Examens corrigés

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Examen 1

Exercice 1. Soit un ouvert connexe non vide $\omega \subset \mathbb{C}$, soit $z_0 \in \omega$, et soit une fonction $f \in \mathscr{O}(\omega \backslash \{z_0\})$ holomorphe en-dehors de z_0. On suppose que f est bornée au voisinage de z_0, au sens où il existe un rayon $r > 0$ assez petit avec $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \omega$ et il existe une constante $0 \leqslant \mathrm{M} < \infty$ tels que :

$$\sup_{\substack{|z-z_0|<r \\ z \neq z_0}} \big|f(z)\big| \leqslant \mathrm{M}.$$

On fixe $z_1 \in \mathbb{D}_r(z_0)$ avec $z_1 \neq z_0$.

(a) Dresser une figure illustrative complète et esthétique.

(b) Montrer, pour $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\,|z_1 - z_0|$, que pour tout $\zeta \in C_\varepsilon(z_0)$, on a $|\zeta - z_1| \geqslant \frac{1}{2}\,|z_1 - z_0|$.

(c) Montrer que :

$$0 = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \int_{C_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta.$$

(d) Soient les deux points :

$$\zeta_1 := z_0 + r\,\frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0|},$$

$$\zeta_0 := z_0 - r\,\frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0|}.$$

Soient aussi deux quantités petites $0 < \delta < \varepsilon \leqslant \frac{1}{3}\,|z_1 - z_0|$. On construit le contour $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ à *deux* trous de serrure de largeur 2δ qui partent orthogonalement du cercle $C_r(z_0)$ en les deux points ζ_1 et ζ_0, avec contournement de z_1 puis de z_0 le long de cercles de rayon ε.

Dresser une nouvelle figure esthétique dans laquelle tous ces éléments apparaissent clairement — couleurs recommandées !

(e) Justifier par un théorème du cours que :

$$0 = \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta.$$

(f) Montrer que :

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\varepsilon(z_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta.$$

(g) Montrer que :

$$f(z_1) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta.$$

(h) Justifier l'holomorphie dans $\mathbb{D}_r(z_0)$ de la fonction :

$$z \longmapsto \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

(i) Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe $\widetilde{f} \in \mathscr{O}(\omega)$ telle que $\widetilde{f}\big|_{\omega\backslash\{z_0\}} = f$.

(j) Montrer que tout ce qui précède est encore valable en supposant plus généralement qu'il existe un exposant $0 \leqslant \alpha < 1$ et une constante $0 \leqslant \mathrm{M} < \infty$ tels que :

$$\big|f(z)\big| \leqslant \mathrm{M}\, \frac{1}{|z - z_0|^\alpha} \qquad (\forall\, 0 < |z - z_0| < r).$$

Exercice 2. Soit un nombre réel $a > 0$. L'objectif est de calculer, au moyen de la méthode des résidus, les deux intégrales de Riemann généralisées :

$$I := \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx \qquad \text{et} \qquad J := \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2}\, dx.$$

(a) Commencer par justifier l'existence de I.

(b) On introduit la fonction $f(z) := \frac{1}{z^2 + a^2}$. Calculer $\mathrm{Res}_f(i\,a)$.

(c) Avec $\mathrm{R} > a$, dessiner le contour orienté fermé consistant en le segment $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$ suivi du demi-cercle de rayon R au-dessus de l'axe réel.

(d) Montrer que :

$$0 = \lim_{\mathrm{R} \to \infty} \int_0^\pi \frac{d\left(\mathrm{R}\, e^{i\theta}\right)}{(\mathrm{R}\, e^{i\theta})^2 + a^2}.$$

(e) Montrer que :

$$I = \frac{\pi}{2\,a}.$$

(f) On choisit la détermination de la fonction logarithme complexe sur :

$$\mathbb{C} \big\backslash i\,\mathbb{R}_-,$$

définie, pour $z = r\, e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et avec $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, par $\log z := \log r + i\,\theta$. Sur cet ouvert $\mathbb{C}\backslash i\,\mathbb{R}_-$, on considère la fonction holomorphe :

$$g(z) := \frac{\log z}{z^2 + a^2}.$$

Avec $0 < \varepsilon < a$ et avec $\mathrm{R} > a$, dessiner le contour orienté fermé consistant en le segment $[-\mathrm{R}, -\varepsilon]$, suivi du demi-cercle de rayon ε au-dessus de l'axe réel, suivi du segment $[\varepsilon, \mathrm{R}]$, suivi du demi-cercle de rayon R au-dessus de l'axe réel.

(g) Montrer que :

$$J = \frac{\pi}{2\,a} \log a.$$

Indication: Calculer d'abord $\mathrm{Res}_g(i\,a)$ en utilisant la valeur de $\log i$, que l'on déterminera auparavant.

Exercice 3. Dans un ouvert connexe non vide $\Omega \subset \mathbb{C}$, pour une courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ (continue) $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ fermée $\gamma(0) = \gamma(1)$ que l'on identifie $\gamma \equiv \gamma\big([0,1]\big)$ à son image, on définit l'*indice* de tout point $w \in \mathbb{C}\backslash\gamma$ par rapport à γ par l'intégrale :

$$\mathsf{Ind}_\gamma(w) \ := \ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-w}.$$

(a) Avec $\Omega := \mathbb{C}$, en utilisant deux couleurs différentes, tracer une courbe qui tourne -2 fois autour de 0, puis une autre qui tourne $+3$ fois.

(b) On introduit, pour $t \in [0,1]$, la fonction :

$$\Phi(t) \ := \ \mathsf{exp}\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-w}\, ds\right).$$

Calculer la dérivée de $t \longmapsto \frac{\Phi(t)}{\gamma(t)-w}$ sur $[0,1]$.

(c) Montrer que :

$$\Phi(t) \ = \ \frac{\gamma(t)-w}{\gamma(0)-w} \qquad\qquad (\forall\, t \in [0,1]).$$

(d) Montrer que :

$$\mathsf{Ind}_\gamma(w) \ \in \ \mathbb{Z}.$$

(e) On suppose dorénavant que l'ouvert connexe Ω est de plus *simplement connexe*. D'après le cours, si $w \in \Omega$ est un point de référence fixé, cela implique que deux courbes $\gamma_0\colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ et $\gamma_1\colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ quelconques $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ (continues) allant de $w = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ à un autre point quelconque $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z \in \Omega$ sont toujours *homotopes* à travers une famille continue $\big\{t \longmapsto \gamma_s(t)\big\}_{s\in[0,1]}$ de courbes $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ *toutes contenues dans* Ω.

Justifier alors que toute fonction holomorphe $g \in \mathscr{O}(\Omega)$ possède une *primitive* $G \in \mathscr{O}(\Omega)$ avec $G' = g$.

(f) Justifier que pour toute courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée $\gamma \subset \Omega$, on a :

$$0 \ = \ \int_\gamma g(z)\, dz \qquad\qquad (\forall\, g \in \mathscr{O}(\Omega)).$$

Maintenant, soit un ouvert connexe non vide $\omega \subset \Omega$, soit $w \in \omega$ et soit un rayon $\mathrm{R} > 0$ tel que $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}(w) \subset \omega$. Toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}\big(\omega\backslash\{w\}\big)$ en-dehors de w se développe alors en série de Laurent :

$$f(z) \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,\big(z-w\big)^n,$$

normalement convergente sur les compacts de $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}(w)$, avec des coefficients donnés par la formule :

$$a_n \ := \ \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(w)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-w)^{n+1}}\, d\zeta \qquad\qquad (n \in \mathbb{Z}),$$

indépendamment du choix d'un rayon intermédiaire $0 < r < \mathrm{R}$.

(g) Avec $0 < r < \mathrm{R}$ fixé, montrer pour tout $n \leqslant -1$ que :

$$\big|a_n\big| \ \leqslant \ \max_{\zeta\in C_r(w)} \big|f(\zeta)\big| \cdot r^{-n}.$$

(h) Montrer que :

$$\limsup_{-\infty \leftarrow n} \sqrt[|n|]{|a_n|} \leqslant r.$$

(i) Montrer que le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\, Z^n$$

vaut ∞.

(j) Montrer que la partie singulière :

$$h(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \, \big(z-w\big)^n$$

définit une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\{w\}$.

(k) Montrer l'holomorphie dans ω de la fonction :

$$g := f - h \in \mathscr{O}(\omega).$$

(l) On suppose maintenant que l'ouvert connexe et simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ contient un nombre fini $\mathrm{L} \geqslant 1$ de points-singularités distincts $w_1, \dots, w_{\mathrm{L}} \in \Omega$, et on considère une fonction holomorphe :

$$f \in \mathscr{O}\big(\Omega\backslash\{w_1, \dots, w_{\mathrm{L}}\}\big)$$

en-dehors de ces points, ainsi qu'une courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée :

$$\gamma \subset \Omega\backslash\big\{w_1, \dots, w_{\mathrm{L}}\big\}.$$

Enfin, on introduit les parties singulières de f dans certains petits voisinages ouverts $\omega_\ell \ni w_\ell$:

$$h_\ell(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{\ell,n} \, \big(z-w_\ell\big)^n \qquad\qquad (1 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{L}).$$

Montrer l'holomorphie partout dans Ω de la fonction :

$$g(z) := f(z) - h_1(z) - \cdots - h_{\mathrm{L}}(z) \in \mathscr{O}(\Omega).$$

(m) Établir la *formule des résidus homologique :*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\, dz = \mathsf{Ind}_\gamma(w_1)\cdot \mathsf{Res}_f(w_1) + \cdots + \mathsf{Ind}_\gamma(w_{\mathrm{L}})\cdot \mathsf{Res}_f(w_{\mathrm{L}}).$$

Exercice 4. [Sans indications] (a) Pour $\xi \in \mathbb{R}_+$, montrer que :

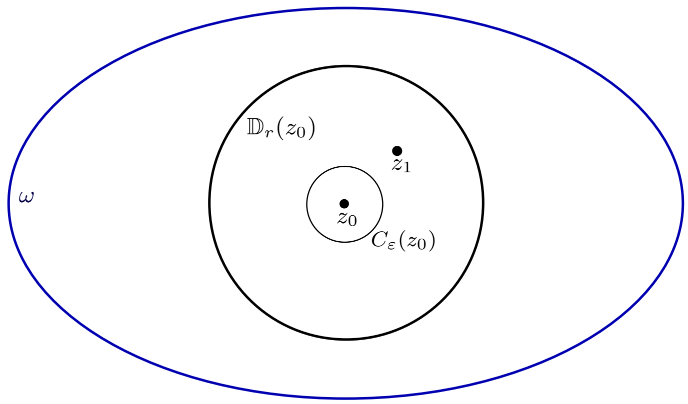
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\big(1 + 2\,\pi\,\xi\big)\, e^{-2\pi\xi}.$$

(b) Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots (2n)}\, \pi.$$

2. Corrigé de l'examen 1

Exercice 1. (a) Voici une figure élémentaire.



(b) Avec $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\,|z_1 - z_0|$, pour tout $\zeta \in C_\varepsilon(z_0)$, à savoir pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$ avec $|\zeta - z_0| = \varepsilon$, on a en effet grâce à $|a - b| \geqslant |a| - |b|$:

$$\begin{aligned}
\big|z_1 - \zeta\big| &= \big|z_1 - z_0 - (\zeta - z_0)\big| \\
&\geqslant |z_1 - z_0| - |\zeta - z_0| \\
&= |z_1 - z_0| - \varepsilon \\
&\geqslant |z_1 - z_0| - \tfrac{1}{2}\,|z_1 - z_0| \\
&= \tfrac{1}{2}\,|z_1 - z_0|.
\end{aligned}$$

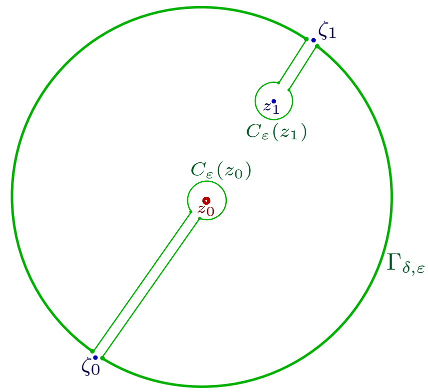
(c) Quand $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\,|z_1 - z_0|$ tend vers 0, on majore en utilisant l'hypothèse que $|f| \leqslant \mathrm{M}$ sur $C_\varepsilon(z_0)$, indépendamment de $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\bigg|\int_{C_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\,d\zeta\bigg| &\leqslant \max_{\zeta \in C_\varepsilon(z_0)} \frac{1}{|\zeta - z_1|}\,\max_{\zeta \in C_\varepsilon(z_0)} \big|f(\zeta)\big| \int_0^{2\pi} \big|\varepsilon\, i\, e^{i\theta}\, d\theta\big| \\
&\leqslant \frac{2}{|z_1 - z_0|}\,\mathrm{M}\,\varepsilon\, 2\pi \quad \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \quad 0.
\end{aligned}$$

(d) Les deux points :

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &:= z_0 + r\,\frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0|}, \\
\zeta_0 &:= z_0 - r\,\frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0}
\end{aligned}$$

sont situés sur le diamètre du cercle $C_r(z_0)$ qui contient le segment $[z_0, z_1]$. Le contour $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ demandé se représente alors comme suit.



(e) Comme la fonction $\zeta \longmapsto f(\zeta)$ est holomorphe dans $\omega\backslash\{z_0\}$, la fonction $\zeta \longmapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}$ est holomorphe dans un voisinage ouvert de $\Gamma_{\delta,\varepsilon} \cup \mathrm{Int}\,\Gamma_{\delta,\varepsilon}$, donc le théorème de Jordan-Cauchy offre effectivement l'annulation :

$$0 = \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta,$$

cela, pour tout $z_1 \in \mathbb{D}_r(z_0)\backslash\{z_0\}$ fixé.

(f) En faisant tendre $\delta \longrightarrow 0$, les intégrales sur les bords des deux tunnels, effectuées sur des paires de segments orientés de manière opposée, s'annihilent, et il ne reste plus, à la limite, que trois intégrales :

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\varepsilon(z_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta.$$

(g) Ensuite, en faisant tendre $\varepsilon \to 0$, la question **(c)** a déjà fait voir que la troisième intégrale s'évanouit, tandis que la deuxième, sur un cercle centré en z_1 qui s'effondre sur z_1, tend, comme le cours l'a plusieurs fois démontré, vers $f(z_1)$, d'où la formule demandée :

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta - f(z_1) - 0.$$

(h) Un théorème du cours utilisant la continuité de $(\zeta, z) \longmapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ pour $(\zeta, z) \in C_r(z_0) \times \mathbb{D}_r(z_0)$, allié au fait que $z \longmapsto \frac{1}{\zeta - z}$ est holomorphe pour $z \in \mathbb{D}_r(z_0)$ quel que soit $\zeta \in C_r(z_0)$, garantit l'holomorphie dans $\mathbb{D}_r(z_0)$ de la fonction définie comme intégrale à paramètre holomorphe :

$$\widetilde{f}(z) := \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

(i) Nous venons de voir que $\widetilde{f}(z) = f(z)$ en tout point $z \in \mathbb{D}_r(z_0)\backslash\{z_0\}$, ce qui fournit un prolongement holomorphe. Mais un tel prolongement est nécessairement unique, car $\widetilde{f}(z) = f(z) = \widehat{f}(z)$ sur l'ouvert connexe $\omega\backslash\{z_0\}$ implique par continuité $\widetilde{f} = \widehat{f}$ partout dans ω.

(j) En supposant plus généralement qu'il existe un exposant $0 \leqslant \alpha < 1$ et une constante $0 \leqslant \mathrm{M} < \infty$ tels que :

$$\big|f(z)\big| \leqslant \mathrm{M}\, \frac{1}{|z - z_0|^\alpha} \qquad (\forall\, 0 < |z - z_0| < r),$$

et en revenant à la question **(c)**, nous constatons à nouveau la nullité de la limite :

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\,d\zeta\right| &\leqslant \max_{\zeta\in C_\varepsilon(z_0)} \frac{1}{|\zeta - z_1|} \max_{\zeta\in C_\varepsilon(z_0)} \big|f(\zeta)\big| \int_0^{2\pi} \big|\varepsilon\, i\, e^{i\theta}\, d\theta\big| \\ &\leqslant \frac{2}{|z_1 - z_0|}\,\frac{\mathrm{M}}{\varepsilon^\alpha}\,\varepsilon\, 2\pi \\ &= \mathsf{constante}\,\varepsilon^{1-\alpha} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

et ensuite, tous les arguments restants fonctionnent sans modification.

Exercice 2. (a) Pour $a > 0$, soient donc les deux intégrales :

$$I := \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx \qquad \text{et} \qquad J := \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2}\,dx.$$

Sur le compact $[0,1]$, on a intégrabilité de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2+a^2}$ qui est continue bornée parce que $a > 0$. Puis sur $[1,\infty[$, la majoration $\frac{1}{x^2+a^2} < \frac{1}{x^2}$ garantit, grâce au critère de Riemann, que $\lim\limits_{\mathrm{R}\to\infty} \int_1^{\mathrm{R}} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$ existe.

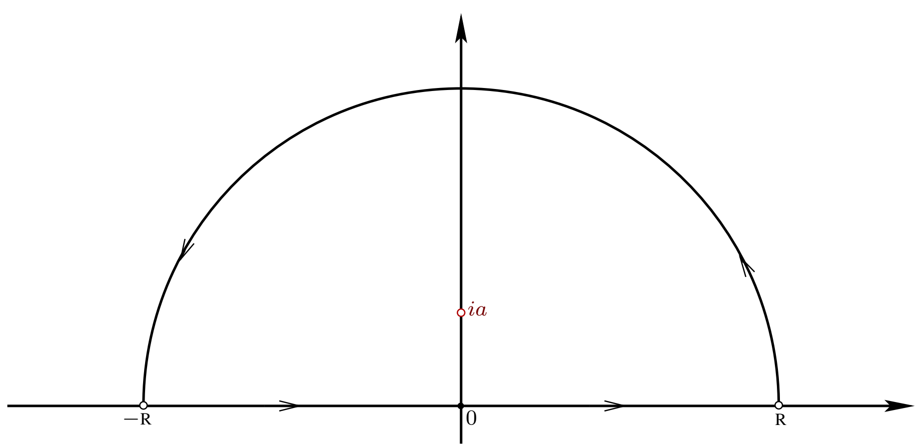
Ensuite, une primitive de $\log x$ étant la fonction $x \log x - x$ qui tend vers 0 avec $x > 0$, on sait que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \log x\,dx$ existe, et sur $[0,1]$, le facteur borné $\frac{1}{x^2+a^2}$ ne perturbe rien.

Sur $[1,\infty]$, comme la croissance de $\log x$ quand $x \longrightarrow \infty$ est inférieure à toute puissance x^τ avec $\tau > 0$ quelconque, le critère de Riemann appliqué à $\frac{1}{x^{2-\tau}}$ assure la convergence de $\lim\limits_{\mathrm{R}\to\infty} \int_1^{\mathrm{R}} \frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx$.

(b) Comme la fonction $f(z) := \frac{1}{z^2+a^2} = \frac{1}{(z-ia)(z+ia)}$ a un pôle simple en $z = ia$, son résidu y vaut :

$$\mathsf{Res}_f(i\,a) = \lim_{z\to ia} (z - ia)\,\frac{1}{(z-ia)(z+ia)} = \frac{1}{2ia}.$$

(c) Avec $\mathrm{R} > a$, voici un dessin du contour orienté fermé consistant en le segment $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$ suivi du demi-cercle de rayon R au-dessus de l'axe réel.



