l'application linéaire f^{-1} envoie la famille libre $C = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ de générateurs de $\mathbb{R}^n$ sur la famille libre $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ de générateurs de $f^{-1}(\mathbb{R}^n) = E$. Donc B est bien une base de E, et $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, E = n$, ce qui conclut. $\square$

Voici maintenant un théorème très important qui établit une relation entre les dimensions du noyau et de l'image.

Théorème 4.3. [du rang] *Pour toute application linéaire $f\colon E \longrightarrow F$ entre deux espaces vectoriels, on a :*

$$\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}(f) + \mathsf{dim}\,\mathsf{Im}(f) \;=\; \mathsf{dim}\, E.$$

Démonstration. Soient :

$$B := \big\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\big\} \quad \text{une base de } \mathsf{Ker}(f) \subset E,$$

$$C := \big\{\vec{\ell}_1, \ldots, \vec{\ell}_q\big\} \quad \text{une base de } \mathsf{Im}(f) \subset F,$$

où on a posé :

$$p := \mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}(f),$$

$$q := \mathsf{dim}\,\mathsf{Im}(f).$$

On sait que $\vec{y} \in \mathsf{Im}(f)$ signifie qu'il existe un vecteur $\vec{x} \in E$ avec $\vec{y} = f(\vec{x})$. Donc, pour tout indice $1 \leqslant i \leqslant q$, il existe un vecteur de E, que nous désignerons par $\vec{e}_{p+i}$, tel que :

$$f\big(\vec{e}_{p+i}\big) \;=\; \vec{\ell}_i.$$

On obtient ainsi une famille B' de q vecteurs de E :

$$B' := \big\{\vec{e}_{p+1}, \ldots, \vec{e}_{p+q}\big\}.$$

Nous affirmons que $B \cup B'$ est alors une *base* de E, ce que nous démontrons en deux temps.

Assertion 4.4. *$B \cup B'$ engendre $E = \mathsf{Vect}\,(B \cup B')$.*

Preuve. Montrons que tout $\vec{x} \in E$ est combinaison linéaire de vecteurs appartenant à $B \cup B'$. En effet :

$$\vec{x} \in E \qquad \Longrightarrow \qquad f(\vec{x}) \in f(E) = \mathsf{Im}\, f.$$

Il existe donc des scalaires $a_1, \ldots, a_q \in \mathbb{R}$, coordonnées de $f(\vec{x})$ dans la base de $\mathsf{Im}\, f$, tels que :

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= a_1\,\vec{\ell}_1 + \cdots + a_q\,\vec{\ell}_q \\ &= a_1\, f\big(\vec{e}_{p+1}\big) + \cdots + a_q\, f\big(\vec{e}_{p+q}\big) \\ &= f\,\big(a_1\,\vec{e}_{p+1} + \cdots + a_q\,\vec{e}_{p+q}\big). \end{aligned}$$

Si on pose :

$$\vec{x}\,' := a_1\,\vec{e}_{p+1} + \cdots + a_q\,\vec{e}_{p+q}, \tag{4.5}$$

alors :

$$f(\vec{x}) = f\big(\vec{x}\,'\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{x} - \vec{x}\,' \in \mathsf{Ker}(f).$$

Il existe donc des scalaires $a_1', \ldots, a_p'$, coordonnées de $\vec{x} - \vec{x}\,'$ dans B, tels que :

$$\vec{x} - \vec{x}\,' \;=\; a_1'\,\vec{e}_1 + \cdots + a_p'\,\vec{e}_p,$$

d'où, en remplaçant $\vec{x}\,'$ par sa valeur dans (4.5) :

$$\vec{x} \,=\, a_1'\,\vec{e}_1 + \cdots + a_p'\,\vec{e}_p + a_1\,\vec{e}_{p+1} + \cdots + a_q\,\vec{e}_{p+q}.$$

Donc $B \cup B'$ engendre E. □

Assertion 4.6. *$B \cup B'$ est une famille libre dans E.*

Preuve. Partons de :

$$a_1'\,\vec{e}_1 + \cdots + a_p'\,\vec{e}_p + a_1\,\vec{e}_{p+1} + \cdots + a_q\,\vec{e}_{p+q} \;=\; \vec{0}, \tag{4.7}$$

et montrons que tous les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls. Prenons l'image par f des deux membres de (4.7) :

$$a_1'\,\underline{f(\vec{e}_1)}_{\circ} + \cdots + a_p'\,\underline{f(\vec{e}_p)}_{\circ} + a_1\,f(\vec{e}_{p+1}) + \cdots + a_q\,f(\vec{e}_{p+q}) \;=\; \vec{0}.$$

Comme, pour tout indice $1 \leqslant i \leqslant p$, on a :

$$\vec{e}_i \,\in\, \mathsf{Ker}(f) \qquad\Longrightarrow\qquad f(\vec{e}_i) \,=\, \vec{0},$$

on obtient :

$$a_1\,f\big(\vec{e}_{p+1}\big) + \cdots + a_q\,f\big(\vec{e}_{p+q}\big) \;=\; \vec{0},$$

c'est-à-dire :

$$a_1\,\vec{\ell}_1 + \cdots + a_q\,\vec{\ell}_q \;=\; \vec{0}.$$

Comme C est une famille libre, cette relation entraîne :

$$a_1 \;=\; \cdots \;=\; a_q \;=\; 0.$$

La relation (4.7) s'écrit alors :

$$a_1'\,\vec{e}_1 + \cdots + a_p'\,\vec{e}_p \;=\; \vec{0}.$$

Comme B est une famille libre, cette relation entraîne à son tour :

$$a_1' \;=\; \cdots \;=\; a_p' \;=\; 0.$$

Ainsi, $B \cup B'$ est bien une famille libre. □

Grâce à la conjonction de ces deux assertions, le théorème est démontré. □

Le cas où $\dim E = \dim F$ mérite d'être mis en valeur.

Corollaire 4.8. *Soit $f\colon E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de même dimension. Alors les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est bijective ;*

(ii) *f est surjective ;*

(iii) *f est injective ;*

(iv) $\mathsf{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$.

Preuve. On sait déjà que les propriétés **(iii)** et **(iv)** sont équivalentes.

D'autre part, **(i)** est équivalente à la conjonction des propriétés **(ii)** et **(iii)**.

Il suffit donc d'établir l'équivalence entre **(ii)** et **(iv)**. Or d'après le Théorème du rang 4.3 :

$$\dim E \;=\; \dim \mathsf{Ker}\, f + \dim \mathsf{Im}\, f,$$

donc on a :

$$0 \;=\; \dim \mathsf{Ker}(f) \qquad\Longleftrightarrow\qquad {\scriptstyle (\dim F\,=\,)}\; \dim E \;=\; \dim \mathsf{Im}(f),$$

c'est-à-dire :

$$\{\vec{0}\} \;=\; \mathsf{Ker}\, f \qquad\Longleftrightarrow\qquad F \;=\; \mathsf{Im}\, f.$$

Par conséquent, **(iv)** et **(ii)** sont bien équivalentes, ce qui conclut. □

5. Espace vectoriel des applications linéaires de E dans F

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. L'ensemble des applications linéaires de E dans F sera noté :

$$\mathscr{L}(E,F) := \big\{f\colon E \longrightarrow F \text{ linéaires}\big\}.$$

Nous allons munir cet ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Commençons par observer que la somme de deux applications linéaires est encore une application linéaire.

Lemme 5.1. *Si f et g sont deux applications linéaires appartenant à $\mathscr{L}(E,F)$, alors l'application $h\colon E \longrightarrow F$ définie par :*

$$h(\vec{x}) := f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \qquad (\forall\,\vec{x} \in E)$$

est aussi linéaire.

Preuve. En effet, pour tous vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in E$ et tous scalaires $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$h\big(a\,\vec{x} + b\,\vec{y}\big) = f\big(a\,\vec{x} + b\,\vec{y}\big) + g\big(a\,\vec{x} + b\,\vec{y}\big).$$

Comme f et g sont linéaires, et comme l'addition est commutative, on déduit :

$$\begin{aligned} h\big(a\,\vec{x} + b\,\vec{y}\big) &= a\,f(\vec{x}) + a\,g(\vec{x}) + b\,f(\vec{y}) + b\,g(\vec{y}) \\ &= a\,h(\vec{x}) + b\,g(\vec{y}). \end{aligned}$$

Ceci démontre le lemme. □

La définition suivante est alors justifiée.

Définition 5.2. À tout couple ordonné f, g de deux éléments de $\mathscr{L}(E,F)$, on associe un élément de $\mathscr{L}(E,F)$, nommé *somme* de f et de g, et noté $f + g$, qui est défini par :

$$\big(f+g\big)(\vec{x}) := f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \qquad (\forall\,\vec{x} \in E).$$

Cette addition est donc bien une loi interne dans $\mathscr{L}(E,F)$.

Théorème 5.3. *$\mathscr{L}(E,F)$ possède une structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Démonstration. Tout d'abord, l'addition dans $\mathscr{L}(E,F)$ est commutative et associative, puisqu'il en va ainsi de l'addition dans $\mathbb{R}$.

Ensuite, cette addition admet comme élément neutre la *fonction nulle*, notée $f = 0$, définie par :

$$0(\vec{x}) := \vec{0} \qquad (\forall\,\vec{x} \in E).$$

Ici, remarquons au passage que $\mathrm{Ker}(0) = E$, et que la fonction nulle est la seule dont le noyau coïncide avec E tout entier.

Ensuite, toute application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ a une opposée, notée $-f$, appartenant aussi à $\mathscr{L}(E,F)$, qui est définie par :

$$\big(-f\big)(\vec{x}) := -f(\vec{x}) \qquad (\forall\,\vec{x} \in E).$$

Ensuite, parlons du produit d'une application linéaire par un scalaire. Pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque, introduisons l'application h de E dans F définie par :

$$h(\vec{x}) := a\,f(\vec{x}) \qquad (\forall\,\vec{x} \in E).$$

Alors pour tout couple de vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in E$ et tout couple de scalaires $b, c \in \mathbb{R}$, on a, puisque $\mathbb{R}$ est commutatif :

$$\begin{aligned} h\big(b\,\vec{x} + c\,\vec{y}\big) = a\,f\big(b\,\vec{x} + c\,\vec{y}\big) &= a\,b\,f(\vec{x}) + a\,c\,f(\vec{y}) \\ &= b\,a\,f(\vec{x}) + c\,a\,f(\vec{y}) \\ &= b\,h(\vec{x}) + c\,h(\vec{y}). \end{aligned}$$

Ce calcul justife la

Définition 5.4. À tout scalaire $a \in \mathbb{R}$ et à toute application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$, on associe le *produit de a par f*, qui est défini par :

$$\big(a\, f\big)(\vec{x}) \,:=\, a\, f(\vec{x}) \qquad\qquad (\forall\, \vec{x} \in E).$$

Ainsi, $a\, f \in \mathscr{L}(E, F)$. Pour terminer la démonstration du théorème, il est maintenant aisé de vérifier, pour toutes $f, g, \in \mathscr{L}(E, F)$ et tous $a, b \in \mathbb{R}$, que :

$$\begin{aligned} \big(a+b\big)\, f \,&=\, a\, f + b\, f, \\ a\, \big(f+g\big) \,&=\, a\, f + b\, g, \\ a\, \big(b\, f\big) \,&=\, (a\, b)\, f, \\ 1\, f \,&=\, f. \end{aligned}$$

Ces identités concluent la démonstration. □

6. Dual d'un espace vectoriel

Dans cette très courte section, introduisons le concept important de *dual* d'un espace vectoriel.

Pour cela, considérons dans la Section **5** qui précède le cas particulier où $F = \mathbb{R}$ est le corps des scalaires. Rappelons qu'on peut toujours regarder le corps $\mathbb{R}$ comme un espace vectoriel sur lui-même.

Terminologie 6.1. Toute application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ se nomme *forme linéaire* sur E.

Notation 6.2. L'espace de ces formes linéaires sur E sera noté :

$$E^* \,=\, \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$$

Le Théorème 5.3 montre que cet ensemble $E^* \,=\, \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires de E dans $\mathbb{R}$ est lui-même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Terminologie 6.3. On nommera *dual de E* cet espace $E^* \,=\, \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E.

7. Anneau des endomorphismes linéaires d'un espace vectoriel E

Rappelons qu'une application linéaire de E dans E lui-même est appelée un *endomorphisme* de E. L'ensemble des endomorphismes de E sera noté :

$$\mathscr{L}(E) \,:=\, \big\{f\colon E \longrightarrow E \ \text{ linéaires}\big\},$$

au lieu de $\mathscr{L}(E, E)$. Le Théorème 5.3 s'applique : *$\mathscr{L}(E)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.*

Nous allons considérer une deuxième loi de composition interne dans $\mathscr{L}(E)$ qui va le structurer en *anneau*. Commençons par un

Lemme 7.1. *Étant donné trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels E, F, G, pour deux applications linéaires quelconques :*

$$f \,\in\, \mathscr{L}(E, F) \qquad\qquad \textit{et} \qquad\qquad g \,\in\, \mathscr{L}(F, G),$$

l'application composée $g \circ f$ est encore linéaire, c'est-à-dire :

$$g \circ f \,\in\, \mathscr{L}(E, G).$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Preuve. Pour tout couple de scalaires $a, b \in \mathbb{R}$, puisque f et g sont linéaires, on a :

$$f\big(a\,\vec{x} + b\,\vec{x}\,'\big) \;=\; a\,f(\vec{x}) + b\,f(\vec{x}\,'), \qquad (\forall\,\vec{x} \in E,\ \forall\,\vec{x}\,' \in E)$$

$$g\big(a\,\vec{y} + b\,\vec{y}\,'\big) \;=\; a\,g(\vec{y}) + b\,g(\vec{y}\,') \qquad (\forall\,\vec{y} \in F,\ \forall\,\vec{y}\,' \in F).$$

Prenons $\vec{y} := f(\vec{x})$ et $\vec{y}\,' := f(\vec{x}\,')$. Alors on a bien linéarité de $g \circ f$ grâce au calcul :

$$\begin{aligned} g \circ f\,\big(a\,\vec{x} + b\,\vec{x}\,'\big) \;&=\; g\big(a\,f(\vec{x}) + b\,f(\vec{x}\,')\big) \\ &=\; a\ g \circ f(\vec{x}) + b\ g \circ f(\vec{x}\,'). \end{aligned}$$

□

L'énoncé suivant établit la distributivité de la composition par rapport à l'addition, à droite et à gauche :

Théorème 7.2. **(1)** *Soient* $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$ *et* $h \in \mathscr{L}(F, G)$. *Alors :*

$$h \circ \big(f + g\big) \;=\; h \circ f + h \circ g.$$

(2) *Soient* $h \in \mathscr{L}(E, F)$ *et* $f, g \in \mathscr{L}(F, G)$. *Alors :*

$$\big(f + g\big) \circ h \;=\; f \circ h + g \circ h.$$

Preuve. **(1)** Clairement :

$$\big(f + g\big)(\vec{x}) \;=\; f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \qquad (\forall\,\vec{x} \in E).$$

Par l'application linéaire h, on obtient :

$$h \circ \big(f + g\big)(\vec{x}) \;=\; h\big(f(\vec{x}) + g(\vec{x})\big) \;=\; h \circ f(\vec{x}) + h \circ g(\vec{x}),$$

ce qui est la première partie du théorème.

(2) Pour tout $\vec{x} \in E$, posons :

$$\vec{y} \;:=\; h(\vec{x}).$$

Or par définition de la somme de deux applications linéaires :

$$\big(f + g\big)(\vec{y}) \;=\; f(\vec{y}) + g(\vec{y}) \qquad (\forall\,\vec{y} \in F),$$

ce qui entraîne :

$$\big(f + g\big) \circ h(\vec{x}) \;=\; f \circ h(\vec{x}) + g \circ h(\vec{x}),$$

puis termine la deuxième partie, et conclut. □

Maintenant, la composition d'applications linéaires peut être vue comme une 'multiplication' $\times$ qui conduit à une structure d'anneau pour la collection $\mathscr{L}(E)$ des endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Mais attention ! Il y a une grande différence entre $\circ$ et $\times$, car la composition n'est en général pas commutative :

$$f \circ g \;\neq\; g \circ f \qquad (f, g \in \mathscr{L}(E),\ \text{en général}),$$

nous y reviendrons, nous donnerons des exemples plus tard.

En tout cas, le Lemme 7.1 appliqué à $E = F = G$ montre que la loi de composition :

$$\big(f, g\big) \;\longmapsto\; g \circ f$$

est *interne* dans $\mathscr{L}(E)$, à savoir $g \circ f \in \mathscr{L}(E)$ lorsque $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Le Théorème 7.2 montre que cette loi est distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition. De plus, cette loi admet un élément neutre pour la composition, à savoir l'application identité, ou de coïncidence :

$$c(\vec{x}) \;:=\; \vec{x} \qquad (\forall\,\vec{x} \in E).$$

En conclusion, nous pouvons donc énoncer le

Théorème 7.3. $\mathscr{L}(E)$, *muni des opérations* $(+, \circ)$, *est un anneau à élément unité.* □

Terminologie 7.4. On appelle $\mathscr{L}(E)$ *anneau des endomorphismes* de E.

8. Groupe des automorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E

Commençons par quelques rappels généraux de théorie des ensembles.

Terminologie 8.1. On appelle *permutation* toute application *bijective* $E \xrightarrow{\sim} E$ d'un ensemble E sur lui-même.

Les permutations peuvent être composées entre elles, et inversées, puisqu'elles sont bijectives. En fait, une structure plus riche existe, comme l'énonce le

Lemme 8.2. *La collection des permutations d'un ensemble E est toujours un groupe pour la composition.*

Preuve. La composition de deux bijections :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & E \arrow[r, "g"] & E \end{tikzcd}$$

est encore une bijection, et cette opération de composition admet comme élément neutre l'application identité. Ensuite, cette opération de composition est (trivialement) associative :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & E \arrow[r, "g"] & E \arrow[r, "h"] & E \end{tikzcd} \;=\; \begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h\circ g"] & E \arrow[r, "h"] & E, \end{tikzcd}$$

à savoir :

$$h \circ \big(g \circ f\big) \,=\, \big(h \circ g\big) \circ f,$$

mais elle n'est la plupart du temps *pas* commutative, comme nous l'avons signalé plus haut. Enfin, l'inverse d'une bijection est encore une bijection :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, bend left, "f"] & E. \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

□

Quand E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on s'intéresse bien évidemment aux permutations qui sont, de plus, linéaires.

Il en existe ! Par exemple, l'application identité $E \longrightarrow E$ est linéaire ! Donnons un autre exemple. Si on munit E, supposé de dimension finie $n \geqslant 1$, d'une base :

$$B \,:=\, \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\big\},$$

toute permutation g de B qui envoie chaque vecteur $\vec{e}_i$ sur un certain autre vecteur $\vec{e}_j$ définit une autre base :

$$B' \,:=\, \big\{g(\vec{e}_1), g(\vec{e}_2), \dots, g(\vec{e}_n)\big\} \,=\, \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\big\} \,=\, B,$$

qui coïncide avec B à un changement d'ordre près, d'où :

$$\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}(B') \,=\, \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}(B) \,=\, E,$$

et alors, grâce au Théorème 3.9, on sait qu'il existe un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire unique $f\colon E \longrightarrow E$ qui prolonge g au sens où pour tout indice $1 \leqslant i \leqslant n$, on a :

$$f(\vec{e}_i) \,=\, g(\vec{e}_i),$$

et on sait aussi que f est bijectif, *i.e.* est un *automorphisme linéaire* de E.

Notation 8.3. L'ensemble des automorphismes linéaires d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E sera noté :

$$\mathscr{A}(E) \,:=\, \big\{f\colon E \xrightarrow{\sim} E \ \text{ linéaires et bijectives}\big\}.$$

Théorème 8.4. *L'ensemble $\mathscr{A}(E)$ des automorphismes linéaires d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est un sous-groupe de l'ensemble des permutations de E, envisagé comme ensemble.*

Preuve. Rappelons que, pour qu'une permutation de E appartienne à $\mathscr{A}(E)$, il faut et il suffit qu'elle soit linéaire. Le Lemme 7.1 a déjà fait voir que la composition d'applications linéaires préserve la linéarité :

$$\big(f \,\in\, \mathscr{A}(E) \quad \text{et} \quad g \,\in\, \mathscr{A}(E)\big) \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad g \circ f \,\in\, \mathscr{A}(E).$$

Prouvons enfin que l'inversion préserve aussi la linéarité :

$$f \,\in\, \mathscr{A}(E) \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad f^{-1} \,\in\, \mathscr{L}(E).$$

Il s'agit de démontrer que, quels que soient les scalaires $a, b \in \mathbb{R}$, et les vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in E$, on a :

$$f^{-1}\big(a\,\vec{x} + b\,\vec{y}\big) \,=\, a\,f^{-1}(\vec{x}) + b\,f^{-1}(\vec{y}). \tag{8.5}$$

Or puisque f est, entre autres, injective, il suffit de prouver que les deux membres ont même image par f. Pour le membre de droite, on a :

$$f \circ f^{-1}\big(a\,\vec{x} + b\,\vec{y}\big) \,=\, a\,\vec{x} + b\,\vec{y}.$$

Pour le membre de gauche, en utilisant la linéarité de f, on calcule :

$$\begin{aligned} f\Big(a\,f^{-1}(\vec{x}) + b\,f^{-1}(\vec{y})\Big) &= a\; f \circ f^{-1}(\vec{x}) + b\; f \circ f^{-1}(\vec{y}) \\ &= a\,\vec{x} + b\,\vec{y}. \end{aligned}$$

La relation (8.5) est donc vérifiée, et le théorème est ainsi démontré. □

Terminologie 8.6. Le groupe $\mathscr{A}(E)$ des automorphismes linéaires de E se nomme aussi *groupe linéaire*.

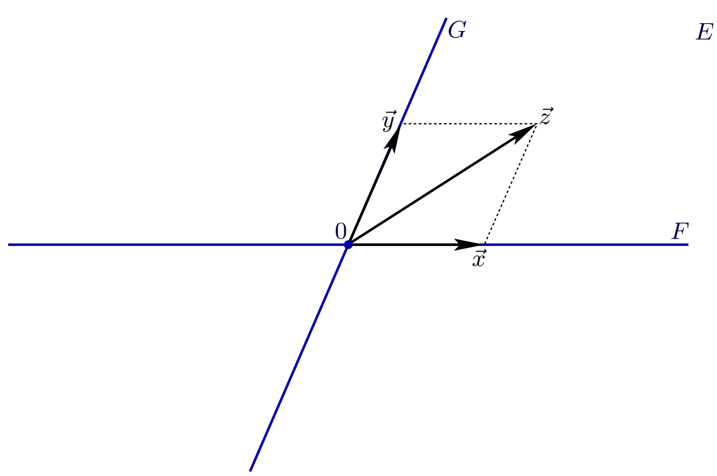
9. Projecteurs

À la fin du chapitre précédent, nous avons vu que deux sous-espaces $F \subset E$ et $G \subset E$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E sont dits *supplémentaires* dans E s'ils sont d'intersection $\{\vec{0}\} = F \cap G$ nulle, et de somme $F + G = E$ qui engendre E, propriété que l'on a notée :

$$F \oplus G \,=\, E.$$

Alors pour tout vecteur $\vec{z} \in E$, il existe un unique vecteur $\vec{x} \in F$ et un unique vecteur $\vec{y} \in G$ tels que :

$$\vec{z} \,=\, \vec{x} + \vec{y}.$$

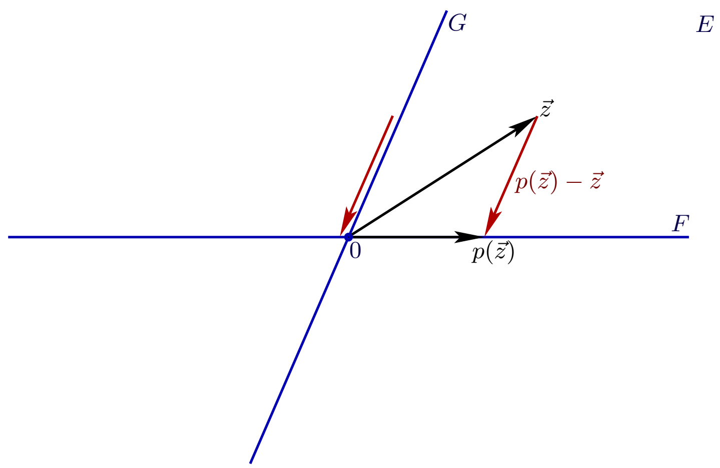


Par analogie avec la géométrie euclidienne, $\vec{x}$ se nomme *projection* de $\vec{z}$ sur F parallèlement à G, tandis que $\vec{y}$ se nomme *projection* de $\vec{z}$ sur G parallèlement à F.

Définition 9.1. F et G étant deux sous-espaces supplémentaires de $E = F \oplus G$, les deux applications $p\colon E \longrightarrow F$ et $q\colon E \longrightarrow G$ telles que :

$$p(\vec{z}) + q(\vec{z}) \;=\; \vec{z} \qquad\qquad (\forall\, \vec{z} \in E),$$

se nomment respectivement *projecteur de E sur F* parallèlement à G, et *projecteur de E sur G* parallèlement à F.



En d'autres termes, le projecteur p de E sur F associe à tout $\vec{z} \in E$ l'unique vecteur $p(\vec{z}) \in F$ vérifiant :

$$p(\vec{z}) - \vec{z} \;\in\; G.$$

De même, le projecteur q de E sur G associe à tout $\vec{z} \in E$ l'unique vecteur $q(\vec{z}) \in G$ tel que :

$$q(\vec{z}) - \vec{z} \;\in\; F.$$

Ces projecteurs satisfont quelques propriétés élémentaires.

Lemme 9.2. *Tout projecteur est une application linéaire.*

Preuve. Soit $E = F \oplus G$. Démontrons la linéarité du projecteur $p\colon E \longrightarrow F$.

Pour tout couple de scalaires $a, a' \in \mathbb{R}$ et tout couple de vecteurs $\vec{z}, \vec{z}\,' \in E$, on a :

$$p\big(a\,\vec{z} + a'\,\vec{z}\,'\big) - \big(a\,\vec{z} + a'\,\vec{z}\,'\big) \;\in\; G. \tag{9.3}$$

Or les relations :

$$p(\vec{z}) - \vec{z} \in G \qquad \text{et} \qquad p(\vec{z}\,') - \vec{z}\,' \in G$$

entraînent, puisque G est un sous-espace vectoriel de E :

$$a\,\big(p(\vec{z}) - \vec{z}\big) + a'\,\big(p(\vec{z}\,') - \vec{z}\,'\big) \;\in\; G,$$

soit :

$$a\,p(\vec{z}) + a'\,p(\vec{z}\,') - \big(a\,\vec{z} + a'\,\vec{z}\,'\big) \;\in\; G. \tag{9.4}$$

Comme, pour tout $\vec{y}$ de E, la projection $p(\vec{y})$ est l'unique vecteur de F tel que $p(\vec{y}) - \vec{y} \in G$, alors en comparant (9.3) avec (9.4), on obtient bien la linéarité :

$$p\big(a\,\vec{z} + a'\,\vec{z}\,'\big) \;=\; a\,p(\vec{z}) + a'\,p(\vec{z}\,').$$

Par symétrie, la démonstration de la linéarité de l'autre projecteur $q\colon E \longrightarrow G$ est en tout point analogue, et sera éludée. □

Lemme 9.5. *Si p et q sont les projecteurs de $E = F \oplus G$ sur les sous-espaces supplémentaires F et G, parallèlement à l'autre, alors :*

$$\mathsf{Ker}(p) \;=\; G \qquad\qquad \textit{et} \qquad\qquad \mathsf{Ker}(q) \;=\; F.$$

Démonstration. Puisque, pour tout vecteur $\vec{z} \in E$, on sait que $p(\vec{z})$ est l'unique vecteur tel que $p(\vec{z}) - \vec{z} \in G$, alors, la condition nécessaire et suffisante pour que $p(\vec{z}) = \vec{0}$ est que $\vec{0} - \vec{z} \in G$, soit $\vec{z} \in G$. Donc $\mathsf{Ker}(p) = G$.

La démonstration de $\mathsf{Ker}(q) = F$ est (très) analogue. □

Lemme 9.6. *Tout projecteur :*

$$p\colon \quad E \;=\; F \oplus G \;\longrightarrow\; F \;\subset\; E$$

est un endomorphisme de E vérifiant :

$$p \circ p \;=\; p.$$

Preuve. En effet, puisque $E = F \oplus G$ et puisque p est le projecteur de E sur F, on a :

$$p(\vec{z}) - \vec{z} \;\in\; G \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \mathsf{Ker}(p) \;=\; G,$$

ce qui entraîne :

$$p\big(p\,(\vec{z}) - \vec{z}\big) \;=\; \vec{0} \qquad\qquad (\forall\, \vec{z} \in E).$$

Or comme p est linéaire, on en déduit :

$$p \circ p(\vec{z}) - p(\vec{z}) \;=\; \vec{0},$$

soit effectivement :

$$p \circ p \;=\; p.$$

□

Au sous-espace F de E ne correspond pas un unique supplémentaire G. On ne peut donc pas dire 'le' supplémentaire de F. Mais tous les supplémentaires de F sont isomorphes entre eux, comme le stipule le

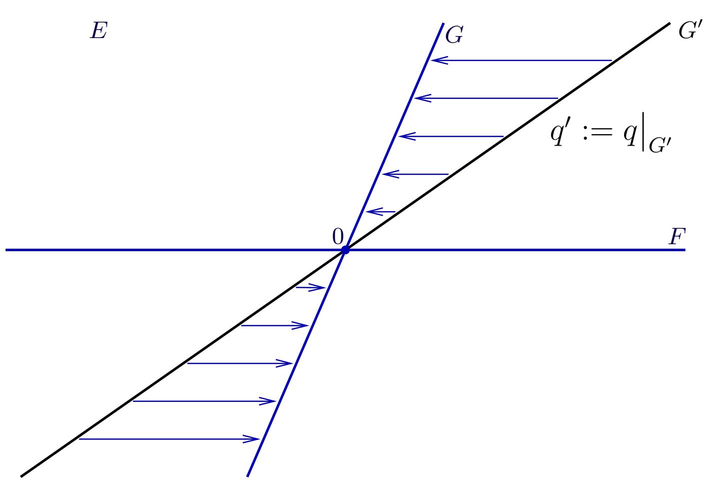
Théorème 9.7. *Soient G et G' deux sous-espaces supplémentaires d'un même sous-espace $F \subset E$ d'un espace vectoriel E :*

$$E \;=\; F \oplus G \;=\; F \oplus G'.$$

Soit q le projecteur de E sur G parallèlement à F. Alors la restriction q' de q à G' :

$$q' \;:=\; q\big|_{G'}\colon \quad G' \;\xrightarrow{\;\sim\;}\; G$$

est un isomorphisme linéaire de G' sur G.



Démonstration. Pour commencer, prouvons que cette restriction $q' = q\big|_{G'}$ est bijective.

En effet, puisqu'on a $\mathsf{Ker}(q) = F$, il est clair (exercice) que :

$$\mathsf{Ker}(q') = F \cap G'.$$

Or F et G' sont supplémentaires, donc $F \cap G' = \{\vec{0}\}$, d'où :

$$\mathsf{Ker}(q') = \{\vec{0}\},$$

ce qui montre que q' est injective, d'après le Théorème 3.6.

Ensuite, prouvons que q' est surjective, c'est-à-dire, prouvons que :

$$\forall\, \vec{y} \in G, \qquad \exists\, \vec{x} \in G' \qquad q'(\vec{x}) = \vec{y}.$$

Or pour tout vecteur $\vec{y} \in E$, et en particulier pour tout $\vec{y} \in G$, il existe une décomposition unique :

$$\vec{y} = \vec{z} + \vec{x}, \tag{9.8}$$

avec :

$$\vec{z} \in F \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \vec{x} \in G'.$$

Mais :

$$\begin{aligned} \vec{z} \in F \qquad &\Longrightarrow \qquad q(\vec{z}) = \vec{0}, \\ \vec{y} \in G \qquad &\Longrightarrow \qquad q(\vec{y}) = \vec{y}. \end{aligned}$$

Appliquons alors q aux deux membres de (9.8), ce qui donne :

$$q(\vec{y}) = q(\vec{z}) + q(\vec{x}),$$

soit :

$$\vec{y} = \vec{0} + q(\vec{x}) = q'(\vec{x}).$$

Ainsi, q' est bien surjective.

En définitive, q' est injective et surjective, donc bijective, et puisqu'elle est linéaire, c'est un isomorphisme linéaire de G' sur G. □

Le Théorème 9.7 vient d'être établi pour un espace vectoriel quelconque E, pas forcément de dimension finie, éventuellement de dimension infinie, mais spécifions maintenant le cas où E est de dimension finie.

Si E est de dimension finie $n \geqslant 1$, on peut remarquer que :

$$F \oplus G = E \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad \mathsf{dim}\, F + \mathsf{dim}\, G = \mathsf{dim}\, E,$$

puisque, en prenant une base B de F et une base B' de G, alors $B \cup B'$ est une base de E.

Par conséquent, si $\mathsf{dim}\, F = p$, alors :

$$F \oplus G = F \oplus G' = E \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad \mathsf{dim}\, G = \mathsf{dim}\, G' = n - p.$$

Puisque G et G' ont même dimension sur $\mathbb{R}$, le Théorème 4.2 prouve qu'ils sont isomorphes.

On obtient ainsi, dans le cas où E est de dimension finie, une autre démonstration de la principale des propriétés indiquées par le Théorème 9.7.

10. Formes linéaires et espace dual

Dans la Section **6** plus haut, nous avons déjà donné la définition de l'*espace dual* d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E :

$$E^* := \mathscr{L}(E, \mathbb{R}).$$

Cet espace E^* est lui-même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, d'après la même Section **6**. Les éléments de E^* sont les formes linéaires définies dans E, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

D'après le Théorème 3.9, si $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ est une base de l'espace E, supposé de dimension finie $n \geqslant 1$, toute forme linéaire $f \in E^*$ est définie de façon unique, dès que l'on se donne les scalaires $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tels que :

$$f(\vec{e}_1) = c_1, \ f(\vec{e}_2) = c_2, \ \ldots\ldots, \ f(\vec{e}_n) = c_n.$$

Nous allons maintenant définir n formes linéaires de cette manière, en posant :

$$\begin{array}{l} f_1(\vec{e}_1) := 1, \ f_1(\vec{e}_2) := 0, \ \ldots\ldots, \ f_1(\vec{e}_n) := 0, \\ f_2(\vec{e}_1) := 0, \ f_2(\vec{e}_2) := 1, \ \ldots\ldots, \ f_2(\vec{e}_n) := 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(\vec{e}_1) := 0, \ f_n(\vec{e}_2) := 0, \ \ldots\ldots, \ f_n(\vec{e}_n) := 1. \end{array}$$

Plus brièvement, si i et j désignent deux indices parcourant l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a :

$$\begin{array}{lcl} i \neq j & \Longrightarrow & f_i(\vec{e}_j) := 0, \\ i = j & \Longrightarrow & f_i(\vec{e}_j) := 1. \end{array}$$

Théorème 10.1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, rapporté à une base $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$. Les n formes linéaires $f_1, \ldots, f_n$ de l'espace dual E^* définies par :*

$$f_i(\vec{e}_j) := \begin{cases} 0 & \textit{lorsque } \ i \neq j, \\ 1 & \textit{lorsque } \ i = j, \end{cases}$$

constituent une base de E^*, et par conséquent :

$$\dim E^* = \dim E.$$

Démonstration. Commençons par montrer que ces n formes linéaires engendrent l'espace E^*.

En effet, d'après le Théorème 3.9, toute forme linéaire $f \in E^*$ est déterminée de manière unique par la donné de ses valeurs :

$$f(\vec{e}_1) = c_1, \ \ldots\ldots, \ f(\vec{e}_n) = c_n.$$

Or pour tout indice $1 \leqslant j \leqslant n$, on peut écrire :

$$c_j = c_1 \, f(\vec{e}_1) + \cdots + c_j \, f(\vec{e}_j) + \cdots + c_n \, f(\vec{e}_n),$$

simplement parce que :

$$\begin{array}{lcl} i \neq j & \Longrightarrow & f_i(\vec{e}_j) = 0, \\ i = j & \Longrightarrow & f_i(\vec{e}_j) = 1. \end{array}$$

Par conséquent, on a :

$$f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, f_i(\vec{e}_j),$$

et d'après le Théorème 3.9, la forme f vérifie dans E^* :

$$f = c_1 \, f_1 + \cdots + c_n \, f_n.$$

Par conséquent, toute forme linéaire $f \in E^*$ est une combinaison linéaire des f_i, les coefficients de la combinaison étant précisément les valeurs c_i qui déterminent f.

Montrons à présent que ces n formes linéaires constituent une famille libre dans E^*.

Partons de la combinaison linéaire nulle suivante :

$$a_1 \, f_1 + \cdots + a_n \, f_n \qquad (a_i \in \mathbb{R}).$$

Cela veut dire que, pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, on a :

$$a_1 \, f_1(\vec{x}) + \cdots + a_n \, f_n(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Prenons successivement :

$$\vec{x} := \vec{e}_1, \;\; \ldots\ldots, \;\; \vec{x} := \vec{e}_n.$$

Pour tout indice $1 \leqslant j \leqslant n$, en prenant $\vec{x} = \vec{e}_j$, et en appliquant la définition des f_i :

$$f_i(\vec{e}_j) \,=\, \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \; i \neq j, \\ 1 & \text{lorsque } \; i = j, \end{cases}$$

on obtient :

$$a_j \,=\, 0 \qquad\qquad (\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n).$$

En définitive :

$$a_1\, f_1 + \cdots + a_n\, f_n \,=\, 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 \,=\, \cdots \,=\, a_n \,=\, 0,$$

ce qui montre bien que la famille $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est libre.

En conclusion, cette famille constitue une base de E^*, ce qui achève la démonstration. □

Notation 10.2. On nomme $\{f_1, \ldots, f_n\}$ *base duale* de $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, et on la note plutôt

$$\{\vec{e}_1^{\,*}, \ldots, \vec{e}_n^{\,*}\}.$$

Terminons ce chapitre par une représentation utile.

Observation 10.3. *Pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, on a :*

$$\begin{aligned} \vec{x} \,&=\, f_1(\vec{x})\, \vec{e}_1 + \cdots + f_n(\vec{x})\, \vec{e}_n \\ &=\, \vec{e}_1^{\,*}(\vec{x})\, \vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n^{\,*}(\vec{x})\, \vec{e}_n. \end{aligned}$$

Preuve. En effet, $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \cdots + x_n \vec{e}_n$ entraîne, pour tout indice $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$f_j(\vec{x}) \,=\, x_1\, f_j(\vec{e}_1) + \cdots + x_n\, f_j(\vec{e}_n) \,=\, x_j,$$

puisque $f_j(\vec{e}_i) = 0$ pour $i \neq j$ et $f_j(\vec{e}_j) = 1$. □

11. Exercices

Exercice 1. EE

Matrices

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

2. Étude d'un cas particulier éclairant

Considérons d'abord deux espaces vectoriels F et E, de dimensions respectives 2 et 3, sur un même corps $\mathbb{K}$. On pourra penser, pour fixer les idées, que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Soient aussi :

$$\begin{aligned} &\big\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\big\} && \text{une base de } F, \\ &\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big\} && \text{une base de } E. \end{aligned}$$

Considérons enfin une application linéaire f de F dans E :

$$f \,\in\, \mathscr{L}\big(F, E\big),$$

c'est-à-dire :

$$F \,\stackrel{f}{\longrightarrow}\, E.$$

D'après un théorème qui a déjà été vu dans un chapitre qui précède, f est déterminée de façon unique dès que l'on fixe les images $f(\vec{f}_1)$ et $f(\vec{f}_2)$. Donnons-nous alors ces images par leurs coordonnées dans la base $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big\}$ de E :

$$\begin{aligned} f(\vec{f}_1) \,&=\, a_{1,1}\,\vec{e}_1 + a_{2,1}\,\vec{e}_2 + a_{3,1}\,\vec{e}_3, \\ f(\vec{f}_2) \,&=\, a_{1,2}\,\vec{e}_1 + a_{2,2}\,\vec{e}_2 + a_{3,2}\,\vec{e}_3, \end{aligned}$$

où $a_{1,1}, \dots, a_{3,2}$ sont certains nombres bien déterminés appartenant au corps $\mathbb{K}$.

Pour tout vecteur $\vec{x} \in F$, considérons ses coordonnées dans la base $\big\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\big\}$:

$$\vec{x} \,=\, x_1\,\vec{f}_1 + x_2\,\vec{f}_2.$$

Son image $f(\vec{x}) =: \vec{y}$ est un vecteur $\vec{y} \in E$ dont nous désignons par y_1, y_2, y_3 les coordonnées dans la base $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big\}$:

$$\vec{y} \,=\, y_1\,\vec{e}_1 + y_2\,\vec{e}_2 + y_3\,\vec{e}_3.$$

Or on a aussi, puisque f est un homomorphisme linéaire :

$$\begin{aligned} \vec{y} \,&=\, f(\vec{x}) \\ &=\, x_1\,f(\vec{f}_1) + x_2\,f(\vec{f}_2). \end{aligned}$$

En remplaçant alors $f(\vec{f}_1)$ et $f(\vec{f}_2)$ par les valeurs précédemment choisies, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{y} \,=\, & x_1\,\big(a_{1,1}\,\vec{e}_1 + a_{2,1}\,\vec{e}_2 + a_{3,1}\,\vec{e}_3\big) + \\ & + x_2\,\big(a_{1,2}\,\vec{e}_1 + a_{2,2}\,\vec{e}_2 + a_{3,2}\,\vec{e}_3\big), \end{aligned}$$

et par conséquent, nous déduisons par identification que :

$$\begin{cases} y_1 \ = \ a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2, \\ y_2 \ = \ a_{2,1}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2, \\ y_3 \ = \ a_{3,1}\, x_1 + a_{3,2}\, x_2. \end{cases} \tag{2.1}$$

Terminologie 2.2. Ces relations se nomment *équations de f par rapport à la base $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ de F et à la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de E.*

Ces équations sont caractérisées par les coefficients $a_{i,j}$ rangés sous forme d'un tableau :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i\leqslant 3 \text{ lignes}}^{1\leqslant j\leqslant 2 \text{ colonnes}}.$$

Terminologie 2.3. Un tel tableau se nomme *matrice à 3 lignes et à 2 colonnes*. Ses éléments $a_{i,j}$ se nomment *termes* ou *entrées* de la matrice.

Convention 2.4. Dans $\big(a_{i,j}\big)$, le premier indice i concernera toujours [1] les lignes, et le deuxième indice j concerne toujours les colonnes.

Mais les lettres peuvent changer ! On pourra aussi écrire parfois :

$$\big(a_{j,i}\big)_{1\leqslant j\leqslant 3 \text{ lignes}}^{1\leqslant i\leqslant 2 \text{ colonnes}}.$$

Observation 2.5. *Pour chaque $1 \leqslant j \leqslant 2$, la colonne de rang j de la matrice est constituée par les coordonnées, dans la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de E, de l'image $f(\vec{f}_j)$ du vecteur $\vec{f}_j$ de rang j dans la base $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ de F.*

Nous pouvons abréger la dénomination des deux bases :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_F &:= \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}, \\ \boldsymbol{B}_E &:= \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}. \end{aligned}$$

Terminologie 2.6. On dit aussi que *la matrice est associée à f par rapport à la donnée simultanée de la base $\boldsymbol{B}_F$ de F et de la base $\boldsymbol{B}_E$ de E*. On note alors cette matrice :

$$\mathsf{Mat}_{\boldsymbol{B}_F \boldsymbol{B}_E}(f) \qquad \text{ou parfois simplement :} \qquad \mathsf{Mat}(f).$$

Toutefois, la théorie va démontrer qu'*une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(F, E)$ peut donner lieu à des matrices très différentes quand on change les bases*.

Réciproquement, si on se donne une matrice à 3 lignes et à 2 colonnes, dont les termes sont des scalaires appartenant à $\mathbb{K}$, alors les relations (2.1) définissent une application f de F dans E, car tout vecteur $\vec{x} \in F$, de coordonnées (x_1, x_2), est envoyé par cette application sur un vecteur $\vec{y} \in F$, dont les coordonnées (y_1, y_2, y_3) sont justement données par (2.1).

Une vérification fondée sur calcul simple montre que cette application f est *linéaire* de F dans E, c'est-à-dire $f \in \mathscr{L}(F, E)$. Par conséquent, si on désigne par $\mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à 3 lignes et à 2 colonnes sur le corps $\mathbb{K}$, on constate que l'application :

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(F, E) &\longrightarrow \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto M(f) \end{aligned}$$

est une *bijection*. Mais attention, cette bijection dépend du choix de deux bases $\boldsymbol{B}_F$ et $\boldsymbol{B}_E$!

1. Sauf dans la Section **12**.

3. Passage au cas général

Maintenant que les premières idées intuitives ont bien pénétré la douce cervelle de notre cerveau, nous pouvons généraliser ces notions à deux espaces vectoriels F et E de dimensions finies quelconque sur un corps $\mathbb{K}$ — penser que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soient :

$$n := \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} F \qquad \text{et} \qquad m := \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} E.$$

Choisissons une base $\boldsymbol{B}_F$ de F :

$$\boldsymbol{B}_F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\},$$

ainsi qu'une base $\boldsymbol{B}_E$ de E :

$$\boldsymbol{B}_E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}.$$

Exprimons tout vecteur $\vec{x} \in F$ et tout vecteur $\vec{y} \in E$ par leurs coordonnées dans $\boldsymbol{B}_F$ et dans $\boldsymbol{B}_E$:

$$\vec{x} = x_1 \vec{f}_1 + x_2 \vec{f}_2 + \cdots + x_n \vec{f}_n = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{f}_j, \tag{3.1}$$

$$\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + \cdots + y_m \vec{e}_m = \sum_{i=1}^{m} y_i \vec{e}_i. \tag{3.2}$$

Un diagramme résume la situation.

$$\begin{array}{|ccc|}
\hline
\boldsymbol{B}_F = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\} & & \boldsymbol{B}_E = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\} \\
F & \xrightarrow{\qquad f \qquad} & E \\
(x_1, \dots, x_n) & & (y_1, \dots, y_m) \\
1 \leqslant j \leqslant n & & 1 \leqslant i \leqslant m \\
\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{f}_j & & \vec{y} = \sum_{i=1}^{m} y_i \vec{e}_i. \\
\hline
\end{array}$$

Il faut bien faire la différence entre les vecteurs $\vec{f}_j$, $\vec{x}$, $\vec{e}_i$, $\vec{y}$ qui appartiennent à des espaces vectoriels et les coordonnées x_j, y_i qui sont des nombres scalaires appartenant au corps $\mathbb{K}$.

Ensuite, prenons une application linéaire de F dans E :

$$f \in \mathscr{L}(F, E).$$

Nous savons que f est déterminée de façon unique dès que l'on fixe les images :

$$f(\vec{f}_1), \ f(\vec{f}_2), \ \dots\dots, \ f(\vec{f}_n)$$

des vecteurs de la base $\boldsymbol{B}_F$ de F. Donnons-nous alors ces images par leurs coordonnées dans la base $\boldsymbol{B}_E$ de E :

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n: \qquad f(\vec{f}_j) = a_{1,j}\, \vec{e}_1 + a_{2,j}\, \vec{e}_2 + \cdots + a_{m,j}\, \vec{e}_m. \tag{3.3}$$

Il y a donc n relations (3.3), que l'on peut écrire, d'une façon plus condensée :

$$f(\vec{f}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\,\vec{e}_i \qquad\qquad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Tout vecteur $\vec{x} \in E$, mis sous la forme (3.1), est envoyé, par l'application linéaire f, sur le vecteur de F suivant :

$$\begin{aligned}\vec{y} = f(\vec{x}) &= x_1\, f(\vec{f}_1) + \cdots + x_n\, f(\vec{f}_n)\\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j\, f(\vec{f}_j).\end{aligned}$$

Cherchons les coordonnées de ce vecteur $\vec{y}$ dans la base $\boldsymbol{B}_E$ de E, c'est-à-dire mettons-le sous la forme (3.2) ; à cet effet, remplaçons les $f(\vec{f}_j)$ par leur valeur donnée par (3.3) :

$$\begin{aligned}\vec{y} &= \sum_{j=1}^{n} x_j\, f(\vec{f}_j)\\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\,\vec{e}_i \qquad (3.4)\\ &= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\bigg(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j\bigg)}_{=:\, y_i} \vec{e}_i,\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les propriétés d'associativité et de commutativité de l'addition vectorielle ainsi que celles de la multiplication par des scalaires, et par conséquent, une identification donne :

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j \qquad\qquad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

Nous avons ainsi obtenu les coordonnées $(y_1, \ldots, y_m)$ du vecteur $\vec{y} = f(\vec{x})$ dans la base $\boldsymbol{B}_E$ de E, ce qui s'écrit aussi de manière détaillée :

$$(3.5)\qquad \begin{cases} y_1 = a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 + \cdots + a_{1,n}\, x_n,\\ y_2 = a_{2,1}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 + \cdots + a_{2,n}\, x_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_m = a_{m,1}\, x_1 + a_{m,2}\, x_2 + \cdots + a_{m,n}\, x_n.\end{cases}$$

Terminologie 3.6. Ces m équations à n variables $x_1, \ldots, x_n$ se nomment *équations de f par rapport aux bases $\boldsymbol{B}_F$ de F et $\boldsymbol{B}_E$ de E.*

Elles peuvent aussi se représenter sous la forme :

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

et il est clair qu'elles sont caractérisées par le tableau de nombres scalaires :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n}\end{pmatrix}.$$

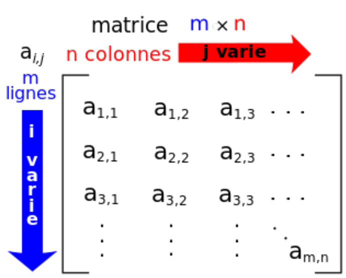
Terminologie 3.7. On nomme un tel tableau *matrice à m lignes et à n colonnes*. On dit aussi que cette matrice est *associée à f par rapport à la base $\boldsymbol{B}_F$ de F et à la base $\boldsymbol{B}_E$ de E*, et on la note :

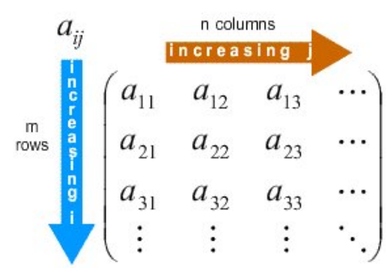
$$\mathsf{Mat}_{\boldsymbol{B}_F \boldsymbol{B}_E}(f) \;=\; \Big(a_{i,j}\Big)_{1 \leqslant i \leqslant m \text{ lignes}}^{1 \leqslant j \leqslant n \text{ colonnes}}.$$

Voici pour commencer une belle petite matrice à 3 lignes et à 3 colonnes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ensuite, voici une représentation de la matrice générale à m lignes et à n colonnes, dans laquelle on fait bien voir comment le premier indice $a_{i,\bullet}$ augmente en descendant, tandis que le second indice $a_{\bullet,j}$ augmente pendant qu'on progresse vers la droite (sans gilet jaune — tenue correcte exigée !).





Et avec la même chose en version anglaise pour ceux qui aiment les cours de langue Polytech ! Et les bonnes couleurs flashy ! Welcome to London !

Observation 3.8. *Pour tout indice $1 \leqslant j \leqslant n$, la colonne de rang j de cette matrice est constituée par les coordonnées, dans la base $\boldsymbol{B}_E$ de E, de l'image $f(\vec{f}_j)$ du vecteur $\vec{f}_j$ de rang j de la base $\boldsymbol{B}_F$ de F :*

$$\big(a_{i,j}\big) \;=\; \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} f(\vec{f}_1) & f(\vec{f}_2) & \cdots & f(\vec{f}_n) \end{array} \end{array}. \qquad \square$$

Réciproquement, si on se donne une matrice à m lignes et à n colonnes, les formules (3.5) définissent une application f de F dans E ; en effet, à tout vecteur $\vec{x} \in F$ de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ dans la base $\boldsymbol{B}_F$, les formules 3.5 font correspondre un vecteur $\vec{y} \in E$ de coordonnées $y_1, \ldots, y_m$ dans la base $\boldsymbol{B}_E$. Ce vecteur $\vec{y}$ est donné par la relation (3.4).

À partir de cette relation (3.4), on peut prouver que cette application f est linéaire ; si on pose :

$$\vec{\ell}_j \;:=\; \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, \vec{e}_j \qquad\qquad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

il est facile de voir que, pour tout indice j, on a $\vec{\ell}_j = f(\vec{f}_j)$, et les relations (3.4) s'écrivent alors :

$$\vec{y} \;=\; f(\vec{x}) \;=\; \sum_{j=1}^{n} x_j\, \vec{\ell}_j,$$

et, pour tous scalaires a et a', et tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{x}\,'$ de E, on a :

$$\begin{aligned} a\,f(\vec{x}) + a'\,f(\vec{x}\,') &= a\sum_{j=1}^{n} x_j\,\vec{\ell}_j + a'\sum_{j=1}^{n} x_j'\,\vec{\ell}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\big(a\,x_j + a'\,x_j'\big)\,\vec{\ell}_j \,=\, f\big(a\,\vec{x} + a'\,\vec{x}\,'\big), \end{aligned}$$

donc f est bien linéaire.

Notation 3.9. On désignera par :

$$\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

l'ensemble des matrices à m lignes et à n colonnes sur le corps $\mathbb{K}$.

L'étude qui précède permet alors d'énoncer le

Théorème 3.10. *Deux bases $\boldsymbol{B}_F$ et $\boldsymbol{B}_E$ étant choisies respectivement dans deux espaces vectoriels F et E, de dimensions n et m sur un corps $\mathbb{K}$, il existe, par rapport à $\boldsymbol{B}_F$ et $\boldsymbol{B}_E$, une bijection unique :*

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(F,E) &\longrightarrow \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto \mathsf{Mat}_{\boldsymbol{B}_F\boldsymbol{B}_E}. \end{aligned}$$

□

4. Matrices de rotation en géométrie euclidienne planaire

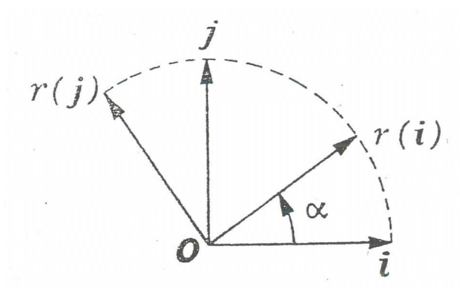
Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ de la géométrie euclidienne plane. On sait que toute rotation $\boldsymbol{r}$ autour de l'origine est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même. On a donc $F = E = \mathbb{R}^2$.

Choisissons les bases confondues :

$$\boldsymbol{B}_F = \boldsymbol{B}_E = \{\vec{i}, \vec{j}\},$$

en termes des deux vecteurs de coordonnées :

$$\vec{i} := (1,0) \qquad \text{et} \qquad \vec{j} := (0,1).$$



Si α est l'angle de la rotation $\boldsymbol{r}$, on a :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(\vec{i}) &= \cos\alpha\cdot\vec{i} + \sin\alpha\cdot\vec{j}, \\ \boldsymbol{r}(\vec{j}) &= -\sin\alpha\cdot\vec{i} + \cos\alpha\cdot\vec{j}. \end{aligned}$$

La matrice $\mathsf{Mat}(\boldsymbol{r})$ associée à cette rotation dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ est donc :

$$\mathsf{Mat}(\boldsymbol{r}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \scriptstyle \boldsymbol{r}(\vec{i}) & \scriptstyle \boldsymbol{r}(\vec{j}) \end{array} \end{array}.$$

Observons que la première colonne est constituée des coordonnées $\boldsymbol{r}(\vec{i})$, et la seconde colonne de celles de $\boldsymbol{r}(\vec{j})$.

Un vecteur général $\vec{x} = x_1\,\vec{i} + x_2\,\vec{j}$ devient le vecteur $\boldsymbol{r}(\vec{x}) =: y_1\,\vec{i} + y_2\,\vec{j}$ défini par :

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos\alpha \cdot x_1 - \sin\alpha \cdot x_2, \\ y_2 &= \sin\alpha \cdot x_1 + \cos\alpha \cdot x_2. \end{aligned}$$

Enfin, remarquons que toute rotation $\boldsymbol{r}$ de $\mathbb{R}^2$ est caractérisée par son angle de rotation α, et ainsi, cette matrice $\mathsf{Mat}(\boldsymbol{r})$ est *indépendante* de la base *orthonormée* choisie.

5. Matrice ligne et matrice colonne

Soit toujours F un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ sur un corps $\mathbb{K}$. On sait que ce corps $\mathbb{K}$ lui-même est un espace vectoriel de dimension 1 sur le corps $\mathbb{K}$, et que la base canonique de $\mathbb{K}$ est constituée de l'unique vecteur $1 \in \mathbb{K}$. Prenons alors comme espace vectoriel d'arrivée :

$$E := \mathbb{K}.$$

Rappelons que toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ s'appelle une *forme linéaire*. À tout vecteur $\vec{x} \in F$, une forme linéaire $f \in \mathscr{L}(F, \mathbb{K})$ associe un *scalaire* $f(\vec{x})$; et, pour tous scalaires a et a', et tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{x}\,'$, on a :

$$f\big(a\,\vec{x} + a'\vec{x}\,'\big) = a\,f(\vec{x}) + a'\,f(\vec{x}\,').$$

Si on rapporte F à une base $\boldsymbol{B}_F = \big\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\big\}$ et $\mathbb{K}$ à sa base canonique $\boldsymbol{B}_{\mathbb{K}} = \{1\}$, on obtient, pour image de $\vec{x} = x_1\,\vec{f}_1 + \cdots + x_n\,\vec{f}_n$ le scalaire :

$$f(\vec{x}) = x_1\,f(\vec{f}_1) + \cdots + x_n\,f(\vec{f}_n).$$

Pour caractériser f, il suffit donc de préciser les n scalaires :

$$a_1 := f(\vec{f}_1),\ \dots\dots\dots,\ a_n := f(\vec{f}_n),$$

qui se nomment *coefficients de la forme linéaire relativement à la base* $\boldsymbol{B}_F$.

La matrice $\mathsf{Mat}(f)$ associée à f dans ces bases $\boldsymbol{B}_F$ et $\boldsymbol{B}_{\mathbb{K}}$ comporte alors 1 ligne et n colonnes :

$$\mathsf{Mat}(f) = \big(a_1\ a_2\ \dots\ a_n\big)$$

c'est-à-dire :

$$y = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_n\,x_n.$$

Ensuite, soit E un espace vectoriel de dimension $m \geqslant 1$ sur un corps $\mathbb{K}$, et soit $f\colon \mathbb{K} \longrightarrow E$ une appplication linéaire. Ainsi, on choisit $F := \mathbb{K}$. L'image d'un scalaire $x \in \mathbb{K}$ est un vecteur $f(x) \in E$. Rapportons $\mathbb{K}$ à la base canonique $\boldsymbol{B}_{\mathbb{K}} = \{1\}$, et E à une base $\boldsymbol{B}_E = \big\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\big\}$. Alors :

$$x = x \cdot 1 \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad f(x) = x\,f(1).$$

Pour caractériser f, il suffit par conséquent de préciser l'image $f(1)$ par ses coordonnées dans $\boldsymbol{B}_E$:

$$f(1) = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + \cdots + a_m\,\vec{e}_m.$$

La matrice associée à une telle application possède donc m lignes et 1 colonne :

$$\mathsf{Mat}(f) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \big(x\big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y_1 = a_1\, x, \\ y_2 = a_2\, x, \\ \quad \vdots \\ y_m = a_m\, x. \end{cases}$$

6. Espace vectoriel $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Commençons par définir l'addition des matrices. Dans l'ensemble $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ des matrices à m lignes et à n colonnes sur le corps $\mathbb{K}$, nous allons définir une addition de telle sorte que la bijection $f \longmapsto \mathsf{Mat}(f)$ de $\mathscr{L}(F, E)$ sur $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ soit un *isomorphisme linéaire*.

Pour simplifier les notations, nous désignerons la matrice par son terme général simplement mis entre parenthèses :

$$\big(a_{i,j}\big) = \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i \leqslant m \text{ lignes}}^{1 \leqslant j \leqslant n \text{ colonnes}}.$$

Ici, rappelons que le premier indice i décrit les lignes, tandis que le second j décrit les colonnes.

Soient f et f' deux applications linéaires de F dans E, rapportées à deux bases $\boldsymbol{B}_F$ et $\boldsymbol{B}_E$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_F &= \big\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\big\}, \\ \boldsymbol{B}_E &= \big\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\big\}. \end{aligned}$$

Soient aussi les deux matrices associées, dans ces bases, à f et à f' :

$$\begin{aligned} M(f) &= \mathsf{Mat}_{\boldsymbol{B}_F \boldsymbol{B}_E}(f) = \big(a_{i,j}\big), \\ M(f') &= \mathsf{Mat}_{\boldsymbol{B}_F \boldsymbol{B}_E}(f') = \big(a'_{i,j}\big). \end{aligned}$$

Elles appartiennent à $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} f(\vec{f}_j) &= \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, \vec{e}_i && (1 \leqslant j \leqslant n), \\ f'(\vec{f}_j) &= \sum_{i=1}^{m} a'_{i,j}\, \vec{e}_i && (1 \leqslant j \leqslant n), \end{aligned}$$

Par définition de la somme $f + f'$ vue au chapitre qui précède, on a :

$$\begin{aligned} \big(f + f'\big)(\vec{f}_j) &= \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, \vec{e}_i + \sum_{i=1}^{m} a'_{i,j}\, \vec{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \big(a_{i,j} + a'_{i,j}\big)\, \vec{e}_j && (1 \leqslant j \leqslant n). \end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice associée à $f + f'$ est :

$$\mathsf{Mat}(f + f') = \big(a_{i,j} + a'_{i,j}\big)_{1 \leqslant i \leqslant m \text{ lignes}}^{1 \leqslant j \leqslant n \text{ colonnes}}.$$

Ceci justifie la

Définition 6.1. À tout couple $\big(a_{i,j}\big)$ et $\big(a'_{i,j}\big)$ de deux matrices de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on associe une matrice de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, nommée *somme* de ces matrices, noté et définie par :

$$\big(a_{i,j}\big) + \big(a'_{i,j}\big) := \big(a_{i,j} + a'_{i,j}\big).$$

$$
\begin{aligned}
\big(a_{i,j}\big)+\big(a'_{i,j}\big) &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} & \cdots & a'_{1,n} \\ a'_{2,1} & a'_{2,2} & \cdots & a'_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m,1} & a'_{m,2} & \cdots & a'_{m,n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{1,1}+a'_{1,1} & a_{1,2}+a'_{1,2} & \cdots & a_{1,n}+a'_{1,n} \\ a_{2,1}+a'_{2,1} & a_{2,2}+a'_{2,2} & \cdots & a_{2,n}+a'_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}+a'_{m,1} & a_{m,2}+a'_{m,2} & \cdots & a_{m,n}+a'_{m,n} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ainsi on a :

$$\mathsf{Mat}(f)+\mathsf{Mat}(f') \;=\; \mathsf{Mat}\big(f+f'\big).$$

La bijection $f \longmapsto \mathsf{Mat}(f)$ de $\mathscr{L}(F,E)$ sur $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme pour l'addition. Par conséquent :

Lemme 6.2. *$\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est un groupe commutatif pour l'addition.* □

L'élément neutre est la matrice nulle, *i.e.* celle dont tous les $m\,n$ éléments sont nuls, et on la notera 0. L'opposé d'une matrice est tout simplement :

$$-\big(a_{i,j}\big) \;:=\; \big(-\,a_{i,j}\big).$$

Ensuite, définissons la multiplication des matrices par un scalaire. Soient donc :

$$f \,\in\, \mathscr{L}(F,E) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \lambda \,\in\, \mathbb{K}.$$

Par définition de l'application linéaire $\lambda\, f$ vue au chapitre qui précède, on a :

$$f(\vec{f}_j) \;=\; \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\,\vec{e}_i \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad (\lambda\, f)(\vec{f}_j) \;=\; \sum_{i=1}^{m} \big(\lambda\, a_{i,j}\big)\,\vec{e}_i.$$

- Calcul de la matrice λA

$$
\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \lambda a_{ij} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{p1} & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda a_{pn} \end{pmatrix}
$$

Par conséquent, la matrice associée à $(\lambda\, f)$ est simplement la matrice dont tous les $m\,n$ termes $\big(\lambda\, a_{i,j}\big)$ sont multipliés par λ, ce qui justifie la

Définition 6.3. À toute matrice $\big(a_{i,j}\big)$ de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et à tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, on associe une matrice de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, nommée *produit* de $\big(a_{i,j}\big)$ par λ, notée et définie par :

$$\lambda\,\big(a_{i,j}\big) \;:=\; \big(\lambda\, a_{i,j}\big)_{1\leqslant i\leqslant m \text{ lignes}}^{1\leqslant j\leqslant n \text{ colonnes}}.$$

Ainsi, nous avons :

$$\mathsf{Mat}\big(\lambda\, f\big) \,=\, \lambda\, \mathsf{Mat}(f).$$

Par conséquent, nous pouvons énoncer en résumé un

Théorème 6.4. *La bijection :*

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(F,E) \,&\longrightarrow\, \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ f \,&\longmapsto\, M(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels.* □

7. Multiplication des matrices

Après l'addition et la soustraction, que pourrait-être la *multiplication* des matrices ?

La seule réponse candidate à cette question s'inspire de la *composition* des applications linéaires. Il n'y a donc pas à proprement parler de « multiplication », notamment *il n'y a en aucun cas multiplication terme à terme des éléments de deux matrices données* — il faut s'interdire de faire cette bêtise ! Honte, fatale, à l'étudiant(e) idiot(e) de Polytech qui la commettrait !

Au contraire, le bon concept de multiplication va s'inspirer de ce qu'il se passe en présence de *trois* $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

En effet, soit un troisième $\mathbb{K}$-espace vectoriel G de dimension finie :

$$p \,:=\, \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\, G,$$

et soit un diagramme de composition de deux applications linéaires :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] & F \arrow[r, "f"] & E. \end{tikzcd}$$

Dans le chapitre qui précède, nous avons vu qu'une telle composition préservait la linéarité :

$$\Big(g \,\in\, \mathscr{L}(G,F) \qquad \text{et} \qquad f \,\in\, \mathscr{L}(F,E)\Big) \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad f\circ g \,\in\, \mathscr{L}(G,E).$$

Choisissons aussi trois bases quelconques de G, F, E :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_G \,&=\, \big\{\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_p\big\}, \\ \boldsymbol{B}_F \,&=\, \big\{\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_n\big\}, \\ \boldsymbol{B}_E \,&=\, \big\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_m\big\}. \end{aligned}$$

Relativement aux deux paires de bases $\boldsymbol{B}_G$, $\boldsymbol{B}_F$ et $\boldsymbol{B}_F$, $\boldsymbol{B}_E$, soient aussi les deux matrices de ces deux applications linéaires :

$$\mathsf{Mat}(g) \,=\, \Big(b_{j,k}\Big)_{1\leqslant j\leqslant n \text{ lignes}}^{1\leqslant k\leqslant p \text{ colonnes}} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \mathsf{Mat}(f) \,=\, \Big(a_{i,j}\Big)_{1\leqslant i\leqslant m \text{ lignes}}^{1\leqslant j\leqslant n \text{ colonnes}}.$$

Observons, car cela sera important, que le nombre n de lignes de $\mathsf{Mat}(g)$ est égal au nombre n de colonnes de $\mathsf{Mat}(f)$, puisque la balle vectorielle F de dimension n est au centre !

Avant de poursuivre, élaborons un diagramme synthétique qui nous fera office de GPS dans cette forêt algébrique.

$$
\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{B}_G \,=\, \{\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_p\} & & \boldsymbol{B}_F \,=\, \{\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_n\} & & \boldsymbol{B}_E \,=\, \{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_m\} \\
G & \xrightarrow{\quad g \quad} & F & \xrightarrow{\quad f \quad} & E \\
(u_1,\dots,u_p) & & (x_1,\dots,x_n) & & (y_1,\dots,y_m) \\
1 \leqslant k \leqslant p & & 1 \leqslant j \leqslant n & & 1 \leqslant i \leqslant m \\
\vec{u} \,=\, \sum_{k=1}^{p} u_k\, \vec{g}_k & & \vec{x} \,=\, \sum_{j=1}^{n} x_j\, \vec{f}_j & & \vec{y} \,=\, \sum_{i=1}^{m} y_i\, \vec{e}_i.
\end{array}
$$

On a évidemment :

$$\mathsf{Mat}(f) \,\in\, \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \mathsf{Mat}(g) \,\in\, \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Dans la concaténation, l'entier n va disparaître :

$$(\bullet)_{m,n}(\bullet)_{n,p} \,=\, (\bullet)_{m,p}.$$

On a évidemment aussi :

$$\mathsf{Mat}\big(f\circ g\big) \,\in\, \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{K}).$$

Maintenant, écrivons les actions de f et de g dans ces bases :

$$
\begin{aligned}
f(\vec{f}_j) &\,=\, \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, \vec{e}_i && (1 \leqslant j \leqslant n), \\
g(\vec{g}_k) &\,=\, \sum_{j=1}^{n} b_{j,k}\, \vec{f}_j && (1 \leqslant k \leqslant p),
\end{aligned}
$$

et pour déterminer l'action de l'application composée $f\circ g\colon G \longrightarrow E$, commençons un calcul très important qui utilise franchement la linéarité de f :

$$
\begin{aligned}
f\circ g\,(\vec{g}_k) \,=\, f\big(g(\vec{g}_k)\big) &\,=\, f\bigg(\sum_{j=1}^{n} b_{j,k}\, \vec{f}_j\bigg) \\
&\,=\, \sum_{j=1}^{n} b_{j,k}\, f(\vec{f}_j) \\
&\,=\, \sum_{j=1}^{n} b_{j,k} \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, \vec{e}_i,
\end{aligned}
$$

et ensuite, utilisons la commutativité de la sommation/addition afin de réorganiser cette double somme en regroupant les termes multiples de chaque vecteur $\vec{e}_i$:

$$\begin{aligned} f \circ g\,(\vec{g}_k) &= \sum_{i=1}^{m} \bigg(\sum_{j=1}^{n} b_{j,k}\, a_{i,j} \bigg)\, \vec{e}_i \\ [\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha] \qquad\qquad &= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\bigg(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{j,k} \bigg)}_{=:\, c_{i,k}} \vec{e}_i, \end{aligned}$$

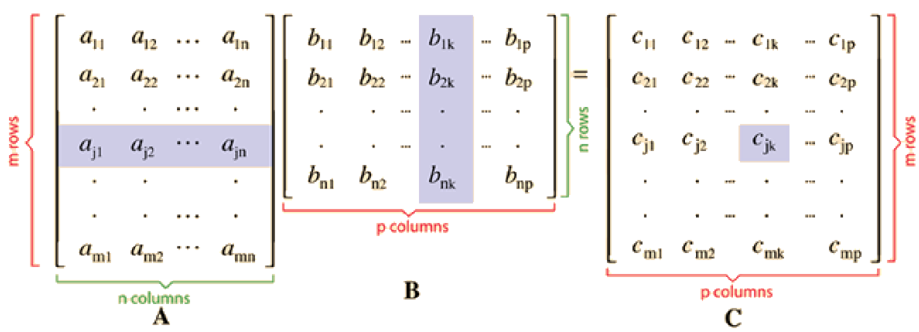
et par conséquent, si nous posons comme cela vient d'être souligné par en-dessous :

$$c_{i,k} := \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{j,k} \qquad\qquad (1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant p),$$

nous obtenons une représentation adéquate de l'action de $f \circ g$ sur les vecteurs de la base $\boldsymbol{B}_G$ de G :

$$f \circ g\,(\vec{g}_k) = \sum_{i=1}^{m} c_{i,k}\, \vec{e}_i \qquad\qquad (1 \leqslant k \leqslant p),$$

ce qui nous permet de conclure que nous venons effectivement de calculer la *matrice* de cette composée $f \circ g$ dans la paire de base(kets ?) $\boldsymbol{B}_G, \boldsymbol{B}_E$!



Tout ce beau travail de calculs utiles justifie alors la

Définition 7.1. À toute paire de matrices de tailles $m \times n$ et $n \times p$:

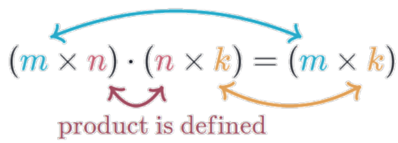
$$\big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i \leqslant m}^{1 \leqslant j \leqslant n} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \big(b_{j,k}\big)_{1 \leqslant j \leqslant n}^{1 \leqslant k \leqslant p}$$

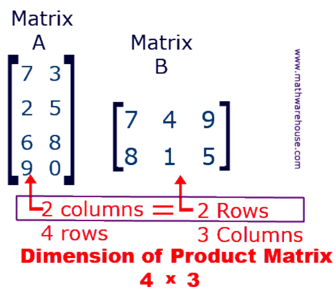
dont le nombre n de colonnes de la première *coïncide* avec le nombre n de lignes de la seconde, on associe une matrice :

$$\big(c_{i,k}\big)_{1 \leqslant i \leqslant m}^{1 \leqslant k \leqslant p} := \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i \leqslant m}^{\underline{1 \leqslant j \leqslant n}} \cdot \big(b_{j,k}\big)_{\underline{1 \leqslant j \leqslant n}}^{1 \leqslant k \leqslant p},$$

appelée *multiplication* de $\big(a_{i,j}\big)$ par $\big(b_{j,k}\big)$, dans laquelle a disparu le nombre n, et qui est définie par :

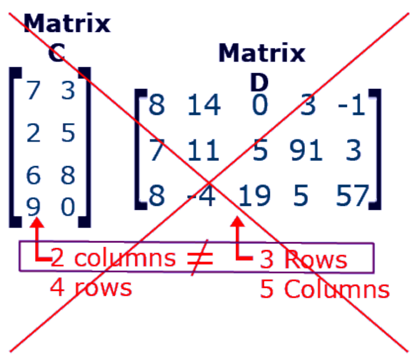
$$\boxed{\big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i \leqslant m}^{\underline{1 \leqslant j \leqslant n}} \cdot \big(b_{j,k}\big)_{\underline{1 \leqslant j \leqslant n}}^{1 \leqslant k \leqslant p} := \bigg(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{j,k} \bigg)_{1 \leqslant i \leqslant m}^{1 \leqslant k \leqslant p}.}$$





Malheureusement, plusieurs mises en garde doivent être formulées.

△ Cela n'a aucun sens de composer $g \circ f$, puisque f arrive dans E, tandis que G part de $G \neq E$. C'est seulement $f \circ g$ qui a un sens, car nous avons fait l'hypothèse que g arrive dans l'espace F, et que f part du *même* espace F.



△ Par conséquent, la multiplication de matrices dans l'autre sens $(b_{j,k}) \cdot (a_{i,j})$ n'a *pas de sens en général*, y compris parce qu'il est *absolument nécessaire* d'avoir coïncidence des nombres de colonnes et de lignes qui ont été soulignés dans l'encadré ci-dessus, sachant qu'on n'a pas en général $p = m$.

△ Même lorsque $p = m = n$, cette multiplication de matrices n'est en général *pas* commutative, comme le montre l'exemple :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui oblige à constater que $A \cdot B \neq B \cdot A$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

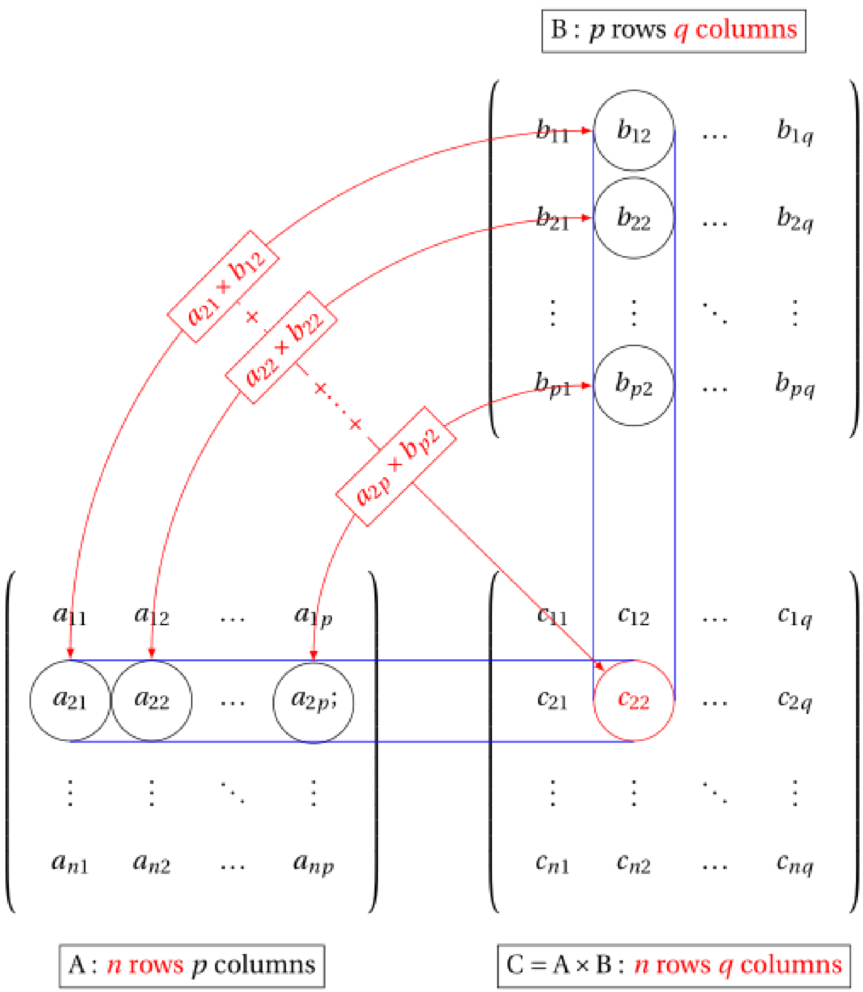
$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

△ Aussi, bien qu'on parle de *multiplication* de matrices, l'analogie avec la multiplication des nombres réels est plutôt trompeuse !

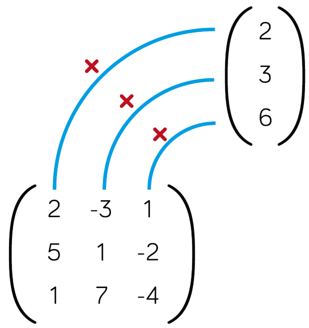
$\triangle$ Il vaudrait mieux dire « *composition* » des matrices, puisqu'on *compose* des applications linéaires.

Maintenant, voici de nombreuses schématisations, dans des notations parfois différentes, de la manière dont les *colonnes* de la matrice à droite $(b_{j,k})$ se *rabattent* sur les lignes de la matrice à gauche $(a_{i,j})$, en tombant comme des sapins géants coupés par un impitoyable bûcheron-mathématicien (le prof, donc...).

Commençons par la meilleure de toutes ces illustrations. Elle a probablement dû demander plusieurs jours de travail au pauvre malheureux auquel elle a été *volée* sur internet !



Et comme elle est assez complète et complexe, il s'avère utile d'examiner d'autres illustrations plus simples qui permettront de se former les bonnes intuitions de la multiplication entre matrices. Que doit faire l'étudiant ? Il doit *étudier* ! Alors on lui montre plein de figures pour qu'il les *étudie*.



Oui, quelque chose se rabat de la verticale vers l'horizontale, afin de s'accoupler comme deux ADNs : c'est cette intuition dynamique qu'il faut conserver en mémoire, la plus riche d'entre toutes.

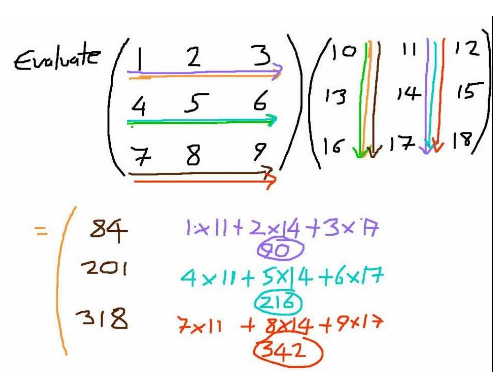
Passons maintenant à des illustrations moins dynamiques, bien que présentées en couleurs. Quand $n = 1$, un seul sapin à droite tombe au sol à gauche.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \times 5 + 2 \times 2 + 0 \times 3 = 9 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \times 1 + 2 \times 3 + 0 \times 4 = 7$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 \times 5 + 3 \times 2 - 1 \times 3 = 23 \qquad \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \times 1 + 3 \times 3 - 1 \times 4 = 9$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Voici encore de belles illustrations numériques. Exercice impératif : vérifier qu'il n'y a pas d'erreur de calcul ! Une première :



Une deuxième :

-3	3	0	-10		-8	-5		-98	84
7	-6	9	2		-4	-7		89	-83
-9	9	3	-8		11	-8		-19	30
					11	-9			

(-3)(-8)+3(-4)+0*11+(-10*11)=-98

-3	3	0	-10		-8	-5		-98	84
7	-6	9	2		-4	-7		89	-83
-9	9	3	-8		11	-8		-19	30
					11	-9			

7*(-8)+(-6)(-4)+9*11+2*11=89

Une troisième :

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)(9)+4(6) & (-1)(-3)+(4)(1) \\ 2(9)+3(6) & 2(-3)+3(1) \end{bmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{bmatrix} 15 & 7 \\ 36 & -3 \end{bmatrix}}$$

Final answer

Sur le plan formel, c'est-à-dire quand les termes d'une matrice ne sont pas des nombres entiers explicites, mais des lettres, la multiplication de deux matrices 2×2 est la suivante.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \times \underset{B}{\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}} = \underset{C}{\begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}}$$

Observons ici dans un cadre formel général que le produit dans un sens, puis dans un autre sens, de deux matrices 2×2 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ne peut donner le même résultat que lorsque les 4 équations suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} ae + bg &= ea + fc, & af + bh &= eb + fd, \\ ce + dg &= ga + hc, & cf + dh &= gb + hd, \end{aligned}$$

et il est intuitivement clair que pour la plupart des choix possibles de nombres rationnels :

$$a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f,\, g,\, h \,\in\, \mathbb{Q},$$

ces quatre équations ne sont *pas* satisfaites, et ainsi, le produit entre les deux matrices correspondantes n'est *pas* commutatif. Évidemment, en dimension $n \geqslant 3$, ce sera encore pire ! Il y aura encore moins de chances que le produit entre deux matrices quelconques soit commutatif !

Or lorsqu'il s'agit de deux matrices 3×3, les choses se corsent. Voici ce qu'on écrivait lors du précédent millénaire, à Chicago, avec une vraie machine à écrire, ses touches en plomb, la cigarette entre les dents, et le *gun* à portée de main.

$$\begin{bmatrix} \mathtt{a} & \mathtt{b} & \mathtt{c} \\ \mathtt{d} & \mathtt{e} & \mathtt{f} \\ \mathtt{g} & \mathtt{h} & \mathtt{i} \end{bmatrix} \ \mathtt{x} \ \begin{bmatrix} \mathtt{j} & \mathtt{k} & \mathtt{l} \\ \mathtt{m} & \mathtt{n} & \mathtt{o} \\ \mathtt{p} & \mathtt{q} & \mathtt{r} \end{bmatrix} \ \mathtt{=}$$

$$\begin{bmatrix} \mathtt{aj + bm + cp} & \mathtt{ak + bn + cq} & \mathtt{al + bo + cr} \\ \mathtt{dj + em + fp} & \mathtt{dk + en + fq} & \mathtt{dl + eo + fr} \\ \mathtt{gj + hm + ip} & \mathtt{gk + hn + iq} & \mathtt{gl + ho + ir} \end{bmatrix}$$

Voici le même produit dans un style plus contemporain, volé, lui aussi, sur internet, sans vergogne, et qui a des couleurs plutôt discrètes.

$$a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + a_{13} \times b_{31} = c_{11}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Certaines fois, on peut multiplier des matrices dans les deux sens, par exemple une matrice 3×2 que multiplie une matrice 2×3, ainsi que dans l'autre sens :

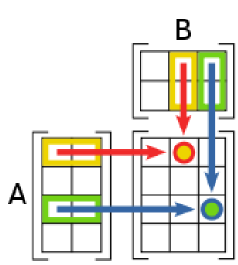
$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix}, \qquad\qquad B := \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{pmatrix},$$

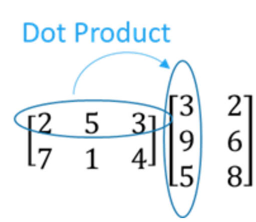
d'où :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} & a_{1,1}b_{1,3} + a_{1,2}b_{2,3} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} & a_{2,1}b_{1,3} + a_{2,2}b_{2,3} \\ a_{3,1}b_{1,1} + a_{3,2}b_{2,1} & a_{3,1}b_{1,2} + a_{3,2}b_{2,2} & a_{3,1}b_{1,3} + a_{3,2}b_{2,3} \end{pmatrix},$$

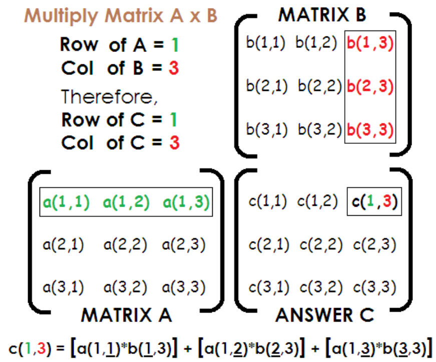
$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{1,1}a_{1,1} + b_{1,2}a_{2,1} + b_{1,3}a_{3,1} & b_{1,1}a_{1,2} + b_{1,2}a_{2,2} + b_{1,3}a_{3,2} \\ b_{2,1}a_{1,1} + b_{2,2}a_{2,1} + b_{2,3}a_{3,1} & b_{2,1}a_{1,2} + b_{2,2}a_{2,2} + b_{2,3}a_{3,2} \end{pmatrix}$$

Voici encore deux autres illustrations intuitives en petites dimensions :





Et encore une :

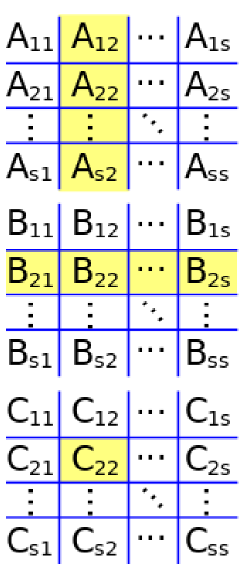


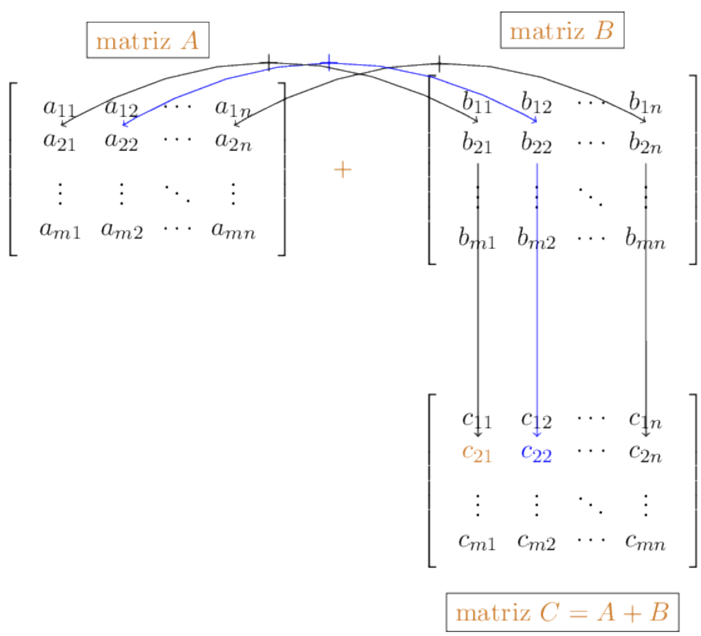
Enfin, redonnons un graphique en dimension quelconque :

$$\text{row } i \hookrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & \text{column } j & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & \boxed{\mathbf{c_{ij}}} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{entry on row } i \\ \text{column } j \end{array}$$

et encore deux autres (on voit bien que le tout dernier a été volé ! « *matriz* » !) :





Voilà, une fois terminé cet interlude joyeux et fou, reprenons le chemin de la théorie austère et froide, le dos courbé, la cervelle en surchauffe, et le stylo droit comme un I.

Par définition de la multiplication matricielle, on a :

$$\mathsf{Mat}(f)\,\mathsf{Mat}(g)\;=\;\mathsf{Mat}\big(f\circ g\big).$$

Maintenant, si H est un quatrième $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $q \geqslant 1$, et si $h\colon H \longrightarrow G$ est une troisième application linéaire, de telle sorte qu'on a le diagramme :

$$H \xrightarrow{\quad h \quad} G \xrightarrow{\quad g \quad} F \xrightarrow{\quad f \quad} E,$$

le fait que la composition d'applications entre ensembles est associative :

$$\big[f\circ g\big]\circ h \;=\; f\circ\big[g\circ h\big],$$

implique immédiatement que la multiplication entre les matrices correspondantes est associative :

$$\big[\big(a_{i,j}\big)\cdot\big(b_{j,k}\big)\big]\cdot\big(c_{k,l}\big) \;=\; \big(a_{i,j}\big)\cdot\big[\big(b_{j,k}\big)\cdot\big(c_{k,\ell}\big)\big],$$

où, comme on l'aura deviné :

$$\Big(c_{k,\ell}\Big)_{1\leqslant k\leqslant p\ \text{lignes}}^{1\leqslant \ell\leqslant q\ \text{colonnes}} \;=\; \mathsf{Mat}(h).$$

Ainsi, avec quatre entiers $q, p, n, m \geqslant 1$, pour trois matrices quelconques :

$$M\;\in\;\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \qquad\qquad M'\;\in\;\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \qquad\qquad M''\;\in\;\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),$$

bien qu'on n'ait pas commutativité de la multiplication, on a au moins *associativité :*

$$\big[M\cdot M'\big]\cdot M'' \;=\; M\cdot\big[M'\cdot M''\big].$$

De plus, on déduit de propriétés déjà vues dans le chapitre qui précède que la multiplication matricielle est distributive, à gauche comme à droite, par rapport à l'addition matricielle. Plus précisément, étant donné deux paires d'applications représentées par le diagramme :

$$G \xrightarrow[\quad g_2 \quad]{\quad g_1 \quad} F \xrightarrow[\quad f_2 \quad]{\quad f_1 \quad} E,$$

on a toujours :

$$\begin{aligned} f_1\circ\big(g_1+g_2\big) \;&=\; f_1\circ g_1 + f_1\circ g_2, \\ \big(f_1+f_2\big)\circ g_1 \;&=\; f_1\circ g_1 + f_2\circ g_1, \end{aligned}$$

et on en déduit que pour toutes matrices :

$$M_1,\,M_2\;\in\;\mathscr{M}_{m,n} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad M_1',\,M_2'\;\in\;\mathscr{M}_{n,p},$$

on a ladite distributivité :

$$\begin{aligned} M_1\cdot\big(M_1'+M_2'\big) \;&=\; M_1\cdot M_1' + M_1\cdot M_2', \\ \big(M_1+M_2\big)\cdot M_1' \;&=\; M_1\cdot M_1' + M_2\cdot M_1'. \end{aligned}$$

Enfin, pour terminer cette section, revenons à l'écriture matricielle (3.5) des applications linéaires :

$$y_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,x_j \qquad\qquad (1\leqslant i\leqslant m).$$

Comme nous l'avons implicitement anticipé, ces formules peuvent s'interpréter comme multiplication matricielle. En effet, introduisons les deux matrices colonnes :

$$X \;:=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad Y \;:=\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

qui sont la matrice X des coordonnées du vecteur $\vec{x}$ dans la base $\boldsymbol{B}_F$ de F, et la matrice Y des coordonnées du vecteur $\vec{y}$ dans la base $\boldsymbol{B}_E$ de E.

D'après la définition de la multiplication d'une matrice de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par une matrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, les formules en question expriment que pour tout indice $1 \leqslant i \leqslant m$, la coordonnée y_i est le terme de la ligne i de la matrice produit de $A := \big(a_{i,j}\big)$ par X, et par conséquent, on peut écrire ces m équations d'un seul bloc comme simple produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,m} & a_{2,m} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

D'une façon condensée, nous pouvons aussi abréger le tout sous une forme :

$$Y = A \cdot X,$$

qui est la *traduction matricielle de la relation* $\vec{y} = f(\vec{x})$.

De même, l'application $g\colon G \longrightarrow F$, à savoir la relation $\vec{x} = g(\vec{u})$, s'écrit sous forme condensée :

$$X = B \cdot U,$$

et sous forme de polystyrène expansé comme :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}.$$

Observons avant de changer de section que la composition s'écrit en abrégé :

$$Y = A \cdot X = \underbrace{A \cdot B}_{=:\, C} \cdot U,$$

c'est-à-dire avec tout le polystyrène qu'on aime et qu'on Dior-adore en se roulant dans le pop-corn :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix}}_{\text{multiplication matricielle}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}.$$

8. Anneau des matrices carrées d'ordre n

Quand $m = n$, l'ensemble $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ jouit de propriétés particulières.

Terminologie 8.1. On appelle *matrice carrée* toute matrice dont le nombre de lignes égale celui des colonnes. Ce nombre s'appelle *ordre* de la matrice carrée. L'ensemble des matrices carrées sur le corps $\mathbb{K}$ sera noté :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \equiv \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K}).$$

Ainsi, une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 1$ est associée à une application linéaire $f \in \mathscr{L}(F, E)$ lorsque :

$$n = \dim F = \dim E.$$

Cela est en particulier le cas lorsque $F = E$, avec $n = \dim E$. Si, dans ce dernier cas, on choisit une base $\boldsymbol{B}_E$ de E, l'application $f \longmapsto \mathsf{Mat}(f)$ est une bijection de $\mathscr{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Cette bijection est un isomorphisme pour l'addition :

$$\mathsf{Mat}\big(f+g\big) \;=\; \mathsf{Mat}(f)+\mathsf{Mat}(g),$$

et c'est un isomorphisme pour la multiplication, ou composition :

$$\mathsf{Mat}\big(f\circ g\big) \;=\; \mathsf{Mat}(f)\cdot\mathsf{Mat}(g).$$

Ici, les multiplications, comme les additions, sont des lois de composition *internes*, à savoir on a :

$$f,\, g\,\in\,\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} f+g\,\in\,\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \\ f\circ g\,\in\,\mathscr{M}_n(\mathbb{K}). \end{cases}$$

Or nous avons vu au chapitre précédent que $\mathscr{L}(E)$ est un anneau à élément unité. Par isomorphie, on peut donc énoncer le

Théorème 8.2. *L'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{K}$ est un anneau à élément unité.* □

Rappelons que nous avons, à deux reprises, insisté sur le fait que cet anneau n'est *pas* commutatif.

L'élément unité de cet anneau n'est autre que la matrice qui correspond à l'application identité :

$$\begin{aligned} \mathsf{Id}\colon\quad E &\longrightarrow E \\ \vec{x} &\longmapsto \vec{x}, \end{aligned}$$

et dont la matrice est (exercice) :

$$\mathsf{Mat}(\mathsf{Id}) \;:=\; I_n \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Matrices scalaires, diagonales et triangulaires

Commençons par introduire un objet mathématique qui permet souvent d'économiser et de contracter l'écriture des textes.

Notation 9.1. On appelle *symbole de Kronecker* les quantités $\delta_{i,j}$, définies pour des paires d'indices $1\leqslant i,j\leqslant n$, par :

$$\delta_{i,j} \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{lorsque }\; i=j, \\ 0 & \text{lorsque }\; i\neq j. \end{cases}$$

Il est symétrique par rapport à ses deux indices :

$$\delta_{j,i} \;=\; \delta_{i,j} \qquad\qquad (1\leqslant i,j\leqslant n).$$

En ces termes, nous pouvons alors écrire la matrice identité sous forme très condensée :

$$I_n \;=\; \big(\delta_{i,j}\big) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Observation 9.2. *Dans l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille $n \times n$, la matrice identité est l'élément neutre pour la multiplication de matrices :*

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A \qquad\qquad (\forall\, A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})),$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

ainsi que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Introduisons maintenant les matrices scalaires. Comme précédemment, soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire fixé, et soit l'homothétie de rapport λ :

$$f\colon \quad \vec{x} \longmapsto \lambda\, \vec{x}.$$

Choisissons aussi une base de E :

$$\boldsymbol{B}_E = \big\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\big\}.$$

On a donc pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$f(\vec{e}_i) = \lambda\, \vec{e}_i.$$

Dans la matrice associée $\mathsf{Mat}(f)$, la colonne de rang i est constituée de zéros, sauf à la ligne i où l'élément vaut λ.

Par conséquent, en introduisant les symboles de Kronecker, nous avons :

$$\mathsf{Mat}(f) = \big(\lambda\, \delta_{i,j}\big) = \lambda\, I_n,$$

ce qui s'écrit sous forme détaillée :

$$\mathsf{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Terminologie 9.3. La matrice $\mathsf{Mat}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ d'une homothétie $f = \lambda\, \mathsf{Id}$ se nomme *matrice scalaire*.

On peut vérifier que la matrice scalaire, associée à une homothétie de rapport λ, est *indépendante* de la base $\boldsymbol{B}_E$ choisie pour E.

Passons maintenant à des matrices un peu plus générales, au sens où leurs éléments non nuls ne sont pas tous égaux à un même scalaire λ.

Définition 9.4. On appelle *matrice diagonale* toute matrice carrée dont tous les termes sont nuls en dehors de la diagonale principale. L'ensemble de ces matrices sera noté :

$$\mathscr{D}_n(\mathbb{K}).$$

Si on se donne n éléments scalaires :

$$a_1,\, a_2\, \dots,\, a_n \;\in\; \mathbb{K},$$

dont certains peuvent éventuellement être nuls, il leur correspond une matrice diagonale :

$$\mathsf{Diag}\big(a_1, a_2, \dots, a_n\big) \;=\; \big(a_i\,\delta_{i,j}\big) \;=\; \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Les matrices scalaires sont alors des matrices diagonales (très) particulières dans lesquelles tous les éléments diagonaux $a_i = \lambda$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$ sont égaux à un même et unique scalaire.

Observons qu'on peut tout aussi bien écrire en changeant $a_i \longmapsto a_j$ grâce à la symétrie du symbole de Kronecker :

$$\mathsf{Diag}\big(a_1, a_2, \dots, a_n\big) \;=\; \big(a_j\,\delta_{i,j}\big).$$

Proposition 9.5. *L'ensemble des matrices diagonales d'ordre n est un sous-anneau commutatif de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

Être un *sous-anneau* signifie être stable par l'addition et par la multiplication.

Démonstration. En effet, l'addition de deux matrices diagonales est clairement une matrice diagonale :

$$\big(a_i\,\delta_{i,j}\big) + \big(a_i'\,\delta_{i,j}\big) \;=\; \Big(\big(a_i + a_i'\big)\,\delta_{i,j}\Big).$$

Ensuite, nous affirmons que le produit de deux matrices diagonales est encore une matrice diagonale, ce que l'on peut représenter par l'équation complète :

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

En effet, le calcul du produit de deux matrices diagonales quelconques :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Diag}\big(a_1, \dots, a_n\big) \cdot \mathsf{Diag}\big(b_1, \dots, b_n\big) &= \big(a_i\,\delta_{i,j}\big) \cdot \big(b_j\,\delta_{j,k}\big) \\
[b_j \longleftrightarrow b_k] \qquad &= \big(a_i\,\delta_{i,j}\big) \cdot \big(b_k\,\delta_{j,k}\big) \\
[\text{Définition !}] \qquad &= \bigg(\sum_{j=1}^{n} a_i\,\delta_{i,j}\,b_k\,\delta_{j,k}\bigg) \\
&= \bigg(a_i\,b_k \sum_{j=1}^{n} \delta_{i,j}\,\delta_{j,k}\bigg),
\end{aligned}$$

fait apparaître une somme de produits de symboles de Kronecker, qu'il faut comprendre — mais cela est facile !

Parmi les n symboles $\delta_{i,1}, \dots, \delta_{i,i}, \dots, \delta_{i,n}$ dans cette somme, seul $\delta_{i,i} = 1$ est non nul. Par conséquent, dans la somme, il ne reste que le terme pour $j = i$, et en remplaçant alors $j := i$ dans le deuxième symbole de Kronecker, on obtient un réultat :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Diag}\big(a_1, \dots, a_n\big) \cdot \mathsf{Diag}\big(b_1, \dots, b_n\big) &= \big(a_i\,b_k\,\delta_{i,k}\big)_{1\leqslant i\leqslant n \text{ lignes}}^{1\leqslant k\leqslant n \text{ colonnes}} \\
&= \mathsf{Diag}\big(a_1b_1, \dots, a_nb_n\big),
\end{aligned}$$

dans lequel un nouveau symbole de Kronecker fait bien voir une matrice diagonale.

De plus, la commutativité de la multiplication devient évidente avec cette formule, car la multiplication dans $\mathbb{K}$ est *commutative :*

$$\begin{aligned}\mathsf{Diag}\big(b_1,\dots,b_n\big)\cdot\mathsf{Diag}\big(a_1,\dots,a_n\big) &= \mathsf{Diag}\big(b_1a_1,\dots,b_na_n\big)\\ &= \mathsf{Diag}\big(a_1b_1,\dots,a_nb_n\big)\\ &= \mathsf{Diag}\big(a_1,\dots,a_n\big)\cdot\mathsf{Diag}\big(b_1,\dots,b_n\big).\end{aligned}$$ □

Maintenant, nous pouvons voir comment se comporte l'ensemble des matrices scalaires dans l'ensemble plus grand des matrices diagonales.

Proposition 9.6. *L'ensemble des matrices scalaires d'ordre n sur $\mathbb{K}$ est un corps, isomorphe à $\mathbb{K}$, et inclus dans l'anneau commutatif des matrices diagonales.*

Démonstration. Comme plus haut, soit I_n la matrice unité, avec des 1 sur la diagonale, et des 0 partout ailleurs. Introduisons l'application :

$$\begin{aligned}\Phi\colon\quad \mathbb{K} &\longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{K})\\ \lambda &\longmapsto \lambda\, I_n.\end{aligned}$$

Elle est visiblement injective (exercice mental). C'est donc une *bijection* de $\mathbb{K}$ sur l'ensemble $\Phi(\mathbb{K})$ des matrices scalaires.

Ensuite, on a :

$$\Phi(\lambda)+\Phi(\mu) \,=\, \lambda\, I_n+\mu\, I_n \,=\, \big(\lambda+\mu\big)\, I_n \,=\, \Phi(\lambda+\mu),$$

ainsi que :

$$\Phi(\lambda)\cdot\Phi(\mu) \,=\, \big(\lambda\, I_n\big)\cdot\big(\mu\, I_n\big) \,=\, \big(\lambda\,\mu\big)\, I_n \,=\, \Phi(\lambda\,\mu),$$

ce qui fait voir que Φ est bien un isomorphisme de corps. □

Évidemment, toutes ces petites matrices diagonales sont beaucoup trop simplettes pour nous, mathématiciens en herbe qui ambitionnent de travailler avec des matrices de taille 137 225 808 dans lesquelles il y aurait peu de zéros.

Définition 9.7. Une *matrice triangulaire supérieure* d'ordre n est une matrice carrée dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que tout terme situé en-dessous de la diagonale soit nul :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n}\\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n}\\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}.$$

La notion de *matrice triangulaire inférieure* se définit d'une façon analogue et très évidente pour notre intuition instantanée.

Ainsi, une matrice est triangulaire supérieure si et seulement si :

$$i \,>\, j \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad a_{i,j} \,=\, 0.$$

Notation 9.8. Le sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ constituée des matrices triangulaires supérieures sera noté :

$$\mathscr{T}_n(\mathbb{K}).$$

Proposition 9.9. *$\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ est un sous-anneau de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

Rappelons que cela signigie que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est stable par addition et par multiplication.

Démonstration. Tout d'abord, étant donné deux matrices :

$$\big(a_{i,j}\big) \,\in\, \mathscr{T}_n(\mathbb{K}) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \big(a'_{i,j}\big) \,\in\, \mathscr{T}_n(\mathbb{K}),$$

ce qui s'exprime par :

$$i \,>\, j \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad \Big(a_{i,j} \,=\, 0 \qquad \text{et} \qquad a'_{i,j} \,=\, 0\Big),$$

il est clair que :

$$i \,>\, j \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad a_{i,j} + a'_{i,j} \,=\, 0+0 \,=\, 0,$$

ce qui établit la triangularité supérieure de la somme matricielle :

$$\big(a_{i,j} + a'_{i,j}\big) \,\in\, \mathscr{T}_n(\mathbb{K}).$$

Pour ce qui est de la triangularité du *produit* de deux matrices triangulaires supérieures $\big(a_{i,j}\big)$ et $\big(b_{j,k}\big)$, regardons :

$$\big(a_{i,j}\big)\cdot\big(b_{j,k}\big) \,=\, \bigg(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{j,k}\bigg) \,=:\, \big(c_{i,k}\big).$$

Nous devons établir que tous ces termes $c_{i,k}$ sont nuls lorsque $i > k$.

Or si nous décomposons la somme $\sum_{j=1}^{n}$ qui les constitue en deux morceaux astucieux :

$$c_{i,k} \,=\, \sum_{j=1}^{i-1} \underline{a_{i,j}}_{\circ}\, b_{j,k} + \underbrace{\sum_{j=i}^{n}}_{j\geqslant i>k} a_{i,j}\, \underline{b_{j,k}}_{\circ},$$

dans le premier morceau, tous les termes s'annulent grâce à la première hypothèse que $a_{i,j} \,=\, 0$ lorsque $j < i$, et dans le second morceau, tous les termes s'annulent *aussi*, car pour eux, on voit que $j > k$, et l'autre hypothèse $b_{j,k} = 0$ lorsque $j > k$ s'applique ! □

Remarquons pour terminer que l'ensemble des matrices diagonales est un sous-anneau de $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$.

10. Matrices inversibles

Dans tout anneau commutatif A à élément unité noté $1 \in A$, on dit qu'un élément x est *inversible* lorsqu'il existe un élément $x' \in A$ satisfaisant :

$$x\, x' \,=\, x'\, x \,=\, 1.$$

On note alors :

$$x' \,=:\, x^{-1}.$$

Notation 10.1. L'ensemble des éléments inversible de l'anneau A sera noté :

$$\mathsf{Inv}_A.$$

Cet ensemble Inv_A n'est pas vide, tout bêtement parce que $1 \in \mathsf{Inv}_A$.

Lemme 10.2. Inv_A *est un groupe multiplicatif.*

Preuve. Il s'agit de vérifier que Inv_A est stable par multiplication et par inversion, et cela est aisé.

En effet, puisque pour $x \in \mathsf{Inv}_A$ et $y \in \mathsf{Inv}_A$, il existe des inverses $x^{-1} \in A$ et $y^{-1} \in A$, si nous calculons le produit :

$$\big(x\, y\big)\,\big(y^{-1}\, x^{-1}\big) \,=\, x\,\big(y\, y^{-1}\big)\, x^{-1} \,=\, x\, 1\, x^{-1} \,=\, 1,$$

nous constatons que $xy \in \mathsf{Inv}_A$, avec de plus l'information que $\big(xy\big)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Ensuite, il est clair (exercice mental) par définition que :

$$x \in \mathsf{Inv}_A \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad x^{-1} \in \mathsf{Inv}_A.$$

Ceci démontre bien que Inv_A est un groupe multiplicatif. □

La multiplication entre matrices qui avait été notée jusqu'à présent avec un point au centre :

$$(\bullet) \cdot (\bullet)$$

sera autorisée à être notée sans aucun signe mathématique, comme c'est le cas pour la multiplication entre scalaires $\lambda\,\mu$ dans le corps de référence $\mathbb{K}$.

Définition 10.3. On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *inversible*, ou *régulière*, lorsqu'il existe une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, notée M^{-1}, telle que :

$$M\,M^{-1} = M^{-1}\,M = I_n.$$

Rappelons que l'on note $\mathscr{L}(E) \equiv \mathscr{L}(E, E)$ l'anneau des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$ sur un corps $\mathbb{K}$. Choisissons une base $\boldsymbol{B}_E$ de E. Dans la bijection vue à de nombreuses reprises :

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(E) &\longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto \mathsf{Mat}(f), \end{aligned}$$

entre f et sa matrice dans la base $\boldsymbol{B}_E$, l'application identité $\mathsf{Id} \in \mathscr{L}(E)$ a pour correspondante la matrice identité I_n. Ainsi, pour qu'une matrice M soit inversible, il faut et il suffit que son application correspondante $f = f_M \in \mathscr{L}(E)$ jouisse de la propriété analogue qu'il existe un endomorphisme $g \in \mathscr{L}(E)$, tel que :

$$f \circ g = g \circ f = \mathsf{Id},$$

et on note :

$$g =: f^{-1}.$$

Ainsi, pour que f possède un inverse dans $\mathscr{L}(E)$, il faut et il suffit que f soit *bijective*.

Réciproquement, si f est bijective, alors f^{-1} existe en tant qu'application, et :

$$\begin{aligned} \mathsf{Mat}(f) \cdot \mathsf{Mat}\big(f^{-1}\big) &= \mathsf{Mat}\big(f \circ f^{-1}\big) = \mathsf{Mat}\,(\mathsf{Id}) = I_n, \\ \mathsf{Mat}\big(f^{-1}\big) \cdot \mathsf{Mat}(f) &= \mathsf{Mat}\big(f^{-1} \circ f\big) = \mathsf{Mat}\,(\mathsf{Id}) = I_n. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathsf{Mat}(f)$ est inversible, et on a :

$$\big[\mathsf{Mat}(f)\big]^{-1} = \mathsf{Mat}\big(f^{-1}\big).$$

Toutes ces considérations assez élémentaires peuvent maintenant être résumées sous la forme d'un

Théorème 10.4. *L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe multiplicatif, isomorphe au groupe $\mathscr{A}(E) \subset \mathscr{L}(E)$ des automorphismes linéaires de E.* □

Notation 10.5. Dans l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 1$, le sous-ensemble des matrices inversibles sera noté :

$$\mathscr{A}_n(\mathbb{K}).$$

Le groupe de ces matrices inversibles sera appelé *groupe linéaire à n variables* sur le corps $\mathbb{K}$, et il sera noté :

$$\mathsf{GL}_n(\mathbb{K}).$$

11. Changements de bases

À plusieurs reprises, nous avons signalé que la matrice $\mathsf{Mat}(f)$ d'une application linéaire dépend en général d'une base choisie dans les espaces vectoriels considérés — mais sans en dire plus. Cette section est destinée à étudier cette dépendance en la base. Nous travaillerons avec $\mathscr{L}(E)$, c'est-à-dire avec un unique espace vectoriel $E = F$.

Choisissons deux bases quelconques de E :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_E &= \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}, \\ \boldsymbol{B}'_E &= \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}. \end{aligned}$$

Problème 11.1. *Connaissant les coordonnées* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *d'un vecteur* $\vec{x} \in E$ *dans la première base* $\boldsymbol{B}_E$*, déterminer ses nouvelles coordonnées* $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ *dans la deuxième base* $\boldsymbol{B}'_E$.

D'après un théorème vu dans le chapitre précédent, il existe un unique endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ qui envoie la base $\boldsymbol{B}_E$ sur la base $\boldsymbol{B}'_E$, c'est-à-dire tel que :

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}'_1, \ \dots\dots\dots, \ f(\vec{e}_n) = \vec{e}'_n.$$

De plus, cet endomorphisme est une bijection, et ainsi, c'est un *automorphisme* de E. Il en résulte que la matrice de f dans toute base de E est *inversible*.

Donnons-nous alors la matrice de f dans la première base $\boldsymbol{B}_E$:

$$\vec{e}'_i = f(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\, \vec{e}_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Terminologie 11.2. La matrice $\big(a_{i,j}\big)$ se nomme *matrice de passage* de la base $\boldsymbol{B}_E$ vers la base $\boldsymbol{B}'_E$, et sera notée :

$$P = \big(a_{i,j}\big).$$

Rappelons — au *passage !* — que les *colonnes* de cette matrice P sont constituée des coordonnées des vecteurs images $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, ..., $f(\vec{e}_n)$ de la base $\boldsymbol{B}_E$, ce que nous pouvons représenter sous forme diagrammatique et intuitive comme suit :

$$P = \big(a_{i,j}\big) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \\ \scriptstyle f(\vec{e}_1) \quad f(\vec{e}_2) \quad \cdots \quad f(\vec{e}_n) \end{array},$$

en ajoutant la représentation explicite de ces images de vecteurs :

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \quad f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix}, \quad \dots\dots\dots, \quad f(\vec{e}_n) = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Soit alors un vecteur quelconque $\vec{x} \in E$, de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans la première base $\boldsymbol{B}_E$:

$$\vec{x} = x_1\, \vec{e}_1 + x_2\, \vec{e}_2 + \cdots + x_n\, \vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \vec{e}_i.$$

Cherchons les coordonnées $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ de ce vecteur $\vec{x}$ dans la nouvelle base $\boldsymbol{B}'_E$:

$$\vec{x} = x'_1\, \vec{e}'_1 + x'_2\, \vec{e}'_2 + \cdots + x'_n\, \vec{e}'_n = \sum_{i=1}^{n} x'_i\, \vec{e}'_i.$$

À cette fin, remplaçons et calculons :

$$\begin{aligned} \vec{x} \,=\, \sum_{i=1}^n x_i\,\vec{e}_i \,=\, \sum_{i=1}^n x_i'\,\vec{e}_i{}' &= \sum_{i=1}^n x_i' \bigg(\sum_{j=1}^n a_{j,i}\,\vec{e}_j\bigg) \\ &= \sum_{j=1}^n \bigg(\sum_{i=1}^n a_{j,i}\,x_i'\bigg)\vec{e}_j \\ [i \longleftrightarrow j] \qquad\qquad &= \sum_{i=1}^n \bigg(\sum_{j=1}^n a_{i,j}\,x_j'\bigg)\vec{e}_i, \end{aligned}$$

où, pour des raisons notationnelles, nous avons *permuté rigoureusement* les lettres i et j à la dernière ligne, afin d'obtenir par identification des coefficients des n vecteurs $\vec{e}_i$ entre les deux membres de l'équation obtenue les relations :

$$x_i \,=\, \sum_{j=1}^n a_{i,j}\,x_j' \qquad\qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

qui expriment les coordonnées $x_\bullet$ en fonction des coordonnées $x_\bullet'$.

Ce n'est pas encore tout à fait la solution à notre problème, qui demandait à l'inverse d'exprimer les coordonnées $x_\bullet'$ en fonction des coordonnées $x_\bullet$, mais nous pouvons toutefois exprimer ce que nous avons obtenu avant de progresser plus avant.

En effet, au moyen des deux matrices colonnes :

$$X \,:=\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X' \,:=\, \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix},$$

ces n équations scalaires qui reviennent à une équation incorporant un produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,=\, \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix},$$

peuvent alors s'exprimer de manière beaucoup plus condensée sous la forme agréable :

$$\boxed{X \,=\, P\,X'.}$$

Mêzalorre [2] — Mais alors pour recevoir X' en fonction de X, il suffit de faire passer P à gauche — comme l'Assemblée Nationale en 1997 — :

$$\boxed{P^{-1}\,X \,=\, X',}$$

et notre problème est résolu !

Pas tout à fait, car cette équation sous-entend que nous sachions calculer l'inverse :

$$P^{-1} \,=\, \big(a_{i,j}\big)^{-1}$$

d'une matrice inversible $P = \big(a_{i,j}\big)$, et ce problème de calcul s'avère très difficile, y compris pour les ordinateurs quand la taille n d'une matrice devient un peu grande.

En tout cas, il est absolument interdit de s'imaginer que l'inverse d'une matrice soit la matrice idiote $\big(\frac{1}{a_{i,j}}\big)$ dont les termes sont les inverses, car nous avons insisté sur le fait que la multiplication entre deux matrices $(a_{i,j})$ et $(b_{i,j})$ n'était *pas* la multiplication idiote $\big(a_{i,j}\,b_{i,j}\big)$, élément par élément,

2. …comme s'expriment les habitants francophones d'Andorra la Vella…

mais une opération plus complexe qui provient de la *composition* des deux applications linéaires associées.

Ainsi, calculer l'inverse d'une matrice sera un travail difficile, et nous en parlerons plus tard.