(d) Toujours avec $\mathrm{R} > a$, grâce à la minoration $|\alpha + \beta| = |\alpha - (-\beta)| \geqslant |\alpha| - |\beta|$ qui donne :

$$\big|(\mathrm{R}\, e^{i\theta})^2 + a^2\big| \geqslant \mathrm{R}^2 - a^2,$$

il est clair que :

$$\left|\int_0^\pi \frac{\mathrm{R}\, i\, e^{i\theta}\, d\theta}{(\mathrm{R}\, e^{i\theta})^2 + a^2}\right| \leqslant \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2 - a^2}\, \pi \underset{\mathrm{R}\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(e) Le théorème des résidus donne pour tout $\mathrm{R} > a$:

$$\int_{-\mathrm{R}}^0 \frac{dx}{x^2 + a^2} + \int_0^{\mathrm{R}} \frac{dx}{x^2 + a^2} + \int_0^\pi \frac{d\,(\mathrm{R}\, e^{i\theta})}{(\mathrm{R}\, e^{i\theta})^2 + a^2} = 2i\pi\left(\frac{1}{2ia}\right),$$

d'où en faisant tendre $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$:

$$I + I + 0 = \frac{\pi}{a}.$$

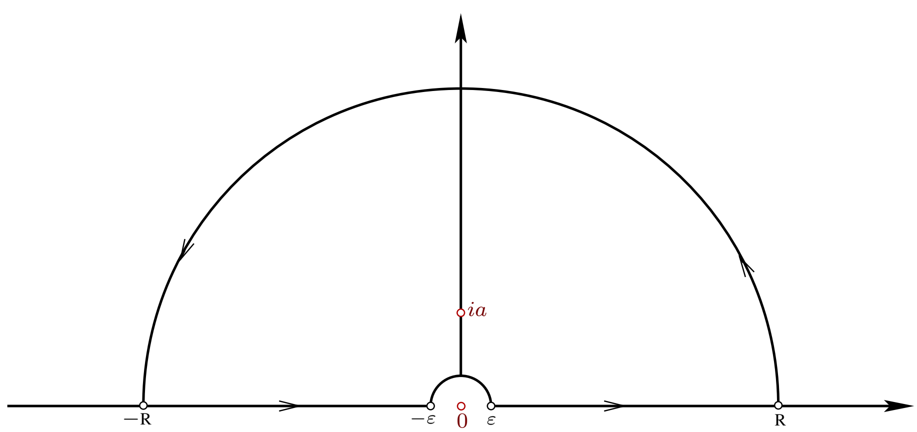
(f) On choisit donc la détermination de la fonction logarithme complexe sur :

$$\mathbb{C} \big\backslash i\, \mathbb{R}_-,$$

définie, pour $z = r\, e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et avec $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, par $\log z := \log r + i\,\theta$. Sur cet ouvert $\mathbb{C}\backslash i\,\mathbb{R}_-$, on considère la fonction holomorphe :

$$g(z) := \frac{\log z}{z^2 + a^2}.$$

Avec $0 < \varepsilon < a$ et avec $\mathrm{R} > a$, voici un dessin du contour orienté fermé consistant en le segment $[-\mathrm{R}, -\varepsilon]$, suivi du demi-cercle de rayon ε au-dessus de l'axe réel, suivi du segment $[\varepsilon, \mathrm{R}]$, suivi du demi-cercle de rayon R au-dessus de l'axe réel.



(g) En utilisant la valeur du logarithme de $\sqrt{-1}$:

$$\log i = \log e^{i\,\frac{\pi}{2}} = i\,\frac{\pi}{2},$$

commençons par calculer le résidu de la fonction $g(z) = \frac{\log z}{z^2+a^2}$ en l'unique pôle, simple, qu'elle subit en le point $z = ia$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_g\,(ia) &= \lim_{z\to ia}\,(z - ia)\,\frac{\log z}{(z - ia)\,(z + ia)} = \frac{\log\,(ia)}{ia + ia}\\ &= \frac{\log a + i\,\frac{\pi}{2}}{2ia}.\end{aligned}$$

Puisque le contour d'intégration est une courbe de Jordan ne contenant en son intérieur que ce pôle ia, le théorème des résidus offre la belle formule :

$$\int_{-\mathrm{R}}^{-\varepsilon} \frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx+\int_{\varepsilon}^{\mathrm{R}} \frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx+\int_0^{\pi} \frac{\log\left(\mathrm{R}\,e^{i\theta}\right)}{(\mathrm{R}\,e^{i\theta})^2+a^2}\,i\,\mathrm{R}\,e^{i\theta}\,d\theta+\int_{\pi}^{0} \frac{\log\left(\varepsilon\,e^{i\theta}\right)}{(\varepsilon\,e^{i\theta})^2+a^2}\,i\,\varepsilon\,e^{i\theta}\,d\theta \;=\; 2i\pi\left(\frac{\log a+i\,\frac{\pi}{2}}{2ia}\right),$$

que nous aimerions rendre encore plus belle !

Tout d'abord, en utilisant la valeur — tellement spectaculaire ! si incroyable mais si vraie ! — de :

$$\log\big(-1\big) \;=\; \log\big(e^{i\pi}\big) \;=\; i\pi,$$

le changement de variable $x \longmapsto -x$ transforme la première intégrale en :

$$\int_{\mathrm{R}}^{\varepsilon} \frac{\log(-x)}{x^2+a^2}\,d(-x) \;=\; \int_{\varepsilon}^{\mathrm{R}} \frac{i\pi+\log x}{x^2+a^2}\,dx,$$

et nous retrouvons une intégrale qui coïncide presque avec la deuxième intégrale J ci-dessus que nous désirons calculer, ce qui nous donne :

$$i\pi\int_{\varepsilon}^{\mathrm{R}} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx+2\int_{\varepsilon}^{\mathrm{R}} \frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx+\int_0^{\pi} \frac{\log\left(\mathrm{R}\,e^{i\theta}\right)}{(\mathrm{R}\,e^{i\theta})^2+a^2}\,i\,\mathrm{R}\,e^{i\theta}\,d\theta+\int_{\pi}^{0} \frac{\log\varepsilon+i\theta}{(\varepsilon\,e^{i\theta})^2+a^2}\,i\,\varepsilon\,e^{i\theta}\,d\theta \;=\; \pi\,\frac{\log a}{a}+\frac{\pi}{a}\,i\,\frac{\pi}{2},$$

d'où en faisant $\varepsilon \longrightarrow 0$ et simultanément $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$, puis en reconnaissant la valeur de l'intégrale I calculée précédemment :

$$i\pi\,\frac{\pi}{2a}+2\,J+\lim_{\mathrm{R}\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{\log\left(\mathrm{R}\,e^{i\theta}\right)}{(\mathrm{R}\,e^{i\theta})^2+a^2}\,i\,\mathrm{R}\,e^{i\theta}\,d\theta+\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\mathrm{O}\big(\varepsilon\log\varepsilon\big)+\mathrm{O}(\varepsilon)\Big) \;=\; \pi\,\frac{\log a}{a}+\frac{\pi}{a}\,i\,\frac{\pi}{2}.$$

Pour conclure, ne serait-il pas agréable de pouvoir éliminer cette dernière intégrale rémanente et presque intempestive — mais oui je le peux ! — :

$$\left|\int_0^{\pi} \frac{\log\left(\mathrm{R}\,e^{i\theta}\right)}{(\mathrm{R}\,e^{i\theta})^2+a^2}\,i\,\mathrm{R}\,e^{i\theta}\,d\theta\right| \;\leqslant\; \frac{\pi+\log\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2-a^2}\,\mathrm{R}\,\pi \;\underset{\mathrm{R}\,\to\,\infty}{\longrightarrow}\; 0,$$

d'où la simplification mirifique :

$$\underline{i\pi\,\frac{\pi}{2a}}\;+2\,J+0+0 \;=\; \pi\,\frac{\log a}{a}+\underline{\frac{\pi}{a}\,i\,\frac{\pi}{2}},$$

de toute beauté :

$$J \;=\; \frac{\pi}{2\,a}\log a.$$

Exercice 3. Intégralement traité dans le polycopié de cours, avec l'objectif de récompenser les étudiants qui ont approfondi le cours par un travail de lecture personnelle.

Exercice 4. Pour un paramètre réel $\xi \geqslant 0$, soit donc à calculer :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{(1+x^2)^2}\,dx \;\overset{?}{=}\; \frac{\pi}{2}\big(1+2\,\pi\,\xi\big)\,e^{-2\pi\xi}.$$

Avec la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$:

$$f(z) \;:=\; \frac{e^{-2i\pi\xi z}}{(1+z^2)^2} \;=\; \frac{e^{-2i\pi\xi z}}{(z-i)^2\,(z+i)^2},$$

ayant exactement deux pôles d'ordre 2 en les deux points $z = -i$ et $z = +i$, dont l'intégrale sur un segment $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$ avec $\mathrm{R} > 1$ grand approche l'intégrale désirée, quel demi-cercle de rayon R choisir pour que l'intégration concernée devienne négligeable lorsque $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$?

Avec $z = x + iy$, comme l'exponentielle :

$$e^{-2i\pi\xi z} = e^{-2i\pi\xi x + 2\pi\xi y},$$

est de module $e^{2\pi\xi y}$, et comme $\xi \geqslant 0$, il faut choisir le demi-cercle *inférieur*, c'est-à-dire contenu dans $\{\mathrm{Im}\, z \leqslant 0\}$, mais alors le contour constitué du segment $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$ suivi de ce demi-cercle est parcouru dans le sens *inverse* du sens trigonométrique, ce qui nécessite d'insérer un coefficient -1 dans la formule des résidus :

$$\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{(1+x^2)^2}\, dx + \underbrace{\int_0^{-\pi} \frac{e^{-2i\pi\,\xi\,\mathrm{R}\,e^{i\theta}}}{\big(1 + (\mathrm{R}\,e^{i\theta})^2\big)^2}\, d\big(\mathrm{R}\,e^{i\theta}\big)}_{\underset{\mathrm{R}\to\infty}{\longrightarrow}\,0} = -\,2i\pi\, \mathrm{Res}_{-i}(f),$$

d'où :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{(1+x^2)^2}\, dx = -\,2i\pi\, \mathrm{Res}_{-i}(f),$$

donc il ne reste plus qu'à calculer ce résidu — sans faire d'erreur !

D'après une formule du cours :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{-i}(f) &= \frac{d}{dz}\left(\underline{(z+i)^2}\, \frac{e^{-2i\pi\xi z}}{(z-i)^2\, \underline{(z+i)^2}}\right)\bigg|_{z=-i} \\
&= \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{-2i\pi\xi z}}{(z-i)^2}\right)\bigg|_{z=-i} \\
&= \left(\frac{-2i\pi\xi\, e^{-2i\pi\xi z}}{(z-i)^2} - \frac{2\, e^{-2i\pi\xi z}}{(z-i)^3}\right)\bigg|_{z=-i} \\
&= \left(\frac{-2i\pi\,\xi}{(-2i)^2} - \frac{2}{(-2i)^3}\right) e^{-2\pi\xi} \\
&= \left(i\,\frac{\pi}{2}\,\xi + \frac{i}{4}\right) e^{-2\pi\xi},
\end{aligned}$$

et donc après multiplication par $-2i\pi$ — et non pas par $+2i\pi$ à cause de l'orientation inversée du contour — nous atterrissons à destination :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{(1+x^2)^2}\, dx &= -\,2i\pi\left(i\,\frac{\pi}{2}\,\xi + \frac{i}{4}\right) e^{-2\pi\xi} \\
&= \frac{\pi}{2}\,\big(2\pi\xi + 1\big)\, e^{-2\pi\xi}.
\end{aligned}$$

(b) Puisque nous avons hâte de détacher notre ceinture, empressons-nous de démontrer que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \overset{?}{=} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}\, \pi.$$

À cet effet, introduisons la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$:

$$f(z) := \frac{1}{(1+z^2)^{n+1}} = \frac{1}{(z-i)^{n+1}}\,\frac{1}{(z+i)^{n+1}},$$

ayant exactement deux pôles d'ordre $n+1$ en $z=-i$ et en $z=+i$, puis avec $\mathrm{R}>1$ grand, intégrons-la sur le contour consistant en le segment $[-\mathrm{R},\mathrm{R}]$ suivi du demi-cercle de rayon R situé dans le demi-plan supérieur $\{\mathrm{Im}\, z \geqslant 0\}$.

Le théorème des résidus, avec devant $2i\pi$ le bon vieux signe $+$ que tout le monde préfère sur Terre, donne :

$$\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{d\big(\mathrm{R}\,e^{i\theta}\big)}{\big(1+(\mathrm{R}\,e^{i\theta})^2\big)^{n+1}}\,dx}_{\underset{\mathrm{R}\to\infty}{\longrightarrow}\,0} = 2i\pi\,\mathrm{Res}_i(f),$$

donc il ne reste plus qu'à calculer ce résidu, ce qui, pour retarder notre libération, va réserver une petite surprise de calcul !

D'après une formule du cours :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_f(i) &= \frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{dz^n}\bigg(\underline{(z-i)^{n+1}}_{\circ}\,\underline{\frac{1}{(z-i)^{n+1}}}_{\circ}\,\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\bigg)\bigg|_{z=i}\\
&= \frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{dz^n}\bigg(\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\bigg)\bigg|_{z=i}\\
&= \frac{1}{n!}\,(-n-1)\cdots(-n-n)\,\frac{1}{(z+i)^{2n+1}}\bigg|_{z=i}\\
&= \frac{1}{n!}\,(n+1)\cdots(n+n)\,(-1)^n\,\frac{1}{(2i)^{2n+1}},
\end{aligned}$$

d'où en multipliant cela par $2i\pi$ comme requis :

$$\begin{aligned}
2i\pi\,\mathrm{Res}_f(i) &= \underline{2i}_{\circ}\,\pi\,\frac{1}{n!}\,(n+1)\cdots(n+n)\,\frac{\underline{(-1)^n}_{\circ\circ}}{2^{2n}\,\underline{(i)^{2n}}_{\circ\circ}\,\underline{2i}_{\circ}}\\
&= \pi\,\frac{(n+1)\cdots(n+n)}{1\cdots n}\,\frac{1}{2^n}\,\frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Pour terminer le tout sans rater la correspondance pour le vol vers le Master 1 MFA, il faut se dépêcher de vérifier que :

$$\frac{(n+1)\cdots(n+n)}{\underline{1\cdots n}_{\circ}}\,\frac{1}{\underline{2^n}_{\circ}}\,\frac{1}{2^n} \overset{?}{=} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{\underline{2\cdot 4\cdots 2n}_{\circ}},$$

c'est-à-dire après simplications visibles :

$$\frac{(n+1)\cdots(n+n)}{2^n} \overset{?}{=} 1\cdots 3\cdots(2n-1),$$

formule qui est manifestement vérifiée quand $n=1$, tandis qu'en remplaçant $n\longmapsto n+1$ afin de raisonner par récurrence, on doit vérifier que :

$$\frac{(n+2)\cdots(n+1+n+1)}{2^{n+1}} \overset{?}{=} 1\cdots 3\cdots(2n-1)(2n+1),$$

mais en divisant cela par ce qui précède supposé vrai au rang n, on obtient une égalité visiblement vraie, donc conclusive :

$$\frac{(n+n+1)\,(n+1+n+1)}{(n+1)\,2} \overset{\textbf{oui}}{=} 2n+1. \qquad \square$$

3. Examen 2

Exercice 1. Soit $\mathbb{D} := \big\{\zeta \in \mathbb{C}\colon\ |\zeta| < 1\big\}$ le disque unité dans $\mathbb{C}$, soit $w \in \mathbb{D}$ fixé, et soit :

$$\varphi_w(z) \ := \ \frac{z-w}{1-\overline{w}z}.$$

(a) Montrer que $\varphi_w \in \mathscr{O}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{C}^0\big(\overline{\mathbb{D}}\big)$.

(b) Montrer que $\big|\varphi_w(z)\big| = 1$ pour tout $|z| = 1$, puis que $\big|\varphi_w(z)\big| \leqslant 1$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$, et enfin que $\big|\varphi_w(z)\big| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(c) Soit une suite infinie $\big\{z_n\big\}_{n=1}^{\infty}$ de points *non nuls* $z_n \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ satisfaisant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(1-|z_n|\big) \ < \ \infty.$$

On pose :

$$F_n(z) \ := \ \frac{|z_n|}{z_n}\,\frac{z_n - z}{1-\overline{z}_n z} \qquad\qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Pour $z \in \mathbb{D}$ fixé, montrer que :

$$\big|F_n(z) - 1\big| \ \leqslant \ \frac{1+|z|}{1-|z|}\,\big(1-|z_n|\big).$$

Indication: Utiliser, après l'avoir justifiée, l'inégalité $\frac{1}{|1-\overline{z}_n z|} \leqslant \frac{1}{1-|z|}$.

(d) Montrer que le produit infini $F(z) := \prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ converge normalement sur les compacts de $\mathbb{D}$. Indication: On rappelle qu'un produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ est dit *normalement convergent* sur un compact $K \subset \mathbb{D}$ si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \big(F_n(z) - 1\big)$ est normalement convergente sur K.

(e) Montrer que $\big|F(z)\big| \leqslant 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(f) Quel problème la fonction $F(z)$ résout-elle ?

(g) Maintenant, soit une fonction holomorphe $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ *non constante*, avec $f(0) = 0$. Pour $w \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ non nul, on note :

$$f^{-1}(w) \ := \ \big\{z \in \mathbb{D}\colon\ f(z) = w\big\}.$$

On suppose Card $f^{-1}(w) = \infty$.

Justifier que l'on peut écrire :

$$f^{-1}(w) \ = \ \big\{z_n\big\}_{n=1}^{\infty},$$

avec $z_n \in \mathbb{D}$ et :

$$1 \ = \ \lim_{n\to\infty} |z_n|.$$

(h) On pose :

$$g(z) \ := \ \varphi_w\big(f(z)\big),$$

en rappelant que $\varphi_w(z) := \frac{z-w}{1-\overline{w}z}$. Montrer que $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

(i) Pour $\mathrm{N} \geqslant 1$ entier, on pose :

$$B_{\mathrm{N}}(z) := \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{z - z_n}{1 - \overline{z}_n z}.$$

Montrer qu'il existe $h_{\mathrm{N}} \in \mathscr{O}(\mathbb{D})$ telle que :

$$g(z) = B_{\mathrm{N}}(z)\, h_{\mathrm{N}}(z) \qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}).$$

(j) Montrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$ (censé être arbitrairement proche de 0), il existe un rayon $0 < r_\varepsilon < 1$ (censé être proche de 1) tel que :

$$\big|B_{\mathrm{N}}(z)\big| \geqslant 1 - \varepsilon \qquad (\forall\, |z| = r_\varepsilon).$$

(k) Montrer que $\big|h_{\mathrm{N}}(0)\big| \leqslant 1$.

(l) On introduit maintenant la *fonction de comptage de Nevanlinna :*

$$\begin{aligned} N_f(w) &:= \sum_{z \in f^{-1}(w)} \log \frac{1}{|z|} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|}. \end{aligned}$$

Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|} \leqslant \log \frac{1}{|w|}.$$

(m) Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - |z_n|\big) < \infty.$$

(n) Soit maintenant $F \in \mathscr{O}(\mathbb{D})$, bornée $\big|F(z)\big| \leqslant \mathrm{M} < \infty$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, et non identiquement nulle $F \not\equiv 0$. Soient $\big\{z_n\big\}_{n=1}^{\infty}$ ses zéros, supposés en nombre infini. On suppose temporairement que $\mathrm{M} = 1$ et que $F(0) \neq 0$.

Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - |z_n|\big) < \infty$. Indication: Introduire :

$$f(z) := \frac{F(z) - F(0)}{1 - \overline{F(0)}\, F(z)}.$$

(o) Montrer que cela se généralise sans supposer $\mathrm{M} = 1$ et $F(0) \neq 0$.

(p) Interpréter le résultat obtenu en l'énonçant sous la forme d'un théorème synthétique.

Exercice 2. **(a)** Montrer que la fonction $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ de Riemann satisfait, pour $s \in \mathbb{R}$ avec $s > 1$:

$$\log \zeta(s) = \sum_{p \in \mathscr{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}.$$

Indication: Penser à la formule de produit infini d'Euler, vue en cours.

(b) Justifier que $\zeta(s) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, s > 1$, puis justifier l'existence et l'holomorphie d'une fonction $s \longmapsto \log \zeta(s)$ définie dans $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$ et prenant des valeurs réelles sur $]1, \infty[$.

(c) Montrer que pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, s > 1$, on a encore :

$$\log \zeta(s) \,=\, \sum_{p \in \mathscr{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}.$$

Indication: Penser au principe d'unicité pour les fonctions holomorphes qui coïncident sur un ensemble ayant un point d'accumulation.

(d) Toujours pour $\mathrm{Re}\, s > 1$, montrer que :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

où Λ est la *fonction de von Mangoldt :*

$$\Lambda(n) \,:=\, \begin{cases} \log p & \text{lorsque } n = p^\alpha \text{ avec } p \in \mathscr{P} \text{ et } \alpha \geqslant 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

(e) Pour $c > 1$ *fixé*, en notant comme Riemann $s = \sigma + it$, on considère la droite réelle verticale $\big\{c + it \colon -\infty < t < \infty\big\}$ orientée du bas vers le haut. Soit l'intégrale dépendant du paramètre $a > 0$:

$$I(a) \,:=\, \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^s}{s\,(s+1)}\, ds.$$

Montrer qu'elle converge. Indication: $\big|a^s\big| = a^c$.