Pour le fun, et pour créer du suspens, importons trois exemples amusants d'inverses de matrices $(\bullet)^{-1}$ concoctés sur ordinateur.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{38} & -\frac{5}{38} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{38} & \frac{1}{38} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{38} & -\frac{5}{38} \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 & 7 \\ 2 & 4 & -9 & -9 \\ 2 & -3 & -9 & 1 \\ 9 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{222}{2141} & \frac{182}{2141} & -\frac{19}{2141} & \frac{103}{2141} \\ -\frac{750}{2141} & -\frac{557}{2141} & -\frac{283}{2141} & \frac{520}{214} \\ \frac{241}{2141} & \frac{159}{2141} & -\frac{146}{2141} & -\frac{110}{214} \\ -\frac{525}{2141} & -\frac{604}{2141} & \frac{16}{2141} & \frac{364}{214} \end{pmatrix} \text{ —}
\end{aligned}$$

— oh, allez, encore un gros dernier pour la route, l'inverse de la matrice pas très simple de taille 5×5 :

$$A := \begin{bmatrix} -46 & 80 & -74 & 51 & -17 \\ -29 & 20 & 13 & 20 & -25 \\ 9 & 39 & 32 & -46 & 78 \\ 81 & -35 & 48 & 35 & 23 \\ 35 & 26 & -60 & -54 & -67 \end{bmatrix}$$

est la matrice pas vraiment plus simple[3] :

$$\begin{bmatrix} \frac{1621261}{788355480} & -\frac{4434691}{1970888700} & \frac{2489327}{1313925800} & \frac{39156173}{3941777400} & \frac{11694193}{1970888700} \\ \frac{1297599}{262785160} & \frac{9265871}{656962900} & \frac{11598439}{1313925800} & \frac{6004687}{1313925800} & \frac{3501467}{656962900} \\ -\frac{2358731}{394177740} & \frac{20284211}{985444350} & \frac{2983383}{656962900} & \frac{6599117}{1970888700} & \frac{269947}{985444350} \\ \frac{4857913}{788355480} & \frac{1555577}{1970888700} & -\frac{5626469}{1313925800} & \frac{24765569}{3941777400} & -\frac{9236471}{1970888700} \\ \frac{533365}{157671096} & -\frac{1164527}{78835548} & \frac{199707}{52557032} & -\frac{173375}{157671096} & -\frac{490807}{78835548} \end{bmatrix}$$

On voit bien que le problème d'inverser une matrice ne va pas être simple, n'est-il pas, *Milady* ? Alors là, pendant les examens, on va en voir ce qu'on va en voir, des inversions de matrices !

Maintenant que nous savons comment se transforment les coordonnées d'un vecteur quand on change de base, une deuxième question se présente à nous.

Problème 11.3. *Connaissant la matrice $M = \mathsf{Mat}(f)$ dans une base B_E d'un homomorphisme linéaire $f \in \mathscr{L}(E)$, trouver la matrice M' de cet homomorphisme dans une autre base B'_E de E.*

Soit donc $f \in \mathscr{L}(E)$, et soit $M := \mathsf{Mat}(f)$ sa matrice dans la base B_E de E. Si X et Y sont les matrices colonnes des coordonnées d'un vecteur $\vec{x} \in E$ et de son image $\vec{y} := f(\vec{x})$ dans la base B_E, nous avons vu plus haut que :

$$Y = M\,X.$$

3. … figure de style qu'on appelle la *litote*…

Soit aussi P la matrice de passage de la base $\boldsymbol{B}_E$ à la base $\boldsymbol{B}'_E$. Si X' et Y' désignent les matrices colonnes des coordonnées de ces mêmes vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y} = f(\vec{x})$ dans la base $\boldsymbol{B}'_E$, nous venons de voir que :

$$X \,=\, P\,X' \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad Y \,=\, P\,Y'.$$

La dernière équivaut à :

$$Y' \,=\, P^{-1}\,Y.$$

Remplaçons alors, dans cette relation, Y par $M\,X = M\,P\,X'$, pour obtenir :

$$Y' \,=\, \big(P^{-1}\,M\,P\big)\,X',$$

ce qui prouve que la matrice M' de l'homomorphisme f dans la base $\boldsymbol{B}'_E$ est :

$$\boxed{M' \,=\, P^{-1}\,M\,P.}$$

Cette relation résout le problème posé. Énonçons très précisément le résultat obtenu.

Théorème 11.4. [très utile] *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit un endomorphisme linéaire $f\colon E \longrightarrow E$. Soit une base $\boldsymbol{B}_E = \big\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\big\}$ de E. Soit la matrice de f dans cette base :*

$$M \,:=\, \mathsf{Mat}_{\boldsymbol{B}_E}\, f \,=\, \big(m_{i,j}\big)_{1\leqslant i\leqslant n\,\text{lignes}}^{1\leqslant j\leqslant n\,\text{colonnes}},$$

de telle sorte qu'un vecteur quelconque de E :

$$\vec{x} \,=\, x_1\,\vec{e}_1 + \cdots + x_n\,\vec{e}_n,$$

est envoyé par f sur le vecteur :

$$f(\vec{x}) \,=:\, y_1\,\vec{e}_1 + \cdots + y_n\,\vec{e}_n,$$

a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Étant donné une autre *base $\boldsymbol{B}'_E = \big\{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n\big\}$ de E, où les $\vec{e}'_\bullet$ s'expriment en fonction des $\vec{e}_\bullet$ par certaines formules :*

$$\vec{e}'_i \,=\, \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\,\vec{e}_j \qquad\qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

et soit la matrice de passage de la base $\boldsymbol{B}_E$ vers la base $\boldsymbol{B}'_E$:

$$P \,:=\, \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \vec{e}'_1 & \cdots & \vec{e}'_n \end{array} \end{array},$$

qui est inversible.

Alors la matrice de l'application linéaire f dans la nouvelle base $\boldsymbol{B}'_E$:

$$M' \,:=\, \mathsf{Mat}_{\boldsymbol{B}'_E}\, f \,=\, \big(m'_{i,j}\big)_{1\leqslant i\leqslant n\,\text{lignes}}^{1\leqslant j\leqslant n\,\text{colonnes}}.$$

est donnée par la formule :

$$M' \,=\, P^{-1}\,M\,P. \qquad \square$$

12. Transpositions de matrices

Soient deux entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$. À présent, considérons des matrices qui ne sont pas forcément carrées.

Définition 12.1. On appelle *transposée* d'une matrice $M \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ comportant $m \geqslant 1$ lignes et $n \geqslant 1$ colonnes la matrice, notée :

$$^{\mathtt{t}}M \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K}),$$

qui est obtenue à partir de M en échangeant les lignes et les colonnes, de telle sorte que $^{\mathtt{t}}M$ comporte à l'inverse n lignes et m colonnes.

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{transposer}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

En général, si donc on note la matrice considérée :

$$M = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i\leqslant m \text{ lignes}}^{1\leqslant j\leqslant n \text{ colonnes}},$$

et si on donne un nom aux éléments de la matrice transposée :

$$^{\mathtt{t}}M =: \big(a_{j,i}^{\mathtt{t}}\big)_{1\leqslant j\leqslant n \text{ lignes}}^{1\leqslant i\leqslant m \text{ colonnes}},$$

on doit avoir par définition :

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant m \quad \forall\, 1 \leqslant j \leqslant n : \qquad a_{j,i}^{\mathtt{t}} := a_{i,j}.$$

On pourra ainsi écrire :

$$^{\mathtt{t}}\Big[\big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i\leqslant m \text{ lignes}}^{1\leqslant j\leqslant n \text{ colonnes}}\Big] = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant j\leqslant n \text{ lignes}}^{1\leqslant i\leqslant m \text{ colonnes}}.$$

Cette opération de *transposition* définit donc une application :

$$\begin{aligned} ^{\mathtt{t}}(\bullet) : \quad \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ M &\longmapsto {}^{\mathtt{t}}M, \end{aligned}$$

qui est naturellement bijective et inverse d'elle-même :

$$^{\mathtt{t}}\big(^{\mathtt{t}}M\big) = M.$$

En particulier, si on se restreint aux matrices carrées d'ordre n, on obtient la propriété suivante.

Observation 12.2. *La transposition $M \longmapsto {}^{\mathtt{t}}M$ est une involution de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.* □

Cet opérateur possède quelques propriétés simples vis-à-vis de la structure d'anneau de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Lemme 12.3. *La transposition est un isomorphisme linéaire pour l'addition et pour la multiplication par un scalaire :*

$$\begin{aligned} ^{\mathtt{t}}\big[M + N\big] &= {}^{\mathtt{t}}M + {}^{\mathtt{t}}N, \\ ^{\mathtt{t}}\big[\lambda\, M\big] &= \lambda\, {}^{\mathtt{t}}M. \end{aligned}$$

Preuve. Soient donc deux matrices de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$:

$$M = \big(a_{i,j}\big) \qquad \text{et} \qquad N = \big(b_{i,j}\big).$$

Le calcul suivant justifie la première affirmation :

$$\begin{aligned}
{}^{\mathtt{t}}\big[M+N\big] \;&=\; {}^{\mathtt{t}}\Big[\big(a_{i,j}+b_{i,j}\big)_{1\leqslant i\leqslant m \text{ lignes}}^{1\leqslant j\leqslant n \text{ colonnes}}\Big] \;=\; \Big(a_{i,j}+b_{i,j}\Big)_{1\leqslant j\leqslant n \text{ lignes}}^{1\leqslant i\leqslant m \text{ colonnes}} \\
&= \Big(a_{i,j}\Big)_{1\leqslant j\leqslant n \text{ lignes}}^{1\leqslant i\leqslant m \text{ colonnes}} + \Big(b_{i,j}\Big)_{1\leqslant j\leqslant n \text{ lignes}}^{1\leqslant i\leqslant m \text{ colonnes}} \\
&= {}^{\mathtt{t}}M + {}^{\mathtt{t}}N,
\end{aligned}$$

tandis que la seconde se justifie de manière analogue :

$$\begin{aligned}
{}^{\mathtt{t}}\big[\lambda\, M\big] \;&=\; {}^{\mathtt{t}}\Big[\Big(\lambda\, a_{i,j}\Big)_{1\leqslant i\leqslant m \text{ lignes}}^{1\leqslant j\leqslant n \text{ colonnes}}\Big] \;=\; \Big(\lambda\, a_{i,j}\Big)_{1\leqslant j\leqslant n \text{ lignes}}^{1\leqslant i\leqslant m \text{ colonnes}} \\
&= \lambda\,\Big(a_{i,j}\Big)_{1\leqslant j\leqslant n \text{ lignes}}^{1\leqslant i\leqslant m \text{ colonnes}} \\
&= \lambda\,{}^{\mathtt{t}}M.
\end{aligned}$$

□

Par conséquent, l'application $M \longmapsto {}^{\mathtt{t}}M$ est un isomorphisme linéaire de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

Fait remarquable : vis-à-vis du produit, la transposition *intervertit* l'ordre des facteurs.

Lemme 12.4. *Pour tous entiers $m, n, p \geqslant 1$, toute matrice $M \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, et toute matrice $N \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a :*

$$\boxed{{}^{\mathtt{t}}\big[M\cdot N\big] \;=\; {}^{\mathtt{t}}N\cdot{}^{\mathtt{t}}M.}$$

Observons, et il est important de le dire, que la matrice ${}^{\mathtt{t}}N$ *a le droit* de multiplier la matrice ${}^{\mathtt{t}}M$, puisque le nombre n de colonnes de :

$${}^{\mathtt{t}}N \;\in\; \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

est bel et bien égal au nombre de lignes n de :

$${}^{\mathtt{t}}M \;\in\; \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K}).$$

Démonstration. Soient donc deux matrices :

$$M \;=\; \Big(a_{i,j}\Big)_{1\leqslant i\leqslant m \text{ lignes}}^{1\leqslant j\leqslant n \text{ colonnes}} \qquad\text{et}\qquad N \;=\; \Big(b_{j,k}\Big)_{1\leqslant j\leqslant n \text{ lignes}}^{1\leqslant k\leqslant p \text{ colonnes}},$$

qui ont pour produit :

$$M\cdot N \;=\; \bigg(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{j,k}\bigg)_{1\leqslant i\leqslant m \text{ lignes}}^{1\leqslant k\leqslant p \text{ colonnes}},$$

d'où, par transposition, un premier résultat :

$${}^{\mathtt{t}}\big[M\cdot N\big] \;=\; \bigg(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{j,k}\bigg)_{1\leqslant k\leqslant p \text{ lignes}}^{1\leqslant i\leqslant m \text{ colonnes}}.$$

Par ailleurs, les transposées de M et de N sont :

$${}^{\mathtt{t}}M \;=\; \Big(a_{j,i}^{\mathtt{t}}\Big)_{1\leqslant j\leqslant n \text{ lignes}}^{1\leqslant i\leqslant m \text{ colonnes}} \qquad\text{et}\qquad {}^{\mathtt{t}}N \;=\; \Big(b_{k,j}^{\mathtt{t}}\Big)_{1\leqslant k\leqslant p \text{ lignes}}^{1\leqslant j\leqslant n \text{ colonnes}},$$

avec bien sûr :

$$a_{j,i}^{\mathtt{t}} \;:=\; a_{i,j} \qquad\text{et}\qquad b_{k,j}^{\mathtt{t}} \;:=\; b_{j,k},$$

et elles ont pour produit autorisé un deuxième résultat :

$$\begin{aligned} {}^{\mathtt{t}}N \cdot {}^{\mathtt{t}}M \;&=\; \left(\sum_{j=1}^{n} b^{\mathtt{t}}_{k,j}\, a^{\mathtt{t}}_{j,i} \right)^{1 \leqslant i \leqslant m \text{ colonnes}}_{1 \leqslant k \leqslant p \text{ lignes}} \\ &=\; \left(\sum_{j=1}^{n} b_{j,k}\, a_{i,j} \right)^{1 \leqslant i \leqslant m \text{ colonnes}}_{1 \leqslant k \leqslant p \text{ lignes}}, \end{aligned}$$

et puisque la multiplication dans $\mathbb{K}$ est commutative :

$$a_{i,j}\, b_{j,k} \;=\; b_{j,k}\, a_{i,j},$$

nous concluons bien en regardant les deux résultats obtenus que :

$${}^{\mathtt{t}}\big[M \cdot N\big] \;=\; {}^{\mathtt{t}}N \cdot {}^{\mathtt{t}}M. \qquad \square$$

Faisons remarquer que si on se restreint à l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n, l'involution $M \longmapsto {}^{\mathtt{t}}M$ est un automorphisme pour l'addition, mais ce n'est pas un automorphisme pour la multiplication, car il y a changement de l'ordre des facteurs d'un produit.

Lemme 12.5. *Pour qu'une matrice carrée soit inversible, il faut et il suffit que sa transposée* ${}^{\mathtt{t}}M$ *le soit.*

Preuve. Soit donc $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$. Alors M^{-1} existe, et :

$$\begin{aligned} M \cdot M^{-1} \;&=\; I_n, \\ M^{-1} \cdot M \;&=\; I_n. \end{aligned}$$

Passons aux transposées, en appliquant le lemme qui précède et en observant que la transposée de la matrice identité est encore la matrice identité :

$$\begin{aligned} {}^{\mathtt{t}}\big[M \cdot M^{-1}\big] \;&=\; {}^{\mathtt{t}}\big[M^{-1}\big] \cdot {}^{\mathtt{t}}M \;=\; {}^{\mathtt{t}}I_n \;=\; I_n, \\ {}^{\mathtt{t}}\big[M^{-1} \cdot M\big] \;&=\; {}^{\mathtt{t}}M \cdot {}^{\mathtt{t}}\big[M^{-1}\big] \;=\; {}^{\mathtt{t}}I_n \;=\; I_n, \end{aligned}$$

ce qui donne deux équations signifiant par définition que la matrice ${}^{\mathtt{t}}M$ est inversible, et a pour matrice inverse :

$$\big({}^{\mathtt{t}}M\big)^{-1} \;=\; {}^{\mathtt{t}}\big[M^{-1}\big].$$

La réciproque est immédiate : si ${}^{\mathtt{t}}M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors en appliquant à ${}^{\mathtt{t}}M$ la démonstration précédente, on trouve que :

$${}^{\mathtt{t}}\big[{}^{\mathtt{t}}M\big] \;\in\; \mathscr{A}_n(\mathbb{K}),$$

c'est-à-dire que $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ est inversible. $\square$

Ce lemme signifie que la restriction à $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ de l'involution $M \longmapsto {}^{\mathtt{t}}M$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une involution de $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

13. Matrices inverses et systèmes linéaires

Toujours avec une matrice carrée, c'est-à-dire avec :

$$m \;=\; n,$$

considérons un système linéaire de n équations à n inconnues $x_1, \dots, x_n$, représenté sous forme développée :

$$\begin{aligned} a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 + \cdots + a_{1,n}\, x_n \;&=\; b_1, \\ a_{2,1}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 + \cdots + a_{2,n}\, x_n \;&=\; b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\ a_{n,1}\, x_1 + a_{n,2}\, x_2 + \cdots + a_{n,n}\, x_n \;&=\; b_n, \end{aligned}$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

En partant de la représentation abrégée :

$$A\,\vec{x} \,=\, \vec{b},$$

il est clair que si l'inverse A^{-1} de la matrice A existe, la solution $\vec{x}$ unique est donnée par :

$$\vec{x} \,=\, A^{-1}\,A\,\vec{x} \,=\, A^{-1}\,\vec{b}.$$

Il serait donc très intéressant de savoir calculer la matrice inverse A^{-1}. Avant de traiter ce problème hyper-important, énonçons et démontrons le

Théorème 13.1. *Si A est une matrice inversible de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$, alors pour vecteur $\vec{b} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^n}$, le système de n équations linéaires*

$$A\,\vec{x} \,=\, \vec{b},$$

aux n inconnues $x_1, \dots, x_n$ admet la solution unique :

$$\vec{x}^{\,0} \,:=\, A^{-1}\,\vec{b}.$$

Démonstration. Nous venons de constater que ce vecteur $\vec{x}^{\,0}$ est bien une solution. Justifions maintenant que cette solution est *unique*.

Soit donc $\vec{x} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^n}$ une solution quelconque, c'est-à-dire avec $A\,\vec{x} = \vec{b}$, d'où :

$$A\,\vec{x} \,=\, \vec{b} \,=\, A\,\vec{x}^{\,0}.$$

Multiplions ceci par A^{-1} :

$$\vec{x} \,=\, A^{-1}\,A\,\vec{x} \,=\, A^{-1}\,A\,\vec{x}^{\,0} \,=\, \vec{x}^{\,0},$$

pour constater que $\vec{x} = \vec{x}^{\,0}$ coïncide nécessairement avec la solution déjà trouvée. □

14. Inverses de matrices 2×2

Notre objectif est maintenant de savoir calculer la matrice inverse d'une matrice donnée, quand cette matrice inverse existe. À ce sujet, commençons par la dimension $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

et rappelons comment nous avons résolu un tel système général :

$$\begin{aligned} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 \,&=\, b_1, \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 \,&=\, b_2. \end{aligned}$$

Pour éliminer x_1, multiplions l'équation 1 par $a_{2,1}$ et l'équation 2 par $a_{1,1}$:

$$\begin{aligned} a_{2,1}\big(\,a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 \,&=\, b_1\,\big) \\ a_{1,1}\big(\,a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 \,&=\, b_2\,\big) \end{aligned} \qquad \text{ce qui donne :} \qquad \begin{aligned} \underline{a_{2,1}a_{1,1}\,x_1} + a_{2,1}a_{1,2}\,x_2 \,&=\, a_{2,1}b_1 \\ \underline{a_{1,1}a_{2,1}\,x_1} + a_{1,1}a_{2,2}\,x_2 \,&=\, a_{1,1}b_2 \end{aligned}$$

et soustrayons afin de faire disparaître x_1 :

$$\big(a_{2,1}a_{1,2} - a_{1,1}a_{2,2}\big)\,x_2 \,=\, a_{2,1}b_1 - a_{1,1}b_2.$$

Comme facteur devant x_2, nous reconnaissons bien sûr le *déterminant :*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \,\neq\, 0 \qquad\qquad \text{(hypothèse naturelle)},$$

et il est naturel de supposer que ce déterminant est *non nul* pour pouvoir résoudre :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{a_{2,1}b_1 - a_{1,1}b_2}{a_{2,1}a_{1,2} - a_{1,1}a_{2,2}} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}}. \end{aligned}$$

On trouve de même (exercice) :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_{2,2}b_1 - a_{1,2}b_2}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}}. \end{aligned}$$

Et par remplacement dans le système initial, on vérifie (exercice) que ces valeurs de x_1, x_2 sont bien solutions, toujours sous l'hypothèse que le déterminant est non nul.

Or si on donne un nom abrégé à ce déterminant :

$$\Delta := a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{2,1}\, a_{1,2},$$

cette solution unique peut aussi s'écrire sous la forme matricielle agréable :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{2,2}}{\Delta} & -\frac{a_{1,2}}{\Delta} \\ -\frac{a_{2,1}}{\Delta} & \frac{a_{1,1}}{\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, nous avons trouvé l'expression de la matrice inverse :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{a_{2,2}}{\Delta} & -\frac{a_{1,2}}{\Delta} \\ -\frac{a_{2,1}}{\Delta} & \frac{a_{1,1}}{\Delta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut vérifier (exercice utile) que les deux relations que doit satisfaire une matrice inverse :

$$A \cdot A^{-1} = I_{2\times 2} = A^{-1} \cdot A,$$

sont effectivement vraies, puisque (solution-express de la moitié de l'exercice) :

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} & \underline{-a_{1,1}a_{1,2} + a_{1,2}a_{1,1}} \\ \underline{a_{2,1}a_{2,2} - a_{2,2}a_{2,1}} & -a_{2,1}a_{1,2} + a_{2,2}a_{1,1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2\times 2}. \end{aligned}$$

Théorème 14.1. *Si une matrice* $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{smallmatrix}\right)$ *de taille* 2×2 *a un déterminant* $a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} \neq 0$ *non nul, alors sa matrice inverse est :*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}.$$

Si le déterminant de A est nul, elle n'a pas d'inverse. □

Exemple 14.2. Soit la matrice $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Son déterminant vaut $1 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = -1$, donc elle est inversible. Une application directe donne :

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

et on peut vérifier (exercice) que l'on a bien $A^{-1} \cdot A = I_{2\times 2} = A \cdot A^{-1}$.

Exemple 14.3. Utilisons à nouveau le Théorème 14.1 pour résoudre le système :

$$\begin{aligned} 3\,x_1 + 4\,x_2 &= 3, \\ 5\,x_1 + 6\,x_2 &= 7. \end{aligned}$$

Sa matrice *non complète* est $A := \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{smallmatrix}\right)$, qui a un déterminant non nul :

$$3 \cdot 6 - 5 \cdot 4 = 18 - 20 = -2.$$

Donc la matrice inverse existe :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

et on conclut que :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

En DM ou en examen, on devrait impérativement vérifier que $A^{-1} \cdot A = I_{2\times 2}$.

Heureusement, l'énoncé suivant montre que lorsque, à l'issue d'un calcul manuel, on a trouvé une matrice-candidate $A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour être la matrice inverse d'une matrice donnée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il n'est pas nécessaire de vérifier les *deux* relations :

$$A' \cdot A = I_{n\times n} = A \cdot A',$$

car une seule vérification suffit.

Théorème 14.4. [Admis] *Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

• *S'il existe une matrice A' telle que $A' \cdot A = I_{n\times n}$, alors on a aussi $A \cdot A' = I_{n\times n}$, automatiquement.*

• *S'il existe une matrice A' telle que $A \cdot A' = I_{n\times n}$, alors on a aussi $A' \cdot A = I_{n\times n}$, automatiquement.* □

15. Algorithme de calcul de l'inverse d'une matrice A

Nous allons à nouveau constater que la méthode du pivot de Gauss couvre plus de 50% du cours d'Algèbre Linéaire. Commençons par un

Exemple 15.1. Pour déterminer la matrice inverse de la matrice $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, voici une petite recette simplette. Écrivons cette matrice, ajoutons-lui la matrice $I_{2\times 2}$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

puis, de manière compulsive, instinctive, comme un kangourou hors de contrôle, soumettons cette matrice augmentée à l'algorithme du pivot :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right],$$

ce qui nous offre sur un plateau doré :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

On constate en effet que c'est bien l'expression que nous aurait donnée le Théorème 14.1.

Exemple 15.2. Tentons de faire de même pour la matrice $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{smallmatrix}\right)$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -2 & 1 \end{array}\right] \longmapsto \mathbf{??},$$

et retrouvons-nous bloqués par le fait que la deuxième et dernière ligne n'ait pas de position de pivot.

Rappelons que les trois opérations élémentaires fondamentales sur une matrice carrée A constituées de n lignes $L_1, \dots, L_n$ peuvent être exprimées comme suit :

(1) permuter deux lignes $L_{i_1} \longmapsto L_{i_2}$ et $L_{i_2} \longmapsto L_{i_1}$ pour $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n$ quelconques.

(2) multiplier une ligne $L_i \longmapsto c\, L_i$, avec $1 \leqslant i \leqslant n$ quelconque, par une constante $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *non nulle*.

(3) ajouter à une ligne $L_i \longmapsto L_i + e\, L_{i'}$ un multiple quelconque d'une autre ligne pour un indice de ligne *distinct* $i' \neq i$ et pour une constante $e \in \mathbb{R}$ arbitraire.

Théorème 15.3. **[Admis]** *Une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de taille $n \times n$ est* inversible *si et seulement si elle est équivalente, après des opérations élémentaires sur ses lignes, à la matrice identité $I_{n\times n}$.* □

Autrement dit, une matrice carrée est inversible si et seulement si elle possède exactement n positions de pivots, par exemple pour $n = 7$, si et seulement si elle est équivalente à la belle forme échelonnée suivante :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} & a_{1,7} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} & a_{2,7} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} & a_{3,7} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} & a_{4,7} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} & a_{5,7} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,3} & a_{6,4} & a_{6,5} & a_{6,6} & a_{6,7} \\ a_{7,1} & a_{7,2} & a_{7,3} & a_{7,4} & a_{7,5} & a_{7,6} & a_{7,7} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

si et seulement si sa forme échelonnée *réduite* est l'identité.

Exemple 15.4. Voici un exemple d'application de l'algorithme du pivot pour déterminer, si elle existe, la matrice inverse d'une matrice donnée :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -7 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Carramba ! Encorrre rrrrrâté ! ! !

Exemple 15.5. Nouvelle tentative d'illustration de cet algorithme :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Il y a donc ici une matrice inverse, lisible à droite.

Passons follement à la dimension 4 :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

À partir de ces calculs tranquilles, on devine spontanément que l'on a en dimension 5 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

puis de même en dimensions 6, 7, ...

En fait, si on ne conserve qu'une seule colonne de la matrice identité, par exemple en taille 3×3 la première colonne :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \;x_1 & \;\;x_2 & \;\;x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow \quad A\,\vec{x} = \vec{e}_1,$$

on voit qu'il s'agit de résoudre un système linéaire classique !

Ensuite, rappelons que :

$$I_{3\times 3} = \big(\vec{e}_1 \; \vec{e}_2 \; \vec{e}_3\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc en général :

$$\Big[A \;\Big|\; I_{3\times 3}\Big] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \;x_1 & \;\;\;x_2 & \;\;\;x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 1 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & 1 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Ainsi, si on prend l'une après l'autre chaque colonne de la matrice identité à droite, on obtient $n = 3$ systèmes linéaires classiques à résoudre !

Comme autre exemple, si on conserve la troisième colonne de la matrice identité, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \;x_1 & \;\;x_2 & \;\;x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right] \end{array} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow \quad A\,\vec{x} = \vec{e}_3.$$

Pour terminer cette section, dévoilons une dernière manière de calculer l'inverse d'une matrice A, qui est souvent efficace dans les applications.

Exemple 15.6. Proposons-nous de calculer la matrice inverse, si elle existe, de la matrice :

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Associons-lui le système linéaire de second membre arbitraire :

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad - 2\,x_3 &= y_1 \\ -3\,x_1 + \quad x_2 + 4\,x_3 &= y_2 \\ 2\,x_1 - 3\,x_2 + 4\,x_3 &= y_3, \end{aligned}$$

et résolvons les x_i en fonction des y_j.

Pour effectuer une telle résolution, on peut ou bien travailler directement sur ces équations, ou bien travailler avec la matrice complète du système linéaire :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & y_1 \\ -3 & 1 & 4 & y_2 \\ 2 & -3 & 4 & y_3 \end{array}\right],$$

et enclencher les engrenages mécaniques du pivot sans pitié :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & y_1 \\ -3 & 1 & 4 & y_2 \\ 2 & -3 & 4 & y_3 \end{array}\right] &\longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & y_1 \\ 0 & 1 & -2 & 3y_1 + y_2 \\ 0 & -3 & 8 & -2y_1 + y_3 \end{array}\right] \\ &\longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & y_1 \\ 0 & 1 & -2 & 3y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 2 & 7y_1 + 3y_2 + y_3 \end{array}\right] \\ &\longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8y_1 + 3y_2 + y_3 \\ 0 & 1 & 0 & 10y_1 + 4y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & 2 & 7y_1 + 3y_2 + y_3 \end{array}\right] \\ &\longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8y_1 + 3y_2 + y_3 \\ 0 & 1 & 0 & 10y_1 + 4y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{7}{2}y_1 + \frac{3}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \end{array}\right], \end{aligned}$$

pour conclure que :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

16. Matrices élémentaires

Soit la matrice générale :

$$A := \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

où les lettres a, b, c, d, e, f, g, h, i désignent des constantes réelles qui peuvent prendre des valeurs quelconques. Soient aussi les trois matrices « *élémentaires* » :

$$E_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

D'autres exemples de matrices élémentaires existent, évidemment.

Proposons-nous de calculer les 3 produits matriciels :

$$E_1 \cdot A, \qquad\qquad E_2 \cdot A, \qquad\qquad E_3 \cdot A,$$

et de constater/interpréter qu'ils correspondent à des opérations élémentaires sur les lignes (ou rangées) de A.

Trois calculs simples donnent en effet :

$$E_1 \cdot A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g-4a & h-4b & i-4c \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 4\,L_1 \end{array} \end{array}$$

$$E_2 \cdot A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{bmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \\ L_1 \\ \end{array} \end{array}$$

$$E_3 \cdot A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ 5\,L_3 \end{array} \end{array}$$

Théorème 16.1. [Admis] *Si une opération élémentaire est effectuée sur les lignes d'une matrice A de taille $m \times n$, cette opération peut s'écrire :*

$$E \cdot A,$$

avec une certaine matrice élémentaire E.

L'expression de cette matrice E peut être obtenue en effectuant la même *opération élémentaire sur les lignes de la matrice identité $I_{m \times m}$.* □

Pour les 3 exemples ci-dessus, on a en effet :

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 4\,L_1 \end{array} \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1,$$

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \\ L_1 \\ \end{array} \end{array} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2,$$

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ 5\,L_3 \end{array} \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = E_3.$$

17. Exercices

Exercice 1. Calculer le produit des deux matrices suivantes dans $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{Q})$ et $\mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{Q})$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. EE

Déterminants

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

2. Applications multilinéaires

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Pour tout entier $p \geqslant 1$, on notera en abrégé le produit cartésien de p copies de E :

$$E^p := \underbrace{E \times \cdots \times E}_{p \text{ facteurs}}.$$

Soit aussi F un deuxième $\mathbb{K}$-espace vectoriel. La définition suivante généralise les notions d'application bilinéaire ($p = 2$) et trilinéaire ($p = 3$) vues au chapitre précédent.

Définition 2.1. Une application de E^p à valeurs dans F :

$$\big(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\big) \longmapsto f\big(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\big)$$

sera dite p-*linéaire* si elle est linéaire en chacun des vecteurs $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, ..., $\vec{x}_p$.

En d'autres termes, pour tout indice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ et pour tout choix de vecteurs fixés :

$$\vec{x}_1, \ \dots, \ \vec{x}_{i-1}, \ \vec{x}_{i+1}, \ \dots, \ \vec{x}_p,$$

l'application partielle :

$$x_i \longmapsto f\big(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_p\big)$$

est *linéaire* en $\vec{x}_i$.

Proposition 2.2. *Quels que soient les scalaires* $a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{K}$*, on a :*

$$f\big(a_1\vec{x}_1, \, a_2\vec{x}_2, \, \dots, \, a_p\vec{x}_p\big) = a_1 a_2 \cdots a_p \, f\big(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\big).$$

Preuve. En effet, puisque f est linéaire en $\vec{x}_1$, on a :

$$f\big(a_1\vec{x}_1, \, a_2\vec{x}_2, \, \dots, \, a_p\vec{x}_p\big) = a_1 \, f\big(\vec{x}_1, \, a_2\vec{x}_2, \, \dots, \, a_p\vec{x}_p\big),$$

et ensuite, puisque f est linéaire en $\vec{x}_2$:

$$f\big(a_1\vec{x}_1, \, a_2\vec{x}_2, \, a_3\vec{x}_3, \, \dots, \, a_p\vec{x}_p\big) = a_1 \, a_2 \, f\big(\vec{x}_1, \, \vec{x}_2, \, a_3\vec{x}_3, \, \dots, \, a_p\vec{x}_p\big),$$

et ainsi de suite jusqu'au p-ième vecteur. □

Supposons maintenant que les p vecteurs $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, ..., $\vec{x}_p$ soient des combinaisons linéaires de n autres vecteurs donnés :

$$\vec{u}_1,\, \vec{u}_2,\, \dots,\, \vec{u}_n,$$

c'est-à-dire que pour tout indice $1 \leqslant i \leqslant p$, supposons qu'il existe des scalaires $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}$ tels que :

$$\vec{x}_i \,=\, a_{i,1}\,\vec{u}_1 + a_{i,2}\,\vec{u}_2 + \cdots + a_{i,n}\,\vec{u}_n,$$

ce que l'on note aussi :

$$\vec{x}_i \,=\, \sum_{j=1}^n a_{i,j}\,\vec{u}_j \qquad\qquad (1\leqslant i\leqslant p).$$

Tout d'abord, puisque f est linéaire selon le premier vecteur, on peut développer :

$$f\bigg(\sum_{j=1}^n a_{1,j}\,\vec{u}_j,\ \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\bigg) \,=\, \sum_{j=1}^n a_{1,j}\, f\big(\vec{u}_j,\, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\big).$$

Ensuite, puisque f est linéaire selon le second vecteur, on peut à nouveau dévélopper chacun des termes obtenus :

$$f\bigg(\vec{u}_j,\, \sum_{k=1}^n a_{2,k}\,\vec{u}_k,\ \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_p\bigg) \,=\, \sum_{k=1}^n a_{2,k}\, f\big(\vec{u}_j,\, \vec{u}_k,\, \vec{x}_3,\, \dots,\, \vec{x}_p\big).$$

Ainsi, en remplaçant dans la relation précédente, nous voyons apparaître une double somme :

$$f\bigg(\sum_{j=1}^n a_{1,j}\,\vec{u}_j,\ \sum_{k=1}^n a_{2,k}\,\vec{u}_k,\ \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_p\bigg) \,=\, \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{1,j}\, a_{2,k}\, f\big(\vec{u}_j,\, \vec{u}_k,\, \vec{x}_3,\, \dots,\, \vec{x}_p\big).$$

Dans cette double sommation, il y a donc $n \times n = n^2$ termes, puisque le système de deux indices $\{j, k\}$ parcourt l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Nous voulons maintenant raisonner par récurrence sur l'entier p. Nous noterons alors les systèmes d'indices de manière plus précise, en les *indiciant* eux-mêmes :

$$j_1,\, j_2,\, \dots,\, j_{p-1},\, j_p.$$

Au lieu des indices j et k, cela signifie que nous écrivons dorénavant j_1 et j_2.

En raisonnant par récurrence sur p, supposons donc que nous ayons déjà obtenu :

$$\begin{aligned} f\bigg(\sum_{j_1=1}^n a_{1,j_1}\,\vec{u}_{j_1},\ \sum_{j_2=1}^n a_{2,j_2}\,\vec{u}_{j_2},\ \dots\dots,\ \sum_{j_{p-1}=1}^n a_{p-1,j_{p-1}}\,\vec{u}_{j_{p-1}},\ \vec{x}_p\bigg) \,&=\, \\ =\, \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \cdots \sum_{j_{p-1}=1}^n a_{1,j_1} a_{2,j_2} \cdots a_{p-1,j_{p-1}}\, & f\big(\vec{u}_{j_1},\, \vec{u}_{j_2},\, \dots,\, \vec{u}_{j_{p-1}},\, \vec{x}_p\big). \end{aligned}$$

Alors comme f est linéaire selon $\vec{x}_p$, on peut, après avoir remplacé $\vec{x}_p$ en fonction des $\vec{u}_{j_p}$, développer chacun des termes qui viennent d'apparaître :

$$f\bigg(\vec{u}_{j_1},\, \vec{u}_{j_2},\, \dots,\, \vec{u}_{j_{p-1}},\, \sum_{j_p=1}^n a_{p,j_p}\,\vec{u}_{j_p}\bigg) \,=\, \sum_{j_p=1}^n a_{p,j_p}\, f\big(\vec{u}_{j_1},\, \vec{u}_{j_2},\, \dots,\, \vec{u}_{j_{p-1}},\, \vec{u}_{j_p}\big).$$

En reportant cette somme dans la ligne qui précède, nous obtenons une collection de p sommes :

$$\sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \cdots \sum_{j_{p-1}=1}^n \sum_{j_p=1}^n,$$

avec au total n^p termes, et le résultat que nous atteignons peut s'énoncer comme suit.

Proposition 2.3. *Si f est une application p-linéaire, alors :*

$$f\bigg(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1,j_1}\,\vec{u}_{j_1},\, \sum_{j_2=1}^{n} a_{2,j_2}\,\vec{u}_{j_2},\, \dots,\, \sum_{j_{p-1}=1}^{n} a_{p-1,j_{p-1}}\,\vec{u}_{j_{p-1}},\, \sum_{j_p=1}^{n} a_{p,j_p}\,\vec{u}_{j_p}\bigg) \;=$$
$$= \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_{p-1}=1}^{n}\sum_{j_p=1}^{n} a_{1,j_1}\,a_{2,j_2}\cdots a_{p-1,j_{p-1}}\,a_{p,j_p}\,f\big(\vec{u}_{j_1},\,\vec{u}_{j_2},\,\dots,\,\vec{u}_{j_{p-1}},\,\vec{u}_{j_p}\big). \qquad \square$$

3. Applications multilinéaires alternées

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

Définition 3.1. Une application p-linéaire :

$$f\colon \quad E^p \longrightarrow F$$

est dite *aternée* si elle s'annule quand deux de ses vecteurs en argument sont égaux :

$$\Big(\vec{x}_i = \vec{x}_j \quad \text{avec} \quad i \neq j\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad f\big(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\underbrace{\vec{x}_j}_{=\,\vec{x}_i},\dots\vec{x}_p\big) = \vec{0}.$$

En d'autres termes, une application p-linéaire f est alternée si elle est *bilinéaire alternée* par rapport à *tout* couple $(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$ de deux variables distinctes, les $p-2$ autres variables étant fixées.

Proposition 3.2. *Pour toute application p-linéaire alternée f, quand on échange deux des p vecteurs $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p$, alors $f\big(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p\big)$ change de signe.*

Démonstration. Désignons par $\vec{x}_i$ et $\vec{x}_j$ les deux vecteurs que l'on échange, où on peut supposer que $i < j$. On doit prouver :

$$f\big(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_p\big) = -\,f\big(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_p\big).$$

À cette fin, il suffit de considérer l'application bilinéaire partielle :

$$\varphi\big(\vec{x}_i,\vec{x}_j\big) = f\big(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_p\big),$$

à deux variables $\vec{x}_i$ et $\vec{x}_j$, les $p-2$ autres variables/vecteurs restants fixes. La propriété résulte alors de ce qui a été vu au chapitre précédent, au moment où nous avons étudié les applications bilinéaires alternées. $\square$

Proposition 3.3. *Pour toute application p-linéaire alternée f, si φ est une permutation de l'ensemble $\big\{1,2,3,\dots,p\big\}$ dont la signature est $\mathsf{sign}(\varphi)$, alors :*

$$f\big(\vec{x}_{\varphi(1)},\,\vec{x}_{\varphi(2)},\,\dots,\,\vec{x}_{\varphi(p)}\big) = \mathsf{sign}(\varphi)\,f\big(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_p\big).$$

Démonstration. Nous savons (ou nous admettons) que toute permutation $\varphi \in \mathscr{P}_p$ est une composée de transpositions :

$$\varphi = \tau_q \circ \tau_{q-1} \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1,$$

q étant le nombre de ces transpositions, et la signature $\mathsf{sign}(\varphi)$ ayant pour valeur :

$$\mathsf{sign}(\varphi) = (-1)^q.$$

Or d'après la Proposition 3.2 précédente, pour toute transposition $\tau \in \mathscr{P}_p$ appliquée aux indices des vecteurs $\vec{x}_i$, la valeur de l'application f change de signe.

Par conséquent, en appliquant successivement les transpositions $\tau_1,\dots,\tau_q$ qui constituent φ, on obtient exactement q changements de signes, et donc on a bien :

$$f\big(\vec{x}_{\varphi(1)},\,\vec{x}_{\varphi(2)},\,\dots,\,\vec{x}_{\varphi(p)}\big) = (-1)^q\,f\big(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_p\big). \qquad \square$$

Maintenant, énonçons une propriété cruciale de dégénérescence des applications multilinéaires alternées : elles ne *voient pas*, ou *écrasent*, tout ce qui est lié.

Proposition 3.4. *Pour toute application p-linéaire alternée $f\colon E^p \longrightarrow F$, si la famille $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ est liée dans E, alors :*

$$f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p) = \vec{0}.$$

Démonstration. En effet, supposons que la famille $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ est liée. Alors il existe au moins un indice i avec $1 \leqslant i \leqslant p$ tel que $\vec{x}_i$ soit combinaison linéaire des $p-1$ autres vecteurs. En changeant au besoin l'ordre de la numérotation, on peut supposer $i = 1$, car grâce à la proposition qui précède, changer l'ordre des arguments revient seulement à multiplier l'expression par ± 1.

Il existe alors des scalaires $a_2, \dots, a_p \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\vec{x}_1 = \sum_{j=2}^{p} a_j \, \vec{x}_j,$$

où ici, la somme commence à $j = 2$. Or nous avons vu que :

$$f\bigg(\sum_{j=2}^{p} a_j \, \vec{x}_j, \, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\bigg) = \sum_{j=2}^{p} a_j \, f(\vec{x}_j, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p).$$

Puisque f est alternée, alors, pour tous indices $2 \leqslant j \leqslant p$, on a annulation :

$$f(\vec{x}_j, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p) = \vec{0},$$

en vertu du fait que deux vecteurs sont ici toujours égaux dans les arguments de f. La somme ci-dessus est donc nulle, conclusion ! □

Corollaire 3.5. *Si E est de dimension finie sur $\mathbb{K}$, et si :*

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}} E \leqslant p - 1,$$

alors quel que soit l'espace vectoriel F sur $\mathbb{K}$, toute application p-linéaire alternée $f\colon E^p \longrightarrow F$ est identiquement nulle.

Démonstration. En effet, $\mathsf{dim}\, E < p$ entraîne que toute famille $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\}$ de p vecteurs de E est liée. La propriété précédente donne alors :

$$\forall \, (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \in E^p \qquad\qquad f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) = \vec{0},$$

donc $f \equiv 0$ est l'application identiquement nulle. □

Proposition 3.6. *Pour toute application p-linéaire alternée f, si p vecteurs $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, …, $\vec{x}_p$ sont des combinaisons linéaires de p autres vecteurs donnés $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_p$:*

$$\vec{x}_j = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} \, \vec{u}_i \qquad\qquad {\scriptstyle (1 \leqslant j \leqslant p)},$$

alors :

$$f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p) = \bigg[\sum_{\varphi \in \mathscr{P}_p} \mathsf{sign}(\varphi) \, a_{\varphi(1),1} \, a_{\varphi(2),2} \cdots a_{\varphi(p),p}\bigg] \, f(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p),$$

la sommation étant étendue à l'ensemble $\mathscr{P}_p$ des $p!$ permutations φ de $\{1, 2, 3, \dots, p\}$.

Démonstration. Supposons en effet que nos p vecteurs soient combinaisons linéaires de p vecteurs $\vec{u}_j$:

$$\vec{x}_j = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} \, \vec{u}_i \qquad\qquad {\scriptstyle (1 \leqslant j \leqslant p)}.$$

Appliquons la Proposition 2.3 :

$$(3.7) \qquad f\big(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\big) \;=\; \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} a_{i_1,1}\, a_{i_2,2} \,\cdots\, a_{i_p,p}\, f\big(\vec{u}_{i_1}, \vec{u}_{i_2}, \dots, \vec{u}_{i_p}\big),$$

la sommation étant étendue aux p^p sytèmes $\big\{i_1, i_2, \dots, i_p\big\}$ d'indices i_k parcourant tous l'ensemble $\big\{1, 2, 3, \dots, p\big\}$.

Mais puisque f est alternée, dès que deux indices i_k et i_ℓ sont égaux, on a annulation :

$$f\big(\vec{u}_{i_1}, \vec{u}_{i_2}, \dots, \vec{u}_{i_p}\big) \;=\; \vec{0}.$$

Par conséquent, dans la sommation (3.7), il ne reste plus qu'à considérer les systèmes d'indices $\big\{i_1, i_2, \dots, i_p\big\}$ *deux à deux distincts*, c'est-à-dire les images de $\big\{1, 2, 3, \dots, p\big\}$ par les permutations $\varphi \in \mathscr{P}_p$.

On sait qu'il y a $p!$ systèmes de cette sorte, et qu'il y a aussi $p!$ permutations $\varphi \in \mathscr{P}_p$.

Les $p^p - p!$ autres systèmes d'indices $\big\{i_1, i_2, \dots, i_p\big\}$ *non* tous deux à deux distincts ont certainement une image nulle par f, puisque f est alternée, donc s'annule quand deux vecteurs sont égaux.

Les $p!$ systèmes d'indices intéressants s'écrivent donc $\big\{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(p)\big\}$ pour une certaine permutation $\varphi \in \mathscr{P}_p$, et tous les systèmes d'indices deux à deux distincts s'obtiennent en faisant parcourir à φ toutes les $p!$ permutations de $\big\{1, 2, \dots, p\big\}$ appartenant à $\mathscr{P}_p$.

Enfin, grâce à la Proposition 3.3 :

$$f\big(u_{\varphi(1)},\, \vec{u}_{\varphi(2)},\, \dots,\, \vec{u}_{\varphi(p)}\big) \;=\; \mathsf{sign}(\varphi)\, f\big(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\big),$$

où $\mathsf{sign}(\varphi)$ est la signature de la permutation φ. Le vecteur $f\big(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\big)$ se met donc en facteur dans la sommation. Ceci achève la démonstration de la proposition. □

Maintenant, étudions le cas spécial où la dimension de E est égale à p, le premier cas intéressant, car nous avons vu que pour $\mathsf{dim}\, E \leqslant p - 1$, toutes les applications multilinéaires alternées sont identiquement nulles. Nous supposons toujours le $\mathbb{K}$-espace vectoriel F quelconque.

Rappelons que dans le chapitre précédent, nous avons déjà expliqué les cas $p = 2$ et $p = 3$ du théorème suivant, qui ne doit donc paraître ni mystérieux, ni difficile d'accès.

Théorème 3.8. [Fondamental !] *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$, avec :*

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\, E \;=\; p \;\geqslant\; 1.$$

Alors pour toute base $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p\big\}$ de E, et tout vecteur fixé $\vec{k} \in F$, il existe une unique application p-linéaire alternée $f \colon E^p \longrightarrow F$ telle que :

$$f\big(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p\big) \;=\; \vec{k}.$$

Démonstration. Commençons par établir l'*unicité* de f. Dans la base $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p\big\}$ de E, pour tout indices $1 \leqslant i \leqslant p$, désignons par $a_{i,1}$, $a_{i,2}$, …, $a_{i,p}$ les coordonnées des vecteurs $\vec{x}_i$, c'est-à-dire écrivons :

$$\vec{x}_j \;=\; \sum_{i=1}^{p} a_{i,j}\, \vec{e}_i \qquad\qquad {\scriptstyle (1 \leqslant j \leqslant p)}.$$

Soit $f \colon E^p \longrightarrow F$ une application p-linéaire alternée. Alors grâce à la Proposition 3.6 qui précède, nous pouvons développer :

$$f\big(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\big) \;=\; f\big(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p\big) \sum_{\varphi \in \mathscr{P}_p} \mathsf{sign}(\varphi)\, a_{\varphi(1),1}\, a_{\varphi(2),2} \,\cdots\, a_{\varphi(p),p},$$

la sommation étant étendue à toutes les permutations φ de $\big\{1, 2, \dots, p\big\}$, et $\mathsf{sign}(\varphi)$ désignant la signature de la permutation φ.

Par conséquent, si l'application p-linéaire alternée f de l'énoncé existe, c'est nécessairement l'application de E^p dans F définie, relativement à la base donnée, par :

$$f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p) \;=\; \vec{k} \sum_{\varphi \in \mathscr{P}_p} \mathsf{sign}(\varphi)\, a_{\varphi(1),1}\, a_{\varphi(2),2} \cdots a_{\varphi(p),p}. \tag{3.9}$$

L'unicité est donc établie.

Traitons à présent l'*existence*. Soit alors $f\colon E^p \longrightarrow F$ l'application p-linéaire alternée définie par (3.9).

Pour tout tout indice $1 \leqslant j \leqslant p$, nous devons démontrer que f est linéaire en $\vec{x}_j$, les autres vecteurs restants étant fixes. Nous procéderons en trois étapes.

Étape 1. Si :

$$\vec{x}_j \;=\; \vec{x}_j' + \vec{x}_j'',$$

alors pour tout indice $1 \leqslant i \leqslant p$, les coordonnées correspondantes vérifient la relation :

$$a_{i,j} \;=\; a_{i,j}' + a_{i,j}''.$$

Considérons alors la valeur :

$$f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j' + \vec{x}_j'', \dots, \vec{x}_p), \tag{3.10}$$

où l'on a remplacé $\vec{x}_j$ par $\vec{x}_j' + \vec{x}_j''$, sans toucher aux autres vecteurs.

Le terme général de la sommation (3.9) correspondante est :

$$\mathsf{sign}(\varphi)\, a_{\varphi(1),1} \cdots \big(a_{\varphi(j),j}' + a_{\varphi(j),j}''\big) \cdots a_{\varphi(p),p},$$

ce qui s'écrit, par distributivité dans $\mathbb{K}$:

$$\mathsf{sign}(\varphi)\, a_{\varphi(1),1} \cdots a_{\varphi(j),j}' \cdots a_{\varphi(p),p} + \mathsf{sign}(\varphi)\, a_{\varphi(1),1} \cdots a_{\varphi(j),j}'' \cdots a_{\varphi(p),p},$$

et donc, par associativité et commutativité de la sommation $\sum$, le résultat de cette sommation est :

$$f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j', \dots, \vec{x}_p) + f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j'', \dots, \vec{x}_p). \tag{3.11}$$

Par conséquent, les valeurs (3.10) et (3.11) sont égales.

Étape 2. Si on prend maintenant :

$$\vec{x}_j \;=\; b\, \vec{x}_j'$$

avec un scalaire fixé $b \in \mathbb{K}$, alors les coordonnées vérifient, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$:

$$a_{i,j} \;=\; b\, a_{i,j}'.$$

Considérons la valeur :

$$f(\vec{x}_1, \dots, b\, \vec{x}_j', \dots, \vec{x}_p), \tag{3.12}$$

où l'on a remplacé $\vec{x}_j$ par $b\, \vec{x}_j'$, sans toucher aux autres vecteurs.

Le terme général de la sommation (3.9) correspondante devient, par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{K}$:

$$\mathsf{sign}(\varphi)\, a_{\varphi(1),1} \cdots b\, a_{\varphi(j),j} \cdots a_{\varphi(p),p} \;=\; b\, \mathsf{sign}(\varphi)\, a_{\varphi(1),1} \cdots a_{\varphi(j),j} \cdots a_{\varphi(p),p},$$

et par distributivité pour la sommation $\sum$, le résultat de cette sommation est :

$$b\, f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j', \dots, \vec{x}_p). \tag{3.13}$$

Les valeurs (3.12) et (3.13) sont donc égales.

Le résultat conjoint des Étapes 1 et 2, c'est que f est p-linéaire.

Étape 3. Prouvons enfin que f est alternée.

Pour que l'application f soit alternée, nous savons qu'il suffit qu'elle change de signe quand on échange deux vecteurs quelconques.

Soit donc $j_1 < j_2$, et échangeons $\vec{x}_{j_1}$ et $\vec{x}_{j_2}$.

Pour les coordonnées de ces deux vecteurs, posons, pour tout indice $1 \leqslant i \leqslant p$:

$$a'_{i,j_1} \,:=\, a_{i,j_2} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad a'_{i,j_2} \,:=\, a_{i,j_1}.$$

Considérons la valeur :

$$f\big(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{j_2}, \dots, \vec{x}_{j_1}, \dots, \vec{x}_p\big). \tag{3.14}$$

Le terme général de la sommation (3.9) correspondante devient :

$$\mathsf{sign}(\varphi)\, a_{\varphi(1),1} \,\cdots\, a'_{\varphi(j_1),j_1} \,\cdots\, a'_{\varphi(j_2),j_2} \,\cdots\, a_{\varphi(p),p}.$$

Maintenant, soit $\tau \in \mathscr{P}_p$ la transposition qui échange j_1 et j_2. Posons :

$$\psi \,:=\, \varphi \circ \tau.$$

On a alors :

$$\psi(j_1) \,=\, \varphi(j_2) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \psi(j_2) \,=\, \varphi(j_1),$$

tandis que, pour tous autres indices j' différents de j_1 et de j_2, on a :

$$\psi(j') \,=\, \varphi(j').$$

D'autre part, grâce à la propriété (connue ou admise) de multiplicativité des signatures :

$$\mathsf{sign}(\psi) \,=\, \mathsf{sign}(\varphi)\,\mathsf{sign}(\tau) \,=\, -\,\mathsf{sign}(\varphi),$$

le terme général de la valeur (3.14) s'écrit donc :

$$-\,\mathsf{sign}(\psi)\, a_{\psi(1),1} \,\cdots\, a'_{\psi(j_2),j_1} \,\cdots\, a'_{\psi(j_1),j_2} \,\cdots\, a_{\psi(p),p}.$$

Or comme :

$$a'_{\psi(j_2),j_1} \,=\, a_{\psi(j_2),j_2} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad a'_{\psi(j_1),j_2} \,=\, a_{\psi(j_1),j_1},$$

ce terme général s'écrit alors, par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} &-\,\mathsf{sign}(\psi)\, a_{\psi(1),1} \,\cdots\, a_{\psi(j_2),j_2} \,\cdots\, a_{\psi(j_1),j_1} \,\cdots\, a_{\psi(p),p} \,= \\ &=\, -\,\mathsf{sign}(\psi)\, a_{\psi(1),1} \,\cdots\, a_{\psi(j_1),j_1} \,\cdots\, a_{\psi(j_2),j_2} \,\cdots\, a_{\psi(p),p}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Maintenant, remarquons que :

$$\psi \,=\, \varphi \circ \tau \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad \varphi \,=\, \psi \circ \tau,$$

de sorte que la correspondance $\varphi \longmapsto \psi$ est une permutation bijective de $\mathscr{P}_p$. Par conséquent, sommer (3.15) quand φ parcourt $\mathscr{P}_p$ revient à sommer (3.15) quand ψ parcourt $\mathscr{P}_p$.

Or le résultat de cette sommation est :

$$-\,f\big(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{j_1}, \dots, \vec{x}_{j_2}, \dots, \vec{x}_p\big).$$

Par conséquent, f est bien alternée.

Les trois étapes sont achevées, et le théorème est complètement démontré. □

4. Déterminants

L'objectif est d'introduire les *formes* p-linéaires alternées, qui nous conduiront aux *déterminants*. À partir de maintenant, nous changerons de notation :

$$p \,\rightsquigarrow\, n.$$

Plaçons-nous dans les hypothèses du Théorème 3.8 fondamental, avec de plus $\dim F = 1$, d'où :

$$F \,:=\, \mathbb{K}.$$

Soit donc E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\dim E = n \geqslant 1$, et soit $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\big\}$ une base de E.

Si on choisit pour $\vec{k} \in G$ le « vecteur » $1 \in \mathbb{K}$, alors ce théorème garantit qu'il existe une unique application n-multilinéaire alternée f satisfaisant :

$$f\big(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\big) \,=\, 1 \,=\, \vec{1} \,\in\, F.$$

Définition 4.1. On appelle *déterminant* de n vecteurs quelconques :

$$\vec{x}_1,\, \vec{x}_2,\, \dots,\, \vec{x}_n \;\in\; E$$

dans la base $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\big\}$ la valeur sur eux de cette unique forme n-linéaire alternée :

$$\boldsymbol{D}\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\right) \,:=\, f\big(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\big).$$

Ainsi :

$$\boldsymbol{D}\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\right) \,=\, 1.$$

Si :

$$\vec{x}_j \,=\, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, \vec{e}_i \qquad\qquad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

alors le déterminant de $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ est :

$$\boldsymbol{D}\big(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\big) \,=\, \vec{k} \sum_{\varphi \in \mathscr{P}_n} \mathsf{sign}(\varphi)\, a_{\varphi(1),1} \cdots a_{\varphi(n),n}.$$

Comme conséquence du Théorème 3.8, avec $\vec{k} = \lambda\, \vec{1}$, nous obtenons le

Corollaire 4.2. *Toute autre forme n-linéaire alternée de E^n à valeurs dans $\mathbb{K}$ est du type :*

$$\lambda \boldsymbol{D}\big(\bullet, \dots, \bullet\big),$$

avec une constante $\lambda \in \mathbb{K}$. □

Maintenant, nous pouvons enfin introduire la notion de *déterminant* d'une matrice carrée de taille $n \times n$ quelconque, généralisant en cela ce que nous avons vu à la fin du chapitre précédent pour $n = 2$ et pour $n = 3$.

Soit donc M une matrice carrée d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$M \,=\, \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}. \\ \begin{array}{cccc} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{array} \end{array}$$

Définition 4.3. On appelle *déterminant de la matrice* M, et on note :

$$\mathsf{det}\, M \,:=\, \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \,=\, \boldsymbol{D}\big(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\big),$$

le *scalaire* défini par :

$$\mathsf{det}\, M \,=\, \sum_{\varphi \in \mathscr{P}_n} \mathsf{sign}(\varphi)\, a_{\varphi(1),1} \cdots a_{\varphi(n),n}.$$

Le déterminant ne change pas quand on transpose la matrice.

Proposition 4.4. *On a :*

$$\mathsf{det}\left({}^{\mathsf{t}}M\right) \,=\, \mathsf{det}\, M.$$

Démonstration. Soient :

$$M \,=\, \big(a_{i,j}\big) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad {}^{\mathtt{t}}M \,=\, \big(a_{i,j}^{\mathtt{t}}\big),$$

avec :

$$a_{i,j}^{\mathtt{t}} \,=\, a_{j,i}.$$

Par définition :

$$\det\big({}^{\mathtt{t}}M\big) \,=\, \sum_{\varphi\in\mathscr{P}_n} \operatorname{sign}(\varphi)\, a_{\varphi(1),1}^{\mathtt{t}} \cdots a_{\varphi(n),n}^{\mathtt{t}}.$$

Par commutativité dans $\mathbb{K}$, on peut écrire le terme général de façon à ce que $\big\{\varphi(1),\dots,\varphi(n)\big\}$ revienne à l'ordre naturel $\big\{1,2,\dots,n\big\}$. On passe du premier au second ensemble par la permutation $\psi := \varphi^{-1}$.

Si l'on pose, pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$\varphi(j) \,=:\, k,$$

d'où :

$$j \,=\, \psi(k),$$

il vient par suite :

$$a_{\varphi(j),j}^{\mathtt{t}} \,=\, a_{k,\psi(k)}^{\mathtt{t}} \,=\, a_{\psi(k),k},$$

de sorte que le terme général s'écrit, en remarquant que $\operatorname{sign}(\varphi) = \operatorname{sign}\big(\varphi^{-1}\big)$:

$$\operatorname{sign}(\psi)\, a_{\psi(1),1}\, a_{\psi(2),2} \cdots a_{\psi(n),n}.$$

D'autre part, sommer lorsque φ parcourt $\mathscr{P}_n$ revient à sommer quand $\varphi^{-1} = \psi$ parcourt $\mathscr{P}_n$. Par conséquent, nous atteignons la conclusion :

$$\det\big({}^{\mathtt{t}}M\big) \,=\, \sum_{\psi\in\mathscr{P}_n} \operatorname{sign}(\psi)\, a_{\psi(1),1} \cdots a_{\psi(n),n} \,=\, \det M. \qquad \square$$

Il en résulte que toute propriété concernant les lignes d'un déterminant est valable aussi pour les colonnes.

Terminologie 4.5. Lignes et colonnes seront nommées *rangées*.

On peut alors énoncer les propriétés qui découlent du fait que le déterminant est une fonction n-linéaire alternée.

Proposition 4.6. [Fondamentale !] (1) *Si on échange deux rangées parallèles d'une matrice, son déterminant change de signe.*

(2) *Si deux rangées parallèles d'une matrice carrée sont identiques, son déterminant est nul.*

(3) *Si on multiplie par $\lambda \in \mathbb{K}$ tous les éléments d'une rangée d'une matrice carrée, son déterminant est multiplié par λ.*

(4) *Si une rangée d'une matrice carrée est une combinaison linéaire de rangées parallèles, son déterminant est nul.* □

5. Déterminant du produit de deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Soient E un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$, rapporté à une base $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\big\}$, et soit $\boldsymbol{D}\big(\bullet,\dots,\bullet\big)$ le déterminant de E^n sur $\mathbb{K}$ associé à cette base.

Théorème 5.1. *Pour tout endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$, la composée $\boldsymbol{D} \circ u$ est n-linéaire alternée, et on a :*

$$\boldsymbol{D}\big[u(\vec{x}_1),\dots,u(\vec{x}_n)\big] \,=\, \det A \cdot \boldsymbol{D}\big(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\big),$$

où $A := \operatorname{Mat}(u)$ est la matrice associée à l'endomorphisme u.

Remarquons d'abord que, pour ne pas multiplier les notations, nous avons désigné par la même lettre u l'endomorphisme donné de E et l'endomorphisme suivant de E^n à valeurs dans E^n :

$$\big(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\big) \longmapsto \big(u(\vec{x}_1), u(\vec{x}_2), \dots, u(\vec{x}_n)\big).$$

Démonstration. Commençons par établir que $\boldsymbol{D} \circ u$ est n-linéaire alternée.

À cet effet, prouvons que, pour tout indice $1 \leqslant j \leqslant n$, l'application $\boldsymbol{D} \circ u$ est linéaire en $\vec{x}_j$, quand les autres vecteurs $u(\vec{x}_k)$ sont fixés. Mais cela est évident : comme $u(\vec{x}_j)$ est linéaire en $\vec{x}_j$, et comme $\boldsymbol{D}$ est aussi linéaire, la composée $\boldsymbol{D} \circ u$ est bien linéaire en $\vec{x}_j$.

Prouvons ensuite que cette composée $\boldsymbol{D} \circ u$ est alternée.

En effet, si, pour deux indices quelconques distincts j_1 et j_2, on suppose que $\vec{x}_{j_1} = \vec{x}_{j_2}$, alors $u(\vec{x}_{j_1}) = u(\vec{x}_{j_2})$, et comme $\boldsymbol{D}$ est alternée, il vient :

$$\boldsymbol{D}\Big(u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_{j_1}), \dots, u(\vec{x}_{j_1}), \dots, u(\vec{x}_n)\Big) = \vec{0}.$$

Ainsi, la composée $\boldsymbol{D} \circ u$ est bien n-linéaire alternée.

D'après le Théorème 3.8, puisque $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{D} \circ u$ sont deux formes n-linéaires alternées de E^n dans $\mathbb{K}$, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{K}$ telle que :

$$\boldsymbol{D} \circ u = \lambda \boldsymbol{D},$$

c'est-à-dire que, pour tout $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$, on a :

$$\boldsymbol{D}\big(u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_n)\big) = \lambda \boldsymbol{D}\big(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\big).$$

Prenons alors pour ces vecteurs les vecteurs de la base de l'espace vectoriel E :

$$\vec{x}_1 := \vec{e}_1, \; \dots\dots, \; \vec{x}_n := \vec{e}_n,$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}\big(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n)\big) &= \lambda \boldsymbol{D}\big(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\big) \\ &= \lambda.\end{aligned}$$

Or comme $u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n)$ sont les vecteurs-colonnes de la matrice A de l'endomorphisme u dans la base considérée, nous avons :

$$\lambda = \det A,$$

ce qui achève la démonstration. □

Théorème 5.2. *Quelles que soient les matrices carrées $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ d'ordre $n \geqslant 1$ quelconque, on a :*

$$\det\big(A\,B\big) = \det(A)\,\det(B).$$

Démonstration. Soit donc E un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$, et soit $\boldsymbol{B}_E = \big\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\big\}$ une base de E.

Soient u et v les endomorphismes de E de matrices A et B dans cette base :

$$E \xrightarrow[B]{v} E \xrightarrow[A]{u} E.$$

On sait que la matrice produit $A\,B$ représente, dans cette base, la composée $u \circ v$.

Maintenant, appliquons le Théorème 5.1 à l'endomorphisme $u \circ v \in \mathscr{L}(E)$, ce qui nous donne :

$$\boldsymbol{D}\Big(u \circ v(\vec{x}_1), \dots, u \circ v(\vec{x}_n),\Big) = \det\big(A\,B\big)\,\boldsymbol{D}\big(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\big). \tag{5.3}$$

Posons :

$$v(\vec{x}_1) =: \vec{y}_1, \; \dots\dots, \; v(\vec{x}_n) =: \vec{y}_n.$$

Appliquons à nouveau le Théorème 5.1 à l'endomorphisme u, ce qui nous donne :

$$\boldsymbol{D}\big(u(\vec{y}_1), \dots, u(\vec{y}_n)\big) = \det A\; \boldsymbol{D}\big(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\big). \tag{5.4}$$

Remarquons que les premiers membres de ces deux équations (5.3) et (5.4) sont identiques.

Appliquons enfin le Théorème 5.1 à l'endomorphisme v :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}\big(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\big) &= \boldsymbol{D}\big(v(\vec{x}_1), \dots, v(\vec{x}_n)\big) \\ &= \mathsf{det}\, B \; \boldsymbol{D}\big(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\big). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (5.4) et en comparant avec (5.3), on obtient :

$$\mathsf{det}\, \big(A\, B\big)\, \boldsymbol{D}\big(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\big) \;=\; \mathsf{det}\, A \;\mathsf{det}\, B\; \boldsymbol{D}\big(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\big).$$

Pour conclure, il suffit de prendre $\vec{x}_1 := \vec{e}_1$, ..., $\vec{x}_n := \vec{e}_n$ pour que :

$$\boldsymbol{D}\big(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\big) \;=\; \boldsymbol{D}\big(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\big) \;=\; 1,$$

et le théorème est démontré. □

6. Développement d'un déterminant selon les éléments d'une rangée

Nous allons maintenant exposer la méthode de développement d'un déterminant selon les éléments d'une colonne. D'après ce qu'on a vu, cette méthode sera aussi applicable au développement selon les éléments d'une ligne.

Considérons donc une matrice carrée $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ d'ordre $n \geqslant 1$ quelconque :

$$M \;=\; \Big(a_{i,j}\Big)_{1 \leqslant i \leqslant n \text{ lignes}}^{1 \leqslant j \leqslant n \text{ colonnes}}.$$

Alors son déterminant vaut :

$$\mathsf{det}\, M \;=\; \sum_{\varphi \in \mathscr{P}_n} \mathsf{sign}(\varphi)\; a_{\varphi(1),1}\, a_{\varphi(2),2} \cdots a_{\varphi(n),n}.$$

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, rapporté à une base $\big\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\big\}$. Si, pour tous indices $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$\vec{x}_j \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, \vec{e}_i, \tag{6.1}$$

alors, relativement à la base choisie, on a :

$$\boldsymbol{D}\big(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n\big) \;=\; \mathsf{det}\, M.$$

Pour tout indice $1 \leqslant j \leqslant n$, l'application $\boldsymbol{D}$ est linéaire en $\vec{x}_j$, donc si on remplace $\vec{x}_j$ par la combinaison linéaire (6.1), on obtient :

$$\boldsymbol{D}\bigg(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{j-1},\; \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, \vec{e}_i,\; \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_n\bigg) \;=$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, \boldsymbol{D}\Big(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{j-1},\, \vec{e}_i,\, \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_n\Big). \tag{6.2}$$

Ceci motive d'introduire :

$$\begin{aligned} \Delta_{i,j} &:= \boldsymbol{D}\Big(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{j-1},\, \vec{e}_i,\, \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_n\Big) \\ &= \mathsf{det} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\Delta_{i,j}$ est le déterminant déduit de M en remplaçant le vecteur colonne $\vec{x}_j$ de rang j par le vecteur de base $\vec{e}_i$. En d'autres termes, on remplace la colonne de rang j par des zéros, sauf l'élément de la ligne i — l'élément $a_{i,j}$ — que l'on remplace par 1.

La relation (6.2) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\mathsf{det}\, M &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\,\Delta_{i,j} \\ &= a_{1,j}\,\Delta_{1,j} + a_{2,j}\,\Delta_{2,j} + \cdots + a_{n,j}\,\Delta_{n,j}.\end{aligned}$$

Terminologie 6.3. On dit que l'on a *développé* le déterminant de M selon les éléments de la colonne de rang j.

Pour tous indices $1 \leqslant i, j \leqslant n$, ce déterminant $\Delta_{i,j}$ se nomme *cofacteur* de $a_{i,j}$.

Maintenant, montrons comment calculer ces cofacteurs $\Delta_{i,j}$.

Étape 1 : *Calcul de :*

$$\begin{aligned}\Delta_{1,1} = \boldsymbol{D}\big(\vec{e}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\big) &= \mathsf{det}\begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\varphi \in \mathscr{P}_n} \mathsf{sign}(\varphi)\, a_{\varphi(1),1}\, a_{\varphi(2),2} \cdots a_{\varphi(n),n}.\end{aligned}$$

Ceci est le déterminant de la matrice déduite de M en remplaçant les éléments de la première colonne par des zéros, sauf l'élément de la première ligne — l'élément $a_{1,1}$ — que l'on remplace par 1.

On obtient donc la valeur de $\Delta_{1,1}$ en remplaçant, dans la sommation donnant le déterminant $\mathsf{det}\, M$, les $a_{\varphi(1),1}$ par :

$$\begin{aligned} &0 \quad \text{si } \varphi(1) \neq 1, \\ &1 \quad \text{si } \varphi(1) = 1, \end{aligned}$$

Par suite, on obtient :

$$\Delta_{1,1} = \sum_{\substack{\varphi \in \mathscr{P}_n \\ \varphi(1)=1}} \mathsf{sign}(\varphi)\, a_{\varphi(2),2}\, a_{\varphi(3),3} \cdots a_{\varphi(n),n},$$

la sommation étant étendue aux permutations φ de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ qui laissent l'élément 1 invariant. La restriction de φ à l'ensemble $\{2, 3, \dots, n\}$ est alors une permutation $\varphi' \in \mathscr{P}_{n-1}$.

Réciproquement, toute permutation $\varphi' \in \mathscr{P}_{n-1}$ de l'ensemble précédent se prolonge d'une manière unique en une permutation φ de $\{1, 2, \dots, n\}$ laissant 1 invariant. De plus, on a égalité des signatures :

$$\mathsf{sign}(\varphi) = \mathsf{sign}(\varphi').$$

En définitive :

$$\Delta_{1,1} = \sum_{\varphi' \in \mathscr{P}_{n-1}} \mathsf{sign}(\varphi')\; a_{\varphi'(2),2} \cdots a_{\varphi'(n),n}.$$

Ensuite, désignons par :

$$M_{1,1} := \begin{pmatrix} a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

la matrice de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ déduite de la matrice considérée M par suppression de la première ligne et suppression de la première colonne. Par définition du déterminant d'une matrice, la formule qui précède exprime alors visiblement que :

$$\Delta_{1,1} \;=\; \det M_{1,1}.$$

Étape 2 : *Calcul de :*

$$\begin{aligned}\Delta_{i,j} &:= \boldsymbol{D}\Big(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{j-1},\, \vec{e}_i,\, \vec{x}_{j+1}, \ldots, \vec{x}_n\Big)\\ &= \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Amenons le vecteur $\vec{e}_i$ de la j-ème colonne à la première colonne, en l'échangeant successivement avec tous les vecteurs qui précèdent ; il y a au total j échanges, et comme la forme n-linéaire $\boldsymbol{D}$ est alternée, on obtient :

$$\Delta_{i,j} \;=\; (-1)^j \det \begin{pmatrix} 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 1 & a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Dans le déterminant obtenu, amenons la ligne de rang i à la première place par échanges successifs avec les lignes qui la précèdent ; il y a au total i échanges de lignes, et comme $\boldsymbol{D}$ est alternée, on obtient :

$$\Delta_{i,j} \;=\; (-1)^{i+j}\,(-1)^j \det \begin{pmatrix} 1 & a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Au déterminant qui est obtenu ici, on peut appliquer le résultat trouvé à l'Étape 1. Si on supprime la première ligne et la première colonne de ce déterminant, on obtient donc :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Par conséquent :

$$\Delta_{i,j} \,=\, (-1)^{i+j} \operatorname{det} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème récapitulatif suivant.

Théorème 6.4. *Soit une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 1$ quelconque :*

$$M \,=\, \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i \leqslant n \text{ lignes}}^{1 \leqslant j \leqslant n \text{ colonnes}} \qquad\qquad (a_{i,j} \in \mathbb{K}),$$

c'est-à-dire :

$$M \,=\, \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Si on désigne par :

$$M_{i,j} \,:=\, \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

la matrice de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ déduite de M par suppression de la ligne de rang i et suppression de la colonne de rang j, alors on a :

$$\operatorname{det} M \,=\, \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,j} \operatorname{det}\big(M_{i,j}\big) \,=\, \operatorname{det} {}^{\mathsf{t}}M. \qquad \square$$

Terminologie 6.5. On parle du *développement du déterminant* de M selon les éléments d'une colonne, celle de rang j.

Théorème 6.6. *Sous les mêmes hypothèses, on a aussi :*

$$\operatorname{det} M \,=\, \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,j} \operatorname{det}\big(M_{i,j}\big). \qquad \square$$

Terminologie 6.7. On parle du *développement du déterminant* de M selon les éléments d'une ligne, celle de rang i.

Tout cela étant très général et très abstrait, il convient maintenant d'illustrer ces deux procédés de développement sur des exemples simples et concrets.

Exemple 6.8. Développons le déterminant d'une matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{K})$ à 4 lignes et 4 colonnes selon les éléments de sa *dernière* ligne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = -a''' \begin{vmatrix} b & c & d \\ b' & c' & d' \\ b'' & c'' & d'' \end{vmatrix} + b''' \begin{vmatrix} a & c & d \\ a' & c' & d' \\ a'' & c'' & d'' \end{vmatrix} - \\ - c''' \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix} + d''' \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Exemple 6.9. Étudions le déterminant d'une matrice triangulaire. Soit donc une matrice triangulaire supérieure d'ordre $n \geqslant 1$:

$$T := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

et proposons-nous de calculer son déterminant :

$$\begin{aligned} \operatorname{det} T &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= a_{1,1}\, a_{2,2} \begin{vmatrix} a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= \cdots = a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} \cdots a_{n,n}. \end{aligned}$$

À cette fin, développons $\operatorname{det} T$ selon les éléments de la première colonne, ce qui donne :

$$\operatorname{det} T = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Recommençons avec la première colonne du déterminant qui apparaît :

$$\operatorname{det} T = a_{1,1}\, a_{2,2} \begin{vmatrix} a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

et ainsi de suite, jusqu'à :

$$\begin{aligned}
\det T &= a_{1,1}\, a_{2,2} \cdots a_{n-2,n-2} \begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n,n-1} \\ 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} \\
&= a_{1,1}\, a_{2,2} \cdots a_{n-2,n-2}\, a_{n-1,n-1} \left| a_{n,n} \right| \\
&= a_{1,1}\, a_{2,2} \cdots a_{n-2,n-2}\, a_{n-1,n-1}\, a_{n,n}.
\end{aligned}$$

Le même phénomène de simplicité des calculs se produit aussi avec des matrices triangulaires inférieures. En résumé :

Proposition 6.10. *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments de sa diagonale principale.* □

7. Matrice adjointe

Grâce aux déterminants extraits $\det M_{i,j}$, nous allons construire un objet qui permet de calculer l'inverse M^{-1} d'une matrice — quand elle est inversible !

Définition 7.1. Soit $M = \big(a_{i,j}\big)$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Définissons d'abord la matrice $N = \big(b_{i,j}\big)$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les éléments sont :

$$b_{i,j} := (-1)^{i+j} \det M_{i,j},$$

où $M_{i,j}$ est la matrice déduite de M par suppression de la ligne de rang i et suppression de la colonne de rang j :

$$M_{i,j} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Terminologie 7.2. On appelle matrice adjointe, ou brièvement, adjointe, de M, la matrice *transposée* de N :

$$M^* := {}^{\mathtt{t}}N.$$

Exemple 7.3. Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, soit :

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ses huit premiers cofacteurs valent :

$$\begin{aligned}
b_{1,1} &= + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, & b_{1,2} &= - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \\
b_{1,3} &= + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1, & b_{2,1} &= - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \\
b_{2,2} &= + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1, & b_{2,3} &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \\
b_{3,1} &= + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & b_{3,2} &= - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,
\end{aligned}$$

tandis que le neuvième et petit dernier arrive en clopinant :

$$b_{3,3} \;=\; + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \;=\; -1.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} N \;&=\; \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice adjointe de M est par définition la *transposée* de cette matrice, c'est-à-dire :

$$M^* \;:=\; {}^{\mathtt{t}}N \;=\; \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme on le voit, rappelons que N est formée en remplaçant chaque élément de la matrice donnée M par son cofacteur dans le développement de $\det M$.

Théorème 7.4. *Quelle que soit la matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a :*

$$M^* \, M \;=\; M \, M^* \;=\; \big(\det M\big)\, I_n,$$

où I_n est la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Avec $M = \big(a_{i,j}\big)$, posons :

$$b_{i,j} \;:=\; (-1)^{i+j} \det \big(M_{i,j}\big),$$

et introduisons :

$$b_{i,j}^{\mathtt{t}} \;:=\; b_{j,i},$$

de telle sorte que :

$$M^* \;=\; \big(b_{i,j}^{\mathtt{t}}\big).$$

Par définition du produit de deux matrices, on a :

$$M^* \, M \;=\; \big(c_{i,k}\big),$$

où :

$$c_{i,k} \;:=\; \sum_{j=1}^n b_{i,j}^{\mathtt{t}}\, a_{j,k}.$$

On a par conséquent :

$$\begin{aligned} c_{i,k} \;&=\; \sum_{j=1}^n a_{j,k}\, b_{j,i} \\ &=\; \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i}\, a_{j,k} \det \big(M_{j,i}\big). \end{aligned}$$

Deux cas se présentent.

Cas 1 : $k = i$. Dans ce cas, le coefficient vaut :

$$\begin{aligned} c_{i,i} \;&=\; \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i}\, a_{j,i} \det \big(M_{j,i}\big) \\ &=\; \det M, \end{aligned}$$

puisqu'on reconnaît la formule du Théorème 6.4, en échangeant les noms des indices $i \longleftrightarrow j$.

Cas 2 : $k \neq i$. Appelons M' la matrice déduite de M en remplaçant les éléments $a_{1,i}$, $a_{2,i}$, …, $a_{n,i}$ de la colonne i par les éléments $a_{1,k}$, $a_{2,k}$, …, $a_{n,k}$ de la colonne k, ce qui donne :

$$0 \,=\, \mathsf{det}\, M' \,:=\, \mathsf{det} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

en supposant $i < k$ pour fixer les idées dans cette représentation, le cas $i > k$ se traitant de manière analogue.

Or comme cette matrice M' a deux colonnes égales, son déterminant s'annule :

$$0 \,=\, \mathsf{det}\, M'.$$

Mais en développant ce déterminant selon la colonne i, on obtient une formule :

$$0 \,=\, \mathsf{det}\, M' \,=\, \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i}\, a_{j,k}\, \mathsf{det}\,\big(M_{j,i}\big),$$

qui est exactement celle obtenue plus haut, ce qui nous donne :

$$c_{i,k} \,=\, 0 \qquad\qquad (\forall\, i \neq k).$$

Autrement dit, en utilisant le symbole de Kronecker :

$$c_{i,k} \,=\, \delta_{i,k}\, \mathsf{det}\, M,$$

et par conséquent :

$$M^*\, M \,=\, \big(\mathsf{det}\, M\big)\, I_n.$$

On prouverait de même que :

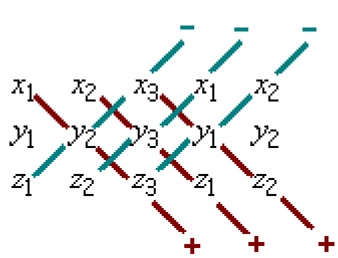
$$M\, M^* \,=\, \big(\mathsf{det}\, M\big)\, I_n. \qquad \square$$

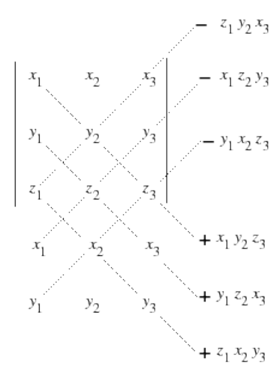
Exemple 7.5. Nous avons vu plus haut que la matrice adjointe de la matrice :

$$M \,:=\, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

est :

$$M^* \,:=\, {}^{\mathtt{t}}N \,=\, \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$





La règle de Sarrus donne la non-annulation des déterminants :

$$\begin{aligned}\det M &= 0+0+0-(-1)(-1)(-1)-0-1\cdot 1\cdot 2\\ &= -1,\\ \det M^* &= (-2)(-1)(-1)+(-2)(-1)(-1)+(-1)(-1)(-2)-(-1)(-1)(-1)-(-2)(-1)(-1)-(-2)(-1)(-2)\\ &= -2-2-2+1+2+4\\ &= -1,\end{aligned}$$

et le lecteur vérifiera que l'on a bien :

$$\begin{aligned}M^*\,M \,=\, M\,M^* &= \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\\ &= \det M\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

8. Critère pour l'invertibilité des matrices

Maintenant, nous pouvons appliquer ce qui précède aux matrices inversibles de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 8.1. *Pour qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ soit inversible, il faut et il suffit que :*

$$\det M \,\neq\, 0.$$

Dans ce cas, on a alors :

$$\boxed{M^{-1} \,=\, \frac{1}{\det M}\,M^*,}\,.$$

Démonstration. Premièrement, établissons la nécessité. Supposons donc M inversible. Ainsi, il existe une matrice $M^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$M^{-1}\,M \,=\, M\,M^{-1} \,=\, I_n.$$

Appliquons le Théorème 5.2 :

$$\det\big(M^{-1}\,M\big) \,=\, \det M^{-1}\,\det M.$$

Comme nous savons que $\det I_n = 1$, nous obtenons :

$$1 \,=\, \det M^{-1}\,\det M, \tag{8.2}$$

ce qui fait voir que, dans le corps $\mathbb{K}$:

$$\det M \,\neq\, 0.$$

Deuxièmement, établissons la suffisance. D'après le Théorème 7.4, nous avons :

$$M^*\,M \,=\, \det M\;I_n \,=\, M\,M^*.$$

Supposons donc $\det M \neq 0$. Alors :

$$\frac{M^*}{\det M}\,M \,=\, I_n.$$

Par conséquent, M est inversible, avec, comme annoncé :

$$M^{-1} \,=\, \frac{M^*}{\det M}. \qquad \square$$

Corollaire 8.3. *Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors :*

$$\det M^{-1} \,=\, \frac{1}{\det M}. \qquad \square$$

Démonstration. En effet, nous avons vu cela en chemin dans l'équation (8.2). □

Exemple 8.4. La matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

vue plus haut est inversible, car $\det M = -1$. Son inverse est :

$$M^{-1} = \frac{M^*}{\det M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Terminons ce chapitre en introduisant le concept de *déterminant* d'un endomorphisme linéaire $f \colon E \longrightarrow E$.

Soit donc E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ sur le corps $\mathbb{K}$. Soit aussi une base de E :

$$\boldsymbol{B}_E = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\},$$

et soit la matrice de f dans cette base :

$$M := \mathsf{Mat}_{\boldsymbol{B}_E \boldsymbol{B}_E}(f).$$

Soit par ailleurs une *autre* base :

$$\boldsymbol{B}'_E = \{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n\},$$

d'où la deuxième matrice :

$$M' := \mathsf{Mat}_{\boldsymbol{B}'_E \boldsymbol{B}'_E}(f).$$

Si P désigne la matrice de passage qui envoie la base $\boldsymbol{B}_E$ sur la base $\boldsymbol{B}'_E$, alors nous avons vu dans un chapitre qui précède que :

$$M' = P^{-1} M P.$$

En appliquant le Théorème 5.2, on en déduit :

$$\begin{aligned} \det M' &= \det \big(P^{-1} M P\big) \\ &= \det P^{-1} \det M \det P \\ &= \det M, \end{aligned}$$

grâce au Corollaire 8.3.

Proposition 8.5. *Le déterminant de la matrice associée à un endomorphisme linéaire $f \in \mathscr{L}(E, E)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$ est indépendant de la base choisie.* □

Ceci justifie la

Définition 8.6. Pour tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, on appelle *déterminant* de f, et on note :

$$\det f,$$

le déterminant de la matrice de f dans une base quelconque de E.

9. Exercices

Exercice 1. EE

Exercice 2. EE

Théorie du rang
Systèmes linéaires

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Introduction

2. Rang d'une application linéaire

Soit $\mathbb{K}$ un corps, par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies :

$$\dim_{\mathbb{K}} E =: n \geqslant 1 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \dim_{\mathbb{K}} F =: m \geqslant 1.$$

Soit aussi une application linéaire :

$$E \xrightarrow{\quad f \quad} F.$$

Définition 2.1. On appelle *rang* de f la dimension du sous-espace vectoriel $f(E) \subset F$, image de E par f :

$$\mathsf{rang}(f) := \dim \mathsf{Im}\, f.$$

Si on munit E d'une base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, alors $f(E)$ est engendré par la famille des n vecteurs images :

$$\{f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)\}.$$

De cette famille, on peut extraire une *base* de $f(E)$, laquelle aura exactement un nombre de vecteurs égal à $\mathsf{rang}(f)$, d'après la définition du rang, et d'après un théorème vu au début du développement de la théorie.

On a alors évidemment :

$$\mathsf{rang}(f) \leqslant n = \dim E,$$
$$\mathsf{rang}(f) \leqslant \dim F = m,$$

d'où toujours :

$$\mathsf{rang}(f) \leqslant \min\big(\dim E, \dim F\big).$$

Ensuite, introduisons la notion de *rang* d'une famille de vecteurs.

Définition 2.2. Dans un espace vectoriel F sur un corps $\mathbb{K}$, on appelle *rang* d'une famille de vecteurs :

$$\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n\} \subset F,$$

la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre :

$$\mathsf{rang}\,\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\} := \dim \mathsf{Vect}\,\big(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\big).$$

Le rang d'une telle famille $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\}$ est donc égal au cardinal — nombre d'éléments — de toute base que l'on peut extraire du sous-espace vectoriel :

$$F' := \mathsf{Vect}\big(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\big) \subset F.$$

Or puisque l'espace engendré ne dépend pas de l'ordre des vecteurs dans la famille, on peut supposer, en changeant au besoin l'ordre de la numérotation, qu'une base extraite

$$F' = \mathsf{Vect}\,\big(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_r, \dots, \vec{y}_n\big) = \mathsf{Vect}\,\big(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_r\big)$$

est constituée des r premiers vecteurs, r étant le rang de la famille considérée.

Autrement dit, les vecteurs $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_r$ sont linéairement indépendants, et aussi, tout autre vecteur :

$$\vec{y}_j \qquad\qquad \text{d'indice} \qquad\qquad r+1 \leqslant j \leqslant n,$$

est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_r$ de cette base.

Observons au passage que la définition du rang d'une famille de vecteurs s'applique à toute famille finie de formes linéaires de l'espace dual :

$$E^* := \mathscr{L}(E, \mathbb{K}),$$

et alors, on appelle *rang* d'une famille de formes linéaires :

$$\big\{f_1, f_2, \dots, f_n\big\} \subset E^*,$$

la dimension du sous-espace vectoriel de E^* qu'elles engendrent.

Enfin, introduisons la notion de *rang* d'une matrice. Ici, il faut s'imaginer que $E := \mathbb{K}^n$ et que $F := \mathbb{K}^m$, comme nous allons l'argumenter dans un instant.

Définition 2.3. Étant donné une matrice $M \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ à $m \geqslant 1$ lignes et à $n \geqslant 1$ colonnes :

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \scriptstyle\vec{y}_1 & \scriptstyle\cdots & \scriptstyle\vec{y}_n \end{array} \end{array},$$

on appelle *rang* de M, et on note :

$$\mathsf{rang}(M),$$

le rang de la famille des n vecteurs-colonnes de cette matrice, envisagés comme vecteurs appartenant à l'espace vectoriel $\mathbb{K}^m$.

Si on introduit la base canonique de $\mathbb{K}^m$:

$$\big\{\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_m\big\},$$

constituée des m vecteurs ayant la coordonnée 1 à la i-ème place, tandis qu'il n'y a que des 0 ailleurs ;

$$\varepsilon_i := \big(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\big) \qquad {\scriptstyle (1 \leqslant i \leqslant m)},$$

alors les n vecteurs-colonnes dans $\mathbb{K}^m$ associés à cette matrice s'écrivent :

$$\vec{y}_j := \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\,\vec{\varepsilon}_i \qquad {\scriptstyle (1 \leqslant j \leqslant n)},$$

et cette matrice $M = \big(a_{i,j}\big)$ représente alors une application linéaire bien définie $g\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$. Dans ces conditions, observons que d'après les Définitions 2.1, 2.2, 2.3, on peut écrire :

$$\mathsf{rang}(g) = \mathsf{rang}(M).$$

L'énoncé suivant clarifie encore mieux le lien entre les diverses notions de rang.

Théorème 2.4. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$, rapportés à deux bases respectives :*

$$\boldsymbol{B}_E = \big\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\big\} \qquad \textit{et} \qquad \boldsymbol{B}_F = \big\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m\big\}.$$

Si, relativement à ces deux bases, une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est représentée par sa matrice :

$$M := \mathsf{Mat}_{\boldsymbol{B}_E \boldsymbol{B}_F}(f) \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K}),$$

alors :

$$\mathsf{rang}(M) = \mathsf{rang}(f) = \dim \mathsf{Im}\, f.$$

Démonstration. Dans la base $\boldsymbol{B}_E$, soit l'application qui constitue et définit les coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$ d'un vecteur quelconque $\vec{x} \in E$:

$$\varphi\big(x_1, x_2, \dots, x_n\big) := x_1\, \vec{e}_1 + x_2\, \vec{e}_2 + \cdots + x_n\, \vec{e}_n = \vec{x}.$$

En particulier, pour tout indice $1 \leqslant j \leqslant n$, le vecteur $\vec{\varepsilon}_j$ de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ défini ci-dessus est envoyé par φ sur le vecteur $\vec{e}_j$ de la base $\boldsymbol{B}_E$

$$\varphi\big(\vec{\varepsilon}_j\big) = \vec{e}_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Élaborons un diagramme commençant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & F \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi"] & \mathbb{K}^m. \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

De même, il existe, relativement à la base $\boldsymbol{B}_F = \big\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m\big\}$ de F un isomorphisme et un seul de $\mathbb{K}^m$ sur F défini par :

$$\psi\big(y_1, y_2, \dots, y_m\big) := y_1\, \vec{f}_1 + y_2\, \vec{f}_2 + \cdots + y_m\, \vec{f}_m.$$

Complétons alors notre schéma :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & F \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "g", "\psi^{-1}\circ f \circ \varphi"'] & \mathbb{K}^m, \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

en introduisant l'application composée $g\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ qui est définie indirectement en parcourant l'arche par le haut :

$$g := \psi^{-1} \circ f \circ \varphi.$$

Proposons-nous maintenant de rechercher la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathbb{K}^m$.

Pour tout vecteur $\vec{\varepsilon}_j$ de la base de $\mathbb{K}^n$ avec $1 \leqslant j \leqslant n$, on sait que $\varphi(\vec{\varepsilon}_j) = \vec{e}_j$.

Soit maintenant $M = \big(a_{i,j}\big)$ la matrice de $f \in \mathscr{L}(E, F)$ relativement aux bases $\boldsymbol{B}_E$ et $\boldsymbol{B}_F$, c'est-à-dire :

$$f\big(\vec{e}_j\big) = a_{1,j}\, \vec{f}_1 + a_{2,j}\, \vec{f}_2 + \cdots + a_{m,j}\, \vec{f}_m \qquad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Par conséquent, nous déduisons, toujours avec $1 \leqslant j \leqslant n$ quelconque :

$$\begin{aligned} g\big(\vec{\varepsilon}_j\big) &= \psi^{-1}\big(f\big(\varphi(\vec{\varepsilon}_j)\big)\big) = \psi^{-1}\big(f(\vec{e}_j)\big) \\ &= \big(a_{1,j},\, a_{2,j},\, \dots,\, a_{m,j}\big) \in \mathbb{K}^m. \end{aligned}$$

Le vecteur-colonne de rang j de la matrice de g coïncide donc précisément le vecteur de coordonnées $\big(a_{1,j}, \dots, a_{m,j}\big)$, et ainsi, la matrice de g est :

$$\begin{aligned}\mathsf{Mat}_{\boldsymbol{B}_{\mathbb{K}^n}\boldsymbol{B}_{\mathbb{K}^m}}(g) &= \Big(a_{i,j}\Big)_{1\leqslant i\leqslant m \text{ lignes}}^{1\leqslant j\leqslant n \text{ colonnes}} \\ &= M.\end{aligned}$$

Or nous avons vu que :

$$\mathsf{rang}(M) = \mathsf{rang}(g),$$

et il ne reste plus qu'à prouver que :

$$\mathsf{rang}(g) = \mathsf{rang}(f),$$

c'est-à-dire que :

$$\dim g(\mathbb{K}^n) = \dim f(E).$$

À cette fin, prouvons que ψ établit un isomorphisme entre $g(\mathbb{K}^n)$ et $f(E)$, ce qui conclura.

En effet, comme ψ est un isomorphisme entre :

$$\mathbb{K}^m \supset g(\mathbb{K}^n) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad F \supset f(E),$$

il suffit de prouver que la restriction de ψ à $g(\mathbb{K}^n)$ est une surjection de $g(\mathbb{K}^n)$ sur $f(E)$, c'est-à-dire que :

$$\psi\big(g(\mathbb{K}^n)\big) = f(E).$$

Mais comme :

$$g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi,$$

il vient :

$$\psi \circ g = f \circ \varphi.$$

Il ne reste donc plus qu'à se convaincre que :

$$f \circ \varphi(\mathbb{K}^n) = f(E),$$

mais cela est évident, puisque φ est surjective :

$$\varphi(\mathbb{K}^n) = E.$$

Le théorème est donc démontré. □

Exprimons une conséquence importante de ces raisonnement.

Comme précédemment, soit F un espace vectoriel de dimension $m \geqslant 1$ sur le corps $\mathbb{K}$, rapporté à une base $\boldsymbol{B}_F = \big\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m\big\}$. Soit une famille de $n \geqslant 1$ vecteurs :

$$\big\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\big\},$$

exprimés dans la base $\boldsymbol{B}_F$ comme :

$$\vec{y}_j = \sum_{i=1}^m a_{i,j}\,\vec{f}_i \qquad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Clairement, la matrice :

$$M := \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \vec{y}_1 & \vec{y}_2 & \cdots & \vec{y}_n \end{array} \end{array}$$

de taille $m \times n$ est la matrice des coordonnées des n vecteurs $\vec{y}_j$ dans la base $\boldsymbol{B}_F$ de F.

Considérons alors l'endomorphisme linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, F)$ qui envoie les vecteurs $\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n$ de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ sur les vecteurs $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$:

$$f\big(\vec{\varepsilon}_j\big) \,=\, \vec{y}_j \,=\, \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, \vec{f}_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

La matrice de f, relativement aux bases $\big\{\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n\big\}$ et $\big\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m\big\}$ respectives de $\mathbb{K}^n$ et de F est précisément :

$$\mathsf{Mat}(f) \,=\, M \,=\, \big(a_{i,j}\big).$$

D'après le Théorème 2.4, on a :

$$\mathsf{rang}(M) \,=\, \mathsf{rang}(f) \,=\, \mathsf{dim}\,\mathsf{Im}\, f \,=\, \mathsf{rang}\,\big\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\big\}\mathsf{dim}\,\mathsf{Vect}\,\big(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\big).$$

Or d'après la Définition 2.2, le rang de la famille $\big\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\big\}$ est la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre, espace qui, d'après la construction de f, coïncide ici avec $\mathsf{Im}\, f$. Donc le rang de cette famille est égal à $\mathsf{rang}(f)$, c'est-à-dire à $\mathsf{rang}(M)$.

Nous pouvons donc récapituler tous les raisonnements qui précèdent sous la forme d'un théorème synthétique utile dans la pratique.

Théorème 2.5. *Le rang d'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel F de dimension finie est égal au rang de la matrice des coordonnées de ces vecteurs dans une base quelconque de F.* □

Terminons cette section en formulant un critère d'indépendance linéaire, valable quand le nombre de vecteurs est égal à la dimension de l'espace vectoriel ambiant.

Théorème 2.6. [Fondamental !] *Dans un espace vectoriel E de dimension* $\mathsf{dim}\, E = n \geqslant 1$ *sur un corps $\mathbb{K}$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes concernant n vecteurs :*

$$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \,\in\, E.$$

(i) *La famille $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ est libre.*

(ii) *La matrice carrée M des coordonnées de $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ dans une base quelconque de E est inversible.*

(iii) *Le rang de M est égal à* $n = \mathsf{rang}(M)$.

Démonstration. Les arguments consistent à faire la synthèse de tout ce qui a été dit dans les pages et dans les chapitres qui précèdent, et donc, il n'y a presque rien à écrire.

Le lecteur-étudiant est fortement invité à revenir en arrière afin de se convaincre qu'il a bien compris pourquoi ces équivalences sont conséquences directes de toute la téorie qui a été élaborée jusqu'à présent. □

3. Matrices extraites d'une matrice

Soient deux entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, et soit une matrice de taille $m \times n$:

$$M \,=\, \Big(a_{i,j}\Big)_{1 \leqslant i \leqslant m \text{ lignes}}^{1 \leqslant j \leqslant n \text{ colonnes}}.$$

Soit aussi un entier $p \geqslant 1$ avec :

$$\begin{aligned} p &\leqslant m, \\ p &\leqslant n, \end{aligned}$$

d'où :

$$1 \,\leqslant\, p \,\leqslant\, \mathsf{min}\,(m, n).$$

Définition 3.1. Pour tous choix de deux collections de p indices intermédiaires :

$$1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant m,$$
$$1 \leqslant j_1 < \cdots < j_p \leqslant n,$$

on appelle *matrice extraite* associée la matrice carrée de taille $p \times p$:

$$M_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_p} := \begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_p} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p,j_1} & a_{i_p,j_2} & \cdots & a_{i_p,j_p} \end{pmatrix},$$

et on appelle : *déterminant extrait* :

$$\Delta_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_p} := \det M_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_p} = \begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_p} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p,j_1} & a_{i_p,j_2} & \cdots & a_{i_p,j_p} \end{vmatrix}.$$

Nous admettrons sans démonstration le

Théorème 3.2. *Si une matrice $M \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ n'est pas identiquement nulle, alors il existe un entier unique :*

$$1 \leqslant r \leqslant \min(m,n)$$

tel que, pour tout entier $p \geqslant r+1$ strictement supérieur, tous les déterminants extraits s'annulent

$$0 = \Delta_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_p},$$

tandis qu'il existe au moins un choix d'indices :

$$1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant m,$$
$$1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant n,$$

pour lesquels le déterminant extrait correspondant ne s'annule pas :

$$0 \neq \Delta_{i_1,\dots,i_r}^{j_1,\dots,j_r}$$

De plus, cet entier vaut :

$$\mathrm{rang}(M) = r. \qquad \square$$

Évidemment, quand la matrice est identiquement nulle, son rang vaut 0.

Grâce à ce critère général, on peut (en principe) déterminer de manière algorithmique le rang d'une matrice explicite donnée.

Exemple 3.3. Comme illustration élémentaire, dans l'espace $\mathbb{R}^4$ de la physique à quatre dimensions — celle dans laquelle nous faisons des mathématiques avec notre petite cervelle en ébullition —, soient les trois vecteurs :

$$\vec{x}_1 := \big(1,0,1,0\big), \qquad \vec{x}_2 := \big(0,1,0,1\big), \qquad \vec{x}_3 := \big(1,-1,0,2\big),$$

La matrice de ces vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ s'écrit :

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Désignons en abrégé par M_3 la matrice formée des trois premières lignes de M. On trouve aisément (exercice) que :

$$\det M_3 = -1 \neq 0,$$

et par conséquent, $\mathrm{rang}(M) = 3$, donc la famille $\big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\big\}$ est libre.

Formulons maintenant un critère général d'indépendance linéaire pour des collections quelconques de vecteurs.

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F à $m \geqslant 1$ dimensions rapporté à une base :

$$\boldsymbol{B}_F = \{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m\},$$

considérons une famille $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ de $n \geqslant 1$ vecteurs arbitraires. Introduisons aussi la matrice :

$$A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i \leqslant m \text{ lignes}}^{1 \leqslant j \leqslant n \text{ colonnes}},$$

des coordonnées de ces vecteurs dans la base $\boldsymbol{B}_F$.

Pour que cette famille $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ de vecteurs soit libre, il faut et il suffit que son rang soit égal au nombre n des vecteurs, c'est-à-dire d'après le Théorème 3.4, que $\operatorname{rang} A = n$.

En appliquant alors le Théorème 3.2, on peut énoncer le critère général suivant.

Théorème 3.4. *Dans un espace vectoriel F de dimension $m \geqslant 1$, pour qu'une famille de $n \geqslant 1$ avec $1 \leqslant n \leqslant m$ vecteurs soit libre, il faut et il suffit que l'on puisse extraire, de la matrice de ces vecteurs dans une base quelconque, une matrice carrée d'ordre n qui soit inversible,* i.e. *ait un déterminant non nul.*

4. Systèmes d'équations linéaires

On considère un *système linéaire* de $m \geqslant 1$ équations à $n \geqslant 1$ inconnues :

$$\tag{4.1} \begin{cases} a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 + \cdots + a_{1,n}\, x_n = b_1, \\ a_{2,1}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 + \cdots + a_{2,n}\, x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}\, x_1 + a_{m,2}\, x_2 + \cdots + a_{m,n}\, x_n = b_m, \end{cases}$$

dont les éléments $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ sont nommés *coefficients*, ainsi que $b_i \in \mathbb{K}$, appelés *seconds membres*.

Ici évidemment, ce sont les inconnues $x_1, \ldots, x_n$ qu'il s'agit de déterminer. On appelle alors *solution* du système tout n-uplet :

$$\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in \mathbb{K}^n$$

qui vérifie les m équations du système.

Résoudre le système, c'est déterminer l'*ensemble* de *toutes* les solutions $(x_1, \ldots, x_n)$ — ensemble qui peut éventuellement être vide.

On appelle *matrice* du système la matrice des coefficients du membre de gauche :

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Si donc nous introduisons les deux matrices unicolonnes :

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

à n lignes et à m lignes, la définition du produit matriciel nous permet d'abréger l'écriture d'un tel système linéaire sous la forme :

$$\tag{4.2} A\, X = B.$$

Résoudre le système (4.1), c'est donc résoudre en X cette équation matricielle. Les matrices $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ étant données, il s'agit de déterminer l'ensemble des matrices X de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $A\,X = B$.

De plus, un tel système admet une *interprétation vectorielle* qui est absolument essentielle.

En effet, soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$ sur le corps $\mathbb{K}$, munis de deux bases :

$$\boldsymbol{B}_E = \big\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\big\} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{B}_F = \big\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m\big\}.$$

Soit aussi $f\colon E \longrightarrow F$ l'application linéaire qui admet pour matrice la matrice $A = \big(a_{i,j}\big)$ du système. Si on introduit les vecteurs :

$$\vec{x} := x_1\,\vec{e}_1 + \cdots + x_n\,\vec{e}_n \qquad \text{et} \qquad \vec{b} := b_1\,\vec{f}_1 + \cdots + b_m\,\vec{f}_m,$$

le système linéaire (4.1) équivaut alors à :

$$f(\vec{x}) = \vec{b}. \tag{4.3}$$

Résoudre ce système, c'est donc déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{x} \in E$ qui ont pour image le vecteur fixé $\vec{b} \in E$, ensemble que nous noterons :

$$\mathsf{Sol} := \big\{\vec{x} \in E\colon\ f(\vec{x}) = \vec{b}\big\}.$$

Dans cette interprétation, il est aisé de délimiter les grandes lignes de la discussion.

Premier cas. Supposons que $\vec{b}$ n'appartienne *pas* à l'image de E par f :

$$\vec{b} \notin \mathsf{Im}\,f.$$

Alors l'équation (4.3) n'a évidemment pas de solution. Dans ce cas, on a donc vacuité $\mathsf{Sol} = \emptyset$ de l'ensemble des solutions.

Deuxième cas. Supposons au contraire maintenant que $\vec{b}$ *appartienne* à l'image de E par f :

$$\vec{b} \in \mathsf{Im}\,f.$$

Il existe alors au moins un vecteur $\vec{x}_0 \in E$ tel que :

$$f(\vec{x}_0) = \vec{b}. \tag{4.4}$$

Pour toute solution $\vec{x} \in \mathsf{Sol}$ de l'équation vectorielle (4.3), on aura alors, en retranchant membre à membre (4.3) et (4.4) :

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \vec{0},$$

et comme f est linéaire, il vient :

$$f\big(\vec{x} - \vec{x}_0\big) = \vec{0}.$$

Par suite, si $\mathsf{Ker}\,f$ désigne le noyau de f, ceci veut dire que :

$$\vec{x} - \vec{x}_0 \in \mathsf{Ker}\,f.$$

Réciproquement, tout vecteur $\vec{x}$ de la forme :

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{y} \qquad \text{avec} \qquad \vec{y} \in \mathsf{Ker}\,f \quad \text{quelconque},$$

est solution du problème, car il est clair que :

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{x}_0) + \underline{f(\vec{y})} \\ &= f(\vec{x}_0) + 0 \\ &= \vec{b}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si $\vec{x}_0$ est une certaine solution (particulière) de l'équation vectorielle (4.3), alors l'ensemble de *toutes* les solutions de cette équation est exactement égal à :

$$\mathsf{Sol} = \Big\{\vec{x} \in E\colon\ \exists\,\vec{y} \in \mathsf{Ker}\,f, \quad \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{y}\Big\}.$$

Il est *paramétré* par le noyau de f. Énonçons ce résultat très important sous une forme synthétique, en prenant pour fixer les idées :

$$E := \mathbb{K}^n \qquad \text{et} \qquad F := \mathbb{K}^m.$$

Théorème 4.5. *Étant donné un système de $m \geqslant 1$ équations linéaires à $n \geqslant 1$ inconnues :*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j \,=\, b_i \qquad\qquad (1 \leqslant i \leqslant m),$$

interprété comme équation vectorielle :

$$f(\vec{x}) \,=\, \vec{b},$$

au moyen de l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ qui a pour matrice $\big(a_{i,j}\big)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathbb{K}^m$, et avec $\vec{b} \in \mathbb{K}^m$ fixé, l'ensemble complet de ses solutions :

$$\mathsf{Sol} \,:=\, \big\{\vec{x} \in \mathbb{K}^n\colon\ f(\vec{x}) = \vec{b}\big\},$$

est le suivant.

(1) *Quand $\vec{b} \notin \mathsf{Im}\, f$, il est vide* $\mathsf{Sol} = \emptyset$.

(2) *Quand $\vec{b} \in \mathsf{Im}\, f$, il y a au moins une solution $\vec{x}_0 \in \mathsf{Sol}$, et alors l'ensemble complet des solutions est :*

$$\mathsf{Sol} \,=\, \Big\{\vec{x} \in E\colon\ \exists\, \vec{y} \in \mathsf{Ker}\, f, \quad \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{y}\Big\}. \qquad \square$$

Trois cas spéciaux méritent d'être explicités.

(a) Quand f est *surjective*, ce qui exige $m \leqslant n$, c'est-à-dire quand :

$$\mathsf{Im}\, f \,=\, F,$$

tout vecteur $\vec{b} \in F$ appartient à $\mathsf{Im}\, f$, et alors le système $A\,X \,=\, B$ admet toujours des solutions, *quel que soit le choix d'un second membre fixé B*.

(b) Quand f est est *injective*, un théorème vu dans un chapitre qui précède a montré que :

$$\dim \mathsf{Im}\, f \,=\, \dim E \,=\, n,$$

et l'inclusion $\mathsf{Im}\, f \subset F$ force $n \leqslant m = \dim F$. En prenant alors un second membre B tel que le vecteur associé $\vec{b} \in \mathsf{Im}\, f$ appartienne à l'image de f, on voit que dans ce cas, le système linéaire admet une solution *unique*, parce que $\mathsf{Ker}\, f = \{0\}$, donc les vecteurs $\vec{y}$ qui paramétrisent l'espace Sol des solutions sont tous nuls.

(c) Enfin, quand f est *bijective*, c'est-à-dire simultanément injective et surjective, ce qui exige $n = m$, le système admet une solution par **(a)**, et une seule par **(b)**. Nous allons maintenant étudier plus en détail ce cas très intéressant.

5. Systèmes de Cramér

Dans le système (4.1) linéaire $A\,X \,=\, B$ réinterprété comme équation (4.3) vectorielle, nous supposons donc dans cette section que deux conditions sont réalisées :

(1) $n = m$;

(2) la matrice $A = \big(a_{i,j}\big)$ du système est inversible.

Ainsi, en partant de :

$$A\,X \,=\, B, \tag{4.2}$$

nous pouvons multiplier par A^{-1} ce qui fournit instantanément :

$$X \,=\, A^{-1} B, \tag{5.1}$$

la solution unique X du système.

Or nous avons vu dans le chapitre précédent une formule donnant cette matrice inverse :

$$A^{-1} \,=\, \frac{1}{\mathsf{det}\,A}\,A^*,$$

où A^* est la matrice adjointe de A. Alors l'équation (5.1) qui donne la solution s'écrit de manière équivalente :

$$\mathsf{det}\,A\cdot X \,=\, A^*\,B, \tag{5.2}$$

Or la matrice adjointe a pour entrées, après transposition :

$$a_{i,j}^* \,:=\, (-1)^{i+j}\,\mathsf{det}\,\big(A_{j,i}\big) \qquad\qquad {\scriptstyle (1\leqslant i,\,j\leqslant n)},$$

où $A_{i,j}$ est la matrice déduite de A par suppression de la ligne i et de la ligne j. Par conséquent, le produit matriciel $A^*\,B$, qui est une matrice colonne, a pour éléments :

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}^*\,b_j \qquad\qquad {\scriptstyle (1\leqslant i\leqslant n)}.$$

En identifiant terme à terme les deux matrices de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ qui interviennent dans la relation (5.2), on obtient donc :

$$\big(\mathsf{det}\,A\big)\,x_i \,=\, \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j}\,\mathsf{det}\,\big(A_{j,i}\big)\,b_j \qquad\qquad {\scriptstyle (1\leqslant i\leqslant n)},$$

ce qui équivaut en échangeant $i \longleftrightarrow j$ à :

$$\big(\mathsf{det}\,A\big)\,x_j \,=\, \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j}\,\mathsf{det}\,\big(A_{i,j}\big)\,b_i \qquad\qquad {\scriptstyle (1\leqslant j\leqslant n)}.$$

Et là, si on est très intelligent, on voit quelque chose de crucial à deviner.

Observation 5.3. *Le second membre ci-dessus est le développement du déterminant de la matrice A' déduite de A en remplaçant la colonne de rang j de A par les seconds membres $b_1,\dots,b_n$.* □

Ceci conduit à énoncer un magnifique

Théorème 5.4. [Formules de Cramér] *La solution unique $(x_1,\dots,x_n)$ d'un système de $n\geqslant 1$ équations linéaires à $n\geqslant 1$ inconnues :*

$$\begin{aligned}
a_{1,1}\,x_1+a_{1,2}\,x_2+\cdots+a_{1,n}\,x_n \,&=\, b_1,\\
a_{2,1}\,x_1+a_{2,2}\,x_2+\cdots+a_{2,n}\,x_n \,&=\, b_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
a_{n,1}\,x_1+a_{n,2}\,x_2+\cdots+a_{n,n}\,x_n \,&=\, b_n,
\end{aligned}$$

dont la matrice $A=\big(a_{i,j}\big)$ est inversible*, c'est-à-dire a un déterminant non nul :*

$$0 \,\neq\, \mathsf{det}\,A \qquad\qquad (\textit{Hypothèse}),$$

possède n coordonnées x_j données par les formules de Cramér *:*

$$x_j \,=\, \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,i} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,i} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,i} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix}} \qquad\qquad {\scriptstyle (1\leqslant j\leqslant n)},$$

dans lesquelles on divise toujours par $\det A \neq 0$. □

En dimension $n = 2$, la solution unique du système :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= F, \\ c\,x + d\,y &= G, \end{aligned}$$

est donc, sous l'hypothèse qu'on puisse effectivement diviser par le déterminant, qu'on suppose non nul :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} F & b \\ G & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \qquad\qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & F \\ c & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

En dimension $n = 3$, un système de Cramér général :

$$\begin{aligned} a\,x + a'\,y + a''\,z &= F, \\ b\,x + b'\,y + b''\,z &= G, \\ c\,x + c'\,y + c''\,z &= H, \end{aligned}$$

dont le déterminant est non nul a pour solution unique :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} F & a' & a'' \\ G & b' & b'' \\ H & c' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & F & a'' \\ b & G & b'' \\ c & H & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}}, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a & a' & F \\ b & b' & G \\ c & c' & H \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}}.$$

Exemple 5.5. Proposons-nous de résoudre le système :

$$\begin{aligned} 3\,x + 2\,y - z &= 1, \\ x - y + z &= 0, \\ x + y - 2\,z &= -1, \end{aligned}$$

de $m = 3$ équations à $n = 3$ inconnues. La matrice de ses coefficients est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La règle de Sarrus nous permet aisément (exercise) de calculer :

$$\det A = 7.$$

Comme ce déterminant est non nul, nous sommes en présence d'un système de Cramér. Appliquons alors les formules du théorème qui précède pour obtenir les trois cooordonnées de la solution unique :

$$\begin{aligned} 7\,x &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \\ 7\,y &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 7, \\ 7\,z &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 7. \end{aligned}$$

La solution du système est donc :

$$x = 0, \qquad y = 1, \qquad z = 1.$$

En toutes circonstances, l'étudiant qui passe un examen doit vérifier si la solution qu'il trouve est bien une solution, en la remplaçant dans le système donné.

6. Résolution d'un système linéaire général

Sans supposer $m = n$, considérons un système (4.1) de $m \geqslant 1$ équations à $n \geqslant 1$ inconnues, où m et n sont des entiers quelconques. Désignons pas r le rang de la matrice A de ses coefficients :

$$r := \mathsf{rang}\, A = \mathsf{rang}\left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i \leqslant m \text{ lignes}}^{1 \leqslant j \leqslant n \text{ colonnes}}.$$

D'après le Théorème 3.2, nous savons qu'il existe une sous-matrice carrée A_r de taille $r \times r$ extraite de A qui est inversible, *i.e.* satisfait :

$$0 \neq \mathsf{det}\, A_r.$$

En renumérotant au besoin les lignes et les colonnes de A, ce qui revient à modifier l'ordre des équations et à changer le nom des inconnues, nous pouvons supposer que cette sous-matrice $A_r \subset A$ est constituée des r premières lignes et des r premières colonnes de A.