(f) On suppose dorénavant, jusqu'à la Question **(j)** ci-dessous, que $a \geqslant 1$. Soit la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$:

$$f(s) \,:=\, \frac{a^s}{s(s+1)}.$$

Calculer $\mathrm{Res}_f(0)$, puis $\mathrm{Res}_f(-1)$.

(g) Avec un rayon $\mathrm{R} > 1 + c$ (qui tendra vers l'infini), on considère le contour orienté Γ_{R}^- consistant en le segment vertical $\big[c - i\mathrm{R},\, c + i\mathrm{R}\big]$ parcouru du bas vers le haut, suivi du demi-cercle C_{R}^- centré en c de rayon R situé à gauche de l'axe vertical $\{\mathrm{Re}\, s = c\}$. Dessiner Γ_{R}^- avec tous les détails possibles.

(h) Trouver la valeur de :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{\mathrm{R}}^-} f(s)\, ds \,=\, \mathbf{?}.$$

(i) Montrer que :

$$0 \,=\, \lim_{\mathrm{R} \to \infty} \int_{C_{\mathrm{R}}^-} f(s)\, ds.$$

Indication: Utiliser, après l'avoir justifiée, l'inégalité valable pour tous rayons $\mathrm{R} \geqslant \mathrm{R}_c \gg 1$ assez grands :

$$\big|s\,(s+1)\big| \,\geqslant\, \tfrac{1}{2}\,\mathrm{R}^2.$$

(j) Toujours avec $c > 1$ fixé, montrer que :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^s}{s\,(s+1)}\, ds \,=\, \begin{cases} 1 - \frac{1}{a} & \text{quand } 1 \leqslant a, \\ 0 & \text{quand } 0 < a \leqslant 1. \end{cases}$$

Indication: Changer de demi-cercle, et faire d'abord une figure (notée !).

(k) On introduit maintenant la *fonction psi* de Tchebychev :

$$\psi(x) := \sum_{1\leqslant n\leqslant x} \Lambda(n),$$

puis :

$$\psi_1(x) := \int_1^x \psi(u)\,du.$$

Montrer que :

$$\psi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^x \Lambda(n)\,\mathbf{1}_{[n,\infty[}(u)\,du.$$

(l) Montrer que :

$$\psi_1(x) = \sum_{1\leqslant n\leqslant x} \Lambda(n)\cdot\big(x-n\big).$$

(m) Montrer que pour tout $\delta > 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ converge normalement dans $\big\{\mathsf{Re}\, s > 1+\delta\big\}$.

(n) Montrer que :

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bigg(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\bigg)\,\frac{x^{s+1}}{s\,(s+1)}\,ds.$$

Exercice 3. Soit $\tau\in\mathbb{C}$ fixé avec $\mathsf{Im}\,\tau > 0$.

(a) Montrer que la *fonction Thêta de Jacobi* définie par :

$$\Theta_\tau(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2\tau}\,e^{2i\pi nz} \qquad {\scriptstyle (z\in\mathbb{C})},$$

est une fonction holomorphe entière. Indication: Poser $t := \mathsf{Im}\,\tau > 0$, et observer que pour $\frac{4\,|z|}{t} \leqslant |n|$, on a $-n^2t + 2\,|n|\,|z| \leqslant -n^2\,\frac{t}{2}$.

(b) Montrer qu'il existe deux constantes $0 < \mathrm{A}, \mathrm{B} < \infty$ telles que :

$$\big|\Theta_\tau(z)\big| \leqslant \mathrm{A}\,e^{\mathrm{B}\,|z|^2} \qquad {\scriptstyle (\forall\, z\in\mathbb{C})}.$$

(c) Montrer que la fonction :

$$f(z) := z + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} e^{i\pi n^2\tau}\,\frac{e^{2i\pi nz}}{2i\pi n}$$

est une fonction holomorphe entière *non constante*. Indication: Observer que $f(x)\longrightarrow\infty$ lorsque $\mathbb{R}\ni x\longrightarrow\infty$.

(d) Montrer que Θ_τ n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{C}$. Indication: Vérifier que $f' = \Theta_\tau$.

(e) Montrer que $\Theta_\tau\big(z+m\tau\big) = e^{-i\pi m^2\tau}\,e^{-2i\pi mz}\,\Theta_\tau(z)$, pour tout $z\in\mathbb{C}$ et tout $m\in\mathbb{Z}$.

(f) Montrer que Θ_τ est une fonction holomorphe entière d'ordre exactement égal à 2.

---

4. Corrigé de l'examen 2

Exercice 1. (a) Le pôle unique au dénominateur $\frac{1}{w}$ est de module $\frac{1}{|\overline{w}|} > 1$, puisque $w \in \mathbb{D}$, donc :

$$\varphi_w \in \mathscr{O}\Big(\mathbb{D}_{\frac{1}{|\overline{w}|}}(0) \supset \overline{\mathbb{D}}\Big),$$

ce qui montre un peu mieux : φ_w est holomorphe (donc continue) dans un voisinage ouvert de $\overline{\mathbb{D}}$.

(b) Avec $z\overline{z} = 1$, on calcule :

$$\begin{aligned}\big|1 - \overline{w}\, z\big| &= \big|1 - w\, \overline{z}\big| \\ &= \big|z\left(1 - w\, \overline{z}\right)\big| \\ &= |z - w|,\end{aligned}$$

d'où en divisant $\big|\varphi_w(z)\big| = 1$. Enfin, comme φ_w est holomorphe dans $\mathbb{D}$ et continue jusqu'au bord, le principe du maximum donne :

$$\big|\varphi_w(z)\big| \leqslant \max_{\zeta \in \partial\mathbb{D}} \big|\varphi_w(\zeta)\big| = 1 \qquad\qquad (\forall\, |z| \leqslant 1),$$

et comme φ_w n'est pas constante :

$$\big|\varphi_w(z)\big| < 1 \qquad\qquad (\forall\, |z| < 1).$$

(c) Comme $\big|\overline{z}_n\big| < 1$, l'inégalité standard $|1-a| \geqslant 1 - |a|$ valable pour $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| < 1$ donne :

$$\begin{aligned}\big|1 - \overline{z}_n z\big| &\geqslant 1 - \big|\overline{z}_n\big|\, |z| \\ &\geqslant 1 - |z|,\end{aligned}$$

puis en inversant :

$$\frac{1}{|1 - \overline{z}_n z|} \leqslant \frac{1}{1 - |z|}.$$

Ensuite, avec $z \in \mathbb{D}$ fixé, calculons et simplifions la différence :

$$\begin{aligned}F_n(z) - 1 &= \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z}_n z} - 1 \\ &= \frac{|z_n|\left(z_n - z\right) - z_n\left(1 - \overline{z}_n z\right)}{z_n\left(1 - \overline{z}_n z\right)} \\ &= \frac{z_n\left(|z_n| - 1\right) + z\left(|z_n|^2 - |z_n|\right)}{z_n\left(1 - \overline{z}_n z\right)} \\ &= \big(|z_n| - 1\big)\, \frac{z_n + z\, |z_n|}{z_n\left(1 - \overline{z}_n z\right)},\end{aligned}$$

puis majorons-la en utilisant le préliminaire :

$$\begin{aligned}\big|F_n(z)-1\big| &\leqslant \big(1-|z_n|\big)\,\frac{|z_n|\,(1+|z|)}{|z_n|\,|1-\overline{z}_nz|}\\ &\leqslant \big(1-|z_n|\big)\,\frac{1+|z|}{1-|z|}.\end{aligned}$$

(d) Si $K\subset\mathbb{D}$ est un compact, il existe $0\leqslant r<1$ avec $K\subset\overline{\mathbb{D}}_r$, et alors pour tout $z\in K$, ce qui précède permet de majorer :

$$\big|F_n(z)-1\big| \leqslant \big(1-|z_n|\big)\,\frac{1+r}{1-r} \qquad\qquad (\forall\,z\in K,\,\forall\,n\geqslant 1),$$

au moyen d'une série par hypothèse convergente :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big(1-|z_n|\big)\,\frac{1+r}{1-r}\;<\;\infty,$$

donc un théorème du cours offre la convergence du produit infini vers une certaine fonction holomorphe dans le disque unité :

$$\prod_{n=1}^{\infty}F_n(z)\;=:\;F(z)\;\in\;\mathscr{O}(\mathbb{D}).$$

(e) Grâce à la Question **(b)**, en observant que :

$$F_n(z)\;=\;\frac{|z_n|}{z_n}\,\frac{z_n-z}{1-\overline{z}_nz}\;=\;-\,\frac{|z_n|}{z_n}\,\varphi_{z_n}(z),$$

on a unimodularité au bord :

$$\big|F_n(z)\big|\;=\;1 \qquad\qquad (\forall\,|z|=1),$$

et comme F_n est holomorphe dans $\mathbb{D}$ continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, le principe du maximum donne :

$$\big|F_n(z)\big|\;\leqslant\;1 \qquad\qquad (\forall\,|z|\leqslant 1).$$

Tout produit fini $F_1(z)\cdots F_{\rm N}(z)$ satisfait aussi cela, donc à la limite quand ${\rm N}\longrightarrow\infty$:

$$\big|F(z)\big|\;\leqslant\;1 \qquad\qquad (\forall\,|z|=1).$$

(f) Comme chaque $F_n(z)$ s'annule précisément en l'unique point $z=z_n$, le théorème fondamental sur les produits infinis garantit que :

$$\big\{w\in\mathbb{D}\colon\;F(w)=0\big\}\;=\;\big\{z_n\big\}_{n=1}^{\infty}.$$

Ainsi, nous venons de démontrer l'existence d'une fonction holomorphe *bornée* $F\in\mathscr{O}(\mathbb{D})\cap L^\infty\big(\overline{\mathbb{D}}\big)$ qui s'annule *précisément* sur une suite infinie $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points $z_n\in\mathbb{D}\backslash\{0\}$, sous l'hypothèse cruciale que :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big(1-|z_n|\big)\;<\;\infty.$$

(g) La fonction holomorphe $z\longmapsto f(z)-w$ dans $\mathbb{D}$ non identiquement nulle (puisque f est non constante) doit avoir, d'après le principe des zéros isolés, une collection $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de zéros qui est *discrète* dans $\mathbb{D}$, c'est-à-dire sans point d'accumulation dans $\mathbb{D}$, et donc, si cette collection est infinie comme on l'a supposé, nécessairement, elle s'évade vers le bord $\partial\mathbb{D}$:

$$0 = \lim_{n \to \infty} \mathsf{dist}\big(z_n, \partial\mathbb{D}\big).$$

(h) La question **(b)** a fait voir que $\varphi_w \colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, donc par composition $\varphi_w \circ f \colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$.

(i) Cette fonction composée :

$$g(z) = \varphi_w\big(f(z)\big) = \frac{f(z) - w}{1 - \overline{w}\, f(z)},$$

s'annule aux points de la suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, car :

$$g(z_n) = \frac{f(z_n) - w}{1 - \overline{w}\, f(z_n)} = 0 \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

Or le produit fini $B_{\mathrm{N}}(z)$ s'annule exactement aux points $z_1, \dots, z_{\mathrm{N}}$, et nulle part ailleurs. Par conséquent, le quotient :

$$\frac{g(z)}{B_{\mathrm{N}}(z)} =: h_{\mathrm{N}}(z) \in \mathscr{O}(\mathbb{D})$$

n'a que des singularités illusoires en $z_1, \dots, z_{\mathrm{N}}$, donc définit bien une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$.

(j) Quel que soit $|z| = 1$, on sait que :

$$\big|B_{\mathrm{N}}(z)\big| = \big|\varphi_{z_1}(z)\big| \cdots \big|\varphi_{z_{\mathrm{N}}}(z)\big| = 1 \cdots 1 = 1,$$

donc le résultat tombe par continuité.

(k) Toujours sur les cercles $\big\{|z| = r_\varepsilon\big\}$, comme $|g(z)| < 1$ grâce à la Question **(h)**, on majore :

$$\begin{aligned} \big|h_{\mathrm{N}}(z)\big| &\leqslant \frac{|g(z)|}{|B_{\mathrm{N}}(z)|} \\ &\leqslant \frac{1}{1 - \varepsilon} \qquad\qquad (\forall\, |z| = r_\varepsilon), \end{aligned}$$

d'où en appliquant le principe du maximum sur $\overline{\mathbb{D}}_{r_\varepsilon}$:

$$\big|h_{\mathrm{N}}(0)\big| \leqslant \frac{1}{1 - \varepsilon},$$

et enfin, en laissant $\varepsilon \stackrel{>}{\longrightarrow} 0$:

$$\big|h_{\mathrm{N}}(0)\big| \leqslant 1.$$

(l) Ce qui précède implique :

$$\begin{aligned} 0 < |w| &= |g(0)| \\ &= \big|B_{\mathrm{N}}(0)\, h_{\mathrm{N}}(0)\big| \\ &\leqslant \big|B_{\mathrm{N}}(0)\big| \cdot 1 \\ &= |z_1| \cdots |z_{\mathrm{N}}|, \end{aligned}$$

et en inversant puis en appliquant la fonction logarithme :

$$\log \frac{1}{|w|} \geqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \log \frac{1}{|z_n|}.$$

Enfin, laissons $\mathrm{N} \longrightarrow \infty$ pour obtenir la réponse :

$$\log \frac{1}{|w|} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|}.$$

(m) Ainsi, nous venons d'obtenir la convergence de la série à termes positifs :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|} \leqslant \log \frac{1}{|w|} < \infty.$$

Comme $|z_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ avec $|z_n| < 1$ d'après la Question **(g)**, on a pour tous $n \geqslant 1$:

$$0 < |z_n| < 1 \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

Vérifions, pour tout x réel avec $0 < x \leqslant 1$, que :

$$1 - x \leqslant \log \frac{1}{x}.$$

En effet, la fonction auxiliaire $\lambda(x) := -1+x+\log \frac{1}{x}$ admet, sur $]0,1[$, une dérivée négative :

$$\lambda'(x) = 1 - \frac{1}{x} < 0,$$

et comme $\lambda(1) = 0$, elle doit avoir des valeurs strictement positives sur $]0,1[$, décroissant jusqu'à $\lambda(1) = 0$.

Grâce à cela :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - |z_n|\big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|} < \infty.$$

(n) Cette fonction auxiliaire $f(z)$ satisfait $f(0) = 0$. En les zéros z_n de F, on a :

$$F(z_n) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(z_n) = \frac{0 - F(0)}{1 - \overline{F(0)}\,0} = -\,F(0) =: w \in \mathbb{D}\backslash\{0\},$$

De plus, $f(z) = w$ s'écrit :

$$\frac{F(z) - F(0)}{1 - \overline{F(0)}\,F(z)} = -\,F(0) \qquad \Longrightarrow \qquad F(z) = 0,$$

donc $f^{-1}(w) = \{F = 0\} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, et ainsi, tout ce qui précède s'applique !

(o) En divisant $F(z)$ par M, on se ramène à $\mathrm{M} = 1$. Si $F(z) = z^{\nu} \cdot G(z)$ avec $G(0) \neq 0$ et $\nu \geqslant 1$, on peut appliquer ce qui précède à $G(z)$.

(p) Le résultat obtenu donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite infinie $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points $z_n \in \mathbb{D}$ discrète dans $\mathbb{D}$ soit l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe bornée dans $\mathbb{D}$, ce qui rappelle le théorème de Weierstrass, mais avec une hypothèse supplémentaire inévitable, et explicite.

Théorème. *Soit $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de points dans $\mathbb{D}$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - |z_n|\big) < \infty$ — ce qui implique sa discrétion dans $\mathbb{D}$. Alors il existe une fonction :*

$$B \in \mathscr{O}(\mathbb{D}) \cap H^{\infty}(\mathbb{D})$$

holomorphe dans $\mathbb{D}$ et bornée $\leqslant 1$ ayant exactement ces z_n comme zéros, et non nulle partout ailleurs.

Inversement, si une fonction holomorphe bornée :

$$F \in \mathscr{O}(\mathbb{D}) \cap H^\infty(\mathbb{D})$$

est non identiquement nulle, et si elle a une infinité de zéros $\big\{z_n\big\}_{n=1}^{\infty}$ *répétés avec multiplicités, alors* $\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - |z_n|\big) < \infty$.

Dans la première partie de l'énoncé, par rapport aux Questions **(c)** à **(f)** où on a supposé tous les $z_n \neq 0$ non nuls, il faut factoriser à l'avance par z^ν avec $\nu \geqslant 0$ entier pour tenir compte de l'existence éventuelle de zéros à l'origine, ce qui se généralise sans peine.

Exercice 2. **(a)** D'après Euler, on a la représentation par un produit normalement convergent sur $\big\{\mathrm{Re}\, s > 1 + \delta\big\}$ quel que soit $\delta > 0$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Avec $s \in \mathbb{R}$ réel, $s > 1$, en prenant le logarithme et en utilisant le développement en série entière $-\log(1-t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m}$, nous obtenons bien :

$$\begin{aligned}\log \zeta(s) &= \sum_{p \in \mathscr{P}} -\log\Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)\\ &= \sum_{p \in \mathscr{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}.\end{aligned}$$

(b) Dans le produit infini $\prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$ dont tous les facteurs $\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \neq 0$ ne s'annulent jamais dans $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$, puisque $\big|p^s\big| = p^{\mathrm{Re}\, s} > 1$, un théorème du cours assure que :

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \neq 0 \qquad (\forall\, \mathrm{Re}\, s > 1).$$

Ensuite, comme le demi-plan $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$ est simplement connexe, un théorème du cours montre l'existence de $s \longmapsto \log \zeta(s)$, holomorphe, avec $\log \zeta(s) \in \mathbb{R}$ quand $\zeta(s) \in \mathbb{R}$, notamment pour $s \in \,]1, \infty[$.

(c) Comme $s \longmapsto \log \zeta(s)$ et la fonction :

$$s \longmapsto \sum_{p \in \mathscr{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}},$$

sont toutes deux holomorphes dans $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$, et comme elles coïncident, d'après la Question **(a)**, sur le segment :

$$]1, \infty[\; \subset \big\{\mathrm{Re}\, s > 1\big\},$$

qui a des points d'accumulation dans l'ouvert $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$, le principe d'unicité garantit qu'elles coïncident partout.

(d) Comme $\zeta(s)$ est holomorphe et $\neq 0$ dans $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$ d'après le cours, on peut dériver terme à terme la série double normalement convergente qui précède en utilisant :

$$\big(p^{-ms}\big)' = \big(e^{-ms \log p}\big)' = -m \log p \, e^{-ms \log p} = -m \log p \cdot p^{-ms},$$

ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -\sum_{p\in\mathscr{P}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\big(-m\log p\big)\frac{1}{p^{ms}}\\
&= \sum_{p\in\mathscr{P}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log p}{p^{ms}}\\
\text{[Reconnaître }\Lambda\text{]}\qquad &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}.
\end{aligned}
$$

(e) En effet, grâce à $\big|a^s\big| = a^{\mathrm{Re}\, s} = a^c$ sur cette droite, majorons :

$$
\big|I(a)\big| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a^c}{|c+it|\cdot|c+1+it|}\,\big|idt\big|,
$$

puis en utilisant :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|c+it|} &= \frac{1}{(c^2+t^2)^{1/2}},\\
\frac{1}{|c+1+it|} &= \frac{1}{((c+1)^2+t^2)^{1/2}} \leqslant \frac{1}{(c^2+t^2)^{1/2}},
\end{aligned}
$$

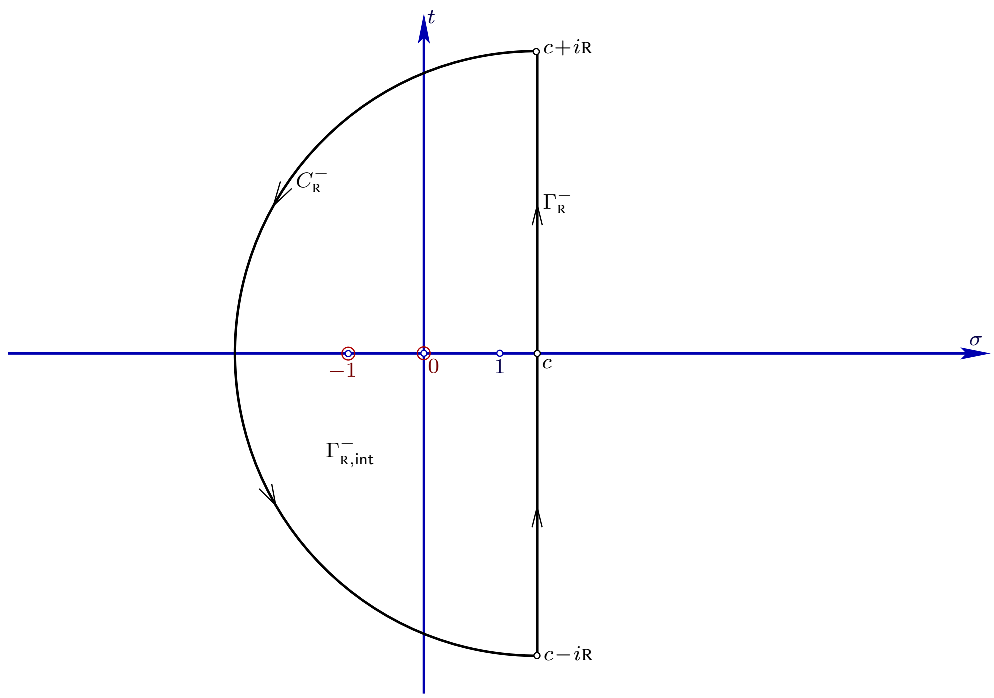
constatons la finitude :

$$
\begin{aligned}
\big|I(a)\big| &\leqslant \frac{a^c}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{c^2+t^2}\\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

(f) Élémentaire, mon cher Merker :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}_f(0) &= \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{a^s}{s(s+1)} = 1,\\
\mathrm{Res}_f(-1) &= \lim_{s\to -1}(s+1)\cdot\frac{a^s}{s(s+1)} = \frac{a^{-1}}{-1} = -\frac{1}{a}.
\end{aligned}
$$

(g) Voici un dessin complet, qui incorpore axes, flèches, et points remarquables.