Ainsi, le système linéaire que nous devons résoudre s'écrit sous une forme :

$$\text{(6.1)} \qquad \left\{ \begin{aligned} a_{1,1}\, x_1 + \cdots + a_{1,r}\, x_r + \cdots + a_{1,n}\, x_n \,&=\, b_1, \\ a_{2,1}\, x_1 + \cdots + a_{2,r}\, x_r + \cdots + a_{2,n}\, x_n \,&=\, b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\ a_{r,1}\, x_1 + \cdots + a_{r,r}\, x_r + \cdots + a_{r,n}\, x_n \,&=\, b_r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\ a_{m,1}\, x_1 + \cdots + a_{m,r}\, x_r + \cdots + a_{m,n}\, x_n \,&=\, b_m, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle nous faisons apparaître les éléments de la sous-matrice inversible $A_r \subset A$, dont le déterminant est non nul :

$$\mathsf{det}\, A_r = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Terminologie 6.2. Les inconnues $x_1, \dots, x_r$ se nomment *inconnues principales*.

Les r premières équations se nomment *équations principales*.

Deux cas se présentent nécessairement, que nous envisageons à la suite l'un de l'autre.

Premier cas : *Le rang de la matrice est égal au nombre des équations du système :*

$$r = m.$$

Revenons au point de vue vectoriel, d'après lequel le système (6.1) équivaut à :

$$\text{(4.3)} \qquad f(\vec{x}) = \vec{b}.$$

On a ici :

$$r = \mathsf{dim}\, \mathsf{Im}\, f = \mathsf{dim}\, F = m,$$

ce qui force :

$$\mathsf{Im}\, f = F,$$

c'est-à-dire que f est *surjective*. Ainsi, quel que soit le vecteur $\vec{b}$, l'équation vectorielle $f(\vec{x}) = \vec{b}$ a des solutions.

Si $\vec{x}_0$ est l'une de ces solutions, toutes les autres solutions sont de la forme $\vec{x}_0 + \vec{y}$, quand $\vec{y}$ parcourt $\mathsf{Ker}\, f$.

Or d'après la formule du rang vue dans un chapitre qui précède, on a toujours :

$$\dim \mathsf{Ker}\, f + \dim \mathsf{Im}\, f \;=\; \dim E \;=\; n,$$

donc nous déduisons que :

$$\dim \mathsf{Ker}\, f \;=\; n - r.$$

Par conséquent, les vecteurs $\vec{x}_0 + \vec{y}$ qui sont solutions de (4.3) dépendent de $n - r$ scalaires arbitraires, par exemple les coordonnées de $\vec{y}$ dans une certaine base de $\mathsf{Ker}\, f$.

Observons que si $r = n$, la surjection f est aussi une injection, c'est-à-dire que $\mathsf{Ker}\, f = \{\vec{0}\}$, et alors on est en présence d'un système de Cramér, objet que nous avons déjà étudié.

Expliquons maintenant comment réaliser le calcul effectif des solutions du système, lequel s'écrit puisque $r = m$:

$$\left\{\begin{aligned} a_{1,1}\, x_1 + \cdots + a_{1,m}\, x_m + a_{1,m+1}\, x_{m+1} + \cdots + a_{1,n}\, x_n \;&=\; b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\ a_{m,1}\, x_1 + \cdots + a_{m,m}\, x_m + a_{m,m+1}\, x_{m+1} + \cdots + a_{m,n}\, x_n \;&=\; b_m, \end{aligned}\right.$$

Attribuons des valeurs arbitraires dans $\mathbb{K}$ aux $n - m$ inconnues non principales :

$$x_{m+1},\; \ldots,\; x_n.$$

Faisons-les toutes passer à droite des équations du système :

$$\left\{\begin{aligned} a_{1,1}\, x_1 + \cdots + a_{1,m}\, x_m \;&=\; b_1 - a_{1,m+1}\, x_{m+1} - \cdots - a_{1,n}\, x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\ a_{m,1}\, x_1 + \cdots + a_{m,m}\, x_m \;&=\; b_m - a_{m,m+1}\, x_{m+1} - \cdots - a_{m,n}\, x_n, \end{aligned}\right.$$

et appelons en abrégé b_i' ces nouveaux membres de droite :

$$\left\{\begin{aligned} a_{1,1}\, x_1 + \cdots + a_{1,m}\, x_m \;&=\; b_1', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\ a_{m,1}\, x_1 + \cdots + a_{m,m}\, x_m \;&=\; b_m'. \end{aligned}\right.$$

Maintenant, nous sommes en présence d'un système de Cramér, puisque le nombre d'équations du système est égal au nombre d'inconnues, et puisque par hypothèse, le déterminant de la matrice extraite A_r que nous voyons bien ici est non nul. On résout alors ce système, et on constate qu'il dépend des :

$$n - m \quad \text{paramètres } \; x_{m+1}, \ldots, x_n.$$

Deuxième cas : *Le rang de la matrice est strictement inférieur au nombre des équations du système :*

$$r \;<\; m.$$

Nous savons que l'équation vectorielle associée $f(\vec{x}) = \vec{b}$ possède ou n'a pas de solutions selon que $\vec{b} \in \mathsf{Im}\, f$ ou que $\vec{b} \notin \mathsf{Im}\, f$.

Or l'image $\mathsf{Im}\, f$ est engendrée par les r premières colonnes de la matrice A, c'est-à-dire par les images par f des r premiers vecteurs de la base $f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_r)$.

Ensuite, pour que $\vec{b} \in \mathsf{Im}\, f$, il faut et il suffit que la famille :

$$\big\{ f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_r),\, \vec{b} \big\},$$

soit *liée* dans F. Or d'après le critère général d'indépendance linéaire que le Théorème 3.4 a formulé, il faut et il suffit que la matrice des coordonnées de ces vecteurs dans une base de F soit de rang strictement inférieur à $r + 1$.

Mais comme cette matrice est :

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} & b_r \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,r} & b_m \end{pmatrix},$$

et comme par hypothèse le sous-déterminant de cette matrice :

$$\det A_r = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} \end{vmatrix} \neq 0$$

est non nul, pour que $\vec{b} \in \operatorname{Im} f$, il faut et il suffit que l'on ait aussi :

$$\operatorname{rang}\big(A'\big) = r,$$

et ceci équivaut, d'après le Théorème 3.2, à ce que *toutes* les matrices carrées extraites de taille $(r+1) \times (r+1)$ soient de déterminant nul.

Et ici, puisque A' n'a que $r+1$ colonnes, cela équivaut à ce que, pour tout entier $k = r+1, \dots, m$, on ait annulation de :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} & b_r \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,r} & b_k \end{vmatrix} = 0 \qquad\qquad (r+1 \leqslant k \leqslant m).$$

Terminologie 6.3. Ces $m-r$ déterminants seront appelés *déterminants caractéristiques* du système.

En résumé, pour que le système (6.1) ait des solutions, il faut et il suffit que *tous les déterminants caractéristiques soient nuls*.

Dans ce cas, si $(x_1, \dots, x_n)$ est une solution des r (premières) équations principales du système, alors elle est solution de toute équation non principale.

En conclusion de cette étude, nous pouvons énoncer un résultat synthétique.

Théorème 6.4. [de Fontené-Rouché] *Soit un système $A\,X = B$ de m équations à n inconnues, de rang r.*

(1) *Si $r = m$, alors le système a des solutions, obtenues en attribuant des valeurs arbitraires aux $n-r$ inconnues non principales, et en résolvant le système de Cramér associé de $r = m$ équations à $r = m$ inconnues.*

(2) *Si $r < m$, et si l'un des déterminants caractéristiques est différent de zéro, alors le système n'a aucune solution.*

(3) *Si $r < m$ et si tous les déterminants caractéristiques sont nuls, alors le système se réduit aux r équations principales, en supprimant les $m-r$ dernières équations, et le système réduit se résout en appliquant la méthode du* **(1)**. □

Exemple 6.5. Proposons-nous de résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant :

$$\begin{cases} a\,x + y + z + t = 1, \\ x + ay + z + t = 1, \\ x + y + az + t = 1, \\ x + y + z + at = 1, \end{cases}$$

en discutant les cas possibles selon la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

Commençons par calculer le déterminant de la matrice de ce système :

$$\begin{aligned}\Delta \;:=\; \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \;&=\; \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \\ &=\; \big(a+3\big) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix},\end{aligned}$$

où nous avons déduit le deuxième déterminant du premier en ajoutant les 3 colonnes suivantes à la première.

Dans le dernier déterminant obtenu, retranchons la première colonne successivement aux trois autres colonnes suivantes :

$$\begin{aligned}\Delta \;&=\; \big(a+3\big) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} \\ &=\; \big(a+3\big)\,\big(a-1\big)^3,\end{aligned}$$

et développons le déterminant obtenu par rapport à sa première colonne pour terminer le calcul. Envisageons alors plusieurs cas.

Premier cas :

$$\big(a+3\big)\,\big(a-1\big) \;\neq\; 0.$$

Le système proposé est alors de type Cramér. Pour en obtenir la solution (unique), il serait ici maladroit d'appliquer directement les formules de Cramér, car cela exigerait de calculer 4 autres déterminants de taille 4×4.

Puisqu'on est astucieux, il vaut mieux remarquer que, en ajoutant membre à membre les quatre équations proposées, on obtient :

$$(a+3)\,\big(x+y+z+t\big) \;=\; 4,$$

d'où puisque nous supposons $a \neq -3$:

$$x+y+z+t \;=\; \frac{4}{a+3}.$$

En retranchant cette équation successivement de chaque équation proposée, on obtient :

$$\begin{aligned}\big(a-1\big)\,x \;=\; \big(a-1\big)\,y \;=\; \big(a-1\big)\,z \;=\; \big(a-1\big)\,t \;&=\; 1-\frac{4}{a+3} \\ &=\; \frac{a+3-4}{a+3},\end{aligned}$$

et enfin, puisque nous supposons $a-1 \neq 0$:

$$x \;=\; y \;=\; z \;=\; t \;=\; \frac{1}{a+3}.$$

C'est bien la solution unique du système, comme on le vérifie en remplaçant ces valeurs dans le système.

Deuxième cas :

$$a \;=\; -3.$$

Le système est alors de rang 3, car :

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

Il y a un seul déterminant caractéristique :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -16 \cdot 4, \end{aligned}$$

où le second déterminant est déduit du premier en ajoutant les trois premières colonnes à la quatrième, et où on l'a développé par rapport à sa quatrième colonne.

Comme cet unique déterminant caractéristique est non nul, le système n'a pas de solution.

Troisième cas :

$$a = 1.$$

Le système est alors constitué de quatre équations identiques à la première, donc il se réduit à une seule équation principale :

$$x + y + z + t = 1.$$

On peut fixer arbitrairement les valeurs de trois inconnues (non principales) parmi quatre et en déduire la valeur de l'inconnue principale.

Remarquons pour terminer que la matrice du système a tous ses éléments égaux. Son rang est évidemment égal à 1.

7. Exercices

Exercice 1. EE

Exercice 2. EE

Examens corrigés d'Algèbre Linéaire et Géométrie

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Examen 1

Exercice 1. Avec la méthode des stylos de couleurs, en utilisant *au minimum* deux couleurs, résoudre les quatre systèmes linéaires suivants, après les avoir traduits sous forme de matrice complète.

$$(S_1)\quad \begin{aligned} y+4z &= -5 \\ x+3y+5z &= -2 \\ 3x+7y+7z &= 6 \end{aligned} \qquad (S_2)\quad \begin{aligned} x-3y+4z &= -4 \\ 3x-7y+7z &= -8 \\ -4x+6y-z &= 7 \end{aligned}$$

$$(S_3)\quad \begin{aligned} x \qquad -3z &= 8 \\ 2x+2y+9z &= 7 \\ y+5z &= -2 \end{aligned} \qquad (S_4)\quad \begin{aligned} x-3y \qquad &= 5 \\ -x+y+5z &= 2 \\ y+z &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 2. Déterminer la solution générale des systèmes dont les matrices complètes sont les suivantes :

$$\textbf{(a)}\ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 7 & 6 \end{array}\right] \end{array}; \qquad \textbf{(b)}\ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 0 & 7 \\ 2 & 7 & 0 & 10 \end{array}\right] \end{array};$$

$$\textbf{(c)}\ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{array}\right] \end{array}; \qquad \textbf{(d)}\ \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -5 & -6 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Exercice 3. **(a)** Déterminer les solutions du système linéaire :

$$\begin{aligned} x_1+2x_2 &= a \\ 2x_1+5x_2 &= b \end{aligned}$$

où a et b sont des nombres réels arbitraires.

Exercice 4. **(a)** Dans le plan $\mathbb{R}^2$, déterminer le point de coordonnées (c_1, c_2) d'intersection entre les deux droites d'équations respectives $x_1+5x_2=7$ et $x_1-2x_2=-2$.

(b) Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées (x,y), représenter soigneusement ces deux droites ainsi que leur point d'intersection.

Exercice 5. On suppose que les deux matrices suivantes sont les matrices complètes de deux systèmes linéaires. Pour chacune d'entre elles, décrire par une phrase les deux premières opérations élémentaires sur les lignes à effectuer dans la procédure de résolution d'un système :

$$A := \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right], \qquad B := \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right].$$

Exercice 6. Dans les quatre *types généraux* d'exemples ci-dessous, on suppose que chaque matrice échelonnée non réduite est la matrice complète d'un certain système linéaire :

$$\textbf{(a)}\ \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \end{array}\right] \end{array} \qquad \textbf{(b)}\ \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{array}\right] \end{array}$$

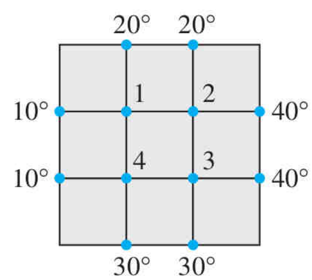
$$\textbf{(c)}\ \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cc|c} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \qquad \textbf{(d)}\ \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{array}\right] \end{array}$$

Pour chaque type général de système, étudier l'existence et l'unicité de solutions. Indication: Écrire les sytèmes avec les variables x_1, x_2, x_3, x_4 utilisées dans le cours, puis résoudre en partant du bas, en utilisant les règles naturelles de calcul :

$$\blacksquare \cdot \blacksquare = \blacksquare, \qquad * \cdot \blacksquare = *, \qquad * + * = *, \qquad - * = *, \qquad \frac{*}{\blacksquare} = *,$$

qui sont essentiellement évidentes, puisque $\blacksquare$ désigne un nombre réel *non nul*, tandis que $*$ désigne un nombre réel *quelconque*, éventuellement nul.

Exercice 7. Parmi les problèmes importants que pose l'étude des transferts thermiques figure celui de la répartition de la température à l'état stationnaire d'une plaque fine dont la température est fixée.



On suppose que la plaque de la figure ci-dessus est la section d'une tige métallique ; on néglige le flux de chaleur dans la direction perpendiculaire à la plaque. Soient T_1, T_2, T_3, T_4 les températures aux quatre nœuds intérieurs du quadrillage de la figure.

La température en un nœud est à peu près égale à la moyenne des températures aux quatre nœuds voisins directs, au-dessus, à gauche, en-dessous, à droite. On a par exemple :

$$T_1 = \tfrac{1}{4}\big(10 + 20 + T_2 + T_4\big).$$

(a) Écrire un système de quatre équations dont la solution donne l'estimation des températures T_1, T_2, T_3, T_4.

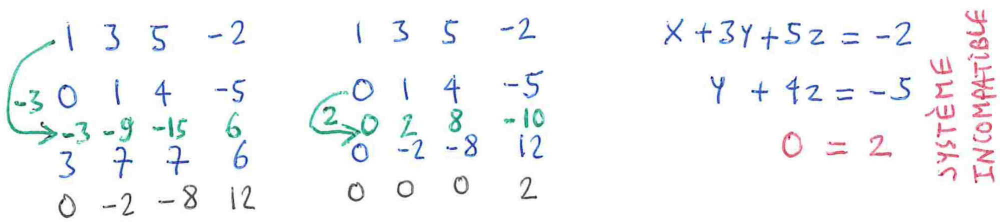
(b) Résoudre ce système linéaire de 4 équations à 4 inconnues. Indication: Appliquer la méthode connue, et vérifier que la solution obtenue est bien une solution du système *initial*. S'il y a des erreurs (il y en a toujours...), recommencer !

Exercice 8. **(a)** Décrire toutes les formes échelonnées possibles d'une matrice 2×2. On utilisera les symboles du cours $\blacksquare$, $*$, $\mathbf{0}$.

(b) Décrire ensuite toutes les formes échelonnées possibles d'une matrice 3×3.

2. Corrigé de l'examen 1

Exercice 1. $(\mathbf{S_1})$ On traduit le système sous forme d'une matrice complète en échangeant directement les lignes $1 \longleftrightarrow 2$, et on calcule à la main joyeusement :

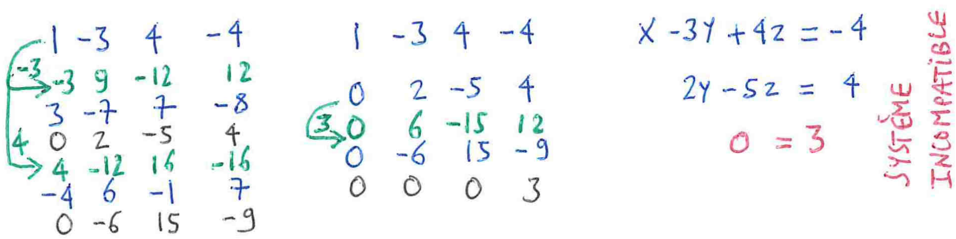


On obtient une matrice sous forme échelonnée de la forme « embêtante » :

$$\begin{array}{cccc} \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare \end{array}$$

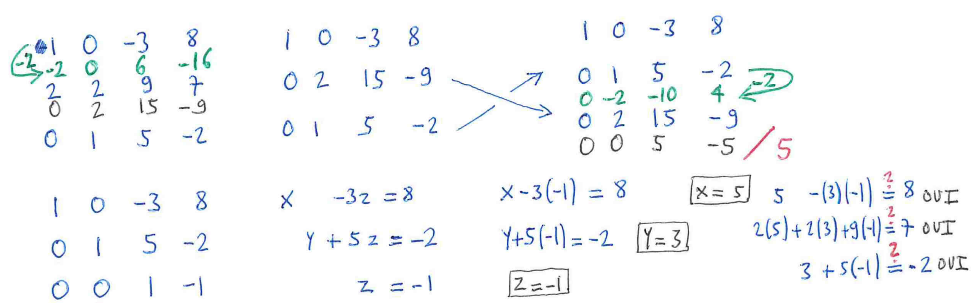
qui est typique d'un système linéaire *incompatible*. Donc ce système n'a aucune solution !

$(\mathbf{S_2})$ De même, on écrit la matrice, et on enclenche les calculs, toujours en utilisant des couleurs.



Aïe-Aïe ! Encore une incompatibilité ! Encore un système qui n'a aucune solution ! On est vraiment mal parti, on n'arrive toujours pas à décoller ! Qu'est-ce qu'il est « *vache* », ce DM [1].

$(\mathbf{S_3})$ Allez, après ces deux « râteaux », reprenons espoir :



Youpi ! Une solution ! Et en plus, elle est esthétique : $(5, 3, 1)$.

$(\mathbf{S_4})$ De même, on trouve une solution unique $(2, -1, 1)$:

1. En fait, c'est le livre de David Lay qui est « *vache* », car on n'a fait ici que suivre ses exercices dans le même ordre . . ..

$$\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array} \; /7$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} x-3(-1)=5 & \boxed{x=2} \\ y+z=0 & \boxed{y=-1} \\ \boxed{z=1} & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 2-3(-1) \overset{?}{=} 5 & \text{OUI} \\ -2+(-1)+5(1) \overset{?}{=} 2 & \text{OUI} \\ -1+1 \overset{?}{=} 0 & \text{OUI} \end{array}$$

Exercice 2. **(a)** Par pivots de Gauss successifs, la matrice du système se réduit à :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 7 & 6 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{bmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{bmatrix},$$

donc la solution générale est :

$$\Big\{(x_1, x_2, x_3) \colon \;\; x_1 = -5 - 3x_2, \quad x_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}, \quad x_3 = 3\Big\}.$$

(b) De même :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 0 & 7 \\ 2 & 7 & 0 & 10 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -9 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

donc la solution générale est :

$$\Big\{(x_1, x_2, x_3) \colon \;\; x_1 = -9, \quad x_2 = 4, \quad x_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\Big\}.$$

(c) À nouveau par pivotations successives :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donc la solution générale est :

$$\Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \colon \;\; x_1 = 5 + 7x_2 - 6x_4, \quad x_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconque},$$
$$x_3 = -3 + 2x_4, \quad x_4 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\Big\}.$$

(d) Toujours avec notre robot industriel (= la main !) de transformation d'une matrice vers une forme échelonnée *réduite*, nous trouvons rapidement :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -6 & 0 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & -6 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 7 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & \boxed{1} & -6 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix},$$

donc la solution générale est :

$$\Big\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\colon\ x_1=-9-7x_2,\quad x_2=2+6x_3+3x_4,\quad x_3\in\mathbb{R}\text{ quelconque},\\ x_4\in\mathbb{R}\text{ quelconque},\quad x_5=0\Big\}.$$

Exercice 3. **(a)** Multiplions la $1^{\text{ère}}$ équation par 2 :

$$2\,x_1+4\,x_2\;=\;2\,a,$$

et soustrayons ce résultat à la $2^{\text{ème}}$ équation :

$$0+(5-4)\,x_2\;=\;b-2\,a,$$

ce qui donne $x_2=-\,2\,a+b$. Remplaçons cette valeur dans la $1^{\text{ère}}$ équation :

$$x_1+2\big(-\,2\,a+b\big)\;=\;a\qquad\Longleftrightarrow\qquad x_1\;=\;a+4\,a-2\,b\;=\;5\,a-2\,b.$$

Enfin, vérifions qu'il s'agit bien d'une solution (unique) au système initial :

$$5\,a-2\,b+\,2\big(-\,2\,a+b\big)\overset{?}{=}a\qquad\text{OUI},$$
$$2\,\big(5\,a-2\,b\big)+5\,\big(-\,2\,a+b\big)\overset{?}{=}b\qquad\text{OUI}.$$

Exercice 4. **(a)** Le point cherché a deux coordonnées (c_1,c_2) qui doivent satisfaire :

$$\begin{aligned} c_1+5\,c_2&=\;\;\,7\\ c_1-2\,c_2&=-\,2\end{aligned}$$

Soustrayons l'équation 2 à l'équation 1 :

$$0+\big(5-(-2)\big)\,c_2\;=\;7-(-2),$$

c'est-à-dire :

$$7\,c_2\;=\;9,$$

donc $c_2=\frac{9}{7}$ — Aïe ! Les fractions, ça fait mal !

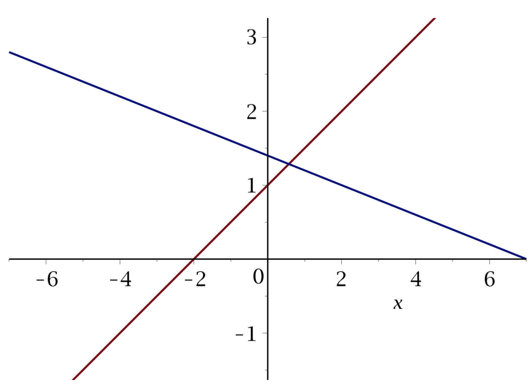
Ensuite, remplaçons dans l'équation 2 :

$$c_1-2\cdot\tfrac{9}{7}\;=\;-\,2\qquad\text{c'est-à-dire}\qquad c_1\;=\;-\,2+\tfrac{18}{7}\;=\;\tfrac{-14+18}{7}\;=\;\tfrac{4}{7}.$$

Enfin, vérifions que nous ne nous sommes pas trompés :

$$\tfrac{4}{7}+5\cdot\tfrac{9}{7}\overset{?}{=}7\;=\;\tfrac{4+45}{7}\;=\;\tfrac{49}{7}\qquad\text{OUI},$$
$$\tfrac{4}{9}-2\cdot\tfrac{9}{7}\overset{?}{=}-\,2\;=\;\tfrac{4-18}{7}\;=\;\tfrac{-14}{7}\qquad\text{OUI}.$$

(b) Voici la figure demandée :



Exercice 5. (A) Pour la première matrice A, on élimine $\mathbf{5}$ et $\mathbf{-3}$ par pivot 'vers le haut' :

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & \mathbf{5} & 0 & 7 \\ 0 & 1 & \mathbf{-3} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{-4} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix},$$

puis on fait de même pour éliminer $\mathbf{-4}$, ce qui donne la forme échelonné *réduite* (unique) de la matrice RER A — terminus Poissy !

(B) Pour la seconde matrice B, on élimine $\mathbf{3}$ par pivot 'vers le bas', puis on divise la quatrième ligne par 5 :

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 1 & 6 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 15 \end{bmatrix},$$

puis on élimine $\mathbf{2}$ de même :

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{2} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6. (a) Ce système s'écrit :

$$\begin{aligned} \blacksquare\, x_1 + *\, x_2 + *\, x_3 &= *, \\ \blacksquare\, x_2 + *\, x_3 &= *, \\ \blacksquare\, x_3 &= *, \end{aligned}$$

d'où en résolvant par le bas :

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{\blacksquare}\big(* - *\, x_2 - *\, x_3\big) = \tfrac{1}{\blacksquare}\big(* - *\, * - *\, *\big) = \tfrac{1}{\blacksquare} * = *, \\ x_2 &= \tfrac{1}{\blacksquare}\big(* - *\, x_3\big) = \tfrac{1}{\blacksquare}\big(* - *\, *\big) = \tfrac{1}{\blacksquare} * = *, \\ x_3 &= \tfrac{1}{\blacksquare} * = *. \end{aligned}$$

Ainsi, le système **(a)** admet une unique solution.

(b) Ce système s'écrit, sans aucune occurrence de x_1 :

$$\begin{aligned} \blacksquare\, x_2 + *\, x_3 + *\, x_4 &= *, \\ \blacksquare\, x_3 + *\, x_4 &= *, \\ \mathbf{0} &= \blacksquare. \end{aligned}$$

Tonnerre de Brest ! Déflagration d'une contradiction fatale ! Aucune solution, mon Capitaine Haddock !

(c) On supprime d'emblée la dernière ligne, car elle est identiquement nulle :

$$\begin{aligned} \blacksquare\, x_1 + *\, x_2 &= *, \\ \blacksquare\, x_2 &= *, \end{aligned}$$

et là, c'est « *super-fastoche* » :

$$\begin{aligned} x_1 &= = \tfrac{1}{\blacksquare}\big(* - *\, x_2\big) = \tfrac{1}{\blacksquare}\big(* - *\, *\big) = \tfrac{1}{\blacksquare} * = *, \\ x_2 &= \tfrac{1}{\blacksquare} * = *. \end{aligned}$$

(d) Ce dernier système s'écrit :

$$
\begin{aligned}
\blacksquare\, x_1 + \ast\; x_2 + \ast\; x_3 + \ast\; x_4 &= \ast, \\
\blacksquare\, x_3 + \ast\; x_4 &= \ast, \\
\blacksquare\, x_4 &= \ast,
\end{aligned}
$$

d'où en résolvant par le bas :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{1}{\blacksquare}\big(\ast - \ast\; x_2 - \ast x_3 - \ast x_4\big) = \tfrac{1}{\blacksquare}\big(\ast - \ast\; x_2 - \ast\;\ast - \ast\;\ast\big) = \tfrac{1}{\blacksquare}\big(\ast + \ast\; x_2\big) = \ast + \ast x_2, \\
x_3 &= \tfrac{1}{\blacksquare}\big(\ast - \ast\; x_4\big) = \tfrac{1}{\blacksquare}\big(\ast - \ast\;\ast\big) = \tfrac{1}{\blacksquare}\ast = \ast, \\
x_4 &= \tfrac{1}{\blacksquare}\ast = \ast.
\end{aligned}
$$

Ainsi, le système **(a)** admet une infinité de solutions, paramétrées par $x_2 \in \mathbb{R}$ quelconque.

Exercice 7. **(a)** Aux quatre nœuds de la plaque thermique, on a :

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \tfrac{1}{4}\big(10 + 20 + T_2 + T_4\big), \\
T_2 &= \tfrac{1}{4}\big(20 + 40 + T_3 + T1\big), \\
T_3 &= \tfrac{1}{4}\big(40 + 30 + T_4 + T_2\big), \\
T_4 &= \tfrac{1}{4}\big(30 + 10 + T_1 + T_3\big),
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire après réorganisation :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
4\,T_1 & - & T_2 & & & - & T_4 & = & 30 \\
-\,T_1 & + & 4\,T_2 & - & T_3 & & & = & 60 \\
 & - & T_2 & + & 4\,T_3 & - & T_4 & = & 70 \\
-\,T_1 & & & - & T_3 & + & 4\,T_4 & = & 40
\end{array}
$$

(b) Après échange des lignes 1 et 4, on écrit la matrice complète du système, puis on applique la méthode des quatre couleurs.

$$
\begin{array}{rrrrr}
-1 & 0 & -1 & 4 & 40 \\
1 & 0 & 1 & -4 & -40 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & 60 \\
0 & 4 & 0 & -4 & 20 \\
0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\
-4 & 0 & -4 & 16 & 160 \\
4 & -1 & 0 & -1 & 30 \\
0 & -1 & -4 & 15 & 190
\end{array}
\qquad -1,\ -4
\qquad\longrightarrow\qquad
\begin{array}{rrrrr}
-1 & 0 & -1 & 4 & 40 \\
0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\
0 & -4 & 16 & -4 & 280 \\
0 & 4 & 0 & -4 & 20 \\
0 & 0 & 16 & -8 & 300 \\
0 & 1 & -4 & 1 & -70 \\
0 & -1 & -4 & 15 & 190 \\
0 & 0 & -8 & 16 & 120
\end{array}
\qquad 4,\ -1
\qquad
\begin{array}{rrrrr}
-1 & 0 & -1 & 4 & 40 \\
0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\
0 & 0 & 16 & -8 & 300 \\
0 & 0 & -8 & 16 & 120
\end{array}
\ \big/2
$$

$$
\begin{array}{rrrrr}
-1 & 0 & -1 & 4 & 40 \\
0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\
0 & 0 & 8 & -4 & 150 \\
0 & 0 & 8 & -4 & 150 \\
0 & 0 & -8 & 16 & 120 \\
0 & 0 & 0 & 12 & 270
\end{array}
\qquad 1
\qquad
\begin{aligned}
-T_1 - 30 + 4\cdot\tfrac{45}{2} &= 40 \\
-T_2 + 4\cdot 30 - \tfrac{45}{2} &= 70 \\
8T_3 - 4\cdot\tfrac{45}{2} &= 150 \\
12\,T_4 &= 270
\end{aligned}
\qquad
\boxed{T_4 = \tfrac{45}{2}}
\quad
\boxed{T_3 = 30}
\quad
\boxed{T_2 = \tfrac{55}{2}}
\quad
\boxed{T_1 = 20}
$$

VÉRIFICATION LAISSÉE AU LECTEUR

Exercice 8. **(a)** Il y en a quatre :

$$
\begin{bmatrix} \blacksquare & \ast \\ \mathbf{0} & \blacksquare \end{bmatrix},
\quad
\begin{bmatrix} \blacksquare & \ast \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},
\quad
\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \blacksquare \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},
\quad
\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.
$$

(b) Il y en a huit, elles sont très belles, et la dynamique est fort amusante, car c'est le **0** rouge qui finit par conquérir tout le territoire (de la notation sur 20 ?) :

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Observons que les quatre dernières matrices peuvent être obtenues à l'aide des quatre matrices trouvées dans la Question **(a)**.

3. Examen 2

Exercice 1. **(a)** Écrire deux systèmes d'équations équivalents aux deux équations vectorielles suivantes :

$$x_1 \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Inversement, écrire une équation vectorielle équivalente aux deux systèmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned} x_2 + 5\,x_3 &= 0 \\ 4\,x_1 + 6\,x_2 - x_3 &= 0 \\ -\,x_1 + 3\,x_2 - 8\,x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} 4\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 &= 9 \\ x_1 - 7\,x_2 - 2\,x_3 &= 2 \\ 8\,x_1 + 6\,x_2 - 5\,x_3 &= 15 \end{aligned}$$

Exercice 2. **(a)** Déterminer si le vecteur $\vec{b}$ est combinaison linéaire des vecteurs formés par les colonnes de la matrice A, où :

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 8 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \vec{b} := \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3. Soit un entier $k \geqslant 1$. On considère k points représentés par des vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ dans l'espace « physique » $\mathbb{R}^3$, et l'on suppose que pour tout indice j compris entre 1 et k, un objet de masse $m_j > 0$ est situé au point $\vec{v}_j$. Les physiciens appellent de tels objets des *points matériels* [à défaut de *points sur* 20]. La masse totale du système de points matériels est :

$$m := m_1 + \cdots + m_k.$$

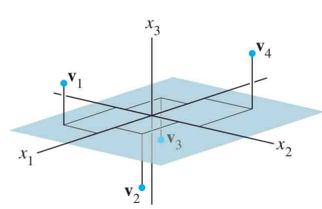
Le *centre de gravité*, ou *centre de masse*, ou *barycentre*, du système, est le point associé au vecteur :

$$\vec{g} := \frac{1}{m}\big(m_1\vec{v}_1 + \cdots + m_k\vec{v}_k\big).$$

(a) Le vecteur $\vec{g}$ appartient-il à l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\big(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\big)$ engendré par les vecteurs $\vec{v}_j$?

(b) Calculer le centre de gravité du système constitué des points matériels suivants.

Point	Masse
$\mathbf{v}_1 = (5, -4, 3)$	2 g
$\mathbf{v}_2 = (4, 3, -2)$	5 g
$\mathbf{v}_3 = (-4, -3, -1)$	2 g
$\mathbf{v}_4 = (-9, 8, 6)$	1 g



Exercice 4. On remarque que $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$.

(a) Avec cette relation, et sans effectuer d'opérations sur les lignes, sans calculer, trouver des scalaires c_1, c_2, c_3 vérifiant l'égalité :

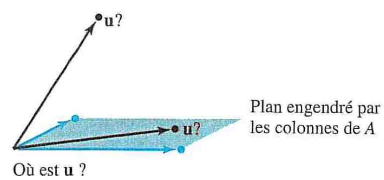
$$\begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 5. Calculer les quatre produits de matrices suivants, ou, si un produit n'est pas défini, expliquer pourquoi :

$$\textbf{(a)}\ \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(b)}\ \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{(c)}\ \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -4 & -3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(d)}\ \begin{bmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6. On pose $\vec{u} := \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $A := \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.



(a) Le vecteur $\vec{u}$ appartient-il au plan de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$ engendré par les colonnes de A ? Pourquoi ?

Exercice 7. On pose $\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, puis $\vec{v}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, et enfin $\vec{v}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(a) L'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ engendre-t-il l'espace vectoriel $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$? Pourquoi ?

Exercice 8. (a) Construire une matrice 3×3 non nulle A telle que le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ soit solution de $A\vec{x} = \vec{0}$.

Exercice 9. On pose $\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, puis $\vec{v}_2 := \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$, et enfin $\vec{y} := \begin{bmatrix} h \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$, où $h \in \mathbb{R}$ est un nombre réel arbitraire.

(a) Déterminer la ou les valeurs de h telles que $\vec{y}$ appartienne au plan vectoriel engendré par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

Exercice 10. On suppose que A est une matrice 4×3, c'est-à-dire avec 4 lignes et 3 colonnes, et que $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$ est un vecteur, tels que l'équation $A\,\vec{x} = \vec{b}$ admet une solution unique.

(a) Que peut-on dire de la forme échelonnée réduite de A ? Justifier la réponse.

4. Corrigé de l'examen 2

Exercice 1. **(a)** Les deux systèmes sont :

$$\begin{aligned} 6\,x_1 - 3\,x_2 &= 1 \\ -\,x_1 + 4\,x_2 &= -7 \\ 5\,x_1 &= -5 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} -\,2\,x_1 + 8\,x_2 + \,x_3 &= 0 \\ 3\,x_1 + 5\,x_2 - 6\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Les deux équations vectorielles sont :

$$x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. **(a)** Ce vecteur $\vec{b}$ est combinaison linéaire des 3 colonnes de cette matrice A si et seulement si il existe $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} x_1 - 4\,x_2 + 2\,x_3 &= 3 \\ 3\,x_2 + 5\,x_3 &= -7 \\ -\,2\,x_1 + 8\,x_2 - 4\,x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues. Cherchons à déterminer s'il y a des solutions en soumettant sa matrice complète à l'algorithme du pivot :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -7 \\ -2 & 8 & -4 & -3 \end{array}\right] \longmapsto \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \end{array}.$$

Immédiatement, la dernière ligne :

$$\mathbf{0}\,x_1 + \mathbf{0}\,x_2 + \mathbf{0}\,x_3 = 3,$$

est impossible, donc ce système est incompatible. En conclusion, le vecteur $\vec{b}$ n'est *pas* combinaison linéaire des vecteurs formés par les colonnes de A.

Exercice 3. **(a)** Soient $k \geqslant 1$ vecteurs quelconques $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$. Soient des masses $m_1 > 0, \dots, m_k > 0$, d'où $m_1 + \cdots + m_k > 0$. Certainement, le vecteur-barycentre :

$$\vec{g} := \frac{m_1 \vec{v}_1 + \cdots + m_k \vec{v}_k}{m_1 + \cdots + m_k},$$

appartient à l'espace vectoriel engendré par $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$:

$$\mathrm{Vect}\,(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) := \Big\{ \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{v}_k \colon \lambda_1 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}, \ \dots, \ \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \Big\},$$

car il correspond aux choix :

$$\lambda_1 := \frac{m_1}{m_1 + \cdots + m_k}, \ \ldots, \ \lambda_k := \frac{m_k}{m_1 + \cdots + m_k}.$$

(b) Le vecteur-centre de gravité demandé est :

$$\begin{aligned}
\vec{g} &:= \frac{1}{2+5+2+1}, \left\{ 2 \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{10} \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{10} \left\{ \begin{pmatrix} 10+20-8-9 \\ -8+15-6+8 \\ 6-10-2+6 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{10} \left\{ \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \begin{pmatrix} 13/10 \\ 9/10 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercice 4. **(a)** Il suffit de lire la multiplication matricielle :

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix},$$

comme signifiant :

$$-3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on trouve :

$$c_1 := -3, \qquad c_2 := -1, \qquad c_3 := 2.$$

Exercice 5. Une matrice M ayant p lignes et q colonnes ne peut être multipliée à droite par une matrice N ayant r lignes et s colonnes :

$$M \cdot N = \mathbf{?},$$

que si $q = r$, et alors, le résultat est une matrice à p lignes et à s colonnes :

$$(p, \underline{q}) \cdot (\underline{r}, s) \longleftrightarrow \underline{q} = \underline{r}.$$

(a) Ici, $(p, q) = (3, \underline{2})$ et $(\underline{3}, 1) = (r, s)$. Comme $\underline{2} \neq \underline{3}$, le produit matriciel n'a pas de sens.

(b) Ici, $(p, q) = (3, \underline{1})$ et $(\underline{2}, 1) = (r, s)$. Comme $\underline{1} \neq \underline{2}$, le produit matriciel n'a pas de sens.

(c) Ici, $(p, q) = (3, \underline{2})$ et $(\underline{2}, 1) = (r, s)$, donc on peut multiplier :

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -4 & -3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) \\ -4 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) \\ 7 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - 15 \\ -8 + 9 \\ 14 - 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

(d) Ici, $(p,q) = (2,\underline{3})$ et $(\underline{3},1) = (r,s)$, donc on peut multiplier :

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\cdot 1 + 3\cdot 1 - 4\cdot 1 \\ 5\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6. **(a)** Le vecteur $\vec{u}$ appartient à l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A si et seulement si il existe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 3\,x_1 - 5\,x_2 &= 0 \\ -\,2\,x_1 + 6\,x_2 &= 4 \\ x_1 + \,x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Pivotons :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 0 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 0 \\ -2 & 6 & 4 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -8 & -12 \\ 0 & 8 & 12 \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array},$$

c'est-à-dire :

$$x_1 = 4 - x_2 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2},$$

$$x_2 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

On vérifie :

$$\begin{aligned} 3\cdot\tfrac{5}{2} - 5\cdot\tfrac{3}{2} &\overset{?}{=} 0 && \text{OUI}, \\ -\,2(\tfrac{5}{2}) + 6(\tfrac{3}{2}) &\overset{?}{=} 4 && \text{OUI}, \\ \tfrac{5}{2} + \quad \tfrac{3}{2} &\overset{?}{=} 4 && \text{OUI}. \end{aligned}$$

En conclusion, $\vec{v}$ appartient bien à l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A.

Exercice 7. **(a)** Tout d'abord, il est clair que $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ ne sont pas colinéaires, donc engendrent un 2-plan vectoriel dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$.

Le vecteur $\vec{v}_3$ est aussi $\neq \vec{0}$. S'il appartenait à Vect $\big(\vec{v}_1, \vec{v}_2\big)$, il existerait $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x_1\,\vec{v}_1 + x_2\,\vec{v}_2 = \vec{v}_3,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}-x_2} &= 1 \\ -\,x_2 &= 0 \\ -\,x_1 \phantom{{}-x_2} &= 0 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Les équations 1 et 3 sont manifestement contradictoires. Donc $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ engendrent un espace vectoriel de dimension 3 dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$.

Question. *Les* 3 *vecteurs* $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ *peuvent-ils engendrer* tout *l'espace vectoriel* $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$ *de dimension* 4 ?

A priori, il semble que *non*, car par exemple de manière analogue, seulement 2 vecteurs dans l'espace vectoriel « physique » $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ semblent ne jamais pouvoir engendrer, embrasser, couvrir plus que 2 dimensions parmi 3.

Maintenant, vérifions cette intuition par le calcul. Un vecteur quelconque de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$ s'écrit $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{smallmatrix}\right)$, avec 4 composantes réelles quelconques $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Si donc les trois vecteurs qui nous ont été donnés $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ devaient engendrer tout l'espace vectoriel $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$, le système linéaire suivant :

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\quad + x_3 &= a_1, \\
- x_2 \qquad\quad &= a_2, \\
- x_1 \qquad\qquad\quad &= a_3, \\
x_2 - x_3 &= a_4,
\end{aligned}
$$

devrait être résoluble (avoir au moins une solution), *quelles que soient les valeurs des constantes* $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$.

En additionnant les lignes 1 et 3 on trouve :

$$x_3 \,=\, a_1 + a_3.$$

En additionnant les lignes 2 et 4 on trouve :

$$-\, x_3 \,=\, a_2 + a_4.$$

En additionnant ces deux équation, on tombe sur une *relation de compatibilité* qui doit nécessairement être satisfaite par a_1, a_2, a_3, a_4 pour que ce système ait au moins une solution :

$$0 \,=\, a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Comme quatre nombres réels quelconques a_1, a_2, a_3, a_4 ne satisfont *pas toujours* cette relation — prendre par exemple $a_1 := 1$, $a_2 := 1$, $a_3 := 1$, $a_4 := 1$ —, nous concluons bien que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ ne peuvent *pas* engendrer $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$.

Exercice 8. (a) Voici une matrice 3×3 telle que $A \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$:

$$A \,:=\, \begin{bmatrix} \frac{\pi}{3} & -\pi & \frac{2\pi}{3} \\ -7 & 2 & 5 \\ -512 & 1024 & -512 \end{bmatrix}.$$

Exercice 9. (a) On a $\vec{y} \in \mathrm{Vect}\big(\vec{v}_1, \vec{v}_2\big)$ si et seulement si il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ x_2 \\ -2x_1 + 8x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Pivotons :

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 8 & -3 \end{bmatrix} \quad\longmapsto\quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -3+2h \end{bmatrix} \quad\longmapsto\quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7+2h \end{bmatrix}.$$

Pour assurer la compatibilité, il faut que $0 = 7 + 2h$, c'est-à-dire $h = -\frac{7}{2}$. Alors :

$$x_2 \,=\, -\,5, \qquad\qquad \text{puis} \qquad\qquad x_1 \,=\, -\,\tfrac{7}{2} - 3(-5) \,=\, -\,\tfrac{37}{2}.$$

Exercice 10. **(a)** Il n'y a qu'une forme échelonnée réduite de A possible pour une matrice A à 4 lignes et 3 colonnes de telle sorte que l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ ait une solution unique :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

la matrice complète du système devant être de la forme :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{array}\right].$$

5. Examen 3

Exercice 1. Soit un paramètre $k \in \mathbb{R}$. On considère le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{aligned} x + 2\,y - \,z &= 1, \\ 2\,x + 4\,y - 2\,z &= 2, \\ -\,x - 2\,y + \,z &= k. \end{aligned}$$

(a) Montrer que le système est incompatible lorsque $k \neq -1$.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions lorsque $k = -1$.

Exercice 2. Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées (x, y), on se donne la droite Δ d'équation cartésienne $5\,x - 7\,y + 11 = 0$, ainsi que la famille de droites $(D_m)_{m \in \mathbb{R}}$ dépendant d'un paramètre $m \in \mathbb{R}$ d'équations :

$$m\,x - y + 3 = 0.$$

(a) Représenter graphiquement les droites D_{-1} et $D_{\frac{1}{2}}$.

(b) Étudier les valeurs de m telles que les droites Δ et D_m soient parallèles, en précisant la situation : parallélisme strict, ou coïncidence.

(c) Lorsque les droites Δ et D_m sont sécantes, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées (x, y), donner les équations paramétriques *et* cartésiennes des droites définies comme suit.

(a) Une droite passant par le point $(0, 4)$ et de pente 3.

(b) Une droite passant par le point $(2, -3)$ et parallèle à l'axe des x.

(c) Une droite passant par le point $(-2, 5)$ et parallèle à la droite d'équation $8\,x + 4\,y = 3$.

Exercice 4. Dans l'espace tridimensionnel $\mathbb{R}^3$, la distance (euclidienne) d'un point quelconque $A_0 = (x_0, y_0, z_0)$ à un plan arbitraire P d'équation cartésienne $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est donné par la formule [admise] :

$$\mathsf{dist}\,\big(A_0, P\big) = \frac{\big|a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d\big|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

(a) Calculer cette distance pour $A_0 = (1, 0, 2)$ et $P = \big\{2\,x + y + z + 4 = 0\big\}$.

(b) Calculer cette distance pour $A_0 = (3, 2, 1)$ et $P = \big\{-\,x + 5\,y - 4\,z - 5 = 0\big\}$.

(c)* Calculer la distance du point $A_0 = (1, 2, 3)$ à la *droite* D d'équations cartésiennes :

$$\begin{aligned} -\,2\,x + y - 3\,z &= 1, \\ x + \,z &= 1. \end{aligned}$$

Exercice 5. Soit $k \in \mathbb{R}$ un paramètre et soit le système linéaire :

$$\begin{aligned} x + \ \ y + 2\,z - \ \ t - \ \ u &= 1, \\ x + \ \ y + \ \ z \qquad\qquad &= 3, \\ 2\,x + 2\,y - \ \ z + 4\,t + 4\,u &= 2, \\ 3\,x + 3\,y + \ \ z - 6\,t - 6\,u &= 93, \\ x + \ \ y \qquad\qquad\qquad &= k. \end{aligned}$$

(a) Montrer qu'il n'y a aucune solution lorsque $k \neq 15$.

(b) Quand $k = 15$, montrer que la solution générale dépend de 2 inconnues réelles libres quelconques, et déterminer explicitement cette solution.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$, on considère la droite D_1 d'équations cartésiennes :

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z+9}{5},$$

et la droite D_2 d'équations paramétriques :

$$x = 7 + 3\,t, \qquad y = 10 + 5\,t, \qquad z = -10 - 6\,t \qquad {\scriptstyle (t \in \mathbb{R})}.$$

(a) Prouver que ces deux droites sont contenues dans un même plan, unique.

(b) Déterminer un système de trois équations paramétriques de ce plan.

(c) Déterminer une équation cartésienne de ce plan.

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$, on considère la famille de plans $(P_m)_{m \in \mathbb{R}}$ paramétrés par $m \in \mathbb{R}$ d'équations cartésiennes :

$$m^2\,x + (2m-1)\,y + m\,z = 3.$$

(a) Trouver tous les paramètres $m \in \mathbb{R}$ tels que P_m contient le point $(1, 1, 1)$.

(b) Trouver tous les paramètres $m \in \mathbb{R}$ tels que le vecteur $\vec{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ -5/2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal (orthogonal) à P_m.

(c) Trouver tous les paramètres $m \in \mathbb{R}$ tels que le vecteur $\vec{w} := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ est un vecteur '*directeur*' de P_m, c'est-à-dire est parallèle à P_m.

(d) Montrer qu'il existe un unique point appartenant à *tous* les plans P_m, $\forall\, m \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$, on se donne les trois points $A := (-1, 6, 7)$, $B := (2, 5, 8)$, $C := (-3, 4, 0)$.

(a) Déterminer un système de 2 équations paramétriques pour le plan P qui passe par ces 3 points.

(b)* Déterminer une équation cartésienne de P.

(c) Déterminer l'intersection de ce plan P avec la droite D d'équations paramétriques :

$$x = -1 + t, \qquad y = 1 - t, \qquad z = 2\,t \qquad {\scriptstyle (t \in \mathbb{R})}.$$

6. Corrigé de l'examen 3

Exercice 1. (a) Soumettons la matrice complète de ce système à la « moulinette » du pivot. Un travail sur la seule colonne 1 suffit :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & k \end{array}\right] \quad\longmapsto\quad \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{array}\right].$$

Ainsi, le système est équivalent à :

$$\begin{aligned} x + 2\,y - \, z &= 1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= k+1. \end{aligned}$$

Clairement, il y a incompatibilité lorsque $k = -1$.

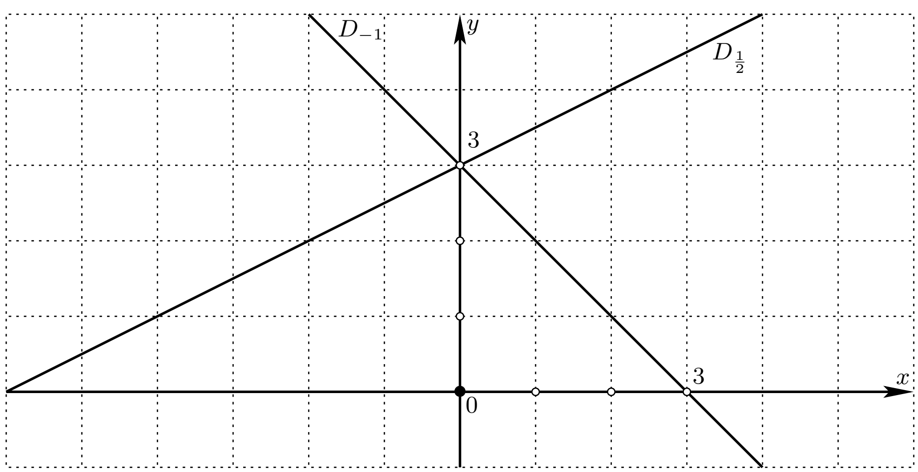
(b) Supposons donc $k = -1$. Le système se réduit à une seule équation :

$$x + 2\,y - z \,=\, 0,$$

donc :

$$\mathsf{Sol} \;=\; \big\{\big(1 - 2y + z,\, y,\, z\big) \colon\; y \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\;\; z \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

Exercice 2. (a) Voici une représentation graphique de $D_{-1} = \big\{x - y + 3 = 0\big\}$ et de $D_{\frac{1}{2}} = \big\{\frac{1}{2}\,x - y + 3 = 0\big\}$:



(b) D'après un théorème du cours, Δ d'équation cartésienne $5\,x - 7\,y + 11 = 0$ et D_m d'équation cartésienne $m\,x - y + 3 = 0$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs :

$$\vec{v}_\Delta \;:=\; \begin{pmatrix} -(-7) \\ 5 \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \vec{v}_{D_m} \;:=\; \begin{pmatrix} -(-1) \\ m \end{pmatrix}$$

sont parallèles, si et seulement si le déterminant de ces deux vecteurs s'annule :

$$0 \;=\; \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & m \end{vmatrix} \;=\; 7\,m - 5,$$

c'est-à-dire ssi :

$$m = \tfrac{5}{7}.$$

Une équation cartésienne équivalente pour $D_{\frac{5}{7}}$ s'obtient en multipliant l'équation par 7 :

$$0 = 7\left(\tfrac{5}{7}x - y + 3\right) = 5x - 7y + 21.$$

Alors $D_{\frac{5}{7}}$ et Δ sont parallèles, mais ne coïncident *pas*, parce que, d'après un autre théorème du cours :

$$\underset{(a',b')\neq(0,0)}{\{a'x + b'y + c' = 0\}} = \underset{(a,b)\neq(0,0)}{\{ax + by + c = 0\}}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \left(\exists\,\lambda \in \mathbb{R}^* \quad a' = \lambda\,a,\ \ b' = \lambda\,b,\ \ c' = \lambda\,c\right),$$

et ici :

$$\{5x - 7y + 21 = 0\} \overset{?}{=} \{5x - 7y + 11 = 0\},$$

entraînerait $\lambda = 1$ à cause des deux premières équations :

$$5 = \lambda\,5, \qquad\qquad -7 = \lambda\,(-7), \qquad\qquad 21 \overset{!}{=} \lambda\,11,$$

et la dernière serait impossible à satisfaire.

En conclusion, Δ et $D_{\frac{5}{7}}$ sont parallèles non confondues.

(c) D'après un théorème du cours, Δ et D_m sont sécantes si et seulement si :

$$0 \neq \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & m \end{vmatrix} = 7m - 5,$$

c'est-à-dire ssi $m \neq \frac{5}{7}$. En effet, résolvons le système linéaire :

$$\begin{aligned} 5x - 7y &= -11, \\ 7\,(mx - y &= -3), \end{aligned} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{aligned} 5x - 7y &= -11, \\ 7mx - 7y &= -21, \end{aligned}$$

puis :

$$(5 - 7m)\,x + \mathbf{0}\,y = -11 - (-21), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x = \frac{10}{5 - 7m},$$

et enfin :

$$y = m\,\frac{10}{5 - 7m} + 3 = \frac{10m + 15 - 21m}{5 - 7m} = \frac{15 - 11m}{5 - 7m}.$$

En conclusion, toujours pour $m \neq \frac{5}{7}$, les deux droites Δ et D_m sont sécantes en le point d'intersection unique :

$$P := \Delta \cap D_m = \left\{\left(\tfrac{10}{5-7m},\ \tfrac{15-11m}{5-7m}\right)\right\} \qquad (m \neq \tfrac{5}{7}).$$

Exercice 3. **(a)** Rappelons qu'une droite graphée dans le plan $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$ a pour équation $y = p\,x + q$, où p est la pente, et q l'ordonnée de son point d'intersection avec l'axe des y vertical.

Instantanément, on trouve l'équation cartésienne $y = 3x + 4$. Une équation paramétrique est alors :

$$x = t, \qquad\qquad y = 3t + 4 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

(b) La pente $p = 0$ étant nulle puisque la droite est horizontale, on trouve aussitôt l'équation cartésienne $y = -3$. Une équation paramétrique est alors :

$$x = t, \qquad\qquad y = -3 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

(c) Il existe une constante c telle que l'équation cartésienne recherchée soit $8x + 4y = c$. Comme le point $(-2, 5)$ doit satisfaire cette équation :

$$8\,(-2) + 4\,(5) = c,$$

on trouve $c = 4$. L'équation cartésienne est donc $8\,x+4\,y = 4$, ou, de manière équivalente, $2\,x+y = 1$. Une équation paramétrique est alors :

$$x \,=\, t, \qquad\qquad y \,=\, -\,2\,t+1 \qquad\qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Exercice 4. (a) C'est une application directe de la formule :

$$\mathsf{dist}\,\big(A_0, P\big) \,=\, \frac{|2\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 2+4|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} \,=\, \frac{8}{\sqrt{6}} \,=\, \frac{4\,\sqrt{6}}{3}.$$

(b) Encore une application directe :

$$\mathsf{dist}\,\big(A_0, P\big) \,=\, \frac{|-1\cdot 3+5\cdot 2-4\cdot 1-5|}{\sqrt{(-1)^2+5^2+(-4)^2}} \,=\, \frac{|-3+10-4-5|}{\sqrt{1+25+16}} \,=\, \frac{2}{\sqrt{42}}.$$

(c)* Tout d'abord, on constate qu'une représentation paramétrique de la droite D en question est :

$$x \,=\, 1-t, \qquad\qquad y \,=\, 3+t, \qquad\qquad z \,=\, t,$$

puisque, en injectant dans ses deux équations cartésiennes, on trouve bien 0 :

$$\begin{aligned}
-\,2\,(1-t)+3+t-3\,(t)-1 &\overset{?}{=} 0 \qquad \text{OUI},\\
1-t \qquad + \quad t-1 &\overset{?}{=} 0 \qquad \text{OUI}.
\end{aligned}$$

Ensuite, avec $M_t := \big(1-t,\,3+t,\,t\big)$, un point variable sur cette droite, la distance au carré de M_t au point $A_0 = (1,2,3)$ vaut :

$$\big|\big|\overrightarrow{A_0M}\big|\big|^2 \,=\, \left|\left|\begin{pmatrix}1-t-1\\3+t-2\\t-3\end{pmatrix}\right|\right|^2 \,=\, (-t)^2+(1+t)^2+(t-3)^2 \,=\, 3\,t^2-4\,t+10.$$

Cherchons à minimiser cette distance en choisissant bien le temps t, cela, en faisant astucieusement apparaître un carré :

$$\begin{aligned}
3\,t^2-4\,t+10 &= 3\,\big(t^2-\tfrac{4}{3}\,t+\tfrac{10}{3}\big)\\
&= 3\,\Big(\big(t-\tfrac{2}{3}\big)^2-\tfrac{2^2}{3^2}+\tfrac{10}{3}\Big)\\
&= 3\,\big(t-\tfrac{2}{3}\big)^2+\tfrac{26}{3},
\end{aligned}$$

donc comme le carré $\big(t-\frac{2}{3}\big)^2$ ne peut être que $\geqslant 0$, afin de minimiser cette somme, il suffit d'annuler ledit carré en choisissant :

$$t \,:=\, \tfrac{2}{3}.$$

En conclusion :

$$\mathsf{dist}\,\big(A_0, D\big) \,=\, \sqrt{\frac{26}{3}}.$$

Exercice 5. **(a)** Soumettons la matrice complète de ce système à l'algorithme du pivot :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & -6 & -6 & 93 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & k \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & -3 & 90 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & k-1 \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -8 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & k-5 \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k-15 \end{array}\right].$$

La ligne 4 peut être supprimée, et nous obtenons un système échelonné :

$$\begin{aligned} \boxed{1}\,x + y + \quad 2\,z - \quad t - u &= 1 \\ \boxed{-1}\,z + \quad t + u &= 2 \\ \boxed{1}\,t + u &= -10 \\ 0 &= k - 15. \end{aligned}$$

Clairement, le système est incompatible lorsque $k \neq 15$.