(h) Comme les deux (seules) singularités $s = 0$ et $s = 1$ de $f(s) = \frac{a^s}{s(s+1)}$ se trouvent à l'intérieur $\Gamma_{\mathrm{R,int}}^{-}$ de ce contour, puisque $\mathrm{R} > 1 + c$, le théorème des résidus donne, grâce à la Question **(f)** :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{\mathrm{R}}^{-}} f(s)\,ds \;&=\; \mathsf{Res}_f(0) + \mathsf{Res}_f(-1)\\ &=\; 1 - \frac{1}{a}.\end{aligned}$$

(i) En paramétrant C_{R}^{-} par $s = c + \mathrm{R}\,e^{i\theta}$ avec $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}$, on transforme :

$$\begin{aligned}s\,(s+1) \;&=\; \big(c + \mathrm{R}\,e^{i\theta}\big)\,\big(c + 1 + \mathrm{R}\,e^{i\theta}\big)\\ &=\; e^{2i\theta}\,\big(c\,e^{-i\theta} + \mathrm{R}\big)\,\big((c+1)\,e^{-i\theta} + \mathrm{R}\big),\end{aligned}$$

d'où :

$$\big|s\,(s+1)\big| \;\geqslant\; \tfrac{1}{2}\,\mathrm{R}^2 \qquad\qquad (\forall\,\mathrm{R} \geqslant \mathrm{R}_c \gg 1).$$

Ensuite, comme on a $\mathsf{Re}\,s \leqslant c$ quel que soit $s \in C_{\mathrm{R}}^{-}$, d'où découle puisque $a \geqslant 1$:

$$\big|a^s\big| \;=\; a^{\mathsf{Re}\,s} \;\leqslant\; a^c \qquad\qquad (\forall\,s \in C_{\mathrm{R}}^{-}),$$

nous pouvons majorer et conclure :

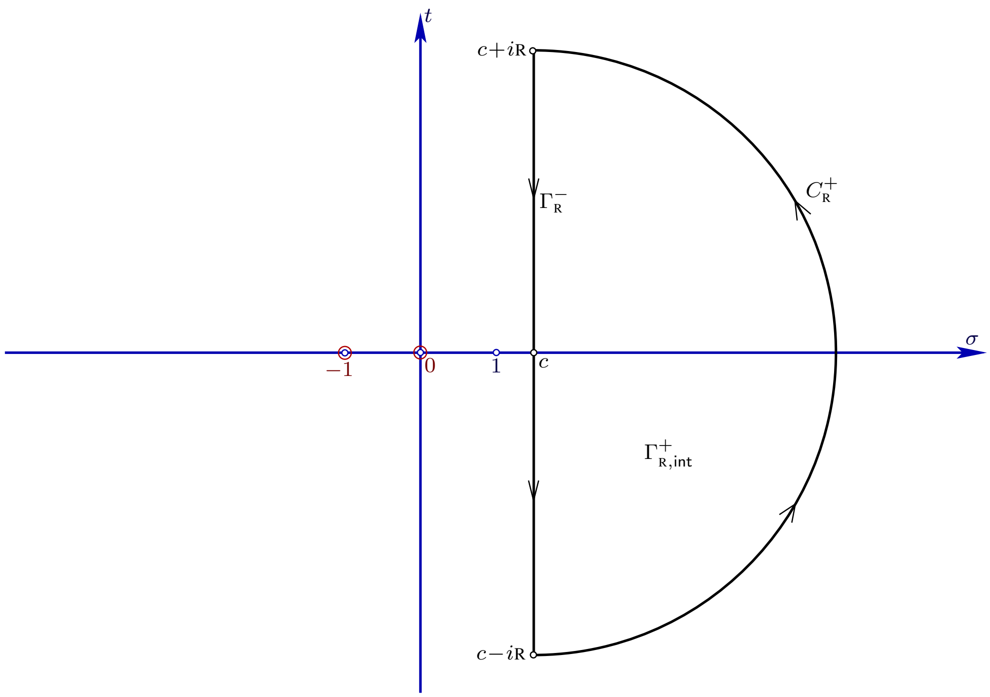
$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C_{\mathrm{R}}^{-}} \frac{a^s}{s\,(s+1)}\,ds\right| \;&\leqslant\; \frac{a^c}{2\pi}\int_{C_{\mathrm{R}}^{-}} \frac{|ds|}{|s\,(s+1)|}\\ &\leqslant\; \frac{a^c}{2\pi}\,\frac{\pi\,\mathrm{R}}{\frac{1}{2}\,\mathrm{R}^2}\\ &\underset{\mathrm{R}\to\infty}{\longrightarrow}\; 0.\end{aligned}$$

(j) Tout d'abord, pour le premier cas où $1 \leqslant a$, en faisant $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$ dans la formule des résidus obtenue à la Question **(h)** :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{[c-i\mathrm{R},c+i\mathrm{R}]}\frac{a^s}{s\,(s+1)}\,ds+\underbrace{\frac{1}{2i\pi}\int_{C_{\mathrm{R}}^-}\frac{a^s}{s\,(s+1)}\,ds}_{\underset{\mathrm{R}\to\infty}{\longrightarrow}0}\;=\;1-\frac{1}{a},$$

nous obtenons bien grâce à la Question **(i)** qui précède :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{a^s}{s\,(s+1)}\,ds\;=\;1-\frac{1}{a}.$$



Supposons maintenant que $0 < a \leqslant 1$. Si nous prenons le demi-cercle C_{R}^+ centré en c mais situé à *droite* de la verticale $\{\mathrm{Re}\, s = c\}$, et si Γ_{R}^+ est le contour analogue contenant le segment $[c+i\mathrm{R}, c-i\mathrm{R}]$ parcouru cette fois-ci *du haut vers le bas*, la fonction $s \longmapsto \frac{a^s}{s(s+1)}$ n'a plus aucun pôle dans l'intérieur $\Gamma_{\mathrm{R},\mathrm{int}}^+$, donc le théorème des résidus donne :

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{\mathrm{R}}^+}\frac{a^s}{s\,(s+1)}\,ds \\ &=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{[c+i\mathrm{R},c-i\mathrm{R}]}\frac{a^s}{s\,(s+1)}\,ds+\underbrace{\frac{1}{2i\pi}\int_{C_{\mathrm{R}}^+}\frac{a^s}{s\,(s+1)}\,ds}_{\underset{\mathrm{R}\to}{\longrightarrow}0}, \end{aligned}$$

et une estimation analogue à celle conduite par la Question **(i)** en tenant compte du fait que $\mathrm{Re}\, s \geqslant c$ pour tout $s \in C_{\mathrm{R}}^+$ implique toujours $|a^s| = e^{\mathrm{Re}\, s} \leqslant a^c$ car maintenant $0 < a \leqslant 1$, donne bien ce qui était demandé :

$$0\;=\;\frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{a^s}{s\,(s+1)}\,ds.$$

(k) Observons d'abord que pour $u \geqslant 1$ réel :

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \sum_{1 \leqslant n \leqslant u} \Lambda(n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, \mathbf{1}_{[n,\infty[}(u),\end{aligned}$$

puis insérons :

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \int_1^x \psi(u)\, du \\ &= \int_1^x \bigg(\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, \mathbf{1}_{[n,\infty[}(u)\bigg)\, du \\ \text{[Somme finie]} \qquad &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \int_1^x \mathbf{1}_{[n,\infty[}(u)\, du.\end{aligned}$$

(l) Continuons en décomposant :

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \Lambda(n) \int_1^x \mathbf{1}_{[n,\infty[}(u)\, du + \sum_{n > x} \Lambda(n) \underline{\int_1^x \mathbf{1}_{[n,\infty[}(u)\, du} \\ &= \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \Lambda(n) \cdot \big(x - n\big) + 0.\end{aligned}$$

(m) Tout d'abord, une majoration du type :

$$\log n \;\leqslant\; \mathsf{constante}_{\varepsilon} \cdot n^{\varepsilon} \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1),$$

valable pour tout $\varepsilon > 0$, montre, grâce au critère de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\kappa}} < \infty$ vrai pour tout $\kappa > 1$, que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{1+\delta}} \;<\; \infty.$$

Observons par ailleurs, en revenant à la définition donné par la Question **(d)**, que :

$$\big|\Lambda(n)\big| \;\leqslant\; \log n \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

Par conséquent, nous avons bien convergence normale :

$$\begin{aligned}\bigg|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\bigg| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big|\Lambda(n)\big|}{n^{\,\mathsf{Re}\, s}} \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{1+\delta}} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

(n) Avec $a := \frac{x}{n}$, tout ce qui précède permet en effet d'intervertir sommation et intégration pour calculer :

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= \sum_{1\leqslant n\leqslant x} \Lambda(n)\, x\left(1-\frac{n}{x}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, x\, \frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\big(x/n\big)^s}{s\,(s+1)}\, ds \\
[c>1] \qquad &= \frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right) \frac{x^{s+1}}{s\,(s+1)}\, ds \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(-\,\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^{s+1}}{s\,(s+1)}\, ds.
\end{aligned}$$

Exercice 3. (a) Avec $t > 0$, on a bien (facilement !) :

$$(*) \qquad \frac{4\,|z|}{t} \leqslant |n| \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned}[t] -\,n^2\,t + 2\,|n|\,|z| &\leqslant -\,n^2\,t + 2\,|n|\,\frac{t}{4}\,|n| \\ &= -\,n^2\,\frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Grâce à cela, et à l'inégalité élémentaire $\big|e^{2i\pi nz}\big| \leqslant e^{2\pi\,|n|\,|z|}$, pour démontrer que la série infinie de fonctions holomorphes qui définit $\Theta_\tau(z)$ converge normalement sur tout disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_{\rm R}$ de rayon ${\rm R} \gg 1$ arbitrairement grand, majorons, pour $|z| \leqslant {\rm R}$, en découpant la somme en deux morceaux :

$$\begin{aligned}
\big|\Theta_\tau(z)\big| &\leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big|e^{i\pi n^2\tau}\, e^{2i\pi nz}\Big| \\
[\mathrm{Im}\,\tau = t] \qquad &\leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t + 2\pi\,|n|\,|z|} \\
[(*)] \qquad &\leqslant \sum_{|n|<\frac{4|z|}{t}} e^{-\pi n^2 t + 2\pi\,|n|\,{\rm R}} + \sum_{\frac{4|z|}{t}\leqslant|n|} e^{-\,\pi n^2\,\frac{t}{2}} \\
&\leqslant \mathsf{constante}({\rm R}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\,n^2\,\frac{t}{2}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Un théorème du cours dû à Cauchy offre l'holomorphie de Θ_τ sur $\mathbb{D}_{\rm R}$, donc dans $\mathbb{C}$ tout entier, puisque ${\rm R} \gg 1$ était arbitraire.

(b) Reprenons cette majoration en analysant mieux le premier terme :

$$
\begin{aligned}
\big|\Theta_\tau(z)\big| &\leqslant \sum_{|n|<\frac{4|z|}{t}} e^{-\pi n^2 t + 2\pi\,|n|\,|z|} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\,n^2\,\frac{t}{2}} \\
&\leqslant \sum_{|n|<\frac{4|z|}{t}} e^{-\pi n^2 t + 2\pi\,\frac{4|z|}{t}\,|z|} + \text{même constante} \\
[-\pi n^2 t \leqslant -\pi n^2\,\tfrac{t}{2}] \qquad &\leqslant e^{\frac{8\pi|z|^2}{t}} \bigg(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\,\frac{n^2 t}{2}} + \text{même constante}\bigg),
\end{aligned}
$$

d'où le résultat en prenant :

$$
\mathrm{B} \,:=\, \frac{8\,\pi}{t} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \mathrm{A} \,:=\, 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\,n^2\,\frac{t}{2}}.
$$

Ainsi, cette inégalité $\big|\Theta_\tau(z)\big| \leqslant \mathrm{A}\,e^{\mathrm{B}\,|z|^2}$ dit que Θ_τ est d'ordre $\leqslant 2$.

(c) Pour cette fonction :

$$
f(z) \,:=\, z + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} e^{i\pi n^2\tau}\,\frac{e^{2i\pi nz}}{2i\pi n},
$$

de toute façon, comme $\frac{1}{2\pi|n|} \leqslant 1$, cela améliore les inégalités de la Question **(a)**, donc f est *aussi* holomorphe entière.

Pour $z = x \in \mathbb{R}$, clairement, le premier terme z de $f(z)$ tend vers l'infini quand $x \longrightarrow \infty$, tandis que la (grosse) série demeure en fait bornée (!) :

$$
\begin{aligned}
\bigg|\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} e^{i\pi n^2\tau}\,\frac{e^{2i\pi nx}}{2i\pi n}\bigg| &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} e^{-\pi n^2 t}\,\frac{1}{2\pi|n|} \\
&=: \mathrm{E} \,<\, \infty,
\end{aligned}
$$

donc on a bien :

$$
\lim_{x\to\infty} f(x) \,\geqslant\, \lim_{x\to\infty} \big(x - \mathrm{E}\big) \,=\, \infty.
$$

Par conséquent, cette fonction $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ est *non constante*.

(d) Comme cette série $f(z)$ de fonctions holomorphes converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$, on peut la dériver terme à terme pour reconnaître :

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= 1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} e^{i\pi n^2\tau}\,\frac{2i\pi n\,e^{2i\pi nz}}{2i\pi n} \\
\text{[Kaboom !]} \qquad &= \Theta_\tau(z).
\end{aligned}
$$

Comme f est non constante, Θ_τ est *non identiquement nulle*.

(e) En effet, transformons $\Theta_\tau(z+m\,\tau)$ en cherchant à faire apparaître $\Theta_\tau(z)$, grâce à une translation de la variable de sommation :

$$\begin{aligned}
\Theta_\tau\big(z+m\,\tau\big) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2\tau}\, e^{2i\pi\, n(z+m\tau)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2\tau+2i\pi nm\tau}\, e^{2i\pi nz} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\,[(n+m)^2-m^2]\,\tau}\, e^{2i\pi\,[n+m-m]\,z} \\
[n+m=:k] \qquad &= e^{-i\pi m^2\tau}\, e^{-2i\pi mz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\pi k^2\tau}\, e^{2i\pi kz} \\
&= e^{-i\pi m^2\tau}\, e^{-2i\pi mz}\, \Theta_\tau(z).
\end{aligned}$$

(f) D'après la Question **(b)**, l'ordre de Θ_τ est $\leqslant 2$.

Par l'absurde, supposons que cet ordre est < 2, à savoir, supposons l'existence de $\rho < 2$ et de deux constantes tels que :

$$\mathrm{C}\, e^{\mathrm{D}\,|z|^\rho} \geqslant \big|\Theta_\tau(z)\big| \qquad\qquad (\forall\, z\in\mathbb{C}).$$

Comme $\Theta_\tau \not\equiv 0$, le principe des zéros isolés fournit un $x_0\in\mathbb{R}$ réel en lequel $\Theta_\tau(x_0)\neq 0$. Alors en appliquant l'égalité qui précède aux points $x_0+m\,\tau$ avec $m\in\mathbb{Z}$ quelconque, nous obtenons une minoration :

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}\, e^{\mathrm{D}\,|x_0+m\,\tau|^\rho} &\geqslant \big|\Theta_\tau(x_0+m\,\tau)\big| \\
&= \Big|e^{-i\pi m^2\tau}\, e^{-2i\pi m x_0}\, \Theta_\tau(x_0)\Big| \\
&= e^{\pi m^2 t}\cdot 1\cdot \big|\Theta_\tau(x_0)\big|,
\end{aligned}$$

qui se métamorphose en une contradiction quand $m\longrightarrow\infty$, car $m\longmapsto m^\rho$ à gauche croît moins rapidement que $m\longmapsto m^2$ à droite.

5. Examen 3

Exercice 1. On note $C := \big\{z = x + i\,y \in \mathbb{C}\colon\ x^2 + y^2 = 1\big\}$ le cercle unité dans $\mathbb{C}$. L'objectif est de calculer des intégrales de la forme :

$$\int_0^{2\pi} R\big(\cos t,\, \sin t\big)\, dt,$$

où R est une fraction rationnelle à coefficients réels :

$$R(x,y) \,=\, \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \qquad \text{avec deux polynômes } \ P(x,y),\, Q(x,y) \,\in\, \mathbb{R}[x,y],$$

dont le dénominateur $Q(x,y)$ n'a pas de pôle sur C, c'est-à-dire que $Q\big|_C \neq 0$. À $R(x,y)$, on associe la fonction :

$$f(z) \,:=\, \frac{1}{i\,z}\,R\Big(\frac{z^2+1}{2\,z},\, \frac{z^2-1}{2i\,z}\Big).$$

On rappelle que C est le bord du disque unité $\mathbb{D} := \{|z| < 1\}$.

(a) Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} R\big(\cos t,\, \sin t\big)\, dt \,=\, 2i\pi \sum_{z_0\in\mathbb{D}} \mathsf{Res}_f(z_0).$$

Indication: Écrire $z = e^{it}$ sur le cercle unité C.

(b) Pour un paramètre réel $a > 1$, soit l'exemple :

$$R(x,y) \,:=\, \frac{1}{a+y}.$$

Déterminer les deux pôles z_1 et z_2 de la fonction $f(z)$ associée, avec $|z_1| < |z_2|$. Indication: Ne pas faire d'erreur de calcul ! z_1 et z_2 sont tous deux imaginaires purs.

(c) Calculer $\mathsf{Res}_f(z_1)$ en fonction de z_1 et de z_2.

(d) Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\sin t}\, dt \,=\, \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie sur le disque unité $\mathbb{D} = \big\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\big\}$ qui est *bornée*, au sens où il existe une constante $\mathrm{M} < \infty$ telle que $\big|f(z)\big| \leqslant \mathrm{M}$, pour tout $z \in \mathbb{D}$. On suppose que $f\big(r\,e^{i\theta}\big)$ converge vers 0 lorsque $r \overset{<}{\longrightarrow} 1$, *uniformément* pour $t \in \big[0, \frac{\pi}{4}\big[$:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,r_\varepsilon < 1 \quad \Big(r_\varepsilon < r < 1 \quad \Longrightarrow \quad \big|f\big(r\,e^{it}\big)\big| \leqslant \varepsilon \quad \forall\,t \,\in\, \big[0, \tfrac{\pi}{4}\big[\Big).$$

(a) On introduit la fonction auxiliaire définie par :

$$g(z) \,:=\, \prod_{k=0}^{7} f\big(z\,e^{-i\frac{k\pi}{4}}\big) \qquad\qquad (z\in\mathbb{D}).$$

Vérifier que $g \in \mathscr{O}(\mathbb{D})$.

(b) Montrer que :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, r_\varepsilon < 1 \quad \Big(r_\varepsilon < r < 1 \quad \Longrightarrow \quad \big|g\big(r\, e^{i\theta}\big)\big| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}\Big).$$

(c) Montrer que $g \equiv 0$.

(d) Montrer que $f \equiv 0$.