(b) Quand $k = 15$, après suppression de la dernière ligne, ré-écrivons le système sous la forme d'une matrice, et continuons à appliquer la méthode du pivot jusqu'à atteindre une forme échelonnée réduite :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -10 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -10 \end{array}\right] \end{array},$$

d'où :

$$\mathsf{Sol} = \Big\{ \big(15 - y,\, y,\, -12,\, -10 - u,\, u\big) \colon\ y \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\ u \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \Big\}.$$

Exercice 6. **(a)** Les deux équations cartésiennes de D_1 sont :

$$-\,2\,x - y + 13 \,=\, 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad 5\,x - z - 24 \,=\, 0.$$

Pour intersecter D_1 avec D_2, injectons la représentation paramétrique de D_2 :

$$-\,2\big(7 + 3\,t\big) - 10 - 5\,t + 13 \,=\, 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad 5\,\big(7 + 3\,t\big) - \big(-\,10 - 6\,t\big) - 24 \,=\, 0,$$

c'est-à-dire :

$$-11\,t - 11 \,=\, 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad 21\,t + 21 \,=\, 0,$$

deux équations qui se résolvent en $t = -1$. Ainsi, les deux droites D_1 et D_2 s'intersectent au point correspondant à $t = -1$:

$$P \,:=\, \big(4,\, 5,\, -4\big).$$

On sait que ceci implique que D_1 et D_2 sont contenues dans un même plan de $\mathbb{R}^3$.

(b) Comme vecteur directeur de ce plan, nous pouvons donc prendre deux vecteurs directeurs de D_1 et de D_2.

Pour D_1, on sait qu'une droite représentée sous la forme :

$$\frac{x-x_0}{\alpha} \,=\, \frac{y-y_0}{\beta} \,=\, \frac{z-z_0}{\gamma},$$

avec certaines constantes non nulles $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, a pour vecteur directeur $\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{smallmatrix}\right)$. Donc on peut prendre :

$$\vec{n}_{D_1} \,:=\, \left(\begin{smallmatrix}1\\ -2\\ 5\end{smallmatrix}\right).$$

Par ailleurs, D_2 étant donnée sous forme paramétrique, il est clair que l'on peut prendre :

$$\vec{n}_{D_2} \,:=\, \left(\begin{smallmatrix}3\\ 5\\ -6\end{smallmatrix}\right).$$

Le plan engendré par les deux droites coplanaires D_1 et D_2 peut donc être représenté sous la forme paramétrique :

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \,=\, \begin{pmatrix} 4\\ 5\\ -4\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 5\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 3\\ 5\\ -6\end{pmatrix}.$$

(c) Dans ces équations :

$$\begin{aligned} 2\,\big(x &= 4 + u + 3\,v\big),\\ y &= 5 - 2\,u + 5\,v,\\ z &= -4 + 5\,u - 6\,v,\end{aligned}$$

il suffit d'éliminer u des équations 1 et 2 :

$$2\,x + y \,=\, 13 + 11\,v \qquad \text{d'où :} \qquad v \,=\, \tfrac{2}{11}\,x + \tfrac{1}{11}\,y - \tfrac{13}{11},$$

$$\begin{aligned} \text{puis :} \qquad u &= x - 4 - 3\,v\\ &= x - 4 - 3\left(\tfrac{2}{11}\,x + \tfrac{1}{11}\,y - \tfrac{13}{11}\right)\\ &= \tfrac{5}{11}\,x - \tfrac{3}{11}\,y - \tfrac{5}{11},\end{aligned}$$

et de remplacer dans l'équation 3, ce qui donne :

$$\begin{aligned} z &= -4 + 5\left(\tfrac{5}{11}\,x - \tfrac{3}{11}\,y - \tfrac{5}{11}\right) - 6\left(\tfrac{2}{11}\,x + \tfrac{1}{11}\,y - \tfrac{13}{11}\right)\\ &= \tfrac{13}{11}\,x - \tfrac{21}{11}\,y + \tfrac{9}{11}\end{aligned}$$

ce qui donne l'équation cartésienne demandée :

$$13\,x - 21\,y - 11\,z + 9 \,=\, 0.$$

Exercice 7. **(a)** Le point de coordonnées $(1, 1, 1)$ appartient à P_m si et seulement si :

$$\begin{aligned} 0 &= m^2\,(1) + (2m-1)\,(1) + m\,(1) - 3\\ &= m^2 + 3\,m - 4\\ &= (m-1)\,(m+4),\end{aligned}$$

c'est-à-dire ssi $m = 1$ ou $m = -4$.

(b) D'après le cours, un vecteur normal à un plan donné sous la forme $P = \big\{a\,x + b\,y + c\,z = d\big\}$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est :

$$\vec{n}_P \;:=\; \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right).$$

Pour P_m :

$$\vec{n}_{P_m} \;:=\; \left(\begin{smallmatrix} m^2 \\ 2m-1 \\ m \end{smallmatrix}\right).$$

Alors le vecteur donné $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5/2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à P_m si et seulement si il est colinéaire à $\vec{n}_{P_m}$, ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ avec :

$$\vec{v} \;=\; \lambda\,\vec{n}_{P_m},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 2 \;&=\; \lambda\,m^2, \\ -\tfrac{5}{2} \;&=\; \lambda\,(2\,m-1), \\ -1 \;&=\; \lambda\,m \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad -m \;=\; \lambda\,m^2, \end{aligned}$$

d'où par soustraction des lignes 1 et 3^{bis} :

$$2 - (-m) \;=\; \lambda\,m^2 - \lambda\,m^2 \;=\; 0,$$

et enfin $m = -2$, puis $\lambda = \frac{1}{2}$.

En conclusion, dans la famille $(P_m)_{m \in \mathbb{R}}$, seul le plan P_{-2} est tel que le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5/2 \\ -1 \end{pmatrix}$ lui est orthogonal.

(c) Le vecteur $\vec{w} := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ est parallèle à P_m, ou est un des vecteurs directeur de P_m, si et seulement si :

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \vec{w} \bullet \vec{n}_{P_m} \;&=\; \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \bullet \left(\begin{smallmatrix} m^2 \\ 2m-1 \\ m \end{smallmatrix}\right) \\ &=\; 1 \cdot m^2 + 1 \cdot (2m-1) + 1 \cdot m \\ &=\; m^2 + 3\,m - 1. \end{aligned}$$

On résout alors grâce à la formule des babyloniens :

$$m \;=\; \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Deux plans associés à ces deux valeurs de m conviennent, donc.

(d) Prenons trois plans P_m « au hasard », par exemple pour $m = -1, 0, 1$, et écrivons les trois équations cartésiennes que devrait satisfaire un (hypothétique) point commun à *tous* les P_m :

$$\begin{aligned} x - 3\,y - z \;&=\; 3 \\ -\;y \;&=\; 3 \\ x + y + z \;&=\; 3 \end{aligned}$$

Il vient $y := -3$, puis :

$$\begin{aligned} x - z \;&=\; -6, \\ x + z \;&=\; 6 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} x \;&:=\; 0, \\ z \;&:=\; 6. \end{aligned}$$

Ainsi, on a trouvé un point :

$$Q \;:=\; P_{-1} \cap P_0 \cap P_1 \;=\; \big\{(0, -3, 6)\big\}.$$

Question. *Ce point Q appartient-il à* tous *les plans $(P_m)_{m \in \mathbb{R}}$?*

Oui, car on a bien :

$$3 \overset{?}{=} m^2 \cdot 0 + (2m-1) \cdot (-3) + m \cdot 6 \qquad \text{OUI}.$$

Exercice 8. **(a)** Aux trois points $A = (-1, 6, 7)$, $B = (2, 5, 8)$, $C = (-3, 4, 0)$ sont associés les deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix},$$

qui sont linéairement indépendants, puisqu'ils ne sont (visiblement) pas multiples l'un de l'autre.

D'après une définition du cours, le plan passant par A, B, C est représenté paramétriquement comme :

$$P := \big\{ A + u\,\overrightarrow{AB} + v\,\overrightarrow{AC} \colon\; u \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\; v \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \big\},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix},$$

d'où :

$$\begin{aligned} x &= -1 + 3\,u - 2\,v, \\ y &= 6 - u - 2\,v, \\ z &= 7 + u - 7\,v. \end{aligned}$$

(b)* Encore d'après un théorème du cours, une équation cartésienne du plan P s'obtient en éliminant u et v à partir de 2 équations parmi 3, et en remplaçant le résultat obtenu dans la 3$^{\text{ième}}$ équation.

Écrivons donc les deux équations 1 et 2 sous la forme :

$$\begin{aligned} 3\,u - 2\,v &= 1 + x, \\ u + 2\,v &= 6 - y, \end{aligned}$$

d'où :

$$4\,u = 7 + x - y, \qquad\qquad u = \tfrac{7}{4} + \tfrac{1}{4}\,x - \tfrac{1}{4}\,y,$$

puis :

$$2\,v = 6 - y - u = 6 - y - \tfrac{7}{4} - \tfrac{1}{4}\,x + \tfrac{1}{4}\,y = \tfrac{17}{4} - \tfrac{1}{4}\,x - \tfrac{3}{4}\,y,$$

et enfin, remplaçons dans l'équation 3 :

$$\begin{aligned} z &= 7 + \tfrac{7}{4} + \tfrac{1}{4}\,x - \tfrac{1}{4}\,y - 7\left(\tfrac{17}{8} - \tfrac{1}{8}\,x - \tfrac{3}{8}\,y\right) \\ &= \tfrac{56+14-119}{8} + \tfrac{2+7}{8}\,x + \tfrac{-2+21}{8}\,y \\ &= -\tfrac{49}{8} + \tfrac{9}{8}\,x + \tfrac{19}{8}\,y. \end{aligned}$$

Donc l'équation cartésienne demandée est :

$$9\,x + 19\,y - 8\,z - 49 = 0.$$

Comme si nous étions en examen, vérifions que nos trois points A, B, C satisfont bien cette équation cartésienne :

$$\begin{aligned} 0 &\overset{?}{=} 9\,(-1) + 19\,(6) - 8\,(7) - 49 = -9 + 114 - 56 - 49 = 0 \qquad \text{OUI}, \\ 0 &\overset{?}{=} 9\,(2) + 19\,(5) - 8\,(8) - 49 = 18 + 95 - 64 - 49 = 0 \qquad \text{OUI}, \\ 0 &\overset{?}{=} 9\,(-3) + 19\,(4) - 8\,(0) - 49 = -27 + 76 - 0 - 49 = 0 \qquad \text{OUI}. \end{aligned}$$

(c) C'est très simple : il suffit d'injecter la représentation paramétrique dans l'équation cartésienne :

$$\begin{aligned} 0 &= 9\,x + 19\,y - 8\,z - 49 \\ &= 9\,(-1 + t) + 19\,(1 - t) - 8\,(2\,t) - 49 \\ &= -9 + 19 - 49 + t\,\big(9 - 19 - 16\big) \\ &= -39 - 26\,t, \end{aligned}$$

d'où :

$$t := \frac{39}{-26} = -\frac{3}{2}.$$

Le point d'intersection entre cette droite et notre plan a donc pour coordonnées :

$$x = -1 - \tfrac{3}{2} = -\tfrac{5}{2}, \qquad y = 1 + \tfrac{3}{2} = \tfrac{5}{2}, \qquad z = -3.$$

7. Examen 4

Exercice 1. **(a)** Résoudre le système linéaire :

$$\begin{aligned} 2\,x \qquad - 6\,z &= -8 \\ y + 2\,z &= \ \ 3 \\ 3\,x + 6\,y - 2\,z &= -4. \end{aligned}$$

Exercice 2. **(a)** Résoudre le système linéaire :

$$\begin{aligned} x - 5\,y + 4\,z &= -\,3 \\ 2\,x - 7\,y + 3\,z &= -\,2 \\ -\,2\,x + \ \ y + 7\,z &= -\,1 \end{aligned}$$

Indication: On rappelle qu'un système linéaire à un nombre quelconque $n \geqslant 1$ de variables avec un nombre quelconque $m \geqslant 1$ d'équations, ou bien n'a aucune solution (cela arrive !), ou bien a une solution unique, ou bien a une infinité de solutions.

Exercice 3. **(a)** Sans nécessairement en effectuer la résolution complète, étudier la compatibilité du système linéaire suivant de 4 équations à 4 inconnues :

$$\begin{aligned} x - \ 6\,y \qquad\qquad &= 5 \\ y - 4\,z + \ \ t &= 0 \\ -\,x + \ 6\,y + \ \ z + 5\,t &= 3 \\ -\,y + 5\,z + 4\,t &= 0 \end{aligned}$$

(b) Appliquer la méthode systématique de création de zéros **0** rouges, et confirmer par une autre voie la réponse à la question **(a)** précédente.

Exercice 4. **(a)** On considère le système linéaire suivant, de 2 équations (seulement) à 3 inconnues :

$$\begin{aligned} x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 &= 7 \\ 3\,x_1 + 9\,x_2 + 7\,x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Montre que l'espace, Sol, de ses solutions, est :

$$\mathsf{Sol} \,=\, \big\{\big(-\,5 - 3\,x_2,\ x_2,\ 3\big) :\ x_2 \in \mathbb{R}\ \text{quelconque}\big\}.$$

Combien y a-t-il de solutions ?

(b) Effectuer une vérification soignée du fait que Sol est bien solution du système initial.

Exercice 5. **(a)** On considère le système linéaire suivant, de 2 équations (seulement) à 3 inconnues :

$$\begin{aligned} x_2 - 2\,x_3 &= \ \ \ 3 \\ x_1 - 3\,x_2 + 4\,x_3 &= -\,6 \end{aligned}$$

Déterminer (sans aide) l'espace Sol de ses solutions.

(b) Vérifier soigneusement que les solutions trouvées sont bien solutions du système initial.

Exercice 6. **(a)** On donne le système linéaire suivant de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{aligned} 3\,x_1 - 2\,x_2 + \ \ 4\,x_3 &= 0 \\ 9\,x_1 - 6\,x_2 + 12\,x_3 &= 0 \\ 6\,x_1 - 4\,x_2 + \ \ 8\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Montrer que l'espace Sol de ses solutions est :

$$\begin{aligned} \mathsf{Sol} &= \big\{\big(\tfrac{2}{3}\,x_2 - \tfrac{4}{3}\,x_3,\ x_2,\ x_3\big) \colon\ x_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\ x_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\} \\ &= \big\{\big(x_1,\ \tfrac{3}{2}\,x_1 + 2\,x_3,\ x_3\big) \colon\ x_1 \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\ x_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\} \\ &= \big\{\big(x_1,\ x_2,\ -\tfrac{3}{4}\,x_1 + \tfrac{1}{2}\,x_2\big) \colon\ x_1 \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\ x_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}. \end{aligned}$$

(b) Pourquoi peut-on représenter Sol de 3 manières différentes ? Pourquoi ces 3 manières sont-elles équivalentes ?

Exercice 7. On suppose que a, b, c, d sont des constantes réelles telles que $a \neq 0$, et on considère le système linéaire général suivant, de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{aligned} a\,x_1 + b\,x_2 &= f \\ c\,x_1 + d\,x_2 &= g \end{aligned}$$

où f, g sont aussi des constantes réelles.

(a) Montrer que ce système linéaire est équivalent au système :

$$\begin{aligned} a\,x_1 + \qquad\qquad b\,x_2 &= \qquad f \\ \big(d - \tfrac{c\,b}{a}\big)\,x_2 &= g - \tfrac{c\,f}{a} \end{aligned}$$

Indication: Multiplier par $\frac{1}{a}$ la ligne 1 afin de faire apparaître un coefficient 1 dans l'équation $1 \cdot x_1 + \frac{b}{a}\,x_2 = \frac{f}{a}$. Ensuite, remultiplier cette équation par un coefficient approprié afin de faire fonctionner la (super !) méthode de création de **0**, c'est-à-dire, afin de remplacer, à la ligne en-dessous, le terme $c \cdot x_1$ par $\mathbf{0} \cdot x_1$.

(b) On suppose $d - \frac{c\,b}{a} \neq 0$. Montrer que le système linéaire considéré possède alors la solution *unique :*

$$x_1 = \frac{f\,d - g\,b}{a\,d - b\,c}, \qquad\qquad x_2 = \frac{a\,g - c\,f}{a\,d - b\,c}.$$

Ensuite, vérifier scrupuleusement que cette solution est *bien* solution du sytème initial.

(c) On s'intéresse ensuite au cas où $d - \frac{c\,b}{a} = 0$. Dans le sous-cas où $g - \frac{c\,f}{a} \neq 0$, vérifier que le système est *incompatible*, c'est-à-dire n'a *aucune* solution.

(d) Enfin, toujours dans le cas où $d - \frac{c\,b}{a} = 0$, on suppose que $g - \frac{c\,f}{a} = 0$, ce qui est la dernière possibilité à étudier. Montrer que l'espace Sol des solutions du systèmes est infini, et, plus précisément, montrer que :

$$\mathsf{Sol} = \big\{\big(\tfrac{f}{a} - \tfrac{b}{a}\,x_2,\ x_2\big) \colon\ x_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

Exercice 8. **(a)** Comment comprendre *mathématiquement* la réaction chimique suivante :

$$15 \cdot \mathsf{Pb\,N_6} + 44 \cdot \mathsf{Cr\,Mn_2\,O_8} \ \longmapsto\ 5 \cdot \mathsf{Pb_3\,O_4} + 22 \cdot \mathsf{Cr_2\,O_3} + 88 \cdot \mathsf{Mn\,O_2} + 90 \cdot \mathsf{N\,O} \ \ \textbf{?}$$

8. Corrigé de l'examen 4

Exercice 1. **(a)** Commençons par écrire la matrice complète de ce système linéaire, en divisant *directement* sa première ligne par 2 :

$$\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & -2 & -4 \end{array}$$

Juste en-dessous du $\boxed{1}$ encadré, il y a déjà un $0 = \mathbf{0}$: *good*. Mais encore en-dessous, il y a un 3, *à éliminer*.

Pour éliminer ce 3, espaçons davantage les lignes 2 et 3 afin de créer une ligne vide supplémentaire, multiplions la ligne 1 par par -3, écrivons le résultat en vert dans la ligne vide, additionnons-la avec la ligne 3 :

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ {\scriptstyle -3} & {\scriptstyle -0} & {\scriptstyle 9} & {\scriptstyle 12} \\ 3 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \end{array} \qquad \longmapsto \qquad \begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & -3 & -4 \\ \mathbf{0} & \boxed{1} & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

et enfin, recopions les lignes 1 et 2 non touchées, ainsi que la nouvelle ligne 3.

En position $(2, 2)$, c'est-à-dire à la ligne 2, colonne 2, utilisons le nouveau $\boxed{1}$ afin d'éliminer le 6 qui se trouve juste en-dessous de lui, ce, en multipliant la ligne 2 par -6, en recopiant le résultat au-dessus de la ligne 3 — après avoir ménagé un espacement vertical supplémentaire — puis en additionnant, et enfin, recopions les trois lignes obtenues :

$$\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & -3 & -4 \\ \mathbf{0} & \boxed{1} & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & 6 & 7 & 8 \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -3 & -4 \\ \mathbf{0} & \boxed{1} & 2 & 3 \\ {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle -6} & {\scriptstyle -12} & {\scriptstyle -18} \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & -3 & -4 \\ \mathbf{0} & \boxed{1} & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -5 & -10 \end{array}$$

Profitons du fait que les coefficients de la dernière ligne sont tous multiples de 5, et même, de -5, pour la diviser par -5 :

$$\begin{array}{cccc} {\scriptstyle x} & {\scriptstyle y} & {\scriptstyle z} & \\ \boxed{1} & 0 & -3 & -4 \\ \mathbf{0} & \boxed{1} & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{1} & 2 \end{array}$$

À ce stade, un premier « escalier inférieur » de zéros rouges $\mathbf{0}$ est achevé. Deux options s'offrent alors à nous.

Première option : Refaire apparaître les variables x, y, z qui existaient, telles des « *lettres fantomatiques* » dans les matrices précédentes, écrire le système — équivalent ! — obtenu :

$$\begin{aligned} x \quad - 3\,z &= -4 \\ y + 2\,z &= 3 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

et le résoudre pas à pas en partant du bas :

$$x - 3(2) = -4 \iff \boxed{x = 2}$$

$$y + 2(2) = 3 \iff \boxed{y = -1}$$

$$\boxed{z = 2}$$

Deuxième option : Continuer d'appliquer la méthode de créations de zéros rouges $\mathbf{0}$, mais en remontant « comme des saumons » du bas-droite vers le haut-gauche, afin de créer un deuxième « escalier supérieur » de zéros rouges $\mathbf{0}$.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ \mathbf{0} & 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{1} & 2 \end{array}$$

Pour cela, nous devons nous servir du dernier $\boxed{1}$ en bas à droite, afin d'éliminer le 2 et le -3 qui se situent au-dessus de lui, en créant des lignes supplémentaires, en écrivant en vert[2] les multiplications par -2 et par 3 de la ligne 3, en additionnant vers le haut, puis en recopiant le résultat :

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \mathbf{0} & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \\ {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 6} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle -2} & {\scriptstyle -4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{1} & 2 \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \mathbf{0} & 2 \\ \mathbf{0} & \boxed{1} & \mathbf{0} & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 2 \end{array}$$

et comme le nombre au-dessus du $\boxed{1}$ en position $(2, 2)$ est *déjà égal à* $0 = \mathbf{0}$, il n'y a plus de travail à effectuer.

En effet, si nous réveillons les variables fantômes x, y, z en les faisant apparaître au-dessus de la matrice du système équivalent obtenu :

$$\begin{array}{cccc} {\scriptstyle x} & {\scriptstyle y} & {\scriptstyle z} & \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2 \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 2 \end{array}$$

nous pouvons aisément ré-écrire explicitement le sytème final :

et là, ô miracle, les valeurs de x, y, z sont immédiatement visibles !

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -1 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \textit{Quelle que soit la technique choisie, il faut toujours impérativement vérifier} \\ \textit{que les solutions obtenues sont bien des solutions du système initial} \end{array}}$$

2. On remarquera que maintenant, les lignes vertes sont écrites *en-dessous*, et que l'addition se fait *vers le haut*.

Alors, de peur de perdre des points aux examens (partiel ou terminal), effectuons une vérification rassurante :

$$
\begin{array}{rcll}
2(2) \qquad\qquad - 6(2) & \overset{?}{=} & -8 & \text{OUI,} \\
1\,(-1) + 2\,(2) & \overset{?}{=} & 3 & \text{OUI,} \\
3\,(2) + 6(-1) - 2\,(2) & \overset{?}{=} & -4 & \text{OUI.}
\end{array}
$$

Exercice 2. (a) On écrit la matrice complète du système, et, avec des couleurs, on applique la méthode de création de zéros **0** en première colonne :

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
\boxed{1} & -5 & 4 & -3 \\
2 & -7 & 3 & -2 \\
-2 & 1 & 7 & -1
\end{array}\right)
\longmapsto
\left(\begin{array}{ccc|c}
\boxed{1} & -5 & 4 & -3 \\
-2 & 10 & -8 & 6 \\
2 & -7 & 3 & -2 \\
0 & 3 & -5 & 4 \\
2 & -10 & 8 & -6 \\
-2 & 1 & 7 & -1 \\
0 & -9 & 15 & -7
\end{array}\right)
\longmapsto
\left(\begin{array}{ccc|c}
\boxed{1} & -5 & 4 & -3 \\
\mathbf{0} & 3 & -5 & 4 \\
\mathbf{0} & -9 & 15 & -7
\end{array}\right)
$$

Ensuite, on ajoute 3 fois la deuxième ligne à la troisième :

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -5 & 4 & -3 \\
\mathbf{0} & 3 & -5 & 4 \\
0 & -9 & -15 & 12 \\
\mathbf{0} & -9 & 15 & -7 \\
0 & 0 & 0 & 5
\end{array}\right)
\longmapsto
\begin{array}{ccc|c}
x & y & z & \\
\boxed{1} & -5 & 4 & -3 \\
\mathbf{0} & 3 & -5 & 4 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 5
\end{array}
$$

et en réveillant les variables cachées x, y, z, on constate que la dernière ligne du système — équivalent ! — obtenu :

$$
\mathbf{0} \cdot x + \mathbf{0} \cdot y + \mathbf{0} \cdot z \;=\; 0 \overset{!}{=} 5,
$$

est formellement interdite par les mathématiques !

Donc le système est *incompatible*, *id est* — *cela est*, en Latin, synonyme de *c'est-à-dire* — n'a *aucune* solution.

Exercice 3. (a) Nous allons constater que le système est incompatible. Écrivons sa matrice complète, en indiquant au-dessus de lui les variables fantomatiques x, y, z, t, et en indiquant à droite les 4 lignes (L_1), (L_2), (L_3), (L_4) :

$$
\begin{array}{ccccc l}
x & y & z & t & & \\
1 & -6 & 0 & 0 & 5 & (L_1) \\
0 & 1 & -4 & 1 & 0 & (L_2) \\
-1 & 6 & 1 & 5 & 3 & (L_3) \\
0 & -1 & 5 & 4 & 0 & (L_4)
\end{array}
$$

L'idée-astuce est de ne pas appliquer « bêtement » la méthode de création de zéros **0** rouges, ce qui pourrait occasionner du travail.

En effet, dans ce système, on observe des similitudes entre les lignes 1 et 3, ainsi qu'entre les lignes 2 et 4, et donc, on est tenté de remplacer la ligne (L_4) par la ligne $(L_4 + L_2) =: (L_4')$:

$$
\begin{array}{ccccc l}
1 & -6 & 0 & 0 & 5 & (L_1) \\
0 & 1 & -4 & 1 & 0 & (L_2) \\
-1 & 6 & 1 & 5 & 3 & (L_3) \\
0 & -1 & 5 & 4 & 0 & (L_4)
\end{array}
\longmapsto
\begin{array}{c ccccc l}
(L_1) & 1 & -6 & 0 & 0 & 5 & \\
(L_2) & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & \\
(L_3) & -1 & 6 & 1 & 5 & 3 & \\
(L_4 + L_2) & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & (L_4')
\end{array}
$$

Ensuite, recopions cette matrice, et remplaçons la ligne (L_3) par $(L_3 - L_4') =: (L_3')$:

$$
\begin{array}{lccccc}
(L_1) & 1 & -6 & 0 & 0 & 5 \\
(L_2) & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\
(L_3) & -1 & 6 & 1 & 5 & 3 \\
(L_4') & 0 & 0 & 1 & 5 & 0
\end{array}
\longmapsto
\begin{array}{cccccccl}
(L_1) & 1 & -6 & 0 & 0 & & 5 & \\
(L_2) & 0 & 1 & -4 & 1 & c & 0 & \\
(L_3 - L_4') & -1 & 6 & 0 & 0 & & 3 & (L_3') \\
(L_4') & 0 & 0 & 1 & 5 & & 0 &
\end{array}
$$

Enfin recopions, puis additionnons la ligne (L_3') à la ligne (L_1), *sans même considérer les autres lignes :*

$$
\begin{array}{lccccc}
(L_1) & 1 & -6 & 0 & 0 & 5 \\
(L_2) & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\
(L_3') & -1 & 6 & 0 & 0 & 3 \\
(L_4') & 0 & 0 & 1 & 5 & 0
\end{array}
\longmapsto
\begin{array}{cccccc}
 & x & y & z & t & \\
(L_1 + L_3') & 0 & 0 & 0 & 0 & 8
\end{array}
$$

ce qui donne une équation :

$$
0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot t \ = \ 0 \ \overset{!}{=} \ 8,
$$

parfaitement *impossible* en mathématiques.

En conclusion, le système est *incompatible*, il n'a *aucune solution*.

(b) Résumons les calculs comme suit, en encadrant le nombre dont nous nous servons pour créer des zéros **0** rouges *en-dessous* de lui (on peut d'ailleurs suivre les calculs « de tête », sans même écrire les lignes vertes intercalaires) :

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
\boxed{1} & -6 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\
-1 & 6 & 1 & 5 & 3 \\
0 & -1 & 5 & 4 & 0
\end{array}\right)
\longmapsto
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -6 & 0 & 0 & 5 \\
\mathbf{0} & \boxed{1} & -4 & 1 & 0 \\
\mathbf{0} & 0 & 1 & 5 & 8 \\
\mathbf{0} & -1 & 5 & 4 & 0
\end{array}\right)
\longmapsto
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -6 & 0 & 0 & 5 \\
\mathbf{0} & 1 & -4 & 1 & 0 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{1} & 5 & 8 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 5 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\longmapsto
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -6 & 0 & 0 & 5 \\
\mathbf{0} & 1 & -4 & 1 & 0 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 5 & 8 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{0} & -8
\end{array}\right)
$$

Mais alors — *Mézalor* —, en faisant ré-apparaître les variables temporairement masquées x, y, z, t, nous constatons de manière similaire que la dernière ligne :

$$
\mathbf{0} \cdot x + \mathbf{0} \cdot y + \mathbf{0} \cdot z + \boxed{0} \cdot t \ = \ 0 \ \overset{!}{=} \ -8,
$$

exprime une équation parfaitement *impossible* en mathématiques, ce qui confirme, par une autre voie, l'incompatibilité du système déjà constatée en **(a)**.

A priori, dans un « bon escalier de **0** honnêtes », *le zéro encadré « en plus »* $\boxed{0}$ *ne devrait pas exister*, il devrait être un nombre réel non nul, et alors, on pourrait résoudre la variable t, puis, en remontant comme des saumons, résoudre z, puis y, puis x.

Or dans la vie, certaines fois, les choses ne se passent pas toujours de la manière la plus simple qui soit… Donc il est tout à fait possible que de tels zéros encadrés $\boxed{0}$ turbulents et intempestifs existent.

Nous verrons d'ailleurs plus tard dans la théorie générale que ces zéros *supplémentaires* $\boxed{0}$ sont la cause principale d'incompatibilité pour certains systèmes linéaires.

Exercice 4. **(a)** Soustrayons 3 fois la ligne 1 à la ligne 2, en écrivant toujours la ligne 1 :

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 &= 7 \\
-\,5\,x_3 &= -15
\end{aligned}
$$

Si la lecture simple de la deuxième ligne ne suffit pas pour la compréhension, le lecteur-étudiant est invité à *ajouter lui-même* avec un stylo vert la ligne intermédiaire égale à -3 fois la première ligne, directement sur le corrigé imprimé, afin de faire l'addition.

Une fois cette (unique) opération effectuée, le travail est presque terminé. Pourquoi ? Parce que l'on peut constater qu'il y a 2 variables que l'on peut simplement résoudre à partir de ces 2 équations :

$$\begin{aligned} \boxed{x_1} + 3\,x_2 + \quad 4\,x_3 &= \quad 7 \\ -\,5\,\boxed{x_3} &= -15 \end{aligned}$$

sans aucune interférence entre les deux équations, tandis que la variable x_2 n'intervient pas du tout. En un certain sens, elle est « *libre et invisible* », comme les électrons.

Donc si on résout les deux variables encadrées x_3 puis x_1 en commençant par le bas :

$$x_1 \;=\; 7 - 3\,x_2 - 4(3) \;=\; -\,5 - 3\,x_2,$$

$$x_3 \;=\; 3,$$

on est certain que les deux équations du système sont satisfaites, quelle que soit la valeur de $x_2 \in \mathbb{R}$, d'ailleurs.

En conclusion, on a bien démontré que :

$$\mathsf{Sol} \;=\; \big\{\big(-\;5 - 3\,x_2,\;\; x_2,\;\; 3\big):\;\; x_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

Et clairement, il y a une infinité de solutions, puisque la variable x_3 dans Sol est libre, et puisqu'il y a une infinité de nombres réels $x_3 \in \mathbb{R}$.

(b) Certes, nous avons trouvé des solutions, mais-mais-mais … nous nous sommes peut-être trompés … et donc, une vérification s'impose, en remplaçant les solutions obtenues dans le système initial :

$$\begin{aligned} \big(-\;5 - 3\,x_2\big) + 3\,x_2 + 4\,(3) &\overset{?}{=} 7 \qquad \text{OUI}, \\ 3\,\big(-\;5 - 3\,x_2\big) + 9\,x_2 + 7(3) &\overset{?}{=} 6 \qquad \text{OUI}. \end{aligned}$$

Exercice 5. **(a)** C'est facile ! En partant du système dans lequel on encadre les deux variables x_1 et x_2 :

$$\begin{aligned} \boxed{x_2} - 2\,x_3 &= \quad 3 \\ \boxed{x_1} - 3\,x_2 + 4\,x_3 &= -\,6 \end{aligned}$$

on peut résoudre directement tout d'abord :

$$x_2 \;=\; 3 + 2\,x_3,$$

puis, après remplacement de la valeur de x_2 dans la deuxième équation :

$$\begin{aligned} x_1 &= -\,6 + 3\,x_2 - 4\,x_3 \\ &= -\,6 + 3\,\big(3 + 2\,x_3\big) - 4\,x_3 \\ &= -\,6 + 9 + 6\,x_3 - 4\,x_3 \\ &= 3 + 2\,x_3. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathsf{Sol} \;=\; \big\{\big(3 + 2\,x_3,\, 3 + 2\,x_3,\, x_3\big):\;\; x_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

(b) Effectuons donc une vérification, en partie par calcul mental :

$$\begin{aligned} \big(3 + 2\,x_3\big) - 2\,x_3 &\overset{?}{=} 3 \qquad \text{OUI}, \\ \big(3 + 2\,x_3\big) - 3\,\big(3 + 2\,x_3\big) + 4\,x_3 &\overset{?}{=} -\,6 \qquad \text{OUI}. \end{aligned}$$

Exercice 6. **(a)** Si on donne un nom à ces 3 équations :

$$\begin{aligned} &(E_1) \qquad 3\,x_1 - 2\,x_2 + \ \ 4\,x_3 \,=\, 0 \\ &(E_2) \qquad 9\,x_1 - 6\,x_2 + 12\,x_3 \,=\, 0 \\ &(E_3) \qquad 6\,x_1 - 4\,x_2 + \ \ 8\,x_3 \,=\, 0 \end{aligned}$$

le point-clé est d'observer que (E_2) et (E_3) sont redondantes par rapport à (E_1), car :

$$\begin{aligned} (E_1) &= (E_1), \\ (E_2) &= 3\,(E_1), \\ (E_3) &= 2\,(E_1), \end{aligned}$$

et donc, le système se réduit à 1 équation unique et non pas 3 équations :

$$(E_1) \qquad 3\,x_1 - 2\,x_2 + 4\,x_3 \,=\, 0.$$

Comme il n'y a qu'une seule équation, et 3 variables x_1, x_2, x_3, dont les 3 coefficients 3, -2, 4 sont non nuls, on peut faire 3 choix de résolution différents.

☐ Résoudre x_1 :

$$3\,\boxed{x_1} - 2\,x_2 + 4\,x_3 \,=\, 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 \,=\, \tfrac{2}{3}\,x_2 - \tfrac{4}{3}\,x_3,$$

d'où : $\mathsf{Sol} \,=\, \big\{\big(\tfrac{2}{3}\,x_2 - \tfrac{4}{3}\,x_3,\ x_2,\ x_3\big) \colon\ x_2,\, x_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconques}\big\}.$

☐ Résoudre x_2 :

$$3\,x_1 - 2\,\boxed{x_2} + 4\,x_3 \,=\, 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_2 \,=\, \tfrac{3}{2}\,x_1 + 2\,x_3,$$

d'où : $\mathsf{Sol} \,=\, \big\{\big(x_1,\ \tfrac{3}{2}\,x_1 + 2\,x_3,\ x_3\big) \colon\ x_1,\, x_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconques}\big\}.$

☐ Résoudre x_3 :

$$3\,x_1 - 2\,x_2 + 4\,\boxed{x_3} \,=\, 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_3 \,=\, -\,\tfrac{3}{4}\,x_1 + \tfrac{1}{2}\,x_3,$$

d'où : $\mathsf{Sol} \,=\, \big\{\big(x_1,\ x_2,\ -\,\tfrac{3}{4}\,x_1 + \tfrac{1}{2}\,x_2\big) \colon\ x_1,\, x_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconques}\big\}.$

(b) Nous venons d'expliquer qu'on pouvait résoudre ou bien x_1, ou bien x_2, ou bien x_3, *parce que* leurs coefficients respectifs, 3, -2, 4, dans l'unique équation restante (E_1), sont tous différents de zéro.

Ces trois représentations de Sol sont bien équivalentes, pour des raisons purement *logiques*, *parce que* chacune d'entre elles satisfait l'unique équation (E_1) du 'système'.

On peut d'ailleurs vérifier directement par le calcul les équivalences entre ces trois représentations de Sol, par exemple, l'équivalence entre la première représentation et la deuxième représentation :

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{2}{3}\,\boxed{x_2} - \tfrac{4}{3}\,x_3, \\ x_2 &= x_2, \\ x_3 &= x_3, \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1, \\ \boxed{x_2} &= \tfrac{3}{2}\,x_1 + 2\,x_3 \\ x_3 &= x_3. \end{aligned}$$

Exercice 7. **(a)** L'indication était parfaite ! Effectivement, on multiplie par c la première équation multipliée par $\frac{1}{a}$:

$$c\,\big(\,x_1 + \tfrac{b}{a}\,x_2 \,=\, \tfrac{f}{a}\,\big)$$

ce qui donne :

$$c\,x_1 + \tfrac{c\,b}{a}\,x_2 \,=\, \tfrac{f}{a},$$

et on soustrait cela à la deuxième ligne, ce qui donne bien, en recopiant aussi la première ligne :

$$\begin{aligned} a\,x_1 + \qquad\quad b\,x_2 &= \qquad f \\ \big(d - \tfrac{c\,b}{a}\big)\,x_2 &= g - \tfrac{c\,f}{a} \end{aligned}$$

(b) Dans le cas où $d - \frac{c\,b}{a} \neq 0$, on peut résoudre x_2 à partir de la deuxième ligne comme suit :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{g - \frac{c\,f}{a}}{d - \frac{c\,b}{a}} \\ [\tfrac{a}{a} = 1] \qquad &= \frac{a\left(g - \frac{c\,f}{a}\right)}{a\left(d - \frac{c\,b}{a}\right)} \\ &= \frac{a\,g - c\,f}{a\,d - b\,c}, \end{aligned}$$

ce qui est l'expression annoncée de x_2. Notons qu'on a pu écrire $\frac{a}{a} = 1$, parce qu'on suppose $a \neq 0$ tout au long de l'exercice (on rappelle que $\frac{0}{0} = 1$ est faux et n'a absolument aucun sens).

Notons aussi au passage qu'on a les équivalences :

$$d - \frac{c\,b}{a} \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{a\,d - b\,c}{a} \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a\,d - b\,c \neq 0,$$

puisqu'on suppose $a \neq 0$ tout au long de l'exercice.

Ensuite, on peut remplacer cette valeur de x_2 dans la première équation pour résoudre x_1 puis calculer patiemment afin simplifier, en utilisant l'hypothèse $a \neq 0$ valable tout au long de cet exercice :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a}\Big(f - b\,x_2\Big) \\ &= \frac{1}{a}\left[f \cdot 1 - b \cdot \frac{a\,g - c\,f}{a\,d - b\,c}\right] \\ [1 = \tfrac{\text{chose}}{\text{chose}}] \qquad &= \frac{1}{a}\left[f \cdot \frac{a\,d - b\,c}{a\,d - b\,c} - b \cdot \frac{a\,g - c\,f}{a\,d - b\,c}\right] \\ &= \frac{1}{a}\left[\frac{f\left(a\,d - b\,c\right) - b\left(a\,g - c\,f\right)}{a\,d - b\,c}\right] \\ \text{[Annihilation par paire !]} \qquad &= \frac{1}{a}\left[\frac{f\,a\,d - \underline{f\,b\,c} - b\,a\,g + \underline{b\,c\,f}}{a\,d - b\,c}\right] \\ \text{[Factorisation par } a\text{ !]} \qquad &= \frac{1}{\underline{a}}\left[\frac{\underline{a}\left(f\,d - b\,g\right)}{a\,d - b\,c}\right] \\ \text{[Disparition de } a\text{ !]} \qquad &= \frac{f\,d - g\,b}{a\,d - b\,c}. \end{aligned}$$

(c) Dans le cas où $d - \frac{c\,b}{a} = 0$, la deuxième équation du système(équivalent) transformé devient :

$$0 \cdot x_2 = 0 \overset{!}{=} g - \tfrac{c\,f}{a},$$

et donc, lorsque $g - \frac{c\,f}{a} \neq 0$, cette équation est *impossible*, ce qui conclut que le système n'a *aucune* solution.

(d) Si maintenant $g - \frac{c\,f}{a} = 0$, la deuxième équation devient tautologique :

$$0 \cdot x_2 = 0 \overset{\text{OUI}}{=} 0 = g - \tfrac{c\,f}{a},$$

car $0 = 0$ est une équation que même les publicités mensongères sont obligées d'admettre comme étant vraie. Donc on peut supprimer cette équation, et il ne reste alors plus que la première équation :

$$a\,\boxed{x_1} + b\,x_2 = f,$$

que l'on peut résoudre par rapport à x_1, *parce que* l'on suppose $a \neq 0$ tout au long de cet exercice. Ainsi :

$$x_1 = \tfrac{f}{a} - \tfrac{b}{a}\,x_2,$$

avec une variable libre x_2, et en conclusion, on a bien obtenu dans ce dernier cas l'espace des solutions :

$$\mathsf{Sol} = \big\{\big(\tfrac{f}{a} - \tfrac{b}{a}\,x_2,\ x_2\big) :\ x_2 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

Exercice 8. (a) D'après le principe de conservation de la matière (Lavoisier), il doit y avoir autant d'atomes d'une substance X quelconque à gauche du signe $\longmapsto$ qu'il y en a à droite.

Vérifions donc cela, par le calcul mental :

$$\begin{array}{llll}
\mathsf{Pb}: & 15 \overset{?}{=} 5\cdot 3 & & \textsc{oui}, \\
\mathsf{N}: & 15\cdot 6 \overset{?}{=} 90 & & \textsc{oui}, \\
\mathsf{Cr}: & 44 \overset{?}{=} 22\cdot 2 & & \textsc{oui}, \\
\mathsf{Mn}: & 44\cdot 2 \overset{?}{=} 88 & & \textsc{oui}, \\
\mathsf{O}: & 44\cdot 8 \overset{?}{=} 5\cdot 4 + 22\cdot 3 + 88\cdot 2 + 90 & & \textsc{oui}.
\end{array}$$

9. Examen 5

Exercice 1. **(a)** Équilibrer la réaction chimique suivante :

$$x \cdot \mathsf{Pb\,N_6} + y \cdot \mathsf{Cr\,Mn_2\,O_8} \quad \longmapsto \quad s \cdot \mathsf{Pb_3\,O_4} + t \cdot \mathsf{Cr_2\,O_3} + u \cdot \mathsf{Mn\,O_2} + v \cdot \mathsf{N\,O},$$

où x, y et s, t, u, v sont des inconnues. Indication: Malgré le fait qu'une solution ait déjà été « offerte » dans le DM-1, il s'agit ici de raisonner comme si on ne connaissait rien, et donc, il s'agit d'élaborer un système linéaire, puis de le résoudre. Un exercice similaire existera dans l'un des deux examens, partiel ou terminal.

Exercice 2. **(a)** Résoudre en variables $\big(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\big)$ le système linéaire dont la matrice complète est :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Indication: La solution générale dépend de $x_3 \in \mathbb{R}$ quelconque et de $x_5 \in \mathbb{R}$ quelconque.

Exercice 3. **(a)** Écrire deux systèmes d'équations équivalents aux deux équations vectorielles suivantes :

$$x_1 \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix},$$

$$x_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Inversement, écrire une équation vectorielle équivalente aux deux systèmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned} x_2 + 5\,x_3 &= 0 \\ 4\,x_1 + 6\,x_2 - x_3 &= 0 \\ -\,x_1 + 3\,x_2 - 8\,x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} 4\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 &= 9 \\ x_1 - 7\,x_2 - 2\,x_3 &= 2 \\ 8\,x_1 + 6\,x_2 - 5\,x_3 &= 15 \end{aligned}$$

Exercice 4. On considère une économie constituée de trois secteurs : énergie et carburants, produits manufacturés, services. Le secteur de l'énergie et des carburants vend 80% de sa production au secteur manufacturier, 10% aux services, et conserve le reste. Le secteur manufacturier vend 10% de sa production au secteur de l'énergie et des carburants, 80% aux services, et conserve le reste. Les services vendent 20% au secteur de l'énergie et des carburants, 40% au secteur manufacturier, et conservent le reste.

(a) Consuire un tableau des échanges pour cette économie-bébé.

(b) Écrire un système d'équations permettant de déterminer les prix auxquels les secteurs doivent vendre leurs produits pour que les recettes équilibrent les dépenses.

(c) Trouver un ensemble de prix d'équilibre, en supposant que les services vendent leur production 100 unités.

Indication: S'aider du corrigé résumé suivant, ainsi que d'une calculatrice, si besoin est.

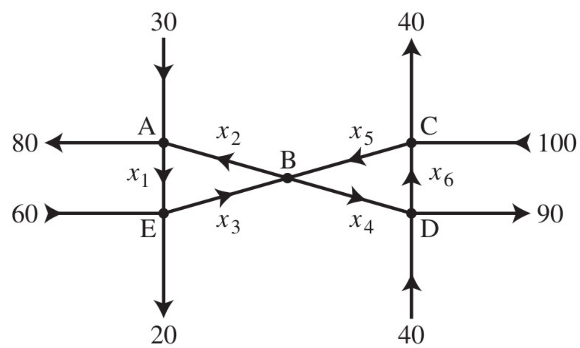
3. a.

	Répartition de la production de :				
	Én. & C	Man.	Serv.		
Sortie	↓	↓	↓	Entrée	Acheté par :
	0,1	0,1	0,2	→	Én. & C.
	0,8	0,1	0,4	→	Man.
	0,1	0,8	0,4	→	Serv.

b. $\begin{bmatrix} 0,9 & -0,1 & -0,2 & 0 \\ -0,8 & 0,9 & -0,4 & 0 \\ -0,1 & -0,8 & 0,6 & 0 \end{bmatrix}$

c. [M] $p_{\text{É\&C}} \approx 30$, $p_{\text{M}} \approx 71$, $p_{\text{S}} = 100$.

Exercice 5. **(a)** Déterminer la répartition des flux dans le réseau de la figure ci-dessous. Indication: Raisonner aux 5 points 'névralgiques' A, B, C, D, E.



(b) En supposant que les flux s'écoulent bien dans la direction indiquée, déterminer les flux minimaux, c'est-à-dire les valeurs minimales possibles pour x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6.

Exercice 6. Soit $k \in \mathbb{R}$ un paramètre et soit le système linéaire :

$$\begin{aligned} x + \ \ y + 2\,z - \ \ t - \ \ u &= 1, \\ x + \ \ y + \ \ z \qquad\qquad &= 3, \\ 2\,x + 2\,y - \ \ z + 4\,t + 4\,u &= 2, \\ 3\,x + 3\,y + \ \ z - 6\,t - 6\,u &= 93, \\ x + \ \ y \qquad\qquad\qquad &= k. \end{aligned}$$

(a) Montrer qu'il n'y a aucune solution lorsque $k \neq 15$.

(b) Quand $k = 15$, montrer que la solution générale dépend de 2 inconnues réelles libres quelconques, et déterminer explicitement cette solution.

Exercice 7. **(a)** On remarque que $\left[\begin{smallmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{smallmatrix}\right]$. Avec cette relation, et sans effectuer d'opérations sur les lignes, sans calculer, trouver des scalaires c_1, c_2, c_3 vérifiant l'égalité :

$$\begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 8. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les deux points $A := (1, 2, 3)$ et $B := (3, 2, 1)$. On note P le plan d'équation cartésienne $2\,x + y + z = 3$.

(a) Déterminer un paramétrage $M(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ de la droite (AB), avec $t \in \mathbb{R}$ quelconque.

(b) À quelle condition sur $t \in \mathbb{R}$ le point $M(t) \in P$ appartient-il au plan P ? On demande de déterminer la ou les valeurs éventuelles de t telles que $M(t) \in P$.

(c) Déterminer complètement l'intersection $(AB) \cap P$.

Exercice 9. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on note P_1 le plan d'équation $x - y + 2\,z = -\,2$, et on note P_2 le plan d'équation $3\,x + y + 2\,z = 6$. Enfin, on note $D := P_1 \cap P_2$.

(a) Déterminer un paramétrage $M(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ de D, avec $t \in \mathbb{R}$ quelconque.

(b) Donner explicitement les coordonnées de deux points *distincts* situés sur D.

10. Corrigé de l'examen 5

Exercice 1. (a) D'après le principe de conservation de la matière (Lavoisier), il doit y avoir autant d'atomes d'une substance X quelconque à gauche du signe $\longmapsto$ qu'il y en a à droite, ce qui nous donne 5 équations linéaires à 6 variables :

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Pb}: && x = 3\,s \\
&\mathsf{N}: && 6\,x = v, \\
&\mathsf{Cr}: && y = 2\,t, \\
&\mathsf{Mn}: && 2\,y = u, \\
&\mathsf{O}: && 8\,y = 4\,s + 3\,t + 2\,u + v.
\end{aligned}$$

Utilisons les équations 1 et 3 afin de résoudre x et y pour les remplacer dans les équations 2, 4, 5 :

$$\begin{aligned}
18\,s &= v, \\
4\,t &= u, \\
16\,t &= 4\,s + 3\,t + 2\,u + v,
\end{aligned}$$

ce qui nous donne un système de 3 équations linéaires en les 4 variables *qui sont situées exclusivement à gauche* s, t, u, v, que nous préférons écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
-\,18\,s \qquad\qquad\quad + v &= 0 \\
-\;\; 4\,t + \;\; u \qquad &= 0 \\
4\,s - 13\,t + 2\,u + \; v &= 0
\end{aligned}$$

On résout à partir des deux premières équations :

$$\begin{aligned}
v &= 18\,s, \\
u &= 4\,t,
\end{aligned}$$

puis on remplace ces valeurs dans la troisième équation :

$$\begin{aligned}
0 &= 4\,s - 13\,t + 2\,(4\,t) + 18\,s \\
&= 22\,s - 5\,t.
\end{aligned}$$

Cette dernière équation en les deux variables s, t a pour solution générale :

$$s = 5\,\lambda, \qquad\qquad t = 22\,\lambda,$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un nombre réel quelconque.

En remplaçant dans les équations qui précèdent, on trouve que la solution générale pour l'équilibrage chimique est :

$$x = 15\,\lambda, \qquad y = 44\,\lambda, \qquad s = 5\,\lambda, \qquad t = 22\,\lambda, \qquad u = 88\,\lambda, \qquad v = 90\,\lambda.$$

Pour $\lambda = 1$, on retrouve la solution qui a été « offerte » lors du dernier exercice du DM-1.

Exercice 2. **(a)** Ce système s'écrit :

$$\begin{aligned} x_1 - 3\,x_2 \qquad\quad - \quad x_4 \qquad\quad &= -2 \\ x_2 \qquad\qquad\qquad - 4\,x_5 &= 1 \\ x_4 + 9\,x_5 &= 4 \\ 0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5 &= 0 \end{aligned}$$

et la dernière ligne $0 = 0$, étant tautologique, peut être effacée :

$$\begin{aligned} \boxed{x_1} - 3\,x_2 - \quad x_4 \qquad\quad &= -2 \\ \boxed{x_2} \qquad\quad - 4\,x_5 &= 1 \\ \boxed{x_4} + 9\,x_5 &= 4 \end{aligned}$$

En partant du bas, on peut donc résoudre :

$$\begin{aligned} x_4 &= 4 - 9\,x_5, \\ x_2 &= 1 + 4\,x_5, \end{aligned}$$

puis remplacer dans la ligne 1 :

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 + 3\,x_2 + x_4 \\ &= -2 + 3\big(1 + 4\,x_5\big) + 4 - 9\,x_5 \\ &= -2 + 3 + 12\,x_5 + 4 - 9\,x_5 \\ &= 5 + 3\,x_5. \end{aligned}$$

Le point subtil de cet exercice, c'est que la variable x_3 n'apparaît dans aucune des équations manipulées, et pourtant, l'inconnue x_3 est bel et bien présente dans le système linéaire à résoudre. La raison de cela, c'est que dans la matrice du système, *il n'y a que des* 0 *dans la colonne correspondant à* x_3.

Par conséquent, l'espace des solutions :

$$\begin{aligned} \mathsf{Sol} = \Big\{ \Big(5 + 3\,x_3,\;\; 1 + 4\,x_5,\;\; x_3,\;\; 4 - 9\,x_5,\;\; x_5\Big) &: \\ x_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\;\; x_5 \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \Big\}&, \end{aligned}$$

dépend bien de *deux* paramètres libres, x_3 et x_5.

Exercice 3. **(a)** Les deux systèmes sont :

$$\begin{aligned} 6\,x_1 - 3\,x_2 &= 1 \\ -\,x_1 + 4\,x_2 &= -7 \\ 5\,x_1 \qquad\; &= -5 \end{aligned} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \begin{aligned} -\,2\,x_1 + 8\,x_2 + \quad x_3 &= 0 \\ 3\,x_1 + 5\,x_2 - 6\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Les deux équations vectorielles sont :

$$\begin{aligned} x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ x_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 4. **(a)** Voici le tableau des échanges, avec E pour Énergies et Carburants, avec M pour Produits Manufacturés, et avec S pour Services :

$$
\begin{array}{cccc}
 & E & M & S \\
E & 0,1 & 0,8 & 0,1 \\
M & 0,1 & 0,1 & 0,8 \\
S & 0,2 & 0,4 & 0,4
\end{array}
$$

(b) On nomme x_1 le prix des Énergies et Carburants ; x_2 le prix des Produits Manufacturés ; x_3 le prix des Services. Le système d'équations exprimant que les recettes équilibrent les dépenses est :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0,1\,x_1 + 0,1\,x_2 + 0,2\,x_3, \\
x_2 &= 0,8\,x_1 + 0,1\,x_2 + 0,4\,x_3, \\
x_3 &= 0,1\,x_1 + 0,8\,x_2 + 0,4\,x_3,
\end{aligned}
$$

ce qui équivaut à :

$$
\begin{aligned}
0,9\,x_1 - 0,1\,x_2 - 0,2\,x_3 &= 0, \\
-0,8\,x_1 + 0,9\,x_2 - 0,4\,x_3 &= 0, \\
-0,1\,x_1 - 0,8\,x_2 + 0,6\,x_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Pour résoudre ce système, appliquons la méthode du pivot, en prenant un pivot tout en bas de la première colonne, sans changer les lignes de place (ce qui implique de créer des zéros vers le haut) :

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
0,9 & -0,1 & -0,2 & 0 \\
-0,8 & 0,9 & -0,4 & 0 \\
\boxed{-0,1} & -0,8 & 0,6 & 0
\end{array}\right]
\sim
\left[\begin{array}{ccc|c}
0 & -7,3 & 5,2 & 0 \\
0 & 7,3 & -5,2 & 0 \\
-0,1 & -0,8 & 0,6 & 0
\end{array}\right]
$$

Les deux première lignes sont égales, au signe près, donc on peut supprimer la première. La seconde ligne donne :

$$
x_2 = \frac{5,2}{7,3}\,x_3,
$$

puis, après remplacement, la troisième ligne donne :

$$
x_1 = \frac{-0,8\,\frac{5,2}{7,3} + 0,6}{0,1}\,x_3 = \frac{22}{73}\,x_3.
$$

3. a.

	Répartition de la production de :				
	Én. & C	Man.	Serv.		
Sortie	↓	↓	↓	Entrée	Acheté par :
	0,1	0,1	0,2	→	Én. & C.
	0,8	0,1	0,4	→	Man.
	0,1	0,8	0,4	→	Serv.

b. $\begin{bmatrix} 0,9 & -0,1 & -0,2 & 0 \\ -0,8 & 0,9 & -0,4 & 0 \\ -0,1 & -0,8 & 0,6 & 0 \end{bmatrix}$

c. **[M]** $p_{\text{É\&C}} \approx 30$, $p_{\text{M}} \approx 71$, $p_{\text{S}} = 100$.

(c) Avec $x_3 = 100$, on trouve approximativement :

$$
x_1 = \frac{2200}{73} \approx 30, \qquad x_2 = \frac{5200}{73} \approx 71, \qquad x_3 = 100.
$$

Exercice 5. **(a)** Les bilans des flux entrants égaux aux flux sortants, au 5 nœuds A, B, C, D, E du réseau sont :

$$\begin{aligned}
30+x_2 &= 80+x_1 &&\overset{\mathsf{A}}{\Longleftrightarrow} & -x_1+x_2 &= 50,\\
x_3+x_5 &= x_2+x_4 &&\overset{\mathsf{B}}{\Longleftrightarrow} & -x_2+x_3-x_4+x_5 &= 0,\\
100+x_6 &= 40+x_5 &&\overset{\mathsf{C}}{\Longleftrightarrow} & -x_5+x_6 &= -60,\\
40+x_4 &= 90+x_6 &&\overset{\mathsf{D}}{\Longleftrightarrow} & x_4-x_6 &= 50,\\
60+x_1 &= 20+x_3 &&\overset{\mathsf{E}}{\Longleftrightarrow} & x_1-x_3 &= -40.
\end{aligned}$$

On résout x_1, x_4, x_5 depuis le bas :

$$\begin{aligned}
x_1 &= -40+x_3,\\
x_4 &= 50+x_6,\\
x_5 &= 60+x_6,
\end{aligned}$$

et on remplace dans la première équation :

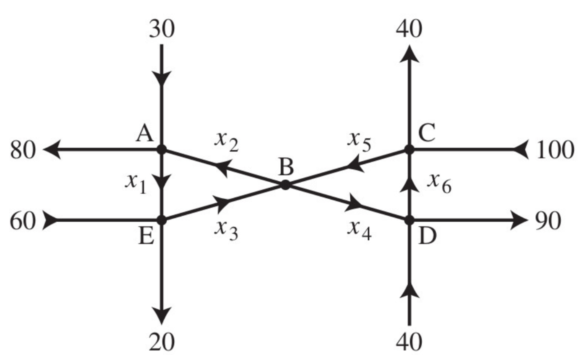
$$40-x_3+x_2 = 50 \qquad \text{pour résoudre :} \qquad x_2 = 10+x_3,$$

et enfin, on remplace dans la deuxième équation qui devient tautologique :

$$-10-x_3+x_3-50-x_6+60+x_6 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 = 0.$$

En définitive :

$$\mathsf{Sol} = \Big\{\big(-40+x_3,\ 10+x_3,\ x_3,\ 50+x_6,\ 60+x_6,\ x_6\big):\ x_3\in\mathbb{R},\ x_6\in\mathbb{R}\ \text{quelconques}\Big\}.$$



(b) Dire que les flux s'écoulent bien dans le sens indiqué, c'est dire que $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$, $x_3\geqslant 0$, $x_4\geqslant 0$, $x_5\geqslant 0$, $x_6\geqslant 0$, simultanément, c'est-à-dire en lisant Sol :

$$x_3\geqslant 40,\qquad x_3\geqslant -10,\qquad x_3\geqslant 0,\qquad x_6\geqslant -50,\qquad x_6\geqslant -60,\qquad x_6\geqslant 0,$$

ce qui équivaut à :

$$x_3\geqslant 40,\qquad x_6\geqslant 0.$$

La solution minimale est donc atteinte pour le choix de $x_3 := 40$ et $x_6 := 0$, et elle vaut :

$$\mathsf{Sol}_{\mathsf{min}} := \big(0,\ 50,\ 40,\ 50,\ 60,\ 0\big).$$

Exercice 6. **(a)** Soumettons la matrice complète de ce système à l'algorithme du pivot :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & -6 & -6 & 93 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & k \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & -3 & 90 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & k-1 \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -8 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & k-5 \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k-15 \end{array}\right].$$

La ligne 4 peut être supprimée, et nous obtenons un système échelonné :

$$\begin{aligned} \boxed{1}\,x + y + \quad 2\,z - \quad t - u &= 1 \\ \boxed{-1}\,z + \quad t + u &= 2 \\ \boxed{1}\,t + u &= -10 \\ 0 &= k - 15. \end{aligned}$$

Clairement, le système est incompatible lorsque $k \neq 15$.

(b) Quand $k = 15$, après suppression de la dernière ligne, ré-écrivons le système sous la forme d'une matrice, et continuons à appliquer la méthode du pivot jusqu'à atteindre une forme échelonnée réduite :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -10 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -10 \end{array}\right] \end{array},$$

d'où :

$$\mathsf{Sol} = \Big\{ \big(15 - y,\, y,\, -12,\, -10 - u,\, u\big) \colon\ y \in \mathbb{R} \text{ quelconque},\ u \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \Big\}.$$

Exercice 7. **(a)** Il suffit de lire la multiplication matricielle :

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix},$$

comme signifiant :

$$-3\begin{pmatrix}4\\5\\-6\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-3\\10\end{pmatrix}.$$

Ainsi, on trouve :

$$c_1 := -3, \qquad c_2 := -1, \qquad c_3 := 2.$$

Exercice 8. (a) Calculons le vecteur :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}, \qquad \text{puis} \qquad M(t) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix},$$

ce qui donne :

$$x(t) = 1+2\,t, \qquad y(t) = 2, \qquad z(t) = 3-2\,t.$$

(b) On cherche tous les paramètre $t \in \mathbb{R}$ sur la droite (AB) tels que le point $M(t)$ appartienne aussi au plan P. Donc on injecte l'équation paramétrique dans l'équation cartésienne, ce qui donnera tous les points d'intersection possibles :

$$\begin{aligned}0 &= 2\,x(t)+y(t)+z(t)-3\\ &= 2+4\,t+2+3-2\,t-3\\ &= 4+2\,t.\end{aligned}$$

Il est clair alors qu'il y a une solution unique : $t = -\,2$.

(c) Donc il y a un unique point d'intersection, dont les coordonnées sont obtenues en posant $t := -\,2$ dans $M(t)$:

$$(AB)\cap P = \big\{(-3,\,2,\,7)\big\}.$$

Évidemment, on doit vérifier sur du brouillon qu'on ne s'est pas trompé. Nous sommes donc dans le cas le plus fréquent, où une droite et un plan dans l'espace s'intersectent en un point unique.

Exercice 9. (a) L'intersection $P_1 \cap P_2$ est représentée par le système linéaire :

$$\begin{aligned}x-y+2\,z &= -\,2\\ 3\,x+y+2\,z &= 6\end{aligned} \qquad \text{équivalent à} \qquad \begin{aligned}x-y+2\,z &= -\,2\\ 4\,y-4\,z &= 12\end{aligned}$$

Ainsi, x et y sont deux variables dépendantes, et z est une variable dépendante. On résout :

$$y = 3+z \qquad \text{puis} \qquad x = 1-z.$$

Ainsi :

$$\mathsf{Sol} = \big\{(1-z,\ 3+z,\ z)\colon\ z\in\mathbb{R}\ \text{quelconque}\big\},$$

puis en notant $t := z$, on obtient la paramétrisation de la droite $D = P_1 \cap P_2$:

$$x(t) = 1-t, \qquad y(t) = 3+t, \qquad z(t) = t.$$

(b) Pour $t = 0$ et $t = 1$, on obtient les deux points distincts :

$$A := (1,3,0) \qquad \text{et} \qquad B := (0,4,1).$$

11. Examen 6

ALGORITHME DE CALCUL DE A^{-1}

Appliquer la méthode du pivot à la matrice $[\,A \quad I\,]$. Si A est équivalente selon les lignes à I, alors $[\,A \quad I\,]$ est équivalente selon les lignes à $[\,I \quad A^{-1}\,]$. Sinon, A n'a pas d'inverse.

EXEMPLE 7 Déterminer, si elle existe, l'inverse de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$.

SOLUTION

$$[\,A \quad I\,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right]$$

D'après le théorème 7 et puisque $A \sim I$, A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Il est recommandé de vérifier la valeur de l'inverse :

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puisque l'on a montré que A était inversible, il est inutile de vérifier que $A^{-1}A = I$. ■

Exercice 1. **(a)**, **(b)** À l'aide de l'algorithme $\big(A\colon I\big)$ expliqué dans le scan ci-dessus, déterminer, lorsqu'elle existe, la matrice inverse de chacune des deux matrices :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -7 & 3 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On pose $A := \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. L'objectif est de calculer $A^8 = A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A$, le produit de la matrice A par elle-même, huit fois.

(a) On introduit la matrice $P := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice inverse P^{-1}. Indication: Résoudre le système :

$$\begin{aligned} 3\,x_1 + x_2 &= y_1, \\ 2\,x_1 + x_2 &= y_2, \end{aligned}$$

en déduire la matrice P^{-1}, et surtout, vérifier que $P^{-1} \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Soit la matrice diagonale $D := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

(c) Calculer $D^2 = D \cdot D$, puis $D^3 = D \cdot D^2$, et trouver matrice D^8.

(d) Calculer A^8. Indication: Utiliser le fait que $P^{-1} \cdot P$ est la matrice identité.

(e) Que vaut A^{25} ?

Exercice 3. Soit la matrice :

$$A := \begin{bmatrix} -2 & -7 & -9 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Trouver la 3$^{\text{ième}}$ colonne de A^{-1} sans calculer les autres colonnes.

Exercice 4. Soit $A := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Par essais et par erreurs, construire une matrice C de taille 2×3 ne contenant que $-1, 0, 1$ dans ses composantes, telle que $C \cdot A = I_{2\times 2}$.

(b) Ensuite, calculer $A \cdot C$. A-t-on $A \cdot C = I_{3\times 3}$?

(c) Plus généralement, soit $C = \left[\begin{smallmatrix} j & k & l \\ p & q & r \end{smallmatrix}\right]$. Déterminer 4 équations linéaires qui garantissent que $C \cdot A = I_{2\times 2}$.

(d) Déterminer 9 équations linéaires qui pourraient garantir que $A \cdot C = I_{3\times 3}$.

(e) Est-il parfois possible d'avoir $A \cdot C = I_{3\times 3}$ quand on suppose $C \cdot A = I_{2\times 2}$?

Exercice 5. **(a)** Calculer l'inverse de $A_2 := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) Calculer l'inverse de $A_3 := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right]$.

(c) Calculer l'inverse de $A_4 := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right]$.

(d) Pour tout $n \geqslant 2$, deviner l'inverse de :

$$A_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix}.$$

(e) Vérifier qu'on a bien $A_n^{-1} \cdot A_n = I_{n\times n} = A_n \cdot A_n^{-1}$.

Exercice 6. **(a)*** Déterminer l'inverse de la matrice :

$$B := \begin{bmatrix} -25 & -9 & -27 \\ 546 & 180 & 537 \\ 154 & 50 & 149 \end{bmatrix}.$$

Indication: Attention ! Exercice délicat ! Nombreuses possibilités de faire des erreurs de calculs lorsqu'on manipule des fractions compliquées. Donc il est nécessaire de détailler chaque étape pour se relire et trouver ses erreurs.

Réussir cet exercice serait une preuve de grande maîtrise du calcul ! Petite aide : la composante $(2, 2)$ de B^{-1} (au centre) vaut $-\frac{433}{6}$, et il reste donc 8 entrées à calculer.

12. Corrigé de l'examen 6

Exercice 1. **(a)** On place la matrice identité $I_{3\times 3}$ à droite de la matrice A après une barre verticale, et on démarre la machine-pivot :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{array}\right],$$

pour trouver après une ultime division de la ligne 3 par le nombre 2 :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(b) En procédant de la même manière avec cette autre matrice B :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

nous constatons que la ligne 3 se réduit à un désert de **0**, **0**, **0**, donc aucun pivot ne reste disponible en position $(3,3)$ pour poursuive les calculs. Or un théorème (admis) du cours stipule que ceci est la manifestation du fait que la matrice B n'est *pas* inversible.

Exercice 2. **(a)** Soit donc la matrice $A := \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, et soit la matrice $P := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Le déterminant $3\cdot 2 - 2\cdot 1 = 1$ de cette dernière est non nul, donc P est inversible. Une formule d'un théorème du cours donne alors directement sans transpirer :

$$P^{-1} = \frac{1}{3\cdot 1 - 2\cdot 1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dans ce corrigé imprimé, nous ne vérifons pas que $P^{-1}\cdot P = I_{2\times 2}$, car nous l'avons fait à la main sur un bout de mouchoir, comme nous devons toujours le faire en DM et en examen. En fait, nous n'avons pas non plus suivi l'indication donnée dans l'exercice !

Ého ! Ohé ! Oui vous, le petit malin là-bas, vous qui prenez tous vos raccourcis de prof en douce : Stop ! Amende de 135 euros !

(b) Soit donc la matrice diagonale $D := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nous pouvons vérifier que :

$$\begin{aligned} P \cdot D \cdot P^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 & -3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 & -2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

(c) Puisque la matrice D est diagonale, il est facile de calculer :

$$D^2 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1^2 \end{pmatrix}, \qquad D^3 = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 1^3 \end{pmatrix},$$

$$D^4 = \begin{pmatrix} 2^4 & 0 \\ 0 & 1^4 \end{pmatrix}, \qquad D^8 = \begin{pmatrix} 2^8 & 0 \\ 0 & 1^8 \end{pmatrix},$$

et en fait, généralement, pour tout entier $r \geqslant 1$:

$$D^r = \begin{pmatrix} 2^r & 0 \\ 0 & 1^r \end{pmatrix}.$$

(d) En utilisant le fait que $P^{-1} \cdot P$ est la matrice identité, calculons :

$$A^2 = P \cdot D \cdot \underline{P^{-1} \cdot P} \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^2 \cdot P^{-1},$$

puis :

$$A^3 = A \cdot A^2 = P \cdot D \cdot \underline{P^{-1} \cdot P} \cdot D^2 \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot D^2 \cdot P^{-1} = P \cdot D^3 \cdot P^{-1}.$$

En supposant par récurrence sur un entier $r \geqslant 3$ que l'on a donc :

$$A^r = P \cdot D^r \cdot P^{-1},$$

il vient la même formule au niveau $r + 1$:

$$A^{r+1} = A \cdot A^r = P \cdot D \cdot \underline{P^{-1} \cdot P} \cdot D^r \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot D^r \cdot P^{-1} = P \cdot D^{r+1} \cdot P^{-1}.$$

Ainsi, nous pouvons répondre une question plus générale :

$$\begin{aligned} A^r = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^r & 0 \\ 0 & 1^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^r & -2^r \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^r - 2 & -3 \cdot 2^r + 3 \\ 2 \cdot 2^r - 2 & -2 \cdot 2^r + 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où pour $r = 8$:

$$A^8 = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^8 - 2 & -3 \cdot 2^8 + 3 \\ 2 \cdot 2^8 - 2 & -2 \cdot 2^8 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 766 & -765 \\ 510 & -509 \end{pmatrix}.$$

(e) De même :

$$A^{25} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{25} - 2 & -3 \cdot 2^{25} + 3 \\ 2 \cdot 2^{25} - 2 & -2 \cdot 2^{25} + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\,663\,294 & -100\,663\,293 \\ 67\,108\,862 & -67\,108\,869 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. (a) Il s'agit de résoudre le système linéaire correspondant à la matrice A augmenté de la dernière et troisième colonne de la matrice identité

$$I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire le système :

$$
\begin{aligned}
-\,2\,x - 7\,y - 9\,z &= 0 \\
2\,x + 5\,y + 6\,z &= 0 \\
x + 3\,y + 4\,z &= 1
\end{aligned}
\qquad \rightsquigarrow \qquad
\left[\begin{array}{ccc|c}
-2 & -7 & -9 & 0 \\
2 & 5 & 6 & 0 \\
\boxed{1} & 3 & 4 & 1
\end{array}\right]
$$

Petite variation amusante de la méthode du pivot de Gauss ! Petite espièglerie !

Nous n'allons pas permuter les lignes, et travailler directement avec le pivot $\boxed{1}$ situé tout en bas à gauche, afin de créer des **0** *au-dessus* de lui. Ensuite, nous nous autoriserons même d'utiliser des pivots égaux à -1 ! Et tout va fonctionner comme sur des roulettes ! Car les calculs, en mathématiques, sont toujours beaucoup plus flexibles et beaucoup plus adaptables qu'on ne pourrait le croire !

Le calcul, en mathématiques, est un immense espace de liberté !

Sans détailler toutes les opérations intermédiaires d'additions de lignes, et en nous autorisant encore à choisir des pivots là où cela semble le plus avantageux sans nous imposer de permuter les lignes, voici une description des gaussifications utiles :

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
-2 & -7 & -9 & 0 \\
2 & 5 & 6 & 0 \\
\boxed{1} & 3 & 4 & 1
\end{array}\right]
\quad \rightsquigarrow \quad
\left[\begin{array}{ccc|c}
\mathbf{0} & \boxed{-1} & -1 & 2 \\
\mathbf{0} & -1 & -2 & -2 \\
\boxed{1} & 3 & 4 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\rightsquigarrow \quad
\left[\begin{array}{ccc|c}
\mathbf{0} & \boxed{-1} & -1 & 2 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{-1} & -4 \\
\boxed{1} & \mathbf{0} & 1 & 7
\end{array}\right]
$$

$$
\rightsquigarrow \quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|c}
\mathbf{0} & -1 & \mathbf{0} & 6 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 & -4 \\
1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3
\end{array}\right]
\end{array}
$$

ce qui nous permet de lire la solution, unique :

$$
x = 3, \qquad\qquad y = -\,6, \qquad\qquad z = 4.
$$

En conclusion, la dernière colonne de l'inverse de la matrice A est :

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & 3 \\ * & * & -6 \\ * & * & 4 \end{pmatrix},
$$

ce que l'étudiant astucieux et scrupuleux aurait pu confirmer en calculant, de manière indépendante, la matrice inverse complète :

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix},
$$

et en vérifiant, bien sûr, que le résultat $A \cdot A^{-1} = I_{3\times 3}$ est correct — ce que le professeur est capable de faire d'un seul coup d'œil !

Exercice 4. **(a)** Introduisons une matrice générale de taille 2×3 :

$$
C := \begin{bmatrix} j & k & l \\ p & q & r \end{bmatrix},
$$

avec des nombres réels quelconques j, k, l, p, q, r, dont le produit avec A est :

$$C \cdot A = \begin{bmatrix} j & k & l \\ p & q & r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j+k+l & 2j+3k+5l \\ p+q+r & 2p+3q+5r \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si donc nous nous contraignons à choisir :

$$j,\ k,\ l,\ p,\ q,\ r\ \in \big\{-1, 0, 1\big\},$$

par tatônnements intellectuels, on finit par trouver un exemple :

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{qui donne bien} \qquad C \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{2\times 2}.$$

(b) Mais avec la matrice C que nous venons de trouver, un simple calcul montre que le produit *dans l'autre sens :*

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -4 & 6 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

n'est *pas du tout* égal à la matrice identité $I_{3\times 3}$!

(c) D'ailleurs, le calcul général effectué à la Question **(a)** montre que $C \cdot A = I_{2\times 2}$ si et seulement si les quatre équations linéaires suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} j+k+l &= 1, & \qquad 2j+3k+5l &= 0, \\ p+q+r &= 0, & \qquad 2p+3q+5r &= 1. \end{aligned}$$

(d) D'un autre côté, un calcul complet de l'autre produit :

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j & k & l \\ p & q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j+2p & k+2q & l+2r \\ j+3p & k+3q & l+3r \\ j+5p & k+5q & l+5r \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

montre, que l'on aurait $A \cdot C = I_{3\times 3}$ si et seulement les 9 équations linéaires suivantes étaient satisfaites :

$$\begin{aligned} j+2p &= 1, & \qquad k+2q &= 0, & \qquad l+2r &= 0, \\ j+3p &= 0, & \qquad k+3q &= 1, & \qquad l+3r &= 0, \\ j+5p &= 0, & \qquad k+5q &= 0, & \qquad l+5r &= 1. \end{aligned}$$

(e) Mais — même sans supposer que l'égalité $C \cdot A = I_{2\times 2}$ est satisfaite —, en identifiant seulement la première colonne de $A \cdot C$ avec la première colonne de $I_{3\times 3}$, on constate que les trois équations nécessaires :

$$\begin{aligned} j+2p &= \mathbf{1}, \\ j+3p &= 0, \\ j+5p &= 0, \end{aligned}$$

sont déjà contradictoires, puisque les deux dernières forcent les valeurs de :

$$j = p = \mathbf{0},$$

qui, remplacées ensuite dans la première équation, conduisent à l'absurdité :

$$\mathbf{0} \overset{!!}{=} \mathbf{1},$$

la plus *méphistophélique* de toutes les mathématiques !

Exercice 5. **(a)** On trouve aisément :

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(b) Pour déterminer A_3^{-1}, l'idée qui vient en premier à l'esprit est d'appliquer la technique enseignée en cours, qui consiste à appliquer la méthode du pivot à la matrice A_3 augmentée de la matrice identité $I_{3\times 3}$.

Sans détailler toutes les combinaisons linéaires entre lignes, voici les étapes principales de mise sous forme échelonnée *réduite* de la matrice augmentée $\big[A_3 \,\big|\, I_{3\times 3}\big]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right],$$

donc A_3 est inversible, et nous avons :

$$A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Mais une autre méthode se prêtera mieux à la généralisation. Il s'agit tout simplement de partir du système linéaire :

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\quad &= y_1, \\ x_1 + 2\,x_2 \qquad\; &= y_2, \\ x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 &= y_3, \end{aligned}$$

dont les seconds membres y_1, y_2, y_3 sont quelconques. En partant du haut, on résout aisément :

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}\big(y_2 - x_1\big) = -\tfrac{1}{2}\,y_1 + \tfrac{1}{2}\,y_2, \\ x_3 &= \tfrac{1}{3}\big(y_3 - x_1 - 2\,x_2\big) = \tfrac{1}{3}\Big(y_3 - y_1 - 2\big(-\tfrac{1}{2}\,y_1 + \tfrac{1}{2}\,y_2\big)\Big) = -\tfrac{1}{3}\,y_2 + \tfrac{1}{3}\,y_3, \end{aligned}$$

et donc nous trouvons à nouveau, en lisant les coefficients de x_1, x_2, x_3 dans ces formules inverses :

$$A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(c) Afin de déterminer la matrice inverse A_4^{-1} — si elle existe —, résolvons le système général :

$$\begin{aligned}
&x_1 &&= y_1,\\
&x_1 + 2\,x_2 &&= y_2,\\
&x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 &&= y_3,\\
&x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 &&= y_4.
\end{aligned}$$

Grâce à ce que nous venons de faire en dimension $n = 3$, nous savons que les trois premières équations se résolvent en :

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1,\\
x_2 &= -\tfrac{1}{2}\,y_1 + \tfrac{1}{2}\,y_2,\\
x_3 &= -\tfrac{1}{3}\,y_2 + \tfrac{1}{3}\,y_3,
\end{aligned}$$

et il ne reste plus qu'à résoudre x_4 depuis la dernière équation.

Mais ici, il ne serait pas très « malin » de remplacer ces valeurs de x_1, x_2, x_3, c'est-à-dire d'écrire :

$$x_4 = \tfrac{1}{4}\Big(y_4 - y_1 - 2\,\big(-\tfrac{1}{2}\,y_1 + \tfrac{1}{2}\,y_2\big) - 3\,\big(-\tfrac{1}{3}\,y_2 + \tfrac{1}{3}\,y_3\big)\Big),$$

puis de développer patiemment les calculs de fractions, car en regardant les *deux dernières lignes :*

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 &&= y_3,\\
&x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 &&= y_4,
\end{aligned}$$

on voit qu'on peut obtenir par soustraction délectable :

$$4\,x_4 = y_4 - y_3,$$

et donc sans aucun effort :

$$x_4 = -\tfrac{1}{4}\,y_3 + \tfrac{1}{4}\,y_4.$$

Ainsi :

$$A_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

(d) Écrivons le système à résoudre :

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1,\\
x_1 + 2\,x_2 &= y_2,\\
x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 &= y_3,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots ,\\
x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + \cdots + (n-1)\,x_{n-1} &= y_{n-1},\\
x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + \cdots + (n-1)\,x_{n-1} + n\,x_n &= y_n,
\end{aligned}$$

supposons par récurrence que les $(n-1)$ première lignes se résolvent en :

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1,\\
x_2 &= -\tfrac{1}{2}\,y_1 + \tfrac{1}{2}\,y_2,\\
x_3 &= -\tfrac{1}{2}\,y_2 + \tfrac{1}{3}\,y_3,\\
\cdots&\cdots\cdots\cdots\\
y_{n-1} &= -\tfrac{1}{n-1}\,y_{n-2} + \tfrac{1}{n-1}\,y_{n-1},
\end{aligned}$$

et regardons encore plus haut les deux dernières lignes de notre système à résoudre afin que jaillisse à nouveau l'idée de raccourci de calcul :

$$n\,x_n \,=\, y_n - y_{n-1},$$

qui nous donne également sans efforts :

$$x_n \,=\, -\tfrac{1}{n}\,y_{n-1} + \tfrac{1}{n}\,y_n.$$

En conclusion, nous avons trouvé la matrice inverse que nous avions intuitivement devinée :

$$A_n^{-1} \,=\, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{bmatrix}.$$

(e) Ceci se fait directement sur des feuilles de papier auxiliaires.

Exercice 6. (a) Proposons-nous d'appliquer la méthode vue en cours. Commençons par adjoindre, à la droite de notre matrice A, la matrice identité :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -25 & -9 & -27 & 1 & 0 & 0 \\ 546 & 180 & 537 & 0 & 1 & 0 \\ 154 & 50 & 149 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Afin d'avoir un pivot égal à 1 en haut à gauche, c'est-à-dire en position $(1,1)$, il fait multiplier la première ligne par $\frac{1}{-25}$ — rien que ça ! et ce n'est que le début de nos ennuis ! —, ce qui donne :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & \frac{9}{25} & \frac{27}{25} & -\frac{1}{25} & 0 & 0 \\ 546 & 180 & 537 & 0 & 1 & 0 \\ 154 & 50 & 149 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Ensuite, il faut créer deux zéros en-dessous du pivot $\boxed{1}$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & \frac{9}{25} & \frac{27}{25} & -\frac{1}{25} & 0 & 0 \\ -546 & -546\,\frac{9}{25} & -546\,\frac{27}{25} & 546\,\frac{1}{25} & 0 & 0 \\ 546 & 180 & 537 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & -\frac{414}{25} & -\frac{1\,317}{25} & \frac{546}{25} & 1 & 0 \\ -154 & -154\,\frac{9}{25} & -154\,\frac{27}{25} & 154\,\frac{1}{25} & 0 & 0 \\ 154 & 50 & 149 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & -\frac{136}{25} & -\frac{433}{25} & \frac{154}{25} & 0 & 1 \end{array} \quad\longmapsto\quad \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & \frac{9}{25} & \frac{27}{25} & -\frac{1}{25} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & -\frac{414}{25} & -\frac{1\,317}{25} & \frac{546}{25} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & -\frac{136}{25} & -\frac{433}{25} & \frac{154}{25} & 0 & 1 \end{array}$$

et par souci masochiste de complétude, nous détaillons les calculs d'additions des lignes concernées comme suit :

$$
\begin{aligned}
180-546\,\frac{9}{25} &= \frac{180\cdot 25-546\cdot 9}{25} = \frac{4\,500-4\,914}{25} = -\,\frac{414}{25},\\
537-546\,\frac{27}{25} &= \frac{537\cdot 25-546\cdot 27}{25} = \frac{13\,425-14\,742}{25} = -\,\frac{1\,317}{25},\\
50-154\,\frac{9}{25} &= \frac{50\cdot 25-154\cdot 9}{25} = \frac{1\,250-1\,386}{25} = -\,\frac{136}{25},\\
149-154\,\frac{27}{25} &= \frac{149\cdot 25-154\cdot 27}{25} = \frac{3\,725-4\,158}{25} = -\,\frac{433}{25}.
\end{aligned}
$$

Vous aimez le café-calcul corsé ? Alors vous allez être servis ! Maintenant, il faut diviser la deuxième ligne par $-\frac{414}{25}$, ce qui, en observant que :

$$
\frac{1\,317}{414} = \frac{3\cdot 439}{3\cdot 138} = \frac{439}{138}, \qquad\qquad -\,\frac{546}{414} = -\,\frac{6\cdot 91}{6\cdot 69} = -\,\frac{91}{69},
$$

donne :

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\boxed{1} & \frac{9}{25} & \frac{27}{25} & -\frac{1}{25} & 0 & 0\\
\mathbf{0} & -\frac{414}{25} & -\frac{1\,317}{25} & \frac{546}{25} & 1 & 0\\
\mathbf{0} & -\frac{136}{25} & -\frac{433}{25} & \frac{154}{25} & 0 & 1
\end{array}\right]
\longmapsto
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\boxed{1} & \frac{9}{25} & \frac{27}{25} & -\frac{1}{25} & 0 & 0\\
\mathbf{0} & \boxed{1} & \frac{439}{138} & -\frac{91}{69} & -\frac{25}{414} & 0\\
\mathbf{0} & -\frac{136}{25} & -\frac{433}{25} & \frac{154}{25} & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

Ensuite, il faut exploiter le nouveau pivot $\boxed{1}$ en position $(2,2)$ pour créer un vassal $\mathbf{0}$ se prosternant sous ses pieds, et simultanément aussi, un ange $\mathbf{0}$ au-dessus de lui :

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
\boxed{1} & \mathbf{0} & -\frac{3}{46} & \frac{10}{23} & \frac{1}{46} & 0\\
\boxed{1} & \frac{9}{25} & \frac{27}{25} & -\frac{1}{25} & 0 & 0\\
\mathbf{0} & -\frac{9}{25} & -\frac{9}{25}\frac{439}{138} & \frac{9}{25}\frac{91}{69} & \frac{9}{25}\frac{25}{414} & 0\\
\mathbf{0} & \boxed{1} & \frac{439}{138} & -\frac{91}{69} & -\frac{25}{414} & 0\\
\mathbf{0} & \frac{136}{25} & \frac{136}{25}\frac{439}{138} & -\frac{136}{25}\frac{91}{69} & -\frac{136}{25}\frac{25}{414} & 0\\
\mathbf{0} & -\frac{136}{25} & -\frac{433}{25} & \frac{154}{25} & 0 & 1\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{69} & -\frac{70}{69} & -\frac{68}{207} & 1
\end{array}
\longmapsto
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\boxed{1} & \mathbf{0} & -\frac{3}{46} & \frac{10}{23} & \frac{1}{46} & 0\\
\mathbf{0} & \boxed{1} & \frac{439}{138} & -\frac{91}{69} & -\frac{25}{414} & 0\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{69} & -\frac{70}{69} & -\frac{68}{207} & 1
\end{array}\right]
$$

tandis que par amour de la douleur, nous détaillons encore tous les calculs intemédiaires nécessaires :

$$
\begin{aligned}
\frac{27}{25}-\frac{9}{25}\,\frac{439}{138} &= \frac{1}{25}\left(\frac{27\cdot 138-9\cdot 439}{138}\right) = \frac{1}{25}\left(\frac{3\,726-3\,951}{138}\right) = \frac{-\,225}{25\cdot 138} = -\,\frac{9}{138} = -\,\frac{3}{46},\\
-\,\frac{1}{25}+\frac{9}{25}\,\frac{91}{69} &= \frac{-\,69+9\cdot 91}{25\cdot 69} = \frac{750}{25\cdot 69} = \frac{10}{23},\\
\frac{9}{25}\,\frac{25}{414} &= \frac{1}{46},\\
-\,\frac{433}{25}+\frac{136}{25}\,\frac{439}{138} &= \frac{-\,433\cdot 138+136\cdot 439}{25\cdot 138} = \frac{-\,59\,754+59\,704}{138\cdot 25} = \frac{-\,50}{25\cdot 138} = -\,\frac{1}{69},\\
\frac{154}{25}-\frac{136}{25}\,\frac{91}{69} &= \frac{154\cdot 69-136\cdot 91}{25\cdot 69} = \frac{10\,626-12\,376}{25\cdot 69} = \frac{-\,1\,750}{25\cdot 69} = -\,\frac{70}{69},\\
-\,\frac{136}{414} &= -\,\frac{68}{207}.
\end{aligned}
$$

Évidemment, il faut maitenant diviser la dernière ligne par $-\frac{1}{69}$, ce qui donne :

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\boxed{1} & \mathbf{0} & -\frac{3}{46} & \frac{10}{23} & \frac{1}{46} & 0\\
\mathbf{0} & \boxed{1} & \frac{439}{138} & -\frac{91}{69} & -\frac{25}{414} & 0\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{69} & -\frac{70}{69} & -\frac{68}{207} & 1
\end{array}\right]
\longmapsto
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\boxed{1} & \mathbf{0} & -\frac{3}{46} & \frac{10}{23} & \frac{1}{46} & 0\\
\mathbf{0} & \boxed{1} & \frac{439}{138} & -\frac{91}{69} & -\frac{25}{414} & 0\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{1} & 70 & \frac{68}{3} & -69
\end{array}\right]
$$

puis exploiter le nouveau pivot $\boxed{1}$ en position $(3,3)$ afin de créer deux belles auréoles **0** *made in France* au-dessus de lui :

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 5 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \\ \boxed{1} & \mathbf{0} & -\frac{3}{46} & \frac{10}{23} & \frac{1}{46} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{3}{46} & \frac{3}{46}\,70 & \frac{3}{46}\,\frac{68}{3} & -\frac{3}{46}\,69 \\ \mathbf{0} & \boxed{1} & \mathbf{0} & -224 & -\frac{433}{6} & \frac{439}{2} \\ \mathbf{0} & \boxed{1} & \frac{439}{138} & -\frac{91}{69} & -\frac{25}{414} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{439}{138} & -\frac{439}{138}\,70 & -\frac{439}{138}\,\frac{68}{3} & -\frac{439}{138}\,69 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{1} & 70 & \frac{68}{3} & -69 \end{array}\right. \longmapsto \left.\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 5 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \\ \mathbf{0} & \boxed{1} & \mathbf{0} & -224 & -\frac{433}{6} & \frac{439}{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{1} & 70 & \frac{68}{3} & -69 \end{array}\right.$$

tout en nous imposant une dernière fois par devoir d'auto-flagellation de détailler complètement les calculs rationnels impliqués :

$$\begin{aligned} \frac{10}{23}+\frac{3}{46}\,70 &= \frac{20+210}{46} = \frac{230}{46} = 5, \\ \frac{1}{46}+\frac{68}{46} &= \frac{69}{46} = \frac{3}{2}, \\ -\frac{91}{69}-\frac{439}{138}\,70 &= \frac{-91\cdot 2-439\cdot 70}{138} = \frac{-182-30\,730}{138} = \frac{-30\,912}{138} = -224, \\ -\frac{25}{414}-\frac{439}{138}\,\frac{68}{3} &= \frac{-25-439\cdot 68}{414} = \frac{-25-29\,852}{414} = \frac{-29\,877}{414} = -\frac{433}{6}. \end{aligned}$$

En conclusion, après tant d'efforts psychédéliques, nous avons enfin trouvé la matrice inverse :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \\ -224 & -\frac{433}{6} & \frac{439}{2} \\ 70 & \frac{68}{3} & -69 \end{bmatrix}.$$

13. Examen 7

Exercice 1. **(a)** On pose :

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -5 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sans calculer, trouver un vecteur non nul $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ qui est solution de $A\,\vec{x} = \vec{0}$. Indication: Regarder les colonnes 1, 2, et 3.

Exercice 2. **(a)** Résoudre le système linéaire suivant de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{aligned} 0 &= x - 3\,y + 1, \\ 0 &= 2\,x + 3\,y - 7. \end{aligned}$$

On notera A le point obtenu dans le plan $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$.

(b) On considère la droite D_1 paramétrée par $M_1(t) := \big(-1 + 3\,t,\, t\big)$ avec $t \in \mathbb{R}$ arbitraire. Construire une équation cartésienne de D_1.

(c) On considère aussi la droite D_2 paramétrée par $M_2(t) := \big(-1 + 3\,t,\, 3 - 2\,t\big)$ avec $t \in \mathbb{R}$ arbitraire. Construire de même une équation cartésienne de D_2.

(d) Déterminer l'intersection $D_1 \cap D_2$.

(e) Sur une figure soignée, représenter les droites D_1 et D_2, ainsi que le point A.

(f) Donner deux vecteurs directeurs $\vec{v}_{D_1}$ et $\vec{v}_{D_2}$ des deux droites D_1 et D_2, ainsi que deux points $P_1 \in D_1$ et $P_2 \in D_2$ tels que $P_1 \neq A \neq P_2$.

Exercice 3. **(a)** Résoudre le système linéaire :

$$\begin{aligned} x + 2\,y + 4\,z &= -\,2 \\ y + 5\,z &= 2 \\ -\,2\,x - 4\,y - 3\,z &= 9 \end{aligned}$$

(b) Déterminer toutes les solutions du système linéaire $B\,\vec{y} = \vec{y_0}$, où :

$$B := \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \qquad \vec{y} := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{y_0} := \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

(c) Mettre sous forme échelonnée la matrice :

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Entourer les pivots dans la matrice échelonnée obtenue.

(d) Mettre sous forme échelonnée *réduite* la matrice :

$$D := \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(e) Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} x + y + 2\,z &= -1, \\ 2\,x - y + 2\,z &= -4, \\ 4\,x + y + 4\,z &= -2. \end{aligned}$$

Exercice 4. Dans l'espace $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$, on considère le plan P_1 d'équation cartésienne $5\,x + y - 2\,z = 2$, ainsi que le plan P_2 d'équation cartésienne $2\,x - y + z = -\,7$.

(a) Résoudre le système linéaire qui décrit l'intersection $P_1 \cap P_2$:

$$\begin{aligned} 5\,x + y - 2\,z &= 2, \\ 2\,x - y + z &= -\,7, \end{aligned}$$

en exprimant y et z en fonction de la variable x (libre), puis, vérifier le résultat obtenu.

(b) Représenter la droite $D := P_1 \cap P_2$ sous forme paramétrique $M(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ avec $t \in \mathbb{R}$ quelconque. Indication: Renommer t au lieu de x la variable libre de la question précédente.

Ensuite, donner un vecteur directeur de D, ainsi que deux points distincts appartenant à D dont les trois coordonnées appartiennent à $\mathbb{Z}$.

(c) On considère une autre droite $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ paramétrée par une autre variable réelle $u \in \mathbb{R}$:

$$\Delta := \big\{\big(-1 + u,\ 2 + u,\ -3 - u\big) \colon\ u \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

Montrer que l'intersection $\Delta \cap P_1$ consiste en un point unique que l'on notera A, et dont on déterminera les trois coordonnées. Indication: Attention aux erreurs de calcul ! Avant de passer à la question suivante, *vérifier sur la copie d'examen que les coordonnées obtenues pour A appartiennent bien à au plan P_1 d'équation* $5\,x + y - 2\,z = 2$.

(d) Déterminer l'intersection $\Delta \cap P_2$.

(e) Déterminer les trois coordonnées de l'intersection $D \cap \Delta$ entre les deux droites considérées.

(f) Comparer les résultats obtenus aux deux Questions **(c)** et **(e)**.

(g) Élaborer une figure soignée accompagnée d'explications écrites claires et rigoureuses.

Exercice 5. On considère deux familles $(D_m)_{m\in\mathbb{R}}$ et $(D'_m)_{m\in\mathbb{R}}$ de droites dépendant d'un paramètre réel quelconque $m \in \mathbb{R}$, définies comme suit :

- D_m passe par le point $(2, -1, 1)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u}_m := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ m \\ m-1 \end{smallmatrix}\right)$;
- D'_m passe par le point $(-1, 1, -1)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u}'_m := \left(\begin{smallmatrix} 2-m \\ -3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de $m \in \mathbb{R}$ les droites D_m et D'_m sont-elles *parallèles ?*

14. Corrigé de l'examen 7

Exercice 1. (a) Visuellement, on remarque que la colonne 3 est la somme des colonnes 1 et 2. On peut donc prendre par exemple $\vec{x} := \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 2. (a) Résolvons $x := 3\,y - 1$ de l'équation 1 et remplaçons-le dans l'équation 2, ce qui donne :

$$0 \,=\, 2\,(3\,y - 1) + 3\,y - 7 \qquad\qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad\qquad 0 \,=\, 9\,y - 9,$$

d'où :

$$y \,:=\, 1, \qquad\qquad \text{puis :} \qquad\qquad x \,:=\, 3 \cdot 1 - 1 \,=\, 2.$$

Ainsi :

$$A \,:=\, (2, 1).$$

(b) Rappelons que pour une paramétrisation d'une droite de la forme $M(t) = \big(x_0 + \lambda\,t,\ y_0 + \mu\,t\big)$ avec des constantes $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, une équation cartésienne associée naturelle est de la forme :

$$-\,\mu\,x + \lambda\,y + c \,=\, 0,$$

où la constante c doit être ensuite simplement déterminée par l'équation :

$$-\,\mu\,(x_0 + \lambda\,t) + \lambda\,(y_0 + \mu\,t) + c \,=\, -\,\mu\,x_0 + \lambda\,y_0 + c,$$

dans laquelle la variable t a disparu, c'est-à-dire :

$$c \,:=\, \mu\,x_0 - \lambda\,y_0.$$

Ici, avec $M_1(t) = (-1 + 3\,t,\ t)$, on trouve comme équation cartésienne pour D_1 :

$$-\,x + 3\,y - 1 \,=\, 0.$$

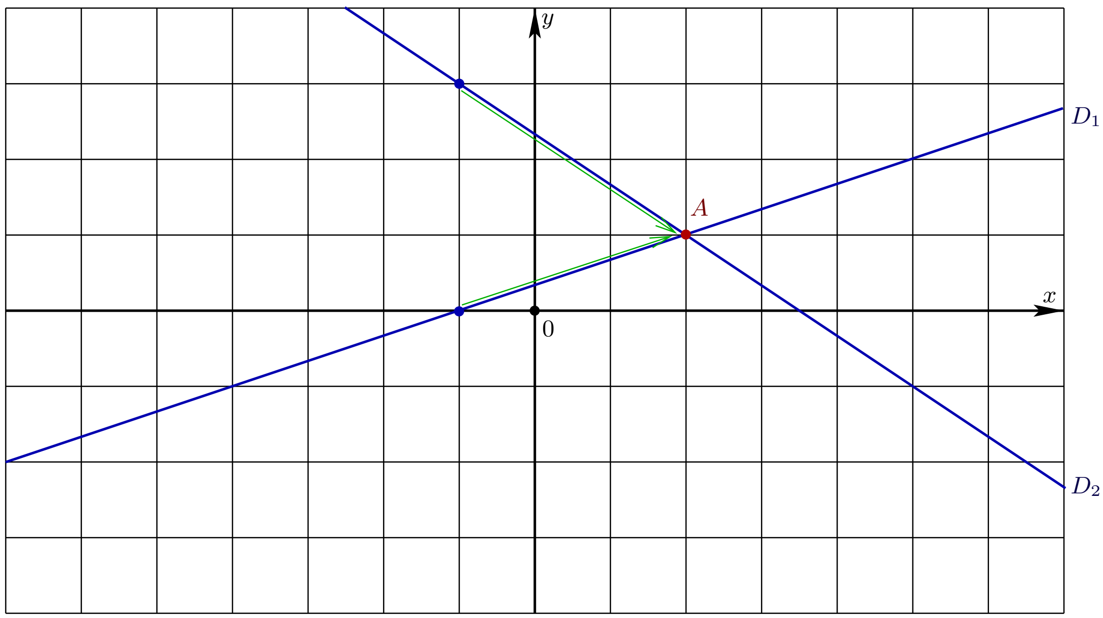
(c) La même recette s'applique, et donne pour équation cartésienne de D_2 :

$$2\,x + 3\,y - 7 \,=\, 0.$$

(d) Nous constatons que les deux équations de D_1 et de D_2 sont, au signe près, égales à celles de la Question **(a)**, donc sans aucun calcul supplémentaire, la réponse est :

$$D_1 \cap D_2 \,=\, \{A\} \,=\, \{(2, 1)\}.$$

(e) Voici la figure demandée :



(f) Par exemple :

$$\vec{v}_{D_1} := \binom{3}{1}, \qquad \vec{v}_{D_2} := \binom{3}{-2}, \qquad P_1 := (-1, 0), \qquad P_2 := (-1, 3).$$

Exercice 3. **(a)** L'équation 2 permet de résoudre $y := 2 - 5\,z$, ce que nous remplaçons dans les équations 1 et 3 :

$$\begin{aligned} x + 2\,(2 - 5\,z) + 4\,z &= -2 \\ -2\,x - 4\,(2 - 5\,z) - 3\,z &= 9 \end{aligned} \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad \begin{aligned} x - 6\,z &= -6, \\ -2\,x + 17\,z &= 17. \end{aligned}$$

Résolvons $x := -6 + 6\,z$, puis remplaçons :

$$-2\,(-6 + 6\,z) + 17\,z = 17 \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad 5\,z = 5,$$

d'où :

$$z := 1, \qquad y := 2 - 5 \cdot 1 = -3, \qquad x := -6 + 6 \cdot 1 = 0.$$

Ainsi, le système a une unique solution :

$$\mathsf{Sol} := \big\{(0, -3, 1)\big\}.$$

(b) Commençons par écrire la matrice complète du système linéaire associé :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \;y_1 & \;y_2 & \;y_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{array}\right] \end{array},$$

puis, appliquons-lui la méthode du pivot :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 5 & -4 & 7 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & -18 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 5 & -4 & 7 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

La dernière ligne du système linéaire, intégralement constituée de zéros, s'estompe, et il ne reste que deux équations :

$$\begin{aligned} 3\,y_1 + 5\,y_2 - 4\,y_3 &= 7, \\ 3\,y_2 \qquad\quad &= 6, \end{aligned}$$

qui se résolvent en :

$$y_2 := 2, \qquad \text{puis :} \qquad 3\,y_1 + 5 \cdot 2 - 4\,y_3 = 7,$$

$$\text{c'est-à-dire :} \qquad y_1 := \tfrac{7-10}{3} + \tfrac{4}{3}\,y_3.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\mathsf{Sol} := \big\{\big(-1 + \tfrac{4}{3}\,y_3,\ 2,\ y_3\big) \colon\ y_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

(c) Évidemment, le terme à la place $(1,1)$ sert de pivot :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ensuite, la deuxième colonne étant constituée seulement de zéros, elle ne peut contenir aucun pivot. Il faut donc passer à la colonne d'après, où l'on trouve à la deuxième ligne $-13 \neq 0$, qui peut servir de pivot.

On multiplie alors cette deuxième ligne par $\frac{1}{13}$ et on ajoute le résultat à la troisième ligne, afin de faire disparaître le 1 en-dessous du -13, ce qui fournit la forme échelonnée (non réduite) de la matrice de départ :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{-13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Commençons par multiplier la première ligne par -1, utilisons le pivot à la place $(1,1)$, et divisons la deuxième ligne obtenue par -4 :

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ensuite, utilisons le pivot à la place $(2,2)$, puis divisons la troisième ligne par 3 :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}.$$

Pour terminer, remontons avec la méthode du pivot en partant du dernier terme en bas à droite :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}.$$

La matrice échelonnée réduite recherchée est dont la matrice identité $I_{4\times 4}$, comme c'est le cas pour toute matrice inversible $D \in \mathscr{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

(e) Soumettons la matrice complète de ce système à l'algorithme du pivot, jusqu'à obtenir une forme échelonnée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{-3} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 4 \end{array}\right].$$

Puisque la forme obtenue est du type :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * \end{array}\right],$$

nous savons que ce système a nécessairement une solution unique.

Pour déterminer cette solution, poursuivons les calculs jusqu'à obtenir une forme échelonnée *réduite :*

$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \end{array}.$$

En définitive, la solution unique se lit de manière instantanée comme étant :

$$x := 1, \qquad y := 2, \qquad z := -2.$$

Exercice 4. (a) En additionnant ces deux équations, la variable y disparaît :

$$7x + 0y - z = -5,$$

ce qui nous permet d'exprimer z en fonction de x :

$$z := 7x + 5,$$

que nous remplaçons alors dans la première équation :

$$\begin{aligned} y &= -5x + 2z + 2 \\ &= -5x + 14x + 10 + 2 \\ &= 9x + 12. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathsf{Sol} = \big\{\big(x,\ 9x+12,\ 7x+5\big) :\ x \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

Enfin, vérifions que ces solutions infinies paramétrées par la variable libre $x \in \mathbb{R}$ satisfont bien les deux équations initiales du système :

$$\begin{aligned} 5x + 9x + 12 - 14x - 10 &= 2 && \text{OUI !}, \\ 2x - 9x - 12 + 7x + 5 &= -7 && \text{OUI !}. \end{aligned}$$

(b) Nous venons de voir que :

$$D = P_1 \cap P_2 = \big\{\big(t,\ 9t+12,\ 7t+5\big) :\ t \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

Il est alors clair que les trois coordonnées d'un vecteur directeur de D sont les trois coefficients de t :

$$\vec{v}_D := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{smallmatrix}\right).$$

En prenant $t := 0$ puis $t := 1$, nous trouvons deux points à coordonnées entières qui appartiennent à D :

$$\big(0,\, 12,\, 5\big) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \big(1,\, 21,\, 12\big).$$

(c) D'après un raisonnement logique élémentaire vu en cours, un point général $A = A_u = \big(-1+u,\, 2+u,\, -3-u\big)$ de la droite Δ appartient éventuellement aussi au plan P_1 si et seulement si :

$$\begin{aligned} & 5\,(-1+u)+(2+u)-2\,(-3-u) \overset{?}{=} 2 \\ \Longleftrightarrow \qquad & -5+5\,u+2+u+6+2\,u \overset{?}{=} 2 \\ \Longleftrightarrow \qquad & 8\,u+3 \overset{?}{=} 2 \\ \Longleftrightarrow \qquad & 8\,u \overset{?}{=} -1, \end{aligned}$$

et comme il y a la solution unique :

$$u := -\tfrac{1}{8},$$

ceci montre que l'intersection $\Delta \cap P_1$ consiste en un point unique, noté A.

Ainsi, les trois coordonnées de A s'obtiennent en faisant $u := -\frac{1}{8}$ dans la représentation paramétrique de Δ, ce qui donne :

$$\begin{aligned} A &= \big(-1-\tfrac{1}{8},\; 2-\tfrac{1}{8},\; -3+\tfrac{1}{8}\big) \\ &= \big(-\tfrac{9}{8},\; \tfrac{15}{8},\; -\tfrac{23}{8}\big). \end{aligned}$$

Enfin, comme demandé par le sujet d'examen, vérifions que A appartient bien au plan P_1 :

$$\begin{aligned} & 5\,\big(-\tfrac{9}{8}\big)+\tfrac{15}{8}-2\,\big(-\tfrac{23}{8}\big) \overset{?}{=} 2 \\ \Longleftrightarrow \qquad & -\tfrac{45}{8}+\tfrac{15}{8}+\tfrac{46}{8} \overset{?}{=} 2 \qquad\qquad \text{OUI !.} \end{aligned}$$

(d) De même, un point général $B = B_u = \big(-1+u,\, 2+u,\, -3-u\big)$ de la droite Δ appartient éventuellement aussi au plan P_2 d'équation $2\,x-y+z=-7$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} & 2\,(-1+u)-(2+u)+(-3-u) \overset{?}{=} -7 \\ \Longleftrightarrow \qquad & -7+\mathbf{0}\cdot u \overset{?}{=} -7. \end{aligned}$$

On observe que la variable u disparaît complètement ! Et que la belle équation-espionnne $-7=-7$ de James Bond est trivialement satisfaite !

Ainsi, *tous* les points $B = B_u \in \Delta$ appartiennent à P_2. Autrement dit, la droite Δ *complète* est contenue dans $P_2 \supset \Delta$, d'où :

$$\Delta \cap P_2 = \Delta.$$

(e) Comme D et Δ sont données sous forme paramétrique, il s'agit de résoudre le système suivant de trois équations aux deux inconnues t et u qui paramètrent les points arbitraires $A_t \in D$ et $B_u \in \Delta$:

$$\begin{aligned} t &= -1+u, \\ 9\,t+12 &= 2+u, \\ 7\,t+5 &= -3-u. \end{aligned}$$

La première équation permet de résoudre $u := 1+t$, que l'on remplace dans toutes les équations qui suivent, ce qui donne :

$$\begin{aligned} 9\,t+12 &= 3+t, \\ 7\,t+5 &= -4-t, \end{aligned} \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad \begin{aligned} 9 &= -8\,t, \\ 9 &= -8\,t. \end{aligned}$$

Chouette ! Ces deux équations identiques ont une unique solution commune :

$$t = -\tfrac{9}{8}.$$

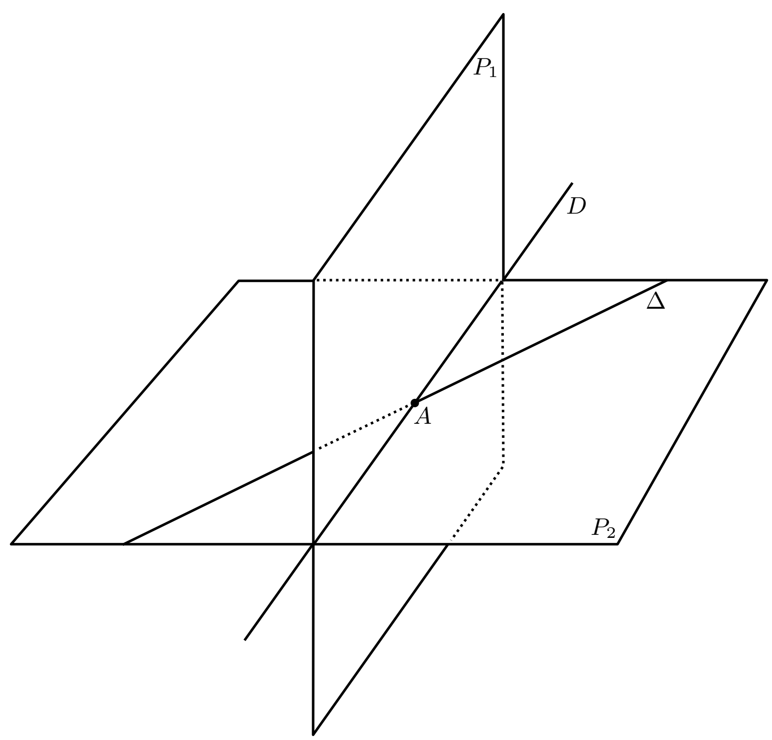
Ceci démontre que l'intersection $D \cap \Delta$ consiste en un point unique, dont les trois coordonnées sont :

$$\begin{aligned}\Big(-\tfrac{9}{8},\ 9\,(-\tfrac{9}{8})+12,\ 7\,(-\tfrac{9}{8})+5\Big) &= \big(-\tfrac{9}{8},\ \tfrac{-81+96}{8},\ \tfrac{-63+40}{8}\big)\\ &= \big(-\tfrac{9}{8},\ \tfrac{15}{8},\ -\tfrac{23}{8}\big)\\ &= A.\end{aligned}$$

(f) Tiens ! On retrouve le point A ! Étonnant ! Ainsi, nous constatons l'égalité :

$$\Delta \cap P_1 = \{A\} = D \cap \Delta.$$

(g) La situation de départ est celle de deux plans P_1 et P_2 non parallèles qui s'intersectent en une droite $D = P_1 \cap P_2$.



Rien de plus classique ! Ensuite, une autre droite Δ est introduite, qui intersecte le plan P_1 en un point unique, $A = \Delta \cap P_1$.

Mais on constate que cette droite Δ est en fait entièrement contenue dans le plan $P_2 \supset \Delta$. Comme D est aussi naturellement contenue dans P_2, les deux droites D et Δ sont *coplanaires* dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

La disposition relative possible de D et de Δ est alors la même que celle de deux droites dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Question. *Mais alors, pourquoi ces deux droites sont-elles sécantes $D \cap \Delta = \{A\}$ précisément en le point trouvé à la Question* **(c)** **?**

Tout simplement parce que, comme $\Delta \subset P_2$, on a :

$$\begin{aligned}\{A\} = P_1 \cap \Delta &\subset P_1 \cap P_2 \cap \Delta\\ &= D \cap \Delta.\end{aligned}$$

Donc l'intersection $D \cap \Delta$ est non vide, car elle contient le singleton $\{A\}$.

Enfin, cette intersection $D \cap \Delta$ se réduit nécessairement au singleton $\{A\}$, car D et Δ ne peuvent pas être confondues, puisque leurs vecteurs directeurs respectifs :

$$\vec{v}_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_\Delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas multiples l'un de l'autre (ne sont pas colinéaires). Ceci termine les explications !

Exercice 5. (a) Les deux points dont sont issues D_m et D'_m « comptent pour du beurre » (petit "piège" au passage), car il suffit de demander que les deux vecteurs directeurs $\vec{u}_m$ et $\vec{u}'_m$ soient *colinéaires*, autrement dit, qu'il existe un nombre réel non nul $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{u}_m = \lambda\, \vec{u}'_m$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda\,(2-m), \\ m &= \lambda\,(-3), \\ m-1 &= \lambda\,(-2). \end{aligned}$$

La ligne 2 garantit que $m \neq 0$ puisque $\lambda \neq 0$. Additionner les lignes 1 et 3 donne :

$$m = -\,\lambda\, m,$$

et comme $m \neq 0$, on peut diviser par m pour trouver $1 = -\lambda$, d'où en revenant à la ligne 2 la résolution $m = (-1)\,(-3) = 3$.

Ainsi, seule la valeur $m = 3$ peut convenir, et on vérifie, pour $m = 3$, qu'on a bien la colinéarité :

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -\,\vec{u}'_3.$$

15. Examen 8

Exercice 1. **(a)** Résoudre le système linéaire :

$$\begin{aligned} x + 4\,y + 4\,z &= -\,4 \\ 2\,y + 5\,z &= 4 \\ -\,2\,x - 8\,y - 3\,z &= 18 \end{aligned}$$

puis, vérifier que la solution obtenue est bien solution du système initial.

(b) Mettre sous forme échelonnée la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 17 \end{bmatrix},$$

et entourer les pivots dans la matrice échelonnée obtenue.

Exercice 2. Dans l'espace vectoriel $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$, soient les 4 vecteurs :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &:= \big(1,\ -1,\ 0,\ 2\big), \\ \vec{v}_2 &:= \big(1,\ 0,\ 1,\ 2\big), \\ \vec{v}_3 &:= \big(1,\ 3,\ 5,\ 7\big), \\ \vec{v}_4 &:= \big(0,\ 2,\ 3,\ a\big), \end{aligned}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Échelonner la matrice à 4 lignes et à 5 colonnes :

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 2 & u_1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & u_2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & u_3 \\ 0 & 2 & 3 & a & u_4 \end{matrix}$$

où u_1, u_2, u_3, u_4 sont 4 variables réelles. Indication: On demande une forme échelonnée tout court, pas réduite. Ne pas faire d'erreur pour les éléments de la cinquième colonne, qui doivent être des combinaisons linéaires de u_1, u_2, u_3, u_4. Bien vérifier ses calculs avant de poursuivre.

(b) Montrer que les 3 vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ sont linéairement indépendants.

(c) Lorsque $a = 5$, exprimer explicitement $\vec{v}_4$ linéairement en fonction de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$. Indication: On pourra utiliser ce qui précède.

(d) Lorsque $a \neq 5$, montrer que :

$$\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4} \,=\, \mathrm{Vect}\,\big(\vec{v}_1,\, \vec{v}_2,\, \vec{v}_3,\, \vec{v}_4\big).$$

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $2 \leqslant n < \infty$, et soit $B = \big\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\big\}$ une *base* de E. On suppose que B est *partitionnée* (décomposée) en 2 sous-ensembles non vides $B' \subset B$ et $B'' \subset B$ avec :

$$B \,=\, B' \cup B'', \qquad\qquad \emptyset \,=\, B' \cap B'',$$

de cardinaux (nombre d'éléments) :

$$\mathsf{Card}\, B' \;=:\; p \;\geqslant\; 1 \qquad\qquad \mathsf{Card}\, B'' \;=:\; q \;\geqslant\; 1,$$
$$n \;=\; p+q.$$

On pose :

$$E' \;:=\; \mathsf{Vect}\, B' \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad E'' \;:=\; \mathsf{Vect}\, B''.$$

(a) Montrer que :

$$E' + E'' \;=\; E.$$

Indication: Après renumérotation éventuelle, on pourra supposer que $B' = \big\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p\big\}$ et que $B'' = \big\{\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_{p+q}\big\}$.