(e) Tout cela serait-il encore vrai si, pour un entier $n \geqslant 1$ fixé, on supposait que $f\big(r\, e^{i\theta}\big)$ converge vers 0 lorsque $r \overset{<}{\longrightarrow} 1$, uniformément pour tout $\theta \in \big[0, \frac{\pi}{2n}\big[$ **?**

Exercice 3. Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, soit un ouvert Ω qui contient le demi-plan supérieur fermé :

$$\Omega \supset \overline{\mathbb{H}}^+ := \big\{z \in \mathbb{C} \colon \ \mathsf{Im}\, z \geqslant 0\big\}.$$

Soit aussi une fonction holomorphe dans cet ouvert :

$$f \in \mathscr{O}\Big(\Omega \backslash \big\{a_1, \dots, a_{\mathrm{K}}\big\}\Big),$$

en-dehors d'un nombre fini $\mathrm{K} \geqslant 1$ de points $a_1, \dots, a_{\mathrm{K}} \in \mathbb{H}^+$ tous contenus dans le demi-plan supérieur ouvert $\mathbb{H}^+ := \big\{\mathsf{Im}\, z > 0\big\}$. L'objectif est de démontrer que :

$$\lim_{\mathrm{R} \to \infty} \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} f(x)\, e^{ix}\, dx \ = \ 2i\pi \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \mathsf{Res}\,\big(f(z) e^{iz},\, a_k\big),$$

sous l'hypothèse que :

$$0 \ = \ \lim_{r \to \infty} \max_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi} \big|f\big(r\, e^{i\theta}\big)\big|,$$

et d'appliquer ensuite cette formule générale dans un cas spécifique concret.

(a) Soient deux angles $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant \pi$, soit un rayon $r_1 > 0$, et soit une fonction h continue dans le secteur angulaire fermé :

$$\overline{S}_{\theta_1, \theta_2}^{r_1} \ := \ \big\{z \in \mathbb{C} \colon \ r_1 \leqslant |z|, \ \ \theta_1 \leqslant \mathsf{Arg} z \leqslant \theta_2\big\}.$$

Dessiner soigneusement ce secteur $\overline{S}_{\theta_1, \theta_2}^{r_1}$.

(b) Sans chercher à la démontrer au moyen d'inégalités, justifier par un dessin accompagné d'explications éclairantes l'inégalité classique suivante, valable pour tout $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$:

$$\sin \theta \ \geqslant \ \frac{2}{\pi}\, \theta.$$

(c) Montrer que :

$$\int_0^{\pi/2} e^{-r \sin \theta}\, r\, d\theta \ \leqslant \ \frac{\pi}{2}.$$

(d) Soit une fonction continue $h \in \mathscr{C}^0\big(\overline{S}_{\theta_1, \theta_2}^{r_1}\big)$. On introduit, pour tout rayon $r \geqslant r_1$, les quantités :

$$M_h(r) \ = \ \max_{\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2} \big|h\big(r\, e^{i\theta}\big)\big|,$$

ainsi que les arcs de cercle :

$$C_{\theta_1, \theta_2}^r \ := \ \big\{r\, e^{i\theta} \colon \ \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2\big\}.$$

Montrer que :

$$\left| \int_{C^r_{\theta_1,\theta_2}} h(z)\, e^{iz}\, dz \right| \leqslant M_h(r)\cdot \pi.$$

(e) En déduire que :

$$0 = \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_0^\pi f\big(\mathrm{R}\, e^{i\theta}\big)\, e^{i\,\mathrm{R}\, e^{i\theta}}\, i\,\mathrm{R}\, e^{i\theta}\, d\theta.$$

(f) Conclure, en détaillant précisément tous les arguments, que :

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} f(x)\, e^{ix}\, dx = 2i\pi \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \mathrm{Res}\,\big(f(z)e^{iz},\, a_k\big).$$

(g) Montrer, pour tout $r \geqslant 4$, que :

$$\left| \frac{1}{1+\frac{1}{r\, e^{i\theta}}+\frac{1}{(r\, e^{i\theta})^2}} \right| \leqslant 2,$$

et ensuite, déterminer les deux racines complexes a et b du polynôme z^2+z+1.

(h) Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+x+1}\, dx = \frac{2\,\pi}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big(\cos\tfrac{1}{2} - i \sin\tfrac{1}{2}\Big).$$

Exercice 4. Sur un intervalle compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, le célèbre *Théorème de Weierstrass* stipule que toute fonction continue $f \in \mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ peut être approximée à volonté en norme uniforme par de simples polynômes :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P = P_\varepsilon(x) \in \mathbb{R}[x] \quad \text{tel que} \quad \max_{x\in[a,b]} \big| f(x) - P(x) \big| \leqslant \varepsilon.$$

Existe-t-il un résultat similaire en Analyse Complexe ? Tout devient 2-dimensionnel ! On va regarder un compact quelconque $K \subset \mathbb{C}$, éventuellement d'intérieur non vide, et des fonctions qui sont holomorphes dans un voisinage ouvert $\Omega \supset K$, éventuellement très « resserré » autour de K. Dans ces circonstances, a-t-on :

$$\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega) \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P(z) \in \mathbb{C}[z] \quad \text{tel que} \quad \max_{z\in K} \big| f(z) - P(z) \big| \leqslant \varepsilon\, \textbf{?}$$

Cela serait un résultat remarquable, car les polynômes sont des objets globaux, définis pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(a) Soit une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ à coefficients complexes $a_n \in \mathbb{C}$, dont le rayon de convergence R satisfait :

$$0 < \mathrm{R} < \infty.$$

Justifier, pour tout $\delta > 0$, l'existence d'un (grand) entier $\mathrm{N}(\delta) \gg 1$ tel que, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}(\delta)$, on ait :

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{\mathrm{R}} + \delta.$$

(b) Soit un compact $K \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ contenu dans le disque ouvert $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ de rayon R centré en l'origine $0 \in \mathbb{C}$. Vérifier qu'il existe $0 < r < \mathrm{R}$ tel que $K \subset \overline{\mathbb{D}}_r$.

(c) En choisissant $\delta > 0$ assez petit pour que :

$$q := \Big(\frac{1}{\mathrm{R}} + \delta\Big)\, r < 1,$$

montrer, pour tout $\mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}(\delta)$, l'inégalité valable quel que soit $z \in K$:

$$\bigg|\sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} a_n\, z^n\bigg| \leqslant q^{\mathrm{N}}\, \frac{1}{1-q}.$$

(d) En raisonnant très précisément, toujours avec $K \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ compact, établir la propriété attendue :

$$\forall\, f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_{\mathrm{R}}) \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, P(z) \in \mathbb{C}[z] \qquad \text{tel que} \qquad \max_{z \in K} \big|f(z) - P(z)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 5. Soit $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ le disque de rayon $\mathrm{R} > 1$ centré en $0 \in \mathbb{C}$, et soit un point $\zeta_0 \in C = \partial\mathbb{D}_1$ sur le cercle unité, *i.e.* avec $|\zeta_0| = 1$. L'objectif est d'étudier les fonctions méromorphes $f \in \mathscr{M}\big(\mathbb{D}_{\mathrm{R}}\big) \cap \mathscr{O}\big(\mathbb{D}_{\mathrm{R}}\backslash\{\zeta_0\}\big)$ qui ont un unique pôle simple (d'ordre 1) en ζ_0.

(a) Faire une figure, et justifier que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ se développe à l'origine en une série entière qui converge pour $|z| < 1$.

(b) Montrer qu'il existe une constante non nulle $\alpha \in \mathbb{C}^*$ telle que la fonction auxiliaire :

$$g(z) := f(z) - \frac{\alpha}{z - \zeta_0}$$

soit holomorphe dans $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$. Comment appelle-t-on α ?

(c) Montrer que les coefficients b_n du développement en série entière $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ satisfont $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

(d) Montrer que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, puis établir que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \zeta_0$, et enfin, interpréter intelligemment ce résultat.

Exercice 6. **[Sans indications]** Sur le cercle unité $C := \big\{|z| = 1\big\}$, soient $n \geqslant 1$ points $w_1 = e^{it_1}, \dots, w_n = e^{it_n}$ avec $0 \leqslant t_k < 2\pi$ pour $k = 1, \dots, n$.

(a) Trouver (au moins) un point $z^* = e^{i\theta^*} \in C$ satisfaisant :

$$\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \big|z^* - w_k\big| = 1.$$

6. Corrigé de l'examen 3

Exercice 1. (a) Quand $z \in C$, on peut écrire avec $t \in \mathbb{R}$:

$$z = e^{it},$$

de sorte que :

$$\cos t = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \qquad \sin t = \frac{1}{2\,i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big), \qquad dt = \frac{dz}{i\,z},$$

et l'intégrale à étudier devient :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} R\big(\cos t,\, \sin t\big)\, dt &= \int_C R\bigg(\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big),\, \frac{1}{2\,i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\bigg)\, \frac{dz}{i\,z} \\ &= \int_C f(z)\, dz.\end{aligned}$$

Comme cette fonction R est méromorphe dans $\mathbb{C}$, sans pôles sur le cercle unité $C = \partial\mathbb{D}$, le théorème des résidus donne effectivement :

$$\int_0^{2\pi} R\big(\cos t,\, \sin t\big)\, dt = \int_{\partial\mathbb{D}} f(z)\, dz = 2i\pi \sum_{z_0 \in \mathbb{D}} \mathrm{Res}_f(z_0),$$

cette dernière somme étant finie, parce que $\mathrm{Res}_f(z_0) = 0$ dès que f est holomorphe au voisinage de z_0, et parce que f, qui est par construction une fraction rationnelle, n'a qu'un nombre fini de pôles dans $\mathbb{D}$.

(b) Avec $y = \frac{z^2-1}{2i\,z}$ sur le cercle C, il vient :

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{i\,z}\, \frac{1}{a + \frac{z^2-1}{2i\,z}} \\ &= \frac{1}{i\,z}\, \frac{2i\,z}{a\,2i\,z + z^2 - 1} \\ &= \frac{2}{z^2 + 2ia\,z - 1}.\end{aligned}$$

Les deux racines du polynôme du second degré au dénominateur sont, d'après les babyloniens :

$$z_1 := -i\,a + i\,\sqrt{a^2-1} \qquad \text{et} \qquad z_2 := -i\,a - i\,\sqrt{a^2-1},$$

et elles sont bien imaginaires pures, avec même :

$$|z_1| < 1 < |z_2|.$$

(c) Comme le pôle z_1 est d'ordre 1, et comme on peut factoriser :

$$f(z) = \frac{2}{(z-z_1)(z-z_2)},$$

le résidu demandé vaut :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_f(z_1) &= \lim_{z\to z_1} \big(z-z_1\big)\, f(z) \\
&= \lim_{z\to z_1} \underline{\big(z-z_1\big)}\, \frac{2}{\underline{\big(z-z_1\big)}\,\big(z-z_2\big)} \\
&= \frac{2}{z_1-z_2}.
\end{aligned}$$

(d) D'après la Question **(a)**, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\sin t}\, dt &= \int_C \frac{2}{z^2+2ia\,z-1}\, dz \\
&= 2i\pi\, \mathrm{Res}_f(z_0) \\
&= 2i\pi\, \frac{2}{z_1-z_2} \\
&= 2i\pi\, \frac{2}{-i\,a+i\,\sqrt{a^2-1}-\big(-i\,a-i\,\sqrt{a^2-1}\big)} \\
&= \underline{2i}\,\pi\, \frac{2}{\underline{2i}\,\sqrt{a^2-1}} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.
\end{aligned}$$

Exercice 2. **(a)** Cette fonction-produit est constituée de 8 facteurs $f\big(z\,e^{-i\frac{k\pi}{4}}\big)$. Comme $\big|z\,e^{-i\frac{k\pi}{4}}\big| = |z|$, chacun de ces facteurs est holomorphe dans $\mathbb{D}$, puisque f l'est, et ainsi, $g\in\mathscr{O}(\mathbb{D})$.

(b) Découpons le cercle unité $C=\big\{e^{i\theta}\colon\ \theta\in\mathbb{R}\big\}$ en les 8 morceaux disjoints recouvrants de longueur $\frac{\pi}{4}$:

$$\big[0,2\pi\big[\;=\; \bigcup_{0\leqslant k\leqslant 7} \Big[k\,\tfrac{\pi}{4},\,(k+1)\tfrac{\pi}{4}\Big[.$$

Ainsi, pour tout $\theta\in[0,2\pi[$ fixé, il existe un unique entier $\ell=\ell(\theta)\in\big\{0,1,2,\dots,7\big\}$ tel que :

$$\ell(\theta)\,\tfrac{\pi}{4} \;\leqslant\; \theta \;<\; \big(\ell(\theta)+1\big)\,\tfrac{\pi}{4}.$$

Autrement dit, les nombres réels :

$$t(\theta) \;:=\; \theta-\ell(\theta)\,\tfrac{\pi}{4} \qquad\qquad \text{satisfont toujours :} \quad 0 \;\leqslant\; t(\theta) \;<\; \tfrac{\pi}{4}.$$

Alors l'inégalité/majoration utilisant le fait que f est bornée :

$$\begin{aligned}\big|g(r\,e^{i\theta})\big| &= \prod_{0\leqslant k\leqslant 7}\Big|f\big(r\,e^{i\theta}\,e^{-i\frac{k\pi}{4}}\big)\Big| \\ &= \Big|f\big(r\,e^{i\theta}\,e^{-i\,\frac{\ell(\theta)\pi}{4}}\big)\Big| \prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant 7\\ k\neq \ell(\theta)}}\Big|f\big(r\,e^{i\theta}\,e^{-i\frac{k\pi}{4}}\big)\Big| \\ &\leqslant \Big|f\big(r\,e^{i(\theta-\frac{\ell(\theta)\pi}{4})}\big)\Big|\;\mathrm{M}^7 \\ &= \underbrace{\big|f\big(r\,e^{it(\theta)}\big)\big|}_{\substack{\text{converge}\\ \text{uniformément}\\ \text{vers } 0 \text{ quand } r\to 1^-}}\;\mathrm{M}^7,\end{aligned}$$

fait voir grâce à la convergence uniforme vers 0 valable pour $0\leqslant t(\theta)<\frac{\pi}{4}$ qui est notre hypothèse, que $g\big(r\,e^{i\theta}\big)$ converge uniformément vers 0, pour *tout* $0\leqslant\theta<2\pi$.

Avant de poursuivre en nous précipitant trop vite vers la question suivante, observons que ceci implique que g se prolonge continûment à $\overline{\mathbb{D}}$, comme fonction identiquement nulle sur le cercle unité $C=\partial\mathbb{D}=\partial\overline{\mathbb{D}}$.

(c) Un théorème vu en cours énonce que sur un ouvert $\Omega\subset\mathbb{C}$ *borné* — ce qui signifie que son adhérence $\overline{\Omega}$ est un compact de $\mathbb{C}$ —, toute fonction holomorphe $h\in\mathscr{O}(\Omega)\cap\mathscr{C}^0\big(\overline{\Omega}\big)$ continue jusqu'au bord atteint toujours son maximum sur la frontière du domaine :

$$\max_{z\in\overline{\Omega}}\big|h(z)\big| \;=\; \max_{z\in\partial\Omega}\big|h(z)\big|.$$

Ici avec $h:=g$ et avec $\Omega:=\mathbb{D}$, il vient sans effort au vu du résultat de la question précédente :

$$\max_{z\in\overline{\mathbb{D}}}\big|g(z)\big| \;=\; \max_{z\in\partial\mathbb{D}}\big|g(z)\big| \;=\; 0,$$

donc $g\equiv 0$, effectivement !

(d) On raisonne par l'absurde en appliquant le principe des zéros isolés.

Si donc $f\not\equiv 0$ n'était *pas* identiquement nulle, alors chacune de nos 8 fonctions $f_k(z):=f\big(z\,e^{-i\frac{k\pi}{4}}\big)\not\equiv 0$ ne le serait pas non plus, pour tout $k\in\big\{0,1,2,\dots,7\big\}$.

Or puisque l'ensemble des zéros de toutes ces f_k :

$$\boldsymbol{Z}_{f_k} \;:=\; \big\{z_0\in\mathbb{D}\colon\; f_k(z_0)=0\big\} \qquad\qquad (0\leqslant k\leqslant 7),$$

serait alors nécessairement *discret* dans $\mathbb{D}$ à cause du principe d'identité, en restreignant les considérations à un sous-disque compact fixé $\overline{\mathbb{D}}_r\subset\mathbb{D}$ avec $0<r<1$, on aurait alors la *finitude* de l'ensemble de ces zéros :

$$\mathsf{Card}\,\big(\boldsymbol{Z}_{f_k}\cap\overline{\mathbb{D}}_r\big) \;<\; \infty \qquad\qquad (1\leqslant k\leqslant 8).$$

Mais comme $g=f_0f_1f_2\cdots f_7$ est un simple produit fini manufacturé, il est clair que :

$$\boldsymbol{Z}_g \;=\; \boldsymbol{Z}_{f_0}\cup\boldsymbol{Z}_{f_1}\cup\boldsymbol{Z}_{f_2}\cup\cdots\cup\boldsymbol{Z}_{f_7},$$

et puisque nous avons démontré (sans erreur !) dans la question précédente que $g\equiv 0$, nous déduirions de toutes ces fariboles une recette farfelue de cuisine géométrique :

$$\overline{\mathbb{D}}_r \;=\; \bigcup_{\text{finie}}\big\{\text{Nombre fini de points}\big\}$$

permettant de remplir par magie un disque de rayon > 0 avec un nombre fini de points, ce qui devient du « *Grand n'importe Nawak* » !

Contradiction, donc, fatale s'il en est, qui nous permet de conclure que $f \equiv 0$.

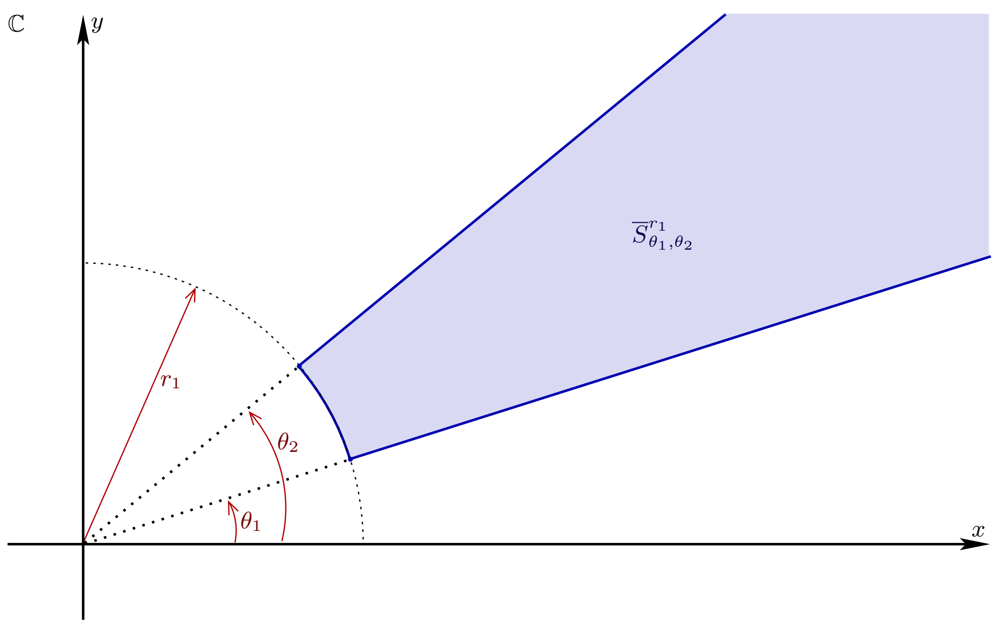
(e) Oui, très certainement ! Il suffit de procéder de manière entièrement similaire, en découpant :

$$\big[0, 2\pi\big[\;=\; \bigcup_{0\leqslant k\leqslant n} \Big[k\,\tfrac{2\pi}{n},\,(k+1)\,\tfrac{2\pi}{n}\Big[,$$

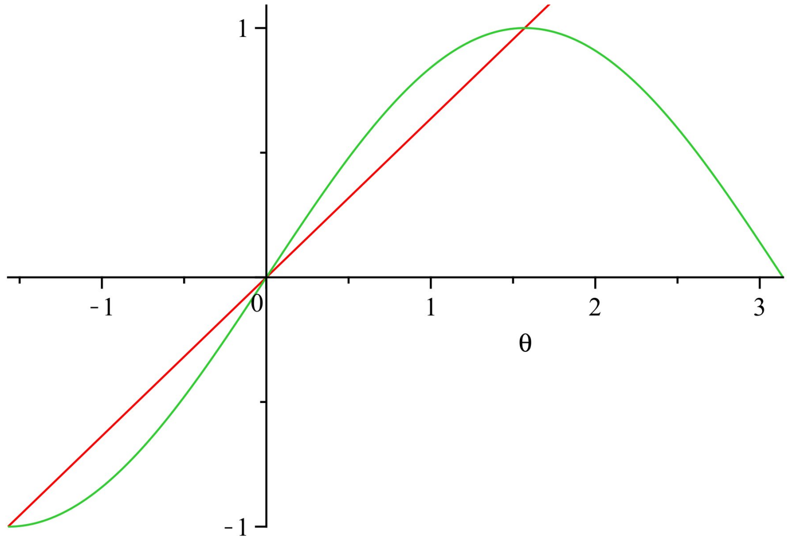
et en introduisant la fonction holomorphe auxiliaire :

$$g(z) \,:=\, \prod_{k=0}^{n-1} f\big(z\,e^{-i\frac{k2\pi}{n}}\big).$$

Exercice 3. (a) Voici une représentation de $\overline{S}_{\theta_1,\theta_2}^{r_1}$.



(b) Le graphe de la fonction $\theta \longmapsto \sin\theta$ se trouve *au-dessus* de la corde (du segment) délimité par l'origine $(0,0)$ et par le point $\big(\frac{\pi}{2},1\big)$, comme le montre la figure suivante, générée sur machine.



(c) Après l'avoir inversée, on utilise la majoration qui vient d'être rappelée :

$$-\sin\theta \leqslant -\frac{2}{\pi}\,\theta,$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin\theta}\, r\, d\theta &\leqslant \int_0^{\pi/2} e^{-r\,\frac{2}{\pi}\,\theta}\, r\, d\theta \\
&= \left[\frac{1}{-\underline{r}\,\frac{2}{\pi}}\, e^{-r\,\frac{2}{\pi}\,\theta}\,\underline{r}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2}\big(-\,e^{-r}+1\big) \\
&\leqslant \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(d) On majore petit à petit, avec des explications précises :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C^r_{\theta_1,\theta_2}} h(z)\, e^{iz}\, dz\right| &\leqslant \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} h\big(r\,e^{i\theta}\big)\, e^{i\,r\,e^{i\theta}}\, ir\,e^{i\theta}\, d\theta\right| \\
&\leqslant \max_{\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2}\left|h\big(r\,e^{i\theta}\big)\right|\cdot\left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{i\,r\cos\theta - r\sin\theta}\, ir\,e^{i\theta}\, d\theta\right| \\
[|e^{ir\cos\theta}| = |i\,e^{i\theta}| = 1] \qquad &\leqslant M_h(r)\cdot\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-r\sin\theta}\, r\, d\theta \\
[0\leqslant\theta_1<\theta_2\leqslant\pi] \qquad &\leqslant M_h(r)\int_0^{\pi} e^{-r\sin\theta}\, r\, d\theta \\
[\sin(\pi-\theta)=\sin\theta] \qquad &= M_h(r)\,2\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin\theta}\, r\, d\theta \\
[\text{Question } (\mathbf{c})] \qquad &\leqslant M_h(r)\cdot\pi.
\end{aligned}$$

(e) Avec les choix de $\theta_1 := 0$, de $\theta_2 := \pi$ et de $r := \mathrm{R} \geqslant r_1$, les arcs $C^{\mathrm{R}}_{0,\pi}$ sont des demi-cercles fermés contenus dans $\overline{\mathbb{H}}^+$:

$$C^{\mathrm{R}}_{0,\pi} = \big\{z\in\mathbb{C}\colon\ |z| = \mathrm{R},\ \ \mathrm{Im}\, z\geqslant 0\big\} \subset \overline{\mathbb{H}}^+.$$

Pourvu que :

$$\mathrm{R} \geqslant r_1 := 1 + \max_{1 \leqslant k \leqslant \mathrm{K}} |a_k|,$$

toutes les restrictions de f à ces demi-cercles :

$$h := f\big|_{C_{0,\pi}^{\mathrm{R}}},$$

sont continues, et alors la Question **(c)** précédente s'applique pour aider à majorer l'intégrale par une quantité :

$$\begin{aligned}\left| \int_0^\pi f\big(\mathrm{R}\, e^{i\theta}\big)\, e^{i\,\mathrm{R}\, e^{i\theta}}\, i\, \mathrm{R}\, e^{i\theta}\, d\theta \right| &= \left| \int_{C_{0,\pi}^{\mathrm{R}}} f(z)\, e^{iz}\, dz \right| \\ &\leqslant \underbrace{\max_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi} \big| f\big(\mathrm{R}\, e^{i\theta}\big)\big|}_{\xrightarrow[\mathrm{R} \to 0]{} 0} \cdot \pi,\end{aligned}$$

qui tend vers zéro, grâce à l'hypothèse faite au début de cet Exercice.

(f) Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, soit le contour orienté dans le sens trigonométrique :

$$\big[-\mathrm{R}, \mathrm{R}\big] \cup C_{\mathrm{R}}^+,$$

consistant en le segment réel $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, suivi du demi-cercle supérieur de rayon R, que nous noterons en abrégé :

$$C_{\mathrm{R}}^+ := \big\{ z \in \mathbb{C} \colon\ |z| = \mathrm{R},\ \ \mathsf{Im}\, z \geqslant 0 \big\}.$$

Dès que :

$$\mathrm{R} \geqslant 1 + \max_{1 \leqslant k \leqslant \mathrm{K}} |a_k|,$$

ce contour ne rencontre pas les points (éventuellement) singuliers $a_1, \dots, a_{\mathrm{K}}$ de la fonction $f \in \mathscr{O}\big(\Omega \backslash \{a_1, \dots, a_{\mathrm{K}}\}\big)$, et donc, le théorème des résidus donne :

$$\int_{[-\mathrm{R},\mathrm{R}] \cup C_{\mathrm{R}}^+} f(z)\, e^{iz}\, dz = 2i\pi \sum_{1 \leqslant k \leqslant \mathrm{K}} \mathsf{Res}\, \big(f(z) e^{iz},\, a_k\big).$$

Or cette intégrale curviligne se décompose en deux morceaux :

$$\int_{[-\mathrm{R},\mathrm{R}] \cup C_{\mathrm{R}}^+} f(z)\, e^{iz}\, dz = \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} f(x)\, e^{ix}\, dx + \underbrace{\int_{C_{\mathrm{R}}^+} f(z)\, e^{iz}\, z}_{\xrightarrow[\mathrm{R} \to \infty]{} 0},$$

dont le deuxième vient d'être vu comme disparaissant dans les limbes du zéro absolu, quand $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$, et donc, nous obtenons bien :

$$\lim_{\mathrm{R} \to \infty} \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} f(x)\, e^{ix}\, dx = 2i\pi \sum_{1 \leqslant k \leqslant \mathrm{K}} \mathsf{Res}\, \big(f(z) e^{iz},\, a_k\big),$$

toujours sous l'hypothèse principale que :

$$0 = \lim_{r \to \infty} \max_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi} \big| f\big(r\, e^{i\theta}\big)\big|.$$

(g) En effet :

$$\left| \frac{1}{1 + \frac{1}{r\, e^{i\theta}} + \frac{1}{(r\, e^{i\theta})^2}} \right| \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}} \leqslant \frac{1}{1 - \frac{2}{r}} \leqslant \frac{1}{1 - \frac{2}{4}} \leqslant 2.$$

Ensuite, encore grâce à ces imbéciles anciens de babyloniens qui n'arrêtent pas de nous rappeler que leurs mathématiques étaient déjà très évoluées, plus de 4 000 ans avant nous, les deux racines du polynôme $z^2 + z + 1$ sont :

$$a := \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad b := \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

ce qui fait que grâce à eux, on peut encore prendre 0,5 points « gratos » sur un sujet de L3 MFA !

(h) Tout d'abord, comme $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\, dx < \infty$ converge et comme $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx < \infty$ converge aussi, l'intégrale considérée sur $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ de la fonction continue $x \longmapsto \frac{e^{ix}}{x^2+x+1}$ existe bien, c'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{-\infty \leftarrow \mathrm{S} \\ \mathrm{R} \to \infty}} \int_{\mathrm{S}}^{\mathrm{R}} \frac{e^{ix}}{x^2+x+1}\, dx \overset{\text{déf}}{=:} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+x+1}\, dx$$

existe, d'où en particulier en prenant $\mathrm{S} = -\mathrm{R}$:

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{e^{ix}}{x^2+x+1}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+x+1}.$$

La fonction $z \longmapsto \frac{1}{z^2+z+1}$ possède la propriété à laquelle sont soumises les conclusions précédentes, à savoir elle satisfait bien :

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} \max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi} \left| \frac{1}{(r\,e^{i\theta})^2 + r\,e^{i\theta} + 1} \right| &= \lim_{r\to\infty} \max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi} \frac{1}{|r\,e^{i\theta}|^2}\; \frac{1}{1 + \frac{1}{r\,e^{i\theta}} + \frac{1}{(r\,e^{i\theta})^2}} \\
&\leqslant \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^2}\cdot 2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc en observant que seul $a = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ appartient à $\mathbb{H}^+$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+x+1}\, dx &= \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{e^{ix}}{x^2+x+1}\, dx \\
&= 2i\pi\, \mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+z+1},\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Il ne reste alors plus qu'à calculer soigneusement ce résidu sans se tromper :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\big(f(z)e^{iz},\, a\big) &= \lim_{z\to a} \underline{(z-a)}\; \frac{e^{iz}}{\underline{(z-a)}\,(z-b)} \\
&= \frac{e^{i\,a}}{a-b} \\
&= \frac{e^{i\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}}{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)} \\
&= \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\cos\left(-\frac{1}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}{i\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

d'où la valeur recherchée :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+x+1}\,dx \;=\; \frac{2i\pi\, e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{i\,\sqrt{3}} \Big(\cos\tfrac{1}{2} - i\sin\tfrac{1}{2}\Big).$$

Exercice 4. **(a)** D'après le cours, le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ est défini par :

$$\frac{1}{\mathrm{R}} \;:=\; \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

et alors la définition de la limite supérieure fournit bien, pour tout $\delta > 0$, un entier $\mathrm{N}(\delta) \gg 1$ tel que :

$$n \,\geqslant\, \mathrm{N}(\delta) \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad \sqrt[n]{|a_n|} \,\leqslant\, \frac{1}{\mathrm{R}} + \delta.$$

(b) D'après un théorème du cours, la distance entre K et le complémentaire $\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ est strictement positive, et il suffit alors de prendre r satisfaisant :

$$0 \,<\, \mathrm{R} - r \,<\, \mathrm{dist}\big(K,\, \mathbb{C}\backslash\mathbb{D}_{\mathrm{R}}\big).$$

(c) En effet, l'inégalité triangulaire suivie de la sommation d'une série géométrique offre :

$$\begin{aligned}
\bigg|\sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} a_n\, z^n\bigg| &\leqslant \sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} \big|a_n\big|\, |z|^n \\
{\scriptstyle [z\in K \,\Longrightarrow\, |z|\leqslant r]}\qquad &\leqslant \sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} \Big(\frac{1}{\mathrm{R}} + \delta\Big)^n\, r^n \\
&= q^{\mathrm{N}} \sum_{m=0}^{\infty} q^m \\
&\leqslant q^{\mathrm{N}}\, \frac{1}{1-q}.
\end{aligned}$$

(d) L'attente au tournant de l'étudiant par le professeur était la suivante : il ne fallait pas oublier de justifier tout d'abord, en vertu d'un théorème du cours, que toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}\big(\mathbb{D}_{\mathrm{R}}\big)$ a une série de Taylor en tout point $z_0 \in \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ qui converge au moins dans le plus grand disque centré en z_0 qui est contenu dans $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$. Au point $z_0 = 0$, ce plus grand disque coïncide avec $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$, et donc en vertu de ce résultat, la fonction f est représentée par une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ qui converge dans $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$, ce qui fait que les considérations précédentes s'appliquent.

Soit donc $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Toujours avec $K \subset \overline{\mathbb{D}}_r \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$, avec δ assez petit pour que $\big(\frac{1}{\mathrm{R}}+\delta\big)\, r \,=\, q < 1$, choisissons $\mathrm{N}(\delta) \gg 1$ et $\mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1$ assez grands pour qu'on ait :

$$\begin{aligned}
n \,\geqslant\, \mathrm{N}(\delta) \qquad &\Longrightarrow \qquad \big|a_n\big| \,\leqslant\, \Big(\frac{1}{\mathrm{R}} + \delta\Big)^n, \\
\mathrm{N} \,\geqslant\, \mathrm{N}(\varepsilon) \qquad &\Longrightarrow \qquad q^{\mathrm{N}}\, \frac{1}{1-q} \,\leqslant\, \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui est possible car $q^{\mathrm{N}} \longrightarrow 0$ quand $\mathrm{N} \longrightarrow \infty$. En prenant :

$$\mathrm{N} \,:=\, \max\big(\mathrm{N}(\delta),\, \mathrm{N}(\varepsilon)\big),$$

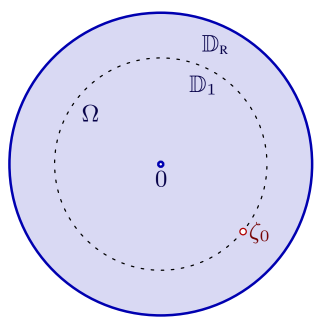
si on découpe alors la série qui représente $f(z)$ en deux morceaux :

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} a_n\, z^n}_{=:\, P(z)} + \sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} a_n\, z^n,$$

dont le premier est visiblement un polynôme de degré $\leqslant \mathrm{N}-1$, on atteint l'inégalité conclusive :

$$\begin{aligned} \max_{z\in K} \big|f(z) - P(z)\big| &= \max_{z\in K} \bigg|\sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} a_n\, z^n\bigg| \\ \text{[Question (c)]} \qquad &\leqslant q^{\mathrm{N}}\, \frac{1}{1-q} \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Exercice 5. **(a)** D'après un théorème du cours, sur l'ouvert $\Omega := \mathbb{D}_{\mathrm{R}} \backslash \{\zeta_0\}$, le développement en série entière de f converge dans le plus grand disque centré en 0 qui est contenu dans Ω. Comme $|\zeta_0| = 1$ par hypothèse, ce plus grand disque est $\big\{|z| < 1\big\} = \mathbb{D}_1$. Avoir fait la figure aura certainement aidé à deviner cette petite réponse !



(b) Puisque par hypothèse f a un pôle d'ordre 1 en ζ_0, son développement en série de Laurent autour de ζ_0 ne contient qu'une seule puissance négative de $\big(z - \zeta_0\big)$, la puissance -1. Alors avec $\alpha := \mathrm{Res}_f(\zeta_0)$ — oui, bonne réponse ! on appelle cela le ***résidu*** de f en ζ_0 ! —, nombre complexe non nul car il y *a* un pôle en ζ_0, quand on soustrait $f(z) \longmapsto f(z) - \frac{\alpha}{z-\zeta_0} =: g(z)$, les puissances négatives disparaissent (il y en a une seule), et par le théorème de Riemann qui caractérise les singularités illusoires, cette fonction « nettoyée » $g(z)$ devient holomorphe au voisinage de ζ_0, donc partout dans $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$.

(c) Ce développement converge, d'après le même théorème du cours déjà utilisé en **(a)**, dans $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$, c'est-à-dire que le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$ est au moins égal à $\mathrm{R} > 1$. Or on sait que ce rayon de convergence se 'calcule' en examinant la croissance des coefficients :

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1}{\mathrm{RCV}(g)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{R}} < 1.$$

Le point-clé, c'est que $\frac{1}{\mathrm{R}} < 1$, *strictement*. Car par la définition même de la limite supérieure :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1 \quad \Big(n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{|b_n|} \leqslant \frac{1}{\mathrm{R}} + \varepsilon\Big),$$

dans laquelle on prend $\varepsilon > 0$ assez petit pour avoir encore $q := \frac{1}{\mathrm{R}} + \varepsilon < 1$, la conclusion tombe comme une pomme :

$$\big|b_n\big| \leqslant \left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \varepsilon\right)^n = q^n \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{\geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)} = 0.$$

(d) Dans la relation qui lie notre gentille fonction g à la fonction f qui est à peine un peu « méchante » :

$$g(z) = f(z) - \frac{\alpha}{z - \zeta_0},$$

il reste encore à développer en série entière convergente ce qu'on a soustrait :

$$-\frac{\alpha}{z-\zeta_0} = \frac{\alpha}{\zeta_0}\,\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta_0}} = \frac{\alpha}{\zeta_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\zeta_0^{n+1}}\right) z^n,$$

ce développement en série géométrique étant convergent pour $\left|\frac{z}{\zeta_0}\right| = |z| < 1$, et même normalement (donc uniformément) convergent sur tout sous-disque compact $\overline{\mathbb{D}}_r \subset \mathbb{D}_1$ avec $0 < r < 1$ fixé.

Grâce à cela, dans l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\zeta_0^{n+1}}\right) z^n,$$

nous pouvons identifier (principe d'identité) les coefficients des puissances z^n, ce qui nous donne :

$$b_n = a_n + \frac{\alpha}{\zeta_0^{n+1}} \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 0).$$

Regardons alors ces égalités droit dans les yeux : à gauche, b_n tend vers 0, et à droite, le module du dernier terme reste constant $\left|\frac{\alpha}{\zeta_0^{n+1}}\right| = \frac{|\alpha|}{1^{n+1}} = |\alpha|$, puisque ζ_0 est vissé sur le cercle unité. Ainsi, grâce à l'inégalité triangulaire souvent utile $\big|\gamma - \delta\big| \geqslant \big||\gamma| - |\delta|\big|$, mais (hélas !) trop peu connue du grand public, qui permet de minorer une quantité, nous pouvons minorer :

$$\begin{aligned}\big|a_n\big| = \left|\frac{\alpha}{\zeta_0^{n+1}} - b_n\right| &\geqslant \left|\left|\frac{\alpha}{\zeta_0^{n+1}}\right| - \big|b_n\big|\right| \\ &= \Big|\big|\alpha\big| - \big|b_n\big|\Big| > \frac{1}{2}\,|\alpha| > 0\end{aligned}$$

par un plancher strictement positif à partir d'un certain rang. Nous obtenons donc l'autorisation préfectorale (!) de diviser par les $a_n \neq 0$ pour $n \geqslant \mathrm{N} \gg 1$ grand.

Ensuite, après une simplification astucieuse du quotient :

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{b_n - \frac{\alpha}{\zeta_0^{n+1}}}{b_{n+1} - \frac{\alpha}{\zeta_0^{n+2}}} = \frac{\frac{b_n\,\zeta_0^{n+1} - \alpha}{\zeta_0^{n+1}}}{\frac{b_{n+1}\,\zeta_0^{n+2} - \alpha}{\zeta_0^{n+2}}} = \zeta_0\,\frac{b_n\,\zeta_0^{n+1} - \alpha}{b_{n+1}\,\zeta_0^{n+2} - \alpha},$$

la détermination de la limite demandée devient '*trop facile*' :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \zeta_0 \lim_{n\to\infty}\frac{b_n\,\zeta_0^{n+1} - \alpha}{b_{n+1}\,\zeta_0^{n+2} - \alpha} = \zeta_0\,\frac{0-\alpha}{0-\alpha} = \zeta_0.$$

Or le critère de d'Alembert énonce que quand une telle limite existe (en module !), on retrouve le rayon de convergence de $f(z)$ que l'on connaissait déjà :

$$\mathsf{RCV}(f) \;=\; \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \;=\; \big|\zeta_0\big| \;=\; 1.$$

Moralité : Quand l'holomorphie d'une série entière $\sum a_n z^n$ est « bloquée » par un seul pôle simple — ici ζ_0 de module 1 — à peine un peu « méchant », on peut « reconstituer la trace » de ce pôle en « lisant » simplement les coefficients de Taylor a_n.

Exercice 6. (a) L'idée est d'introduire la fonction polynomiale (donc holomorphe) :

$$f(z) \;:=\; \prod_{1\leqslant k\leqslant n}\big(z-w_k\big).$$

Comme $|w_k| = 1$, le principe du maximum (vu en cours) appliqué à la fonction $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D})\cap\mathscr{C}^0\big(\overline{\mathbb{D}}\big)$ holomorphe dans le disque unité et continue jusqu'au bord donne :

$$1 \;=\; \prod_{1\leqslant k\leqslant n}\big|w_k\big| \;=\; \big|f(0)\big| \;\leqslant\; \max_{|z|=1}\big|f(z)\big|.$$

Ensuite, paramétrons donc les points $z = e^{i\theta}$ du cercle unité $C = \partial\mathbb{D}$ par la variable réelle $\theta\in\mathbb{R}$, et notons :

$$\Phi(\theta) \;:=\; \big|f(e^{i\theta})\big| \;=\; \prod_{1\leqslant k\leqslant n}\big|e^{i\theta}-e^{it_k}\big|.$$

Cette fonction $\geqslant 0$ *continue* s'annule en tous les $\theta = t_k$, donc comme $n\geqslant 1$, elle s'annule au moins une fois !