(b) Montrer que :

$$E' \cap E'' \;=\; \big\{\vec{0}\big\}.$$

(c) En déduire que E' et E'' sont *supplémentaires* dans E, à savoir que :

$$E' \oplus E'' \;=\; E.$$

Exercice 4. Soit $u\colon \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4} \longrightarrow \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$ l'application linéaire définie, pour tout vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, par :

$$u(\vec{x}) \;:=\; \big(x_1 - x_2 + x_3,\; 0,\; x_1 + x_2 - x_3 + x_4,\; x_4\big).$$

On pose :

$$E \;:=\; \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4} \colon\; x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\big\}.$$

Dans les raisonnements, on pourra utiliser la base canonique $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\big\}$ de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$.

(a) Déterminer une base de $\mathsf{Ker}\, u$. Que vaut $\dim \mathsf{Ker}\, u$? Que vaut $\dim \mathsf{Im}\, u$?

(b) Déterminer une base de $\mathsf{Im}\, u$, exprimée en fonction de $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\big\}$. Indication: Il y a une base très simple !

(c) A-t-on la somme directe :

$$\mathsf{Ker}\, u \oplus \mathsf{Im}\, u \;=\; \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}\; \textbf{?}$$

(d) Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$.

(e) Déterminer une base de E. Que vaut $\dim E$?

(f) A-t-on la somme directe :

$$\mathsf{Ker}\, u \oplus E \;=\; \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}\; \textbf{?}$$

16. Corrigé de l'examen 8

Exercice 1. **(a)** L'équation 2 permet de résoudre $y := 2 - \frac{5}{2}\,z$, ce que nous remplaçons dans les équations 1 et 3 :

$$\begin{aligned} x + 4\left(2 - \tfrac{5}{2}\,z\right) + 4\,z &= -4 \\ -2\,x - 8\left(2 - \tfrac{5}{2}\,z\right) - 3\,z &= 18 \end{aligned} \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad \begin{aligned} x - 6\,z &= -12, \\ -2\,x + 17\,z &= 34. \end{aligned}$$

Résolvons $x := -12 + 6\,z$, puis remplaçons :

$$-2\,(-12 + 6\,z) + 17\,z = 34 \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad 5\,z = 10,$$

d'où :

$$z := 2, \qquad y := 2 - \tfrac{5}{2}\cdot 2 = -3, \qquad x := -12 + 6\cdot 2 = 0.$$

Ainsi, le système a une unique solution :

$$\mathsf{Sol} := \big\{(0,\,-3,\,2)\big\}.$$

Enfin, vérifions que la solution trouvée est bien solution du système linéaire de départ :

$$\begin{aligned} 0 + 4(-3) + \quad 4(2) &\overset{?}{=} -4 && \text{OUI}, \\ 2(-3) + \quad 5(2) &\overset{?}{=} \quad 4 && \text{OUI}, \\ -2(0) - 8(-3) + -3(2) &\overset{?}{=} \quad 18 && \text{OUI}. \end{aligned}$$

(b) Évidemment, le terme à la place $(1, 1)$ sert de pivot :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 17 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ensuite, la deuxième colonne étant constituée seulement de zéros, elle ne peut contenir aucun pivot. Il faut donc passer à la colonne d'après, où l'on trouve à la deuxième ligne $-13 \neq 0$, qui peut servir de pivot.

On multiplie alors cette deuxième ligne par $\frac{9}{13}$ et on ajoute le résultat à la troisième ligne, afin de faire disparaître le 9 en-dessous du -13, ce qui fournit une forme échelonnée (non réduite) de la matrice de départ :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{-13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2. **(a)** On trouve :

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & -1 & 0 & 2 & u_1 \\
1 & 0 & 1 & 2 & u_2 \\
1 & 3 & 5 & 7 & u_3 \\
0 & 2 & 3 & a & u_4
\end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{ccccc}
1 & -1 & 0 & 2 & u_1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & u_2 - u_1 \\
0 & 4 & 5 & 5 & u_3 - u_1 \\
0 & 2 & 3 & a & u_4
\end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow \quad
\begin{array}{ccccc}
1 & -1 & 0 & 2 & u_1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & u_2 - u_1 \\
0 & 0 & 1 & 5 & u_3 - 4u_2 + 3u_1 \\
0 & 0 & 1 & a & u_4 - 2u_2 + 2u_1
\end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow \quad
\begin{array}{ccccc}
1 & -1 & 0 & 2 & u_1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & u_2 - u_1 \\
0 & 0 & 1 & 5 & u_3 - 4u_2 + 3u_1 \\
0 & 0 & 0 & a-5 & u_4 - u_3 + 2u_2 - u_1
\end{array}
$$

(b) Évidemment, il y a une correspondance directe entre les vecteurs $\vec{v}_i$ et les variables u_i, de telle sorte que :

$$
\begin{aligned}
\big(1,\ -1,\ 0,\ 2\big) &= \vec{v}_1, \\
\big(0,\ 1,\ 1,\ 0\big) &= \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \\
\big(0,\ 0,\ 1,\ 5\big) &= \vec{v}_3 - 4\vec{v}_2 + 3\vec{v}_1.
\end{aligned}
$$

Les 3 opérations vues en cours qui sont autorisées dans la méthode du pivot pour des *équations linéaires disposées ligne à ligne* sont réversibles. De même, lorsqu'on dispose les coordonnées des vecteurs selon des lignes (et non pas selon des colonnes), les trois opérations en question sont réversibles, ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\big) &= \mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2 - \vec{v}_1,\ \vec{v}_3 - 4\vec{v}_2 + 3\vec{v}_1\big) \\
&=: \mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1',\ \vec{v}_2',\ \vec{v}_3'\big).
\end{aligned}
$$

Maintenant, les trois vecteurs $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$, $\vec{v}_3'$ sont manifestement linéairement indépendants, puisque la matrice de leurs coordonnées dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$:

$$
\begin{array}{cccc}
\boxed{1} & -1 & 0 & 2 \\
0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\
0 & 0 & \boxed{1} & 5
\end{array}
$$

comporte 3 pivots, autant qu'il y a de vecteurs.

Un moyen direct (et pédagogiquede) de se convaincre de leur indépendance linéaire est de tester s'il existe des scalaires λ_1, λ_2, λ_3 *non tous nuls* tels que :

$$
\begin{aligned}
\big(0,\ 0,\ 0,\ 0\big) &= \lambda_1\,\vec{v}_1' + \lambda_2\,\vec{v}_2' + \lambda_3\,\vec{v}_3' \\
&= \lambda_1\,\big(1,\ -1,\ 0,\ 2\big) + \lambda_2\,\big(0,\ 1,\ 1,\ 0\big) + \lambda_3\,\big(0,\ 0,\ 1,\ 5\big) \\
&= \Big(\lambda_1,\ \ -\lambda_1 + \lambda_2,\ \ \lambda_2 + \lambda_3,\ \ *\Big),
\end{aligned}
$$

la valeur de $*$ n'important guère, d'où $0 = \lambda_1$, puis $0 = \lambda_2$, et enfin $0 = \lambda_3$, ce qui montre bien l'indépendance linéaire affirmée.

Donc :

$$
\begin{aligned}
3 &= \dim \mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1',\ \vec{v}_2',\ \vec{v}_3'\big) \\
&= \dim \mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\big),
\end{aligned}
$$

ce qui, d'après un théorème du cours, que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ sont bien linéairement indépendants.

(c) Effectivement, il suffit de constater que, pour la valeur spéciale $a = 5$ (années pour valider la LDD1 ?), la dernière ligne de la matrice calculé à la Question **(a)** est identiquement nulle (on vous l'avait dit, il lui faudra au moins 5 ans d'études à cette ligne nulle) :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 0 & 2 & & u_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & u_2 - u_1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & & u_3 - 4u_2 + 2u_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & u_4 - u_3 + 2u_2 - u_1 \end{array}$$

et de lire l'élément en colonne 5 de la ligne 4 pour constater que :

$$\vec{0} = \vec{v}_4 - \vec{v}_3 + 2\,\vec{v}_2 - \vec{v}_1,$$

ce que l'on peut vérifier en privé sur du papier de brouillon.

(d) Lorsque $a \neq 5$, l'élément situé en ligne 4 colonne 4 :

$$\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & -1 & 0 & 2 & & u_1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & & u_2 - u_1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 5 & & u_3 - 4u_2 + 2u_1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{a-5} & & u_4 - u_3 + 2u_2 - u_1 \end{array}$$

est aussi un pivot. Si l'on pose :

$$\big(0,\ 0,\ 0,\ a-5\big) =: \vec{v}_4' = \vec{v}_4 - \vec{v}_3 + 2\,\vec{v}_2 - \vec{v}_1,$$

l'argument utilisé à la Question **(b)** montre de manière similaire que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4} &\overset{\text{pivots}}{=} \mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3', \vec{v}_4',\big) \\ &= \mathsf{Vect}\big(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\big). \end{aligned}$$

Exercice 3. **(a)** Clairement :

$$\begin{aligned} E' + E'' &= \mathsf{Vect}\,B' + \mathsf{Vect}\,B'' \\ &= \Big\{\lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_p\vec{e}_p \in E\colon\ \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \text{ quelconques}\Big\} \\ &\quad + \Big\{\mu_1\vec{e}_{p+1} + \cdots + \mu_p\vec{e}_{p+q} \in E\colon\ \mu_1, \dots, \mu_q \in \mathbb{R} \text{ quelconques}\Big\} \\ &= \Big\{\lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_p\vec{e}_p + \mu_1\vec{e}_{p+1} + \cdots + \mu_p\vec{e}_{p+q} \in E\colon\ \lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q \in \mathbb{R}\ \Big\} \\ &= \Big\{\nu_1\vec{e}_1 + \cdots + \nu_n\vec{e}_n \in E\colon\ \nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{R}\Big\} \\ &= E. \end{aligned}$$

(b) Si nous prenons un vecteur de E' qui appartient aussi à E'', il est de la forme :

$$\underbrace{\lambda_1^o\,\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_p^o\,\vec{e}_p}_{\in E'} = \underbrace{\mu_1^o\,\vec{e}_{p+1} + \cdots + \mu_{p+q}^o\,\vec{e}_{p+q}}_{\in E''},$$

pour certaines constantes spécifiques $\lambda_i^o, \mu_j^o \in \mathbb{R}$.

Là-dessus, le Capitaine (Fracasse) du Navire nous ordonne « *À droite, toute !* » :

$$\vec{0} = \big(-\lambda_1^o\big)\,\vec{e}_1 + \cdots + \big(-\lambda_p^o\big)\,\vec{e}_p + \mu_1^o\,\vec{e}_{p+1} + \cdots + \mu_{p+q}^o\,\vec{e}_n,$$

ce qui est une relation de dépendance linéaire entre les n vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$.

Mais comme par hypothèse $B = \big\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\big\}$ est une *base* de E, et donc en particulier, une famille *libre* de n vecteurs de E, il devrait naturellement être absolument incontournable que tous ces coefficients spécifiques s'annulassent :

$$0 = -\lambda_1^o = \cdots = -\lambda_p^o = \mu_1^o = \cdots = \mu_{p+q}^o,$$

et donc au final, les deux vecteurs dont nous somme partis il y a quelques secondes sont en fait tous les deux égaux à :

$$\vec{0} = \vec{0}.$$

Comme nous avions pris n'importe quel vecteur de E' appartenant simultanément à E'', nous concluons bien que :

$$\{\vec{0}\} = E' \cap E''.$$

(c) D'après la définition vue en cours d'une paire de sous-espaces vectoriels $E' \subset E$ et $E'' \subset E$ qui soient en *somme directe* dans $E = E' \oplus E''$:

$$E' \cap E'' = \{\vec{0}\} \qquad \text{et} \qquad E' + E'' = E,$$

nous venons exactement de démontrer dans les Question **(a)** et **(b)** que tel est bien le cas de $E' = \mathsf{Vect}\, B'$ et $E'' = \mathsf{Vect}\, B''$, ce qui démontre que pour toute base d'un espace vectoriel, et pour tout partition non triviale de cette base, on peut gratuitement produire *plein de décompositions de E et sous-espaces vectoriels supplémenaires*.

Exercice 4. **(a)** On a $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathsf{Ker}\, u$ si et seulement si les 4 coordonnées de $u(\vec{x})$ s'annulent, d'où le système linéaire :

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 \quad &= 0 \\ 0 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 \quad &= 0 \\ \\ x_1 + x_2 - x_3 \quad &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} 2\,x_1 &= 0 \\ \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

donc :

$$\vec{x} = \big(0, x_3, x_3, 0\big) = x_3\,(0,1,1,0).$$

Dans la base canonique $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$, en introduisant alors le vecteur :

$$\vec{a} := \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

nous trouvons :

$$\mathsf{Ker}\, u = \mathsf{Vect}\,\big(\vec{a}\big),$$

et donc :

$$\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\, u = 1.$$

Enfin, un théorème vu en cours donne :

$$\mathsf{dim}\,\mathsf{Im}\, u = \mathsf{dim}\,\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4} - \mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\, u = 4 - 1 = 3.$$

(b) L'image de u est engendrée — linéairement ! — par les 4 vecteurs :

$$\begin{aligned} u\big(\vec{e}_1\big) &= (1,0,1,0) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \\ u\big(\vec{e}_2\big) &= (-1,0,1,0) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \\ u\big(\vec{e}_3\big) &= (1,0,-1,0) = \vec{e}_1 - \vec{e}_3, \\ u\big(\vec{e}_4\big) &= (0,0,1,1) = \vec{e}_3 + \vec{e}_4. \end{aligned}$$

Or, puisqu'il est visible que $u(\vec{e}_2) = -\,u(\vec{e}_3)$, il vient grâce aux 3 opérations élémentaires vues en cours :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Vect}\Big(u(\vec{e}_1),\, u(\vec{e}_2),\, u(\vec{e}_3),\, u(\vec{e}_4)\Big) &= \mathsf{Vect}\Big(u(\vec{e}_1),\, u(\vec{e}_3),\, u(\vec{e}_4)\Big) \\
&= \mathsf{Vect}\Big(\vec{e}_1+\vec{e}_3,\ \vec{e}_1-\vec{e}_3,\ \vec{e}_3+\vec{e}_4\Big) \\
&= \mathsf{Vect}\Big(\vec{e}_1+\vec{e}_3,\ 2\,\vec{e}_1,\ \vec{e}_3+\vec{e}_4\Big) \\
&= \mathsf{Vect}\Big(\vec{e}_1+\vec{e}_3,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_3+\vec{e}_4\Big) \\
&= \mathsf{Vect}\Big(\vec{e}_3,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_3+\vec{e}_4\Big) \\
&= \mathsf{Vect}\Big(\vec{e}_1,\ \vec{e}_3,\ \vec{e}_4\Big).
\end{aligned}$$

(c) Dans un espace vectoriel E de dimension $2 \leqslant n < \infty$, soient deux sous-espaces vectoriels $F \subset E$ et $G \subset E$ de dimensions respectives $1 \leqslant p \leqslant n-1$ et $1 \leqslant q \leqslant n-1$ qui sont *complémentaires* au sens où :

$$p+q = n.$$

Alors d'après le cours, $F \oplus G = E$ sont en *somme directe* dans E si et seulement si :

$$F \cap G = \big\{\vec{0}\big\},$$

puisque cette intersection nulle *force* $E+F=G$. Et en fait, dans le cas de dimensions *complémentaires*, on a les deux équivalences :

$$\begin{aligned}
F \oplus G = E \qquad &\Longleftrightarrow \qquad F\cap G = \big\{\vec{0}\big\} \\
&\Longleftrightarrow \qquad F+G = E.
\end{aligned}$$

Qui plus est, lorsque E est de dimension $p=1$, d'où $q=n-1$, on a $F\cap G = \big\{\vec{0}\big\}$ si et seulement si $F \not\subset G$ n'est *pas* contenu dans G.

Or ici précisément, d'après un théorème du cours :

$$1+3 = \mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\,u + \mathsf{dim}\,\mathsf{Im}\,u \overset{\mathsf{Thm}}{=} \mathsf{dim}\,\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4} = 4.$$

Donc pour déterminer si l'on a :

$$\mathsf{Ker}\,u \oplus \mathsf{Im}\,u \overset{\mathbf{?}}{=} \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4},$$

il suffirait de savoir si $\mathsf{Ker}\,u \not\subset \mathsf{Im}\,u$, c'est-à-dire si $\vec{a} \notin \mathsf{Im}\,u$.

De manière encore équivalente, il suffit de déterminer si :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4} &\overset{\mathbf{?}}{=} \mathsf{Ker}\,u + \mathsf{Im}\,u \\
&= \mathsf{Vect}\,\big(\vec{a}\big) + \mathsf{Vect}\,\big(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\big) \\
&= \mathsf{Vect}\,\big(\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ \vec{e}_1,\, \vec{e}_3,\, \vec{e}_4\big) \\
&= \mathsf{Vect}\,\big(\vec{e}_2,\, \vec{e}_1,\, \vec{e}_3,\, \vec{e}_4\big) \qquad\qquad \text{OUI.}
\end{aligned}$$

(d) Pour tous $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ et tous vecteurs $\vec{x},\vec{y} \in E$, c'est-à-dire dont les coordonnées satisfont :

$$x_1+x_2-x_3+x_4 = 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad y_1+y_2-y_3+y_4 = 0,$$

il est clair que $\lambda\,\vec{x}+\mu\,\vec{y} \in E$ aussi, puisque l'on a bien :

$$\begin{aligned}
&\lambda\,x_1+\mu\,y_1+\lambda\,x_2+\mu\,y_2-\lambda\,x_3-\mu\,y_3+\lambda\,x_3+\mu\,y_3 \\
=\ &\lambda\,\big(x_1+x_2-x_3+x_4\big)+\mu\,\big(y_1+y_2-y_3+y_4\big) \\
=\ &0+0.
\end{aligned}$$

(e) Pour tout $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$, c'est-à-dire avec $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$, on résout :

$$x_1 := -x_2 + x_3 - x_4,$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \big(-x_2 + x_3 - x_4,\ x_2,\ x_3,\ x_4\big) \\ &= x_2\,\underbrace{(-1,1,0,0)}_{=:\,\vec{b}} + x_3\,\underbrace{(1,0,1,0)}_{=:\,\vec{c}} + x_4\,\underbrace{(-1,0,0,1)}_{=:\,\vec{d}}, \end{aligned}$$

d'où en introduisant les 3 vecteurs soulignés :

$$\vec{x} = x_2\,\vec{b} + x_3\,\vec{c} + x_4\,\vec{d},$$

ce qui montre que $\big\{\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\big\}$ *engendre* E.

Mais sont-ils linéairement indépendants ? Oui, car on voit immédiatement que le système linéaire correspondant :

$$\begin{aligned} \vec{0} = \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} + \delta\,\vec{d} \quad &\Longleftrightarrow \quad (0,0,0,0) = \big(-\beta, \beta, 0, 0\big) + \big(\gamma, 0, \gamma, 0\big) + \big(-\delta, 0, 0, \delta\big) \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = -\beta + \gamma - \delta, \\ 0 = \beta, \\ 0 = \gamma, \\ 0 = \delta, \end{cases} \end{aligned}$$

n'a que la solution nulle-triviale !

En définitive, $\big\{\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\big\}$ constitue une *base* du sous-espace vectoriel $E \subset \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$.

(f) Rappelons que $\mathsf{Ker}\,u = \mathsf{Vect}\,\big(\vec{a}\big)$, avec $\vec{a} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (0,1,1,0)$. Mais comme les 4 coordonnées de $\vec{a}$ satisfont l'équation définissante de E :

$$0 + 1 - 1 + 0 = 0,$$

nous constatons que :

$$\vec{a} \in E, \qquad\qquad \text{d'où} \qquad\qquad \mathsf{Ker}\,u \subset E,$$

ce qui rend *impossible*, d'après les résultats du cours revus à la Question **(c)**, le fait que $\mathsf{Ker}\,u$, de dimension 1, soit en somme directe avec E, de dimension $3 = 4 - 1$, dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$, de dimension 4.

17. Examen 9

Exercice 1. Soit la matrice :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix},$$

où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre quelconque.

(a) En appliquant l'algorithme du pivot à la matrice augmentée $\big(A \big| I_3\big)$, montrer que A est inversible si et seulement si $m \neq 0$.

(b) Calculer det A. Que cela confirme-t-il ?

(c) Lorsque $m \neq 0$, déterminer explicitement la matrice inverse A^{-1}.

(d) Vérifier par un calcul que la matrice trouvée est bien l'inverse de A. Indication: D'après le cours, il suffit de vérifier que $A\,A^{-1} = I_3$.

Exercice 2. Soit le déterminant :

$$\Delta := \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sont quatre constantes réelles.

(a) Montrer que si :

$$\big(\,a = 0\,\big) \qquad \text{ou} \qquad \big(\,b = a\,\big) \qquad \text{ou} \qquad \big(\,c = b\,\big) \qquad \text{ou} \qquad \big(\,d = c\,\big),$$

alors $\Delta = 0$.

(b) Montrer que :

$$\Delta = a\,\big(b - a\big)\,\big(c - b\big)\,\big(d - c\big).$$

(c) Sans démonstration, et en n'écrivant qu'une ou deux lignes sur la copie d'examen, deviner la valeur du déterminant :

$$\square := \begin{vmatrix} a & a & a & a & a \\ a & b & b & b & b \\ a & b & c & c & c \\ a & b & c & d & d \\ a & b & c & d & e \end{vmatrix}.$$

Proposer également, sans démonstration, un énoncé généralisant ce résultat au déterminant d'une matrice de $\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ de structure analogue.

Exercice 3. Dans $\mathscr{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$, on appelle *matrice circulante* d'ordre 3 une matrice de la forme générale :

$$M := \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ sont des nombres complexes arbitraires. On désigne par 1, j, j^2 les trois racines cubiques de l'unité, où :

$$j := e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{d'où :} \qquad j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2},$$

et évidemment $j^3 = e^{\frac{6i\pi}{3}} = 1$ d'où $j^4 = j$. On introduit la matrice :

$$U := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j^4 \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$f(z) := \alpha + \beta\, z + \gamma\, z^2.$$

(a) Montrer que le produit matriciel $M\,U$ vaut :

$$M\,U = \begin{pmatrix} f(1) & f(j) & f(j^2) \\ f(1) & j f(j) & j^2 f(j^2) \\ f(1) & j^2 f(j) & j f(j^2) \end{pmatrix}.$$

(b) Montrer que :

$$\mathsf{det}\, M\,U = f(1)\, f(j)\, f(j^2)\, \big[3\, j^2 - 3\, j\big].$$

(c) En déduire que :

$$\mathsf{det}\, M = f(1)\, f(j)\, f(j^2).$$

(d) Établir l'identité algébrique :

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\,\alpha\beta\gamma = \big(\alpha + \beta + \gamma\big)\,\big(\alpha + \beta\, j + \gamma\, j^2\big)\,\big(\alpha + \beta\, j^2 + \gamma\, j\big).$$

Exercice 4. Soit $g\colon \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ un endomorphisme linéaire. On note $g^2 := g \circ g$ et $g^3 := g \circ g^2$.

(a) Montrer que :

$$\mathsf{Ker}\, g \subset \mathsf{Ker}\, g^2 \subset \mathsf{Ker}\, g^3.$$

(b) On suppose dorénavant que :

$$g^3 = 0,$$

où le « 0 » désigne l'endomorphisme identiquement nul, et on suppose surtout que :

$$\{\vec{0}\} \subsetneqq \mathsf{Ker}\, g \subsetneqq \mathsf{Ker}\, g^2 \subsetneqq \mathsf{Ker}\, g^3,$$

où le symbole $\subsetneqq$ signifie « contenu dans et différent (non égal) ».

Montrer que :

$$\mathsf{dim}\, \mathsf{Ker}\, g = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathsf{dim}\, \mathsf{Ker}\, g^2 = 2.$$

(c) Montrer que :

$$\mathsf{Im}\, g \subset \mathsf{Ker}\, g^2.$$

(d) Montrer que :

$$\mathsf{Im}\, g = \mathsf{Ker}\, g^2.$$

(e) Soit un vecteur *non nul* $\vec{a} \in \mathsf{Ker}\, g \backslash \{\vec{0}\}$. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{b} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ tel que $g(\vec{b}) = \vec{a}$.

(f) Vérifier que $\vec{b} \in \mathsf{Ker}\, g^2$.

(g) Montrer que la famille $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ est libre.

(h) Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{c} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ tel que $g(\vec{c}) = \vec{b}$.

(i) Établir que $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ est une *base* de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$.

(j) Déterminer la matrice de l'endomorphisme linéaire g dans la base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

Exercice 5. Soient deux matrices quelconques $A \in \mathscr{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. On suppose que leur produit satisfait :

$$A\,B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a)* Déterminer la valeur du rang de A, ainsi que la valeur du rang de B.

(b)* Établir que $B\,A = I_2$. Indication: On pourra partir de l'observation que $\big(A\,B\big)^2 = A\,B$.

18. Corrigé de l'examen 9

Exercice 1. (a) Appliquons donc l'algorithme du pivot à :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Effectivement, lorsque $m = 0$, la troisième ligne à gauche vaut $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui bloque la poursuite des calculs, et montre, d'après un théorème du cours, que A n'est *pas* inversible dans ce cas $m = 0$.

Heureusement, quand $m \neq 0$, la matrice 3×3 à gauche est *échelonnée*, et on voit clairement que l'algorithme peut se poursuivre jusqu'à obtenir une matrice échelonnée *réduite* à gauche, de taille 3×3, nécessairement égale à l'identité I_3.

Ainsi, A est inversible lorsque $m \neq 0$.

(b) En développant le déterminant de A selon la $1^{\text{ère}}$ colonnne, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathsf{det}\, A &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} + 0 \\ &= 2\,m - 1 - (m-1) \\ &= m. \end{aligned}$$

Nous avons appris en (basse) cours (de ferme) qu'une matrice carrée (en terre agrisaclaycole) est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, ce qui confirme ici le critère $m \neq 0$ d'existence de A^{-1} que nous venons de découvrir (déplumer) à la Question **(a)**.

(c) Lorsque $m \neq 0$, terminons les calculs de l'algorithme du pivot *réduit* appliqué à $\big(A \big| I_3\big)$:

$$\cdots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 1-\frac{1}{m} & \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 2-\frac{1}{m} & \frac{1}{m}-1 & -\frac{1}{m} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{array}\right),$$

d'où :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2-\frac{1}{m} & \frac{1}{m}-1 & -\frac{1}{m} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{pmatrix},$$

(d) Puisque, d'après le cours, les deux identités $A\,A^{-1} = I_3$ et $A^{-1}\,A = I_3$ sont équivalentes, vérifions seulement la première d'entre elles :

$$
\begin{aligned}
I_3 &\overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-\frac{1}{m} & \frac{1}{m}-1 & -\frac{1}{m} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2-\frac{1}{m}-1+\frac{1}{m} & \frac{1}{m}-1+1-\frac{1}{m} & -\frac{1}{m}+0+\frac{1}{m} \\ 2-\frac{1}{m}-2+\frac{1}{m} & \frac{1}{m}-1+2-\frac{1}{m} & -\frac{1}{m}+0+\frac{1}{m} \\ -1+\frac{m}{m} & 1-\frac{m}{m} & 0+0+\frac{m}{m} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{OUI.}
\end{aligned}
$$

Exercice 2. **(a)** Si $a = 0$, la première ligne est égale à $\big(0\ 0\ 0\ 0\big)$, donc $\Delta = 0$.
Si $b = a$, la deuxième ligne est égale à la première, donc $\Delta = 0$.
Si $c = b$, la troisième ligne est égale à la deuxième, donc $\Delta = 0$.
Si $d = c$, la quatrième ligne est égale à la troisième, donc $\Delta = 0$.

(b) Par combinaisons linéaire sur lignes ou sur colonnes, et par développements selon lignes ou selon colonnes, calculons :

$$
\begin{aligned}
\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \\
&= a \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \\
&= a\,\big(b-a\big) \begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 1 & c-a & c-a \\ 1 & c-a & d-a \end{vmatrix} \\
&= a\,\big(b-a\big) \begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & c-b & d-b \end{vmatrix} \\
&= a\,\big(b-a\big)\,\big(c-b\big) \begin{vmatrix} 1 & c-b \\ 1 & d-b \end{vmatrix} \\
&= a\,\big(b-a\big)\,\big(c-b\big)\,\big(d-c-(c-b)\big) \\
&= a\,\big(b-a\big)\,\big(c-b\big)\,\big(d-b-(c-b)\big) \\
&= a\,\big(b-a\big)\,\big(c-b\big)\,\big(d-c\big).
\end{aligned}
$$

(c) Évidemment, on devine que :

$$
\square = a\,\big(b-a\big)\,\big(c-b\big)\,\big(d-c\big)\,\big(e-d\big).
$$

Oui-Da !, Madame *de la Déterminantale*, votre humble valet le petit François devine que, généralement :

$$\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a & a \\ a & b & b & \cdots & b & b \\ a & b & c & \cdots & c & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & b & c & \cdots & y & y \\ a & b & c & \cdots & y & z \end{vmatrix} = a\,\big(b-a\big)\,\big(c-b\big)\,\cdots\,\big(z-y\big).$$

Exercice 3. **(a)** Effectivement, puisque $j^3 = j$ et $j^4 = j$:

$$\begin{aligned} M\,U &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta j+\gamma j^2 & \alpha+\beta j^2+\gamma j \\ \gamma+\alpha+\beta & \gamma+\alpha j+\beta j^2 & \gamma+\alpha j^2+\beta j \\ \beta+\gamma+\alpha & \beta+\gamma j+\alpha j^2 & \beta+\gamma j^2+\alpha j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(1) & f(j) & f(j^2) \\ f(1) & j f(j) & j^2 f(j^2) \\ f(1) & j^2 f(j) & j f(j^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Comme les colonnes 1, 2, 3 de cette matrice-produit $M\,U$ sont, respectivement, multiples de $f(1)$, de $f(j)$, de $f(j^2)$, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \det M\,U &= \begin{vmatrix} f(1) & f(j) & f(j^2) \\ f(1) & j f(j) & j^2 f(j^2) \\ f(1) & j^2 f(j) & j f(j^2) \end{vmatrix} \\ &= f(1)\,f(j)\,f(j^2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} \\ &= f(1)\,f(j)\,f(j^2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & j-1 & j^2-1 \\ 0 & j^2-1 & j-1 \end{vmatrix} \\ &= f(1)\,f(j)\,f(j^2)\,\Big[(j-1)^2 - (j^2-1)^2\Big] \\ &= f(1)\,f(j)\,f(j^2)\,\Big[j^2-2j+1-\big(j^4-2j^2+1\big)\Big] \\ &= f(1)\,f(j)\,f(j^2)\,\Big[j^2-2j+\underline{1}_{\circ}-j+2j^2-\underline{1}_{\circ}\Big] \\ &= f(1)\,f(j)\,f(j^2)\,\big[3\,j^2-3\,j\big]. \end{aligned}$$

(c) En appliquant la règle/formule de Sarrus, commençons par calculer :

$$\begin{aligned} \det U &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} \\ &= j^2+j^2+j^2-j-j^4-j \\ &= 3\,j^2-3\,j. \end{aligned}$$

Tiens ! Une (re)connaissance !

Donc comme d'après le cours, nous avons l'identité :

$$\det M\,U \;=\; \det M\cdot\det U,$$

qui s'écrit ici grâce à la Question **(b)** :

$$f(1)\,f(j)\,f(j^2)\,\big[3\,j^2-3\,j\big] \;=\; \big[3\,j^2-3\,j\big]\cdot\det M,$$

et comme ce facteur :

$$3\,j^2-3\,j \;=\; 3\,j\,\big(j-1\big) \;=\; 3\,e^{\frac{2i\pi}{3}}\,\big(e^{\frac{2i\pi}{3}}-1\big),$$

est clairement non nul, nous pouvons le pulvériser pour obtenir :

$$f(1)\,f(j)\,f(j^2) \;=\; \det M.$$

(d) Puisque nous reconnaissons à droite le produit $f(1)\,f(j)\,f(j^2)$, il ne reste plus qu'à calculer « brutalement à la Sarrus » le déterminant de la matrice M :

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix} \;=\; \alpha^3+\beta^3+\gamma^3-\beta\alpha\gamma-\gamma\beta\alpha-\alpha\gamma\beta,$$

pour terminer en finesse cet exercice attrayant :

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\,\alpha\beta\gamma \;=\; \det M \;=\; \big(\alpha+\beta+\gamma\big)\,\big(\alpha+\beta\,j+\gamma\,j^2\big)\,\big(\alpha+\beta\,j^2+\gamma\,j\big).$$

Exercice 4. **(a)** Si $\vec{u}\in\operatorname{Ker} g$, c'est-à-dire si $g(\vec{u})=\vec{0}$, alors :

$$g^2(\vec{u}) \;=\; g\big(\underline{g(\vec{u})}_{\circ}\big) \;=\; g(\vec{0}) \;=\; \vec{0},$$

ce qui montre que $\operatorname{Ker} g\subset\operatorname{Ker} g^2$.

Si $\vec{v}\in\operatorname{Ker} g^2$, c'est-à-dire si $g^2(\vec{v})=\vec{0}$, alors :

$$g^3(\vec{v}) \;=\; g\big(\underline{g^2(\vec{v})}_{\circ}\big) \;=\; g(\vec{0}) \;=\; \vec{0},$$

ce qui montre que $\operatorname{Ker} g^2\subset\operatorname{Ker} g^3$.

(b) Comme $g^3=0$, pour tout vecteur $\vec{u}\in\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$, on a $g^3(\vec{u})=\vec{0}$, c'est-à-dire que le noyau :

$$\operatorname{Ker} g^3 \;=\; \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3},$$

de g^3 est égal à l'espace vectoriel ambiant tout entier, et donc :

$$\dim\operatorname{Ker} g^3 \;=\; \dim\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3} \;=\; 3.$$

Ensuite, en prenant les dimensions des sous-espaces vectoriels strictement emboîtés les uns dans les autres :

$$\{\vec{0}\} \underset{\neq}{\subsetneq} \operatorname{Ker} g \underset{\neq}{\subsetneq} \operatorname{Ker} g^2 \underset{\neq}{\subsetneq} \operatorname{Ker} g^3,$$

il est clair [3] que les inégalités doivent être strictes :

$$0 \;<\; \dim\operatorname{Ker} g \;<\; \dim\operatorname{Ker} g^2 \;<\; 3 \;=\; \dim\operatorname{Ker} g^3,$$

ce qui les force, puisque ces dimensions sont des nombres entiers, à valoir :

$$0 \;<\; \dim\operatorname{Ker} g \;=\; 1 \;<\; \dim\operatorname{Ker} g^2 \;=\; 2 \;<\; 3.$$

(c) Soit $\vec{v}\in\operatorname{Im} g$ quelconque, c'est-à-dire qu'il existe $\vec{u}\in\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ avec $g(\vec{u})=\vec{v}$. Alors par hypothèse :

$$g^2(\vec{v}) \;=\; g^3(\vec{u}) \;=\; \vec{0},$$

3. On sait, d'après le cours, que pour deux sous-espaces vectoriels emboîtés $G\subset F\subset E$ dans un espace vectoriel ambiant E de dimension $\dim E<\infty$ finie, on a $G=F$ si et seulement si $\dim G=\dim F$, et on se souvient aisément de la démonstration en prenant une base de F que l'on complète — grâce au théorème de la base incomplète — si nécessaire en une base de G.

ce qui montre l'inclusion $\mathsf{Im}\,g \subset \mathsf{Ker}\,g^2$.

(d) Puisque nous venons de voir que $\mathsf{Im}\,g$ est contenu dans $\mathsf{Ker}\,g^2$, il suffit d'argumenter que les dimensions de ces deux sous-espaces vectoriels sont égales.

Mais comme le théorème du rang nous donne :

$$\underbrace{\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\,g}_{=1} + \mathsf{dim}\,\mathsf{Im}\,g \,=\, 3,$$

il vient aisément, grâce à la Question **(b)** :

$$\mathsf{dim}\,\mathsf{Im}\,g \,=\, 3-1 \,=\, \mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\,g^2,$$

d'où l'égalité désirée $\mathsf{Im}\,g = \mathsf{Ker}\,g^2$.

(e) Comme :

$$\vec{a} \,\in\, \mathsf{Ker}\,g \,\subset\, \mathsf{Ker}\,g^2 \,=\, \mathsf{Im}\,g \qquad\qquad \text{(Question (c))},$$

il est clair que $\vec{a} = g(\vec{b})$ pour (au moins) un vecteur $\vec{b}$.

(f) Effectivement, puisque $\vec{a} \in \mathsf{Ker}\,g$, nous avons :

$$g^2\big(\vec{b}\big) \,=\, g\big(\underline{g(\vec{a})}\big) \,=\, g(\vec{0}) \,=\, \vec{0},$$

(g) Supposons qu'il existe une combinaison linéaire :

$$\vec{0} \,=\, \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b},$$

avec des scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\vec{0} \,=\, g(\vec{0}) \,&=\, g\big(\lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}\big)\\ &=\, \lambda\,\underline{g(\vec{a})} + \mu\,g(\vec{b})\\ &=\, \vec{0} + \mu\,\vec{a},\end{aligned}$$

et comme $\vec{a} \neq \vec{0}$, il vient :

$$0 \,=\, \mu,$$

puis :

$$\vec{0} \,=\, \lambda\,\vec{a} + \vec{0},$$

et à nouveau par non-nullité de l'assistant $\vec{a}$, il vient :

$$0 \,=\, \mu,$$

ce qui montre bien la liberté de cette sympathique famille alphabétabéique $\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

(h) Comme $g^3(\vec{c}\,) = g^2(\vec{b}\,) = \vec{0}$, c'est-à-dire grâce à la Question **(d)** :

$$\vec{b} \,\in\, \mathsf{Ker}\,g^2 \,=\, \mathsf{Im}\,g,$$

l'existence d'un vecteur $\vec{c}$ avec $g(\vec{c}) = \vec{b}$ est claire.

(i) Comme :

$$g^2\big(\vec{c}\big) \,=\, g\big(\vec{b}\big) \,=\, \vec{a} \,\neq\, \vec{0},$$

nous constatons que :

$$\vec{c} \,\notin\, \mathsf{Ker}\,g^2.$$

Or puisque la Question **(f)** nous a fait voir que déjà la sous-famille $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ est libre, et donc constitue une base du sous-espace vectoriel $\mathsf{Ker}\,g^2$, le fait que $\vec{c}$ ne lui appartienne *pas* garantit, d'après une propriété vue en cours, que la famille des trois vecteurs $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ est *libre* dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$.

Enfin, puisque $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ est de dimension 3, nous concluons bien que $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ en constitue une (belle) base.

(j) Pourquoi la base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ est-elle belle ? Parce que toutes les relations que nous avons récoltées :

$$\begin{aligned} g(\vec{a}) &= \vec{0}, \\ g(\vec{b}) &= \vec{a}, \\ g(\vec{c}) &= \vec{b}, \end{aligned}$$

montrent que la matrice de g dans cette base est très simple, donc [4] très belle :

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \\ g(\vec{a})\ g(\vec{b})\ g(\vec{c}) \end{array}$$

Exercice 5. (a) D'après le cours, le rang d'une matrice est égal au rang de l'application linéaire associée, dans une paire de bases.

Ici, il est naturel de prendre les bases canoniques de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^2}$ et de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$. Soit $f\colon \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ l'application linéaire associée à A, et soit $g\colon \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^2}$ l'application linéaire associée à B. On a donc que $A\,B$ est la matrice de $f \circ g$. Or le rang d'une application est égal par définition à la dimension de son image :

$$\mathsf{rang}\,\big(f \circ g\big) = \mathsf{dim}\,\mathsf{Im}\, f \circ g.$$

Ensuite, puisque :

$$\begin{aligned} \mathsf{Im}\, f \circ g &\subset \mathsf{Im}\, f, \\ &\subset f\big(\mathsf{Im}\, g\big), \end{aligned}$$

il vient :

$$\mathsf{rang}\,\big(f \circ g\big) = \mathsf{min}\,\big\{\mathsf{rang}\, f,\ \mathsf{rang}\, g\big\}$$

et donc :

$$\mathsf{rang}\, A\,B \leqslant \mathsf{min}\,\big\{\mathsf{rang}\, A,\ \mathsf{rang}\, B\big\}.$$

Enfin, grâce à des inégalités citron-pressées :

$$2 = \mathsf{rang}\, A\,B \leqslant \mathsf{min}\,\big\{\mathsf{rang}\, A,\ \mathsf{rang}\, B\big\} = 2,$$

qui se *transforcent* (néologisme) en égalités, nous concluons que :

$$2 = \mathsf{rang}\, A = \mathsf{rang}\, B.$$

(b) Observons effectivement que :

$$A\,B\,A\,B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A\,B.$$

Autrement dit :

$$A\,\big(B\,A - I_2\big)\,B = 0_3,$$

où 0_3 est la matrice carrée nulle de taille 3×3.

4. Théorème de Jean Racine, Britannicus, Acte II, Scène 2, Néron, au sujet de Junie :

« *Belle, sans ornements, dans le simple appareil*
D'une beauté qu'on vient d'arracher au sommeil. »

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}\mathsf{Im}\left[\big(B\,A - I_2\big)\,B\right] \;&\subset\; \mathsf{Ker}\,A \\ &=\; \{\vec{0}\},\end{aligned}$$

et donc :

$$\big(B\,A - I_2\big)\,B \;=\; 0_{2\times 3},$$

où $0_{2\times 3}$ est la matrice nulle de taille 2×3.

Par suite :

$$\mathsf{Im}\,B \;\subset\; \mathsf{Ker}\,\big(B\,A - I_2\big).$$

Or B est surjective, donc :

$$B\,A - I_2 \;=\; 0_2,$$

et enfin :

$$B\,A \;=\; I_2.$$

19. Examen 10

Exercice 1. Soit $\boldsymbol{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canonique de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$. Soit $f\colon \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$ l'endomorphisme linéaire dont la matrice dans cette base $\boldsymbol{B}$ est :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On introduit les 3 vecteurs :

$$\vec{a} := \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \qquad \vec{b} := 2\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \qquad \vec{c} := 2\,\vec{e}_1 - 2\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

(a) Montrer que $\boldsymbol{B}' := \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ est aussi une base de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$. Indication: On pourra calculer un déterminant.

(b) Écrire la matrice de passage P de la base $\boldsymbol{B}$ vers la base $\boldsymbol{B}'$.

(c) Avec la méthode de son choix, calculer l'inverse P^{-1}, puis, vérifier que $P^{-1}\,P = I$.

(d) Déterminer la matrice B de l'endomorphisme linéaire f dans la base $\boldsymbol{B}' = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

(e) Calculer B^4.

(f) En déduire les valeurs de A^{4n} pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Dans $\mathscr{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, soit la matrice :

$$E := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer E^2 et E^3.

(b) En déduire que E est inversible, et trouver son inverse E^{-1}.

(c) Maintenant, toujours dans $\mathscr{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, soit la matrice :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer (pareillement) A^2 et A^3.

(d) Déterminer trois constantes réelles $a, b, c \in \mathbb{R}$ telles que :

$$0 = A^3 + a\,A^2 + b\,A + c\,I.$$

(e) En déduire que A est inversible, et trouver son inverse A^{-1}.

(f) Vérifier que l'expression trouvée satisfait bien $A^{-1}\,A = I$.

Exercice 3. Soient deux variables réelles $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) On considère le déterminant :

$$\Delta := \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ b^2 & ab & a^2 \end{vmatrix}.$$

Montrer que :

$$\Delta = \big(a^2 + b^2 + ab\big)^2 \big(a - b\big)^2.$$

(b) On considère le déterminant :

$$\square := \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

Montrer que :

$$\square = \big(a+b+c\big)^3.$$

Exercice 4. Soit $B := \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\big\}$ la base canonique de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$. Soit $f\colon \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4} \longrightarrow \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$ l'application linéaire dont la matrice dans la base B est :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer un vecteur non nul $\vec{x}$ qui engendre $\mathrm{Ker}\, f$, tout en montrant que $1 = \dim \mathrm{Ker}\, f$.

(b) Pour une constante fixée quelconque $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$E_\lambda := \big\{\vec{x} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4} \colon\ f\big(\vec{x}\big) = \lambda \vec{x}\big\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$.

(c) Déterminer un vecteur non nul $\vec{b} \in E_{-1}$, tout en montrant que $1 = \dim E_{-1}$.

(d) Déterminer deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{c}, \vec{d} \in E_1$, tout en montrant que $2 = \dim E_1$.

(e) Montrer que les 4 vecteurs trouvés $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$ sont linéairement indépendants.

(f) Déterminer la matrice de l'endomorphisme linéaire f dans la base $B' := \big\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\big\}$ de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $\dim E < \infty$ finie. Soient deux sous-espaces vectoriels quelconques $F \subset E$ et $G \subset E$.

(a)* Établir la formule :

$$\dim\big(F + G\big) = \dim F + \dim G - \dim\big(F \cap G\big).$$

Indication: On pourra introduire l'application :

$$\begin{aligned} \varphi\colon\quad F \times G &\longrightarrow E \\ \big(\vec{x}, \vec{y}\big) &\longmapsto \vec{x} + \vec{y}. \end{aligned}$$

20. Corrigé de l'examen 10

Exercice 1. **(a)** La matrice, dans la base canonique $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big\}$, de ces 3 vecteurs étant :

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{array}{ccc} \quad\vec{a} & \quad\vec{b} & \quad\vec{c}\quad \end{array}\end{array}$$

il suffit, d'après un théorème du cours, de vérifier que son déterminant est *non nul*, pour obtenir le fait que $\big\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\big\} = \boldsymbol{B}'$ est une base de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^3}$.

En développant selon la $1^{\text{ère}}$ colonne, calculons donc :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= -1 + 2 + \underline{2 - 2} - 4 + 2 \\
&= -1 \neq 0 \qquad\qquad \text{OUI.}
\end{aligned}$$

(b) Nous venons d'écrire cette matrice de passage P (et il fallait vérifier qu'elle était bien inversible) :

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Appliquons la méthode du pivot à :

$$\begin{aligned}
\big(P\big|I\big) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right),
\end{aligned}$$

d'où :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

ce que nous vérifions :

$$P^{-1}\,P \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1+2 & -2+2 & -2+2 \\ 1-1 & 2-1 & 2-2 \\ 1-1 & 1-1 & 2-1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) D'après le cours :

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}\,A\,P \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(e) Puisque :

$$B^2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

il vient rapidement :

$$B^4 \;=\; B^2\,B^2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; I.$$

(f) Ainsi, puisque :

$$P^{-1}\,A\,P \;=\; B \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad A \;=\; P\,B\,P^{-1},$$

il vient :

$$\begin{aligned} A^{4n} &= \big(PBP^{-1}\big)^{4n} \\ &= PBP^{-1}\,PBP^{-1}\cdots\cdots PBP^{-1}\,PBP^{-1} && (4n \text{ fois}) \\ &= PB\underline{P^{-1}\,P}\,BP^{-1}\cdots\cdots PB\underline{P^{-1}\,P}\,BP^{-1} \\ &= P\,B\,B\,\cdots\cdots\,B\,B\,P^{-1} \\ &= P\,B^{4n}\,P^{-1} \\ &= P\,\big(B^4\big)^n\,P^{-1} \\ &= P\,(I)^n\,P^{-1} \\ &= P\,I\,P^{-1} \\ &= I. \end{aligned}$$

Exercice 2. **(a)** Nous trouvons :

$$E^2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

puis :

$$E^3 = E^2 E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

(b) Puisque :

$$E^2 \cdot E = I = E \cdot E^2,$$

l'unicité de l'inverse d'une matrice (quand celui-ci existe), lequel satisfait par définition :

$$E^{-1} \cdot E = I = E \cdot E^{-1},$$

nous fournit :

$$E^{-1} = E^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(déjà calculée !)},$$

sans avoir à effectuer un calcul ingrat de pivot appliqué à la matrice $\big(E|I\big)$!

(c) Nous trouvons :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

puis :

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) En notation déployée, cette équation matricielle s'écrit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+c & a & 3+b \\ 3+b & 1+3a+c & 9+a+3b \\ a & 3+b & 1+3a+c \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui correspond à un système de $3 \times 3 = 9$ de Pâques équations aux 3 inconnues a, b, c.

Or les trois (premières) équations imposées par la première ligne :

$$0 = 1 + c, \qquad\qquad 0 = a, \qquad\qquad 0 = 3 + b,$$

se résolvent instantanément comme :

$$a := 0, \qquad\qquad b := -3, \qquad\qquad c := -1,$$

et l'on voit d'un seul coup d'œil que ces trois valeurs déterminées de manière unique satisfont « par chance » aussi les 6 équations restantes.

Ainsi :

$$0 = A^3 - 3\,A^2 - I.$$

(e) Si nous ré-écrivons cette belle identité comme :

$$\big(A^2 - 3\,I\big) \cdot A = I = A \cdot \big(A^2 - 3\,I\big),$$

le même argument que celui détaillé à la Question **(b)** nous permet de conclure (sans avoir à pressuriser nos glandes sudoripares) que A est bel est bien inversible, d'inverse :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= A^2 - 3\,I \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(f) Effectivement :

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. (a) Après remplacement de la colonne C_1 par $C_1 + C_2 + C_3$, une factorisabilité se révèle :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ b^2 & ab & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+b^2+ab & b^2 & ab \\ ab+a^2+b^2 & a^2 & b^2 \\ b^2+ab+a^2 & ab & a^2 \end{vmatrix} \\ &= \big(a^2+b^2+ab\big) \begin{vmatrix} 1 & b^2 & ab \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & ab & a^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ensuite, en remplaçant $L_2 \longleftrightarrow L_2 - L1$ ainsi que $L_3 \longleftrightarrow L_3 - L1$, il vient :

$$\begin{aligned} \Delta = \big(a^2+b^2+ab\big) \begin{vmatrix} 1 & b^2 & ab \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & ab & a^2 \end{vmatrix} &= \big(a^2+b^2+ab\big) \begin{vmatrix} 1 & b^2 & ab \\ 0 & a^2-b^2 & b^2-ab \\ 0 & ab-b^2 & a^2-ab \end{vmatrix} \\ &= \big(a^2+b^2+ab\big) \begin{vmatrix} a^2-b^2 & b^2-ab \\ ab-b^2 & a^2-ab \end{vmatrix} \\ &= \big(a^2+b^2+ab\big) \begin{vmatrix} (a-b)(a+b) & b(b-a) \\ (a-b)b & a(a-b) \end{vmatrix} \\ &= \big(a^2+b^2+ab\big)\,\big(a-b\big)^2 \begin{vmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{vmatrix} \\ &= \big(a^2+b^2+ab\big)\,\big(a-b\big)^2\,\big(a^2+ab+b^2\big) \\ &= \big(a^2+b^2+ab\big)^2\,\big(a-b\big)^2. \end{aligned}$$

(b) Remplaçons $L_1 \longleftarrow L_1 + L_2 + L_3$, factorisons, puis remplaçons $C_2 \longleftarrow C_2 - C_1$ ainsi que $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1$, et enfin, développons selon la première colonne :

$$
\begin{aligned}
\square = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \\
&= \big(a+b+c\big) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \\
&= \big(a+b+c\big) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} \\
&= \big(a+b+c\big) \begin{vmatrix} -b-c-a & 0 \\ 0 & -c-a-b \end{vmatrix} \\
&= \big(a+b+c\big)\big(-a-b-c\big)\big(-a-b-c\big) \\
&= \big(a+b+c\big)^3.
\end{aligned}
$$

Exercice 4. **(a)** Par définition, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ appartient à $\mathsf{Ker}\, f$ si et seulement si $A\,\vec{x} = \vec{0}$, c'est-à-dire :

$$
\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

ce qui nous donne le système linéaire :

$$
\begin{aligned}
2\,x_1 - x_2 \quad + \quad x_4 &= 0 \\
x_1 \qquad\qquad\quad x_4 &= 0 \\
x_3 \qquad\quad &= 0 \\
-3\,x_1 + x_2 \quad - 2\,x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

Clairement, les équations L_3 et L_2 donnent :

$$
x_3 := 0, \qquad\qquad x_4 := -x_1,
$$

et après remplacement dans les équations 1 et 4, nous trouvons :

$$
x_2 := x_1,
$$

ce qui donne :

$$
\mathsf{Ker}\, f = \big\{ \big(x_1, x_1, 0, -x_1\big) \colon \ x_1 \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \big\},
$$

et ainsi, $\mathsf{Ker}\, f$ est bien de dimension 1, engendré par le vecteur :

$$
\vec{a} := \big(1, 1, 0, -1\big).
$$

(b) Il est clair que :

$$
f\big(\vec{0}\big) = \vec{0} = \lambda\,\vec{0}.
$$

Ensuite, pour deux vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in E_\lambda$, c'est-à-dire avec $f(\vec{x}\,) = \lambda\,\vec{x}$ et $f(\vec{y}\,) = \lambda\,\vec{y}$, et pour deux scalaires quelconques $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$
f\big(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}\big) = \alpha\, f(\vec{x}\,) + \beta\, f(\vec{y}\,) = \alpha\,\lambda\,\vec{x} + \beta\,\lambda\,\vec{y} = \lambda\,\big(\alpha\,\vec{x} + \beta\,\vec{y}\big),
$$

d'où $\alpha\,\vec{x} + \beta\,\vec{y} \in E_\lambda$ aussi, ce qui montre que E_λ est bien un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$.

(c) Par définition, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ appartient à E_{-1} si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne le système linéaire :

$$\begin{aligned} 3\,x_1 - x_2 \quad + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 \quad + x_4 &= 0 \\ 2\,x_3 \quad &= 0 \\ -\,3\,x_1 + x_2 \quad - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Clairement, l'équation L_3 donne :

$$x_3 \,:=\, 0.$$

L'équation $L_4 = -\,L_1$ peut être supprimée. Ensuite, $L_1 + L_2$ et $-L_1 + L_2$ donnent :

$$x_4 \,:=\, -\,2\,x_1 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad x_2 \,:=\, x_1,$$

ce qui donne :

$$E_{-1} \,=\, \big\{\big(x_1, x_1, 0, -2x_1\big) \colon\;\; x_1 \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\},$$

et ainsi, E_{-1} est bien de dimension 1, engendré par le vecteur :

$$\vec{b} \,:=\, \big(1, 1, 0, -2\big).$$

(d) Par définition, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ appartient à E_{-1} si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne le système linéaire :

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \;+\; x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 \;+\; x_4 &= 0 \\ 0 \quad &= 0 \\ -\,3\,x_1 + x_2 \;-3\,x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Clairement, les équations L_2 et L_3 peuvent être supprimées. Ensuite, les équations L_1 et L_4 permettent de résoudre :

$$x_1 \,:=\, -\,x_4 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad x_2 \,:=\, 0,$$

ce qui donne :

$$E_1 \,=\, \big\{\big(0, 0, x_3, 0\big) + \big(-\,x_4, 0, 0, x_4\big) \colon\;\; x_3, x_4 \in \mathbb{R} \text{ quelconques}\big\},$$

et ainsi, E_{-1} est bien de dimension 2, engendré par les deux vecteurs visiblement linéairement indépendants :

$$\vec{c} := \big(0, 0, 1, 0\big) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \big(-\,1, 0, 0, 1\big).$$

(e) Grâce à un théorème du cours, il suffit de vérifier la non-nullité du déterminant formé par les coordonnées de ces 4 vecteurs, en le développant successivement par rapport à des lignes ou des colonnes bien choisies :

$$0 \overset{?}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \underline{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\circ} = -1 \neq 0.$$

(f) D'après les questions précédentes, nous avons :

$$f(\vec{a}) = \vec{0}, \qquad f(\vec{b}) = -\vec{b}, \qquad f(\vec{c}) = \vec{c}, \qquad f(\vec{d}) = \vec{d},$$

et donc en conclusion, dans cette nouvelle base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$, la matrice de f :

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \scriptstyle f(\vec{a}) \;\; f(\vec{b}) \;\; f(\vec{c}) \;\; f(\vec{d}) \end{array}$$

est plus simple que dans la base canonique, puisqu'elle *diagonale*.

Exercice 5. (a) Tout d'abord, φ est *linéaire* de l'espace vectoriel *produit* $F \times G$ à valeurs dans l'espace vectoriel E, car :

$$\begin{aligned} \varphi\Big(\lambda\,(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda'\,(\vec{x}\,', \vec{y}\,')\Big) &= \varphi\Big((\lambda\,\vec{x} + \lambda'\vec{x}\,',\ \lambda\,\vec{y} + \lambda'\vec{y}\,')\Big) \\ &= \lambda\,\vec{x} + \lambda'\vec{x}\,' + \lambda\,\vec{y} + \lambda'\vec{y}\,' \\ &= \lambda\,(\vec{x} + \vec{y}) + \lambda'\,(\vec{x}\,' + \vec{y}\,') \\ &= \lambda\,\varphi(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda'\,\varphi(\vec{x}\,', \vec{y}\,'). \end{aligned}$$

Ensuite, l'image de φ est clairement :

$$\begin{aligned} \mathsf{Im}\,\varphi &= F + G \subset E \\ &\overset{\text{déf}}{=} \Big\{\vec{x} + \vec{y}\colon\ \vec{x} \in F \text{ quelconque},\ \vec{y} \in G \text{ quelconque}\Big\}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\mathsf{dim}\,\mathsf{Im}\,\varphi = \mathsf{dim}\,(F + G).$$

Par ailleurs, un élément arbitraire $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathsf{Ker}\,\varphi$ du noyau de φ satisfait :

$$\begin{aligned} \vec{x} + \vec{y} = \vec{0} \qquad &\Longrightarrow \qquad \underset{\in F}{\vec{x}} = -\underset{\in G}{\vec{y}}, \\ &\Longrightarrow \qquad F \cap G \ni \vec{x} = -\vec{y} \in G \cap F. \end{aligned}$$

Enfin, comme :

$$\vec{z} \in F \cap G \text{ quelconque} \qquad \Longrightarrow \qquad (\vec{z}, -\vec{z}) \in \mathsf{Ker}\,\varphi,$$

puisque $\vec{z} - \vec{z} = \vec{0}$ trivialement, ceci montre que :

$$\mathsf{Ker}\,\varphi = \big\{(\vec{z}, -\vec{z}) \in F \times G\colon\ \vec{z} \in F \cap G\big\},$$

et donc :

$$\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\,\varphi = \mathsf{dim}\,F \cap G.$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer la formule de la dimension à l'application linéaire $\varphi\colon F \times G \longrightarrow E$:

$$\mathsf{dim}\,(F \times G) = \mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\,\varphi + \mathsf{dim}\,\mathsf{Im}\,\varphi,$$

ce qui nous donne bien une égalité :

$$\mathsf{dim}\, F + \mathsf{dim}\, G \;=\; \mathsf{dim}\, F \cap G + \mathsf{dim}\, \big(F + G\big),$$

qui est équivalente à celle qui était demandée.