Mais par ailleurs, nous venons de voir presque sans nous en rendre compte que :

$$1 \;\leqslant\; \max_{\theta\in\mathbb{R}}\,\Phi(\theta),$$

et par conséquent, le théorème des valeurs intermédiaires (niveau L1) fournit bien un réel θ^* en lequel elle vaut :

$$1 \;=\; \Phi\big(\theta^*\big) \;=\; \prod_{1\leqslant k\leqslant n}\big|e^{i\theta^*}-w_k\big|.$$

7. Examen 4

Exercice 1. L'objectif ici est de produire une démonstration simplifiée, due à Landau, de la dernière partie (difficile) de la démonstration du théorème de factorisation de Hadamard pour les fonctions entières d'ordre fini. Des préliminaires sont nécessaires.

(a) Soit un rayon $\mathrm{R} > 0$, soit un ouvert $\omega \supset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}(0) = \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$, et soit une fonction holomorphe $\varphi \colon \omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose que $\big|\varphi(z)\big| \leqslant \mathrm{S} < \infty$ pour tout $|z| \leqslant \mathrm{R}$ et que $\varphi(0) = 0$. Montrer que :

$$\big|\varphi(z)\big| \leqslant \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}}\,|z| \qquad\qquad (\forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}).$$

Indication: Utiliser $\frac{\varphi(z)}{z}$.

(b) Soient encore $\mathrm{R} > 0$ et $\Omega \supset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$ un autre ouvert. Pour toute $h \in \mathscr{O}(\Omega)$ et tout rayon intermédiaire $0 \leqslant r \leqslant \mathrm{R}$, on note :

$$\boldsymbol{M}_h(r) := \max_{|z|=r} \big|h(z)\big| \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \boldsymbol{A}_h(r) := \max_{|z|=r} \operatorname{Re} h(z).$$

On note aussi $C_r := \{|z| = r\}$. On supposera toujours que $h(0) = 0$ et que h est non constante. On admettra la propriété $0 < \boldsymbol{A}_h(r) < \boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})$ pour $0 < r < \mathrm{R}$, conséquence élémentaire du principe du maximum. On introduit :

$$\varphi(z) := \frac{h(z)}{2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) - h(z)}.$$

Vérifier, pour $|z| = r$ et $0 \leqslant r \leqslant \mathrm{R}$, que :

$$\operatorname{Re}\big(2\boldsymbol{A}_h(r) - h(z)\big) \geqslant \boldsymbol{A}_h(r),$$

et montrer que φ est holomorphe dans un voisinage ouvert de $\overline{\mathbb{D}}_R$.

(c) On décompose en parties réelle et imaginaire $h(z) = u(z) + i\,v(z)$. Montrer que $\big|\varphi(z)\big|^2 \leqslant 1$ pour tout $|z| \leqslant \mathrm{R}$.

(d) Montrer que :

$$\big|h(z)\big| \leqslant \frac{2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})\,|z|}{\mathrm{R} - |z|}.$$

(e) En déduire l'*inégalité de Borel-Carathéodory*, valable pour tout rayon $0 \leqslant r < \mathrm{R}$:

$$\boldsymbol{M}_h(r) \leqslant \frac{r + r}{\mathrm{R} - r}\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}).$$

(f) Maintenant, on souhaite généraliser cette inégalité aux dérivées de h d'ordre quelconque. Soit un rayon intermédiaire quelconque $0 \leqslant r < \mathrm{R}$, et soit $z \in C_r$ arbitraire. On pose :

$$\rho := \tfrac{\mathrm{R}-r}{2},$$

et on introduit :

$$C_\rho(z) := \big\{\zeta \in \mathbb{C} \colon |\zeta - z| = \rho\big\}.$$

Dresser une figure élégante.

(g) Montrer que :

$$\max_{|\zeta - z| = \rho} \big|h(\zeta)\big| \ \leqslant\ \frac{4\,\mathrm{R}}{\mathrm{R} - r}\,\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}).$$

(h) Montrer que pour tout $0 \leqslant r < \mathrm{R}$ et tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$\max_{|z| = r} \big|h^{(n)}(z)\big| \ \leqslant\ \frac{2^{n+2}\,n!\,\mathrm{R}}{(\mathrm{R} - r)^{n+1}}\,\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}).$$

(i) Maintenant, soit $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ une fonction holomorphe entière avec $f(0) = 1$ dont l'ordre de croissance $\rho_f < \infty$ est fini. Soit $\kappa := \mathsf{Ent}\,\rho_f$, d'où $\kappa \leqslant \rho_f < \kappa + 1$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, en posant $\rho := \rho_f + \varepsilon$, on a encore $\kappa \leqslant \rho < \kappa + 1$, et il existe par définition une constante $C > 0$ telle que :

$$\big|f(z)\big| \ \leqslant\ C\,e^{|z|^\rho} \qquad\qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

On suppose que f possède un nombre *infini* de zéros isolés $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ordonnés par modules croissants $0 < |a_n| \leqslant |a_{n+1}|$ et répétés ν fois aux zéros d'ordre $\nu \geqslant 2$. Ainsi, $f(z) = 0$ si et seulement si $z = a_n$ pour un $n \geqslant 1$.

En cours au tableau, on a démontré que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\kappa+1}} \ <\ \infty.$$

Ensuite dans le polycopié, en introduisant les facteurs canoniques à exponentielle polynomiale de degré κ :

$$E_\kappa\big(\tfrac{z}{a_n}\big) \ :=\ \big(1 - \tfrac{z}{a_n}\big)\,e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\,(\frac{z}{a_n})^2 + \cdots + \frac{1}{\kappa}\,(\frac{z}{a_n})^\kappa},$$

on a aussi démontré la convergence normale sur les compacts de $\mathbb{C}$ du produit infini :

$$\Pi(z) \ =\ \prod_{n=1}^{\infty} E_\kappa\big(\tfrac{z}{a_n}\big).$$

Comme $f(z)$ et $\Pi(z)$ ont les mêmes zéros, les singularités de $\frac{f(z)}{\Pi(z)}$ sont éliminables, cette fonction n'a aucun zéro, d'où il découle comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe que son logarithme existe, et par conséquent on peut écrire :

$$f(z) \ =\ e^{Q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_\kappa\big(\tfrac{z}{a_n}\big) \ =\ e^{Q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - \tfrac{z}{a_n}\big)\,e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\,(\frac{z}{a_n})^2 + \cdots + \frac{1}{\kappa}\,(\frac{z}{a_n})^\kappa},$$

au moyen d'une certaine fonction holomorphe entière $Q \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$.

En admettant ces résultats, la fin difficile de la démonstration du Théorème de factorisation de Hadamard consistait à établir que $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ est alors nécessairement un polynôme de degré $\leqslant \kappa$. Les arguments qui suivent, dus à Landau et tirés du traité de Titchmarsh, offrent une alternative élégante à la démonstration originale vue en cours.

Justifier très rapidement la formule dans $\mathbb{C} \backslash \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \ =\ Q'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \bigg(-\,\frac{1}{a_n - z} + \frac{d}{dz}\Big[\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\,\Big(\frac{z}{a_n}\Big)^2 + \cdots + \frac{1}{\kappa}\,\Big(\frac{z}{a_n}\Big)^\kappa\Big]\bigg).$$

(j) Soit un rayon arbitraire $\mathrm{R} > 0$. On introduit la fonction :

$$g_{\mathrm{R}}(z) := \frac{f(z)}{\prod_{|a_n| \leqslant \mathrm{R}} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)}.$$

Montrer qu'il existe un ouvert $\omega \supset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}(0)$ et une fonction holomorphe $h_{\mathrm{R}} \in \mathscr{O}(\omega)$ avec $h_{\mathrm{R}}(0) = 0$ satisfaisant $e^{h_{\mathrm{R}}(z)} = g_{\mathrm{R}}(z)$.

(k) Montrer qu'en tout point $z \in \omega \supset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$, on a :

$$Q^{(\kappa+1)}(z) = h_{\mathrm{R}}^{(\kappa+1)}(z) + \sum_{|a_n| > \mathrm{R}} \frac{\kappa!}{(a_n - z)^{\kappa+1}}.$$

Indication: On admettra, sans chercher à la justifier, la dérivabilité terme à terme.

(l) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leqslant 2\,\mathrm{R}$, on a :

$$\big|g_{\mathrm{R}}(z)\big| \leqslant C\, e^{(2\,\mathrm{R})^\rho}.$$

(m) Montrer que pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}_r$ avec $0 \leqslant r < \mathrm{R}$, on a :

$$\big|h_{\mathrm{R}}^{(\kappa+1)}(z)\big| \leqslant \frac{2^{\kappa+3}\,(\kappa+1)!\,\mathrm{R}}{(\mathrm{R} - r)^{\kappa+2}} \left[\log C + \big(2\,\mathrm{R}\big)^\rho\right].$$

(n) Démontrer que $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ est un polynôme de degré $\leqslant \kappa$.

Exercice 2. Pour deux rayons quelconques $\mathrm{R}_2 > \mathrm{R}_1 > 0$ et deux autres rayons quelconques $\mathrm{R}_2' > \mathrm{R}_1' > 0$, on introduit dans l'espace des $z = x + i\,y$ et dans l'espace des $z' = x' + i\,y'$ les anneaux ouverts :

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2} := \big\{z \in \mathbb{C} \colon\ \mathrm{R}_1 < |z| < \mathrm{R}_2\big\} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{A}'_{\mathrm{R}_1',\mathrm{R}_2'} := \big\{z' \in \mathbb{C} \colon\ \mathrm{R}_1' < |z'| < \mathrm{R}_2'\big\}.$$

Les anneaux fermés où les '$<$' sont remplacés par des '$\leqslant$' seront notés $\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2}$ et $\overline{\boldsymbol{A}}'_{\mathrm{R}_1',\mathrm{R}_2'}$.

Grâce au biholomorphisme $z \longmapsto \frac{z}{\mathrm{R}_1}$ de $\mathbb{C}^*$ et grâce à $z' \longmapsto \frac{z'}{\mathrm{R}_1'}$, on se ramène à $\mathrm{R}_1 = 1$ et à $\mathrm{R}_1' = 1$, et on note alors $\mathrm{R} := \frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1} > 1$ et $\mathrm{R}' := \frac{\mathrm{R}_2'}{\mathrm{R}_1'} > 1$.

L'objectif est d'établir qu'un anneau $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$ est biholomorphe à un autre anneau $\boldsymbol{A}'_{1,\mathrm{R}'}$ si et seulement si $\mathrm{R}' = \mathrm{R}$.

On se ramène évidemment à $\mathrm{R}' \geqslant \mathrm{R} > 1$, et on suppose donc qu'il existe un biholomorphisme $f \colon \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{A}'_{1,\mathrm{R}'}$, d'inverse holomorphe $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \xleftarrow{\sim} \boldsymbol{A}'_{1,\mathrm{R}'} : f^{-1}$. On le note $z \longmapsto f(z) = z'$ et on note son inverse $z = f^{-1}(z') \longleftarrow z'$.

(a) Dans l'espace d'arrivée, soient des rayons intermédiaires quelconques $1 < \mathrm{P}' < \mathrm{Q}' < \mathrm{R}'$. Montrer que l'ensemble :

$$K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'} := \big\{z \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \colon\ \mathrm{P}' \leqslant |f(z)| \leqslant \mathrm{Q}'\big\}$$

est un compact de l'ouvert $\mathrm{A}_{1,\mathrm{R}}$. Indication: Penser à f^{-1}.

(b) En notant $C_r = \{z \in \mathbb{C} \colon\ |z| = r\}$, on introduit les deux distances strictement positives :

$$d := \mathsf{dist}\big(C_1,\, K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}\big) > 0 \qquad \text{et} \qquad e := \mathsf{dist}\big(C_{\mathrm{R}},\, K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}\big) > 0,$$

puis on abrège :

$$\mathrm{D} := 1 + d \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E} := \mathrm{R} - e.$$

Sur une figure de qualité, représenter précisément $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$, f, $\boldsymbol{A}'_{1,\mathrm{R}'}$, f^{-1}, $\overline{\boldsymbol{A}}'_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}$, $K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}$, et aussi, mais dans une couleur distinctive, $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{D}}$, $\boldsymbol{A}_{\mathrm{E},\mathrm{R}}$.

(c) On considère l'application réelle $|f| \colon \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \longrightarrow]1, \mathrm{R}'[$ définie par $z \longmapsto |f(z)|$, plus simple à étudier que f. Montrer que l'ensemble :

$$|f|\big(\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{D}}\big) \;=\; \big\{|f(z)| \in \mathbb{R}_+ \colon\; 1 < |z| < \mathrm{D}\big\},$$

est un intervalle ouvert connexe non vide, contenu ou bien dans $]1, \mathrm{P}'[$, ou bien dans $]\mathrm{Q}', \mathrm{R}'[$.

(d) * Montrer que :

$$\lim_{\substack{|z| \to 1 \\ z \,\in\, \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}}} \big|f(z)\big|$$

existe, et vaut ou bien 1, ou bien R'. Indication: Quand $|f|\big(\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{D}}\big) \subset\,]1, \mathrm{P}'[$, montrer que cette limite vaut 1.

(e) Après un changement éventuel d'application $f \longmapsto \frac{\mathrm{R}'}{f}$ qui échange $1 \longleftrightarrow \mathrm{R}'$, on se ramène à :

$$\lim_{\substack{|z| \to 1 \\ z \,\in\, \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}}} \big|f(z)\big| \;=\; 1.$$

Montrer qu'on a alors :

$$\lim_{\substack{|z| \to \mathrm{R} \\ z \,\in\, \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}}} \big|f(z)\big| \;=\; \mathrm{R}',$$

et conclure que $|f|$ se prolonge par continuité à l'anneau fermé $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}$.

(f) On suppose temporairement pour simplifier que $\mathrm{R}' = \mathrm{R}^n$ pour un certain entier $n \geqslant 1$. On introduit la fonction $g \colon \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$g(z) \;=\; z^{-n} f(z).$$

Montrer qu'il existe une constante $\beta \in \mathbb{R}$ telle que :

$$g(z) \;=\; e^{i\beta} \qquad\qquad (\forall\, z \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}).$$

(g) En déduire que $n = 1$, et donc, que $\mathrm{R}' = \mathrm{R}$.

(h) On traite maintenant le cas général où $\mathrm{R}' \geqslant \mathrm{R} > 1$ n'est pas forcément égal à une puissance R^n. On introduit :

$$\mathsf{p} \;:=\; \frac{\log \mathrm{R}'}{\log \mathrm{R}} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \phi(z) \;:=\; \frac{|f(z)|}{|z|^{\mathsf{p}}} \qquad\qquad (\forall\, z \in \overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}).$$

L'objectif est de démontrer que $\phi(z) \leqslant 1$ sur $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}$. Que vaut $\phi\big|_{\partial \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}}$? On suppose par l'absurde qu'il existe $w \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$ avec :

$$\max_{z \,\in\, \overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}} \phi(z) \;=\; \phi(w) \;>\; 1.$$

Soit le demi-anneau ouvert :

$$\boldsymbol{C}_w \;:=\; \boldsymbol{D}_{iw}^+ \cap \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}},$$

où $\boldsymbol{D}_{iw}^+$ est le demi-plan ouvert contenant w qui est bordé par la droite $\boldsymbol{D}_{iw}$ engendrée par l'origine 0 et par iw, de telle sorte que :

$$\max_{\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}} \phi \;=\; \max_{\overline{\boldsymbol{C}}_w} \phi \;=\; \phi(w).$$

Dresser une figure contenant 0, $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$, w, iw, $\boldsymbol{D}_{iw}$, $\boldsymbol{D}_{iw}^{+}$, $\boldsymbol{C}_w$, puis, justifier intuitivement la simple connexité de $\boldsymbol{C}_w$.

(i) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $g \in \mathscr{O}\big(\boldsymbol{C}_w\big)$ telle que $\big|g(z)\big| = |z|^{-\mathsf{p}}$ pour tout $z \in \boldsymbol{C}_w$.

(j) Montrer que $\phi(z) \leqslant 1$ sur $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}$. Indication: Dériver une contradiction en examinant ce qui se passe sur $\partial \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \cap \partial \boldsymbol{C}_w$.

(k) Modifier/adapter les raisonnements pour démontrer symétriquement que $\phi \geqslant 1$.

(l) Soit maintenant $\log z$ la détermination principale du logarithme, fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ satisfaisant $\log 1 = 0$. Montrer que la fonction :

$$h(z) := e^{-\mathsf{p} \log z} f(z)$$

est holomorphe dans $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}\big\backslash\mathbb{R}_-$, continue sur $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}\big\backslash\mathbb{R}_-$ et qu'elle est de module constant $\big|h(z)\big| \equiv 1$.

(m) Montrer que h est constante sur $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}\big\backslash\mathbb{R}_-$.

(n) Soit un point quelconque $z_0 \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \cap \mathbb{R}_-$. On note $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}^{\pm} := \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \cap \big\{ \pm \operatorname{Im} z > 0 \big\}$. En comparant les deux limites :

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A_{1,\mathrm{R}}^-}} h(z) \qquad\qquad \text{avec} \qquad\qquad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A_{1,\mathrm{R}}^+}} h(z),$$

montrer que $\mathsf{p} \in \mathbb{Z}$.

(o) Conclure.

(p) Déterminer tous les biholomorphismes $f \colon \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$.

(q) Existe-t-il une application holomorphe surjective $\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$?

8. Corrigé de l'examen 4

Exercice 1. (a) Puisque $\varphi(0) = 0$, la fonction indiquée $\frac{\varphi(z)}{z}$ a une singularité éliminable en $z = 0$, donc $\frac{\varphi(z)}{z}$ est holomorphe dans $\omega \supset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}(0)$. Le principe du maximum offre alors :

$$\begin{aligned}\max_{|z|\leqslant \mathrm{R}} \left|\frac{\varphi(z)}{z}\right| &\leqslant \max_{|z|=\mathrm{R}} \left|\frac{\varphi(z)}{z}\right| \\ &\leqslant \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}},\end{aligned}$$

d'où en éliminant le dénominateur $\big|\varphi(z)\big| \leqslant \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}}\,|z|$, y compris en $z = 0$.

(b) Cette question, vraiment donnée, était destinée à tester chez les étudiants leurs capacités de lecture et d'assimilation de contenu. En effet, après soustraction de $\boldsymbol{A}_h(r)$, l'inégalité demandée revient à :

$$\mathrm{Re}\,\big(\boldsymbol{A}_h(r) - h(z)\big) \overset{?}{\geqslant} 0 \qquad\qquad (\forall\, z \in C_r),$$

et ceci est une reformulation de la définition de $\boldsymbol{A}_h(r)$.

Puisque le dénominateur de φ ne s'annule alors jamais lorsque $z \in \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$, on en déduit que φ est holomorphe dans un certain voisinage ouvert intermédiaire $\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}} \subset \omega \subset \Omega$.

(c) En effet, l'inégalité que nous venons de démontrer allié à $u(z) \leqslant \boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})$ et la définition nous donnent :

$$-\,2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) + u(z) \;\leqslant\; u(z) \;\leqslant\; 2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) - u(z),$$

pour tout $|z| \leqslant \mathrm{R}$, d'où :

$$u(z)^2 \;\leqslant\; \big(2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) - u(z)\big)^2,$$

et alors il devient visible que :

$$\begin{aligned}\big|\varphi(z)\big|^2 = \left|\frac{u(z) + i\,v(z)}{2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) - u(z) - i\,v(z)}\right|^2 &= \frac{u(z)^2 + v(z)^2}{\big(2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) - u(z)\big)^2 + v(z)^2} \\ &\leqslant \frac{\big(2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) - u(z)\big)^2 + v(z)^2}{\big(2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) - u(z)\big)^2 + v(z)^2} \\ &= 1.\end{aligned}$$

(d) Avec $\mathrm{S} = 1$, la Question **(a)** s'applique à la fonction φ, et donne l'inégalité :

$$\big|\varphi(z)\big| \;\leqslant\; \frac{1}{\mathrm{R}}\,|z| \qquad\qquad (\forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}).$$

Maintenant, dans la définition de $\varphi(z)$, on peut éliminer le dénominateur :

$$\varphi(z)\,2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) - \varphi(z)\,h(z) \;=\; h(z),$$

afin de résoudre :

$$h(z) \;=\; \frac{2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})\,\varphi(z)}{1 + \varphi(z)},$$

pour ensuite utiliser l'inégalité obtenue :

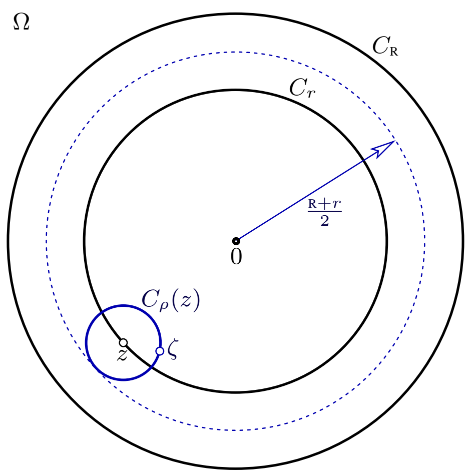
$$\begin{aligned}\big|h(z)\big| \,=\, \left|\frac{2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})\,\varphi(z)}{1+\varphi(z)}\right| \,&\leqslant\, \frac{2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})\,\frac{|z|}{\mathrm{R}}}{1-\frac{|z|}{\mathrm{R}}}\\ &=\, \frac{2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})\,|z|}{\mathrm{R}-|z|}.\end{aligned}$$

(e) En effet, en prenant le maximum ci-dessus pour $|z| = r$, il vient sans effort :

$$\max_{|z|=r}\big|h(z)\big| \,\leqslant\, \frac{2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})\,r}{\mathrm{R}-r},$$

et il fallait être capable de voir que $2\,r = r + r$.

(f) La voici :



(g) Observons tout d'abord que pour $\zeta \in C_\rho(z)$ quelconque, on a :

$$|\zeta| \,\leqslant\, |\zeta - z| + |z| \,=\, \rho + r \,=\, \tfrac{\mathrm{R}-r}{2} + r \,=\, \tfrac{\mathrm{R}+r}{2} \,<\, \mathrm{R}.$$

Une application du résultat de la Question **(e)** au disque fermé en pointillés de rayon $\frac{\mathrm{R}+r}{2}$ centré en 0 qui contient le disque $\overline{\mathbb{D}}_\rho(z)$ donne :

$$\begin{aligned}\max_{|\zeta-z|=\rho}\big|h(\zeta)\big| \,&\leqslant\, \max_{|\zeta|\leqslant\frac{\mathrm{R}+r}{2}}\,|h(\zeta)|\\ &\leqslant\, \frac{\frac{\mathrm{R}+r}{2}+\frac{\mathrm{R}+r}{2}}{\mathrm{R}-\frac{\mathrm{R}+r}{2}}\,\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})\\ &=\, \frac{2\,\mathrm{R}+2\,r}{\mathrm{R}-r}\,\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})\\ &\leqslant\, \frac{4\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}-r}\,\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}).\end{aligned}$$

(h) Pour la dérivée n-ième de h en un point quelconque $z \in C_r$, la formule de Cauchy sur le cercle $C_\rho(z)$ s'écrit :

$$h^{(n)}(z) \,=\, \frac{n!}{2i\pi}\int_{C_\rho(z)} \frac{h(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta,$$

et donc nous pouvons majorer simplement son module grâce à ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\big|h^{(n)}(z)\big| &= \bigg|\frac{n!}{2i\pi}\int_{C_\rho(z)} \frac{h(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta\bigg| \\
&\leqslant \frac{n!}{2\pi}\,\frac{4\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}-r}\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})\,\frac{1}{\rho^{n+1}}\,2\pi\,\rho \\
&= n!\,\frac{4\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}-r}\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})\,\frac{2^n}{(\mathrm{R}-r)^n} \\
&= \frac{2^{n+2}\,n!\,\mathrm{R}}{(\mathrm{R}-r)^{n+1}}\,\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}).
\end{aligned}$$

(i) Le produit infini étant normalement (absolument) convergent, cette formule valable pour z appartenant à $\mathbb{C}\backslash\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = Q'(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\bigg(-\frac{1}{a_n-z} + \frac{d}{dz}\Big[\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\big(\frac{z}{a_n}\big)^2 + \cdots + \frac{1}{\kappa}\big(\frac{z}{a_n}\big)^{\kappa}\Big]\bigg),$$

signifie que la dérivée logarithmique du produit infini est la somme, convergente normalement sur les compacts, des dérivées logarithmiques des facteurs.

En cours au tableau, on a vu le cas simple où tous les facteurs du produit infini sont des fonctions holomorphes ne s'annulant jamais.

Dans une partie du polycopié (non traitée à l'oral) consacrée au Théorème de Mittag-Leffler, on exprime précisément ce qui est entendu par convergence d'une série de fonctions rationnelles.

(j) Puisque les zéros de $f(z)$ sont exactement les a_n, dans un petit voisinage ouvert $\omega_z \ni z$ de tout point z appartenant au disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$, les singularités de la fonction $g_{\mathrm{R}}(z)$ sont illusoires, notamment lorsque $z = a_n$. De plus, quitte à rapetisser ces ouverts, on peut supposer que g_{R} ne s'annule jamais sur ω_z.

Ensuite, comme $\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$ est compact, un nombre fini $\omega_1, \dots, \omega_{\mathrm{L}}$ de ces ouverts le recouvre grâce à Borel-Lebesgue, et donc l'ouvert $\omega := \omega_1 \cup \cdots \cup \omega_{\mathrm{L}} \supset \overline{\mathbb{D}}$ convient. On peut alors même réduire ω de telle sorte que $\omega = \mathbb{D}_{\mathrm{S}} \supset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$ soit un disque ouvert de rayon $\mathrm{S} > \mathrm{R}$ légèrement plus grand.

L'intérêt, c'est que $\omega = \mathbb{D}_{\mathrm{S}}$ est simplement connexe, car alors un théorème du cours garantit l'existence d'une fonction holomorphe $h_{\mathrm{R}} \in \mathscr{O}(\omega)$ avec $h_{\mathrm{R}}(0) = 0$ telle que $e^{h_{\mathrm{R}}(z)} = g_{\mathrm{R}}(z)$.

(k) D'un premier côté, une dérivée κ-ième de la formule obtenue à la Question **(j)** fait disparaître les nombreux termes polynomiaux de degré $\leqslant \kappa - 1$ situés à la fin :

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{d}{dz}\Big)^{\kappa}\frac{f'(z)}{f(z)} &= Q^{(\kappa+1)}(z) - \sum_{n=1}^{\infty}\bigg(\frac{\kappa!}{(a_n-z)^{\kappa+1}} + 0\bigg) \\
&= Q^{(\kappa+1)}(z) - \sum_{|a_n|\leqslant \mathrm{R}}\frac{\kappa!}{(a_n-z)^{\kappa+1}} - \sum_{|a_n|>\mathrm{R}}\frac{\kappa!}{(a_n-z)^{\kappa+1}},
\end{aligned}$$

la dérivation terme à terme étant justifiée par une convergence normale présentée dans la section du polycopié consacrée au Théorème de Mittag-Leffler.

D'un deuxième côté, partons de la dérivée logarithmique de la fonction $g_{\mathrm{R}}(z)$:

$$\frac{g_{\mathrm{R}}'(z)}{g_{\mathrm{R}}(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{|a_n|\leqslant \mathrm{R}} \frac{1}{a_n - z},$$

et re-dérivons-la κ fois sans modération :

$$\begin{aligned} h_{\mathrm{R}}^{(\kappa+1)}(z) &= \left(\frac{d}{dz}\right)^{\kappa} \frac{g_{\mathrm{R}}'(z)}{g_{\mathrm{R}}(z)} \\ &= \left(\frac{d}{dz}\right)^{\kappa} \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{|a_n|\leqslant \mathrm{R}} \frac{\kappa!}{(a_n - z)^{\kappa+1}}. \end{aligned}$$

Une comparaison « œil-de-lynx » entre ces deux formules conduit au résultat demandé :

$$Q^{(k+1)}(z) = h_{\mathrm{R}}^{(k+1)}(z) + \sum_{|a_n|>\mathrm{R}} \frac{\kappa!}{(a_n - z)^{\kappa+1}}.$$

(l) Prenons $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 2\,\mathrm{R}$. Alors pour tout zéro a_n de f tel que $|a_n| \leqslant \mathrm{R}$ qui intervient dans la formule définissant $g_{\mathrm{R}}(z)$, on a la minoration :

$$\left|\frac{z}{a_n} - 1\right| \geqslant \left|\frac{z}{a_n}\right| - 1 \geqslant \frac{2\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}} - 1 = 1,$$

d'où découle la majoration demandée :

$$\begin{aligned} \big|g_{\mathrm{R}}(z)\big| \leqslant \left|\frac{f(z)}{\prod_{|a_n|\leqslant \mathrm{R}} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)}\right| \leqslant \frac{|f(z)|}{\prod_{|a_n|\leqslant \mathrm{R}} 1} &= \big|f(z)\big| \\ &\leqslant C\, e^{(2\,\mathrm{R})^{\rho}}. \end{aligned}$$

Comme $g_{\mathrm{R}} \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ est holomorphe entière, le principe du maximum garantit alors que cette estimée reste vraie dans $\overline{\mathbb{D}}_{2\,\mathrm{R}}(0)$.

(m) Revenons maintenant à $\omega \supset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$ — et non pas $\mathbb{D}_{2\,\mathrm{R}}$ — afin de pouvoir travailler avec $h_{\mathrm{R}} = \log g_{\mathrm{R}}$. En prenant le logarithme de l'inégalité de la Question **(l)**, mais vue sur C_{R}, nous obtenons :

$$\mathrm{Re}\, h_{\mathrm{R}}(z) = \log \big|g_{\mathrm{R}}(z)\big| \leqslant \log C + (2\,\mathrm{R})^{\rho} \qquad (\forall\, |z| = \mathrm{R}).$$

Autrement dit :

$$\boldsymbol{A}_{h_{\mathrm{R}}}(\mathrm{R}) \leqslant \log C + (2\,\mathrm{R})^{\rho}.$$

Maintenant, nous pouvons enfin appliquer l'inégalité de Borel-Carathéodory pour les dérivées, obtenue dans la Question **(h)**, avec l'ordre de dérivation $n := \kappa + 1$, ce qui nous donne, pour tout rayon $0 \leqslant r < \mathrm{R}$ strictement inférieur tout en tenant compte du principe du maximum :

$$\max_{|z|\leqslant r} \big|h_{\mathrm{R}}^{(\kappa+1)}(z)\big| \leqslant \frac{2^{\kappa+3}\,(\kappa+1)!\,\mathrm{R}}{(\mathrm{R} - r)^{\kappa+2}} \left[\log C + \big(2\,\mathrm{R}\big)^{\rho}\right].$$

(n) Prenons $r := \frac{1}{2}\,\mathrm{R}$ dans l'inégalité qui précède :

$$\begin{aligned} \max_{|z|\leqslant \frac{\mathrm{R}}{2}} \big|h_{\mathrm{R}}^{(\kappa+1)}(z)\big| &\leqslant \frac{2^{2\kappa+5}\,(\kappa+1)!\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}^{\kappa+2}} \left[\log C + \big(2\,\mathrm{R}\big)^{\rho}\right] \\ &= \mathrm{O}\big(\mathrm{R}^{\rho-\kappa-1}\big), \end{aligned}$$

et observons, puisque $\rho - \kappa - 1 < 0$, que ce majorant tend vers zéro lorsque $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$.

Ensuite, en revenant à la formule de la Question **(k)**, nous pouvons majorer :

$$\big|Q^{(k+1)}(z)\big| \leqslant \big|h_{\mathrm{R}}^{(k+1)}(z)\big| + \sum_{|a_n|>\mathrm{R}} \frac{\kappa!}{(a_n-z)^{\kappa+1}}.$$

Toujours en supposant $|z|=\frac{1}{2}\,\mathrm{R}$, il vient pour les a_n concernés :

$$\big|a_n - z\big| \geqslant |a_n| - |z| \geqslant \tfrac{1}{2}\,|a_n|,$$

d'où un majorant utile pour la somme restante :

$$\frac{1}{|a_n-z|} \leqslant \frac{2}{|a_n|}.$$

Enfin, grâce au principe du maximum appliqué à la fonction holomorphe entière $Q^{(\kappa+1)}(z)$ sur $\overline{\mathbb{D}}_{\frac{1}{2}\mathrm{R}}$, nous obtenons pour tout $|z|\leqslant\frac{1}{2}\,\mathrm{R}$ une inégalité :

$$\big|Q^{(k+1)}(z)\big| \leqslant \underbrace{\mathrm{O}\big(\mathrm{R}^{\rho-\kappa-1}\big)}_{\xrightarrow[\mathrm{R}\to\infty]{} 0} + \sum_{|a_n|>\mathrm{R}} \frac{2^{\kappa+1}\,\kappa!}{|a_n|^{\kappa+1}},$$

dans laquelle le deuxième majorant tend *aussi* vers 0 lorque $\mathrm{R}\longrightarrow\infty$, parce que la série $\sum\frac{1}{|a_n|^{\kappa+1}}<\infty$ converge, comme cela a été rappelé plus haut.

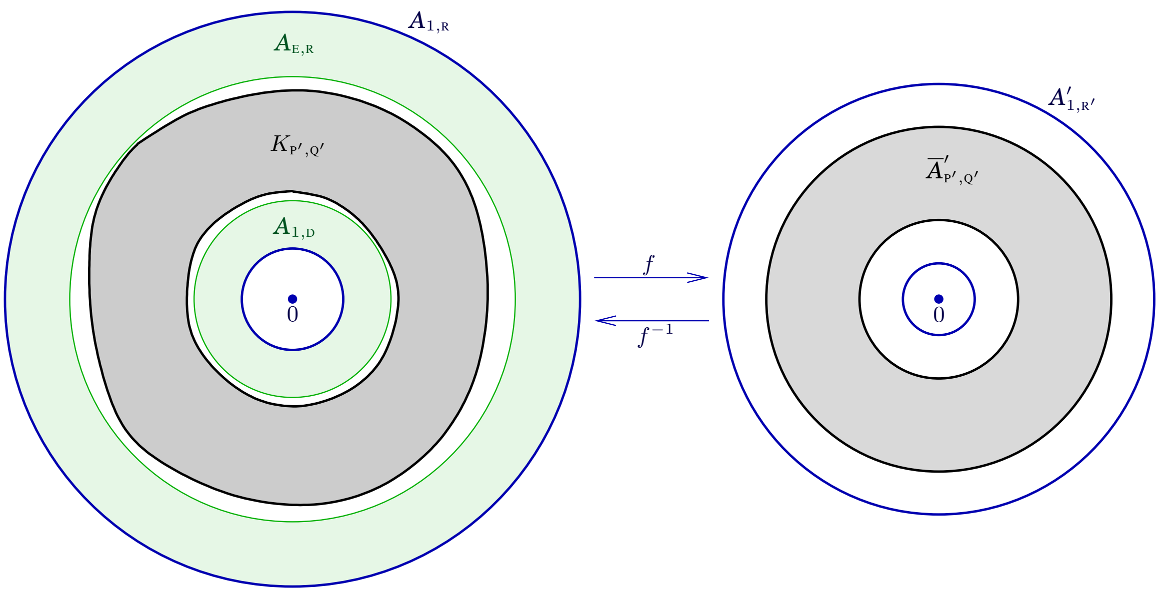
En conclusion, cette inégalité force via Liouville la dérivée $Q^{(\kappa+1)}(z)\equiv 0$ à être identiquement nulle, donc $Q(z)\in\mathbb{C}[z]$ est un poolynôme de degré $\leqslant\kappa$.

Exercice 2. **(a)** Comme f est bijective, il est clair que :

$$K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'} = f^{-1}\Big(\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}\Big) \qquad \text{où} \qquad \overline{\boldsymbol{A}}'_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'} = \big\{z'\in\mathbb{C}\colon\ \mathrm{P}'\leqslant|z'|\leqslant\mathrm{Q}'\big\},$$

et comme f^{-1} est continue, elle envoie cet anneau compact $\overline{\boldsymbol{A}}'_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}$ — contenu dans l'anneau ouvert $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}'}$ sans effleurer $\partial\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}'}$ — sur un certain sous-ensemble de l'espace de départ qui est compact, d'après un théorème connu de topologie générale.

(b) L'intérêt d'élaborer une figure est de prendre conscience que le premier anneau-tampon $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{D}}$ remplit au mieux l'espace entre le petit cercle bordant $C_1\subset\partial\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$ et le compact $K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}$, et aussi, que le deuxième anneau-tampon $\boldsymbol{A}_{\mathrm{E},\mathrm{R}}$ remplit au mieux l'espace entre le grand cercle bordant $C_{\mathrm{R}}\subset\partial\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$ et le même compact $K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}$. Un autre intérêt, c'est que cela a permis d'ajouter quelques longues *heures-malus* de travail supplémentaire au troisième correcteur.



(c) Comme l'anneau ouvert $A_{1,\mathrm{D}}$ est connexe, et comme $|f|$ est continue, son image $|f|\big(A_{1,\mathrm{D}}\big)$ est un ensemble connexe, d'après un théorème connu de topologie générale. Il est non vide parce que $\mathrm{D} > 1$.

De plus, comme f est un biholomorphisme, un théorème du cours assure que f est une application ouverte. Il s'ensuit que $|f|$ est aussi une application ouverte, car f est à valeurs dans $\mathbb{C}^* \supset A'_{1,\mathrm{R}'}$, et car $w \longmapsto |w|$ de $\mathbb{C}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ est ouverte. Par conséquent, $|f|\big(A_{1,\mathrm{D}}\big)$ est bien un intervalle ouvert connexe.

Par ailleurs, par définition de :

$$\mathrm{D} \,=\, 1 + \mathsf{dist}\,\big(C_1,\, K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}\big),$$

on voit, comme cela a déjà été compris au moment d'élaborer la figure, que :

$$\emptyset \,=\, A_{1,\mathrm{D}} \cap K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'},$$

et puisque $K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'} = |f|^{-1}\big([\mathrm{P}',\mathrm{Q}']\big)$, ceci force :

$$\begin{aligned} |f|\big(A_{1,\mathrm{D}}\big) \,&\subset\, \big]1,\mathrm{R}'\big[\,\setminus\, \big[\mathrm{P}',\mathrm{Q}'\big] \\ &=\, \big]1,\mathrm{P}'\big[\,\cup\, \big]\mathrm{Q}',\mathrm{R}'\big[. \end{aligned}$$

En définitive, l'intervalle ouvert connexe non vide $|f|\big(A_{1,\mathrm{D}}\big)$ ne peut donc être contenu que dans un seul des deux intervalles ouverts connexes $]1,\mathrm{P}'[$ et $]\mathrm{Q}',\mathrm{R}'[$, qui sont disjoints, car $\mathrm{P}' < \mathrm{Q}'$ depuis le début.

(d) Supposons comme indiqué que notre intervalle ouvert connexe $|f|\big(A_{1,\mathrm{D}}\big)$ est contenu dans $]1,\mathrm{P}'[$. Il s'agit de démontrer que :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \Big(1 < |z| < 1+\delta(\varepsilon) \qquad\Longrightarrow\qquad 1 < \big|f(z)\big| < 1+\varepsilon\Big).$$

De manière similaire à $K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}$, avec $\varepsilon > 0$ petit, introduisons l'ensemble :

$$L_\varepsilon \,:=\, \big\{z \in A_{1,\mathrm{R}}\colon\; 1+\varepsilon \leqslant |f(z)| \leqslant \mathrm{Q}'\big\}.$$

Dès que $1+\varepsilon \leqslant \mathrm{P}'$, on a clairement $L_\varepsilon \supset K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}$. À nouveau, $L_\varepsilon = f^{-1}\big(\overline{A}'_{1+\varepsilon,\mathrm{Q}'}\big)$ est un compact de $A_{1,\mathrm{R}}$, puisque f est continue.

Ensuite, considérons la distance de ce compact au cercle unité :

$$\delta(\varepsilon) := \mathsf{dist}\big(C_1, L_\varepsilon\big) > 0.$$

Si z est un point proche de C_1 dans l'ensemble qui nous intéresse, *i.e.* si $1 < |z| < 1+\delta(\varepsilon)$, d'où $z \notin L_\varepsilon$, on en déduit comme on l'a déjà fait plus haut que :

$$|f(z)| \in \big]1, 1+\varepsilon\big[\cup \big]\mathrm{Q}', \mathrm{R}'\big[,$$

et ce qui pourrait être gênant, c'est que cette valeur appartienne au deuxième intervalle $]\mathrm{Q}', \mathrm{R}'[$, ce qui signifierait que $f(z)$ est très loin du cercle C_1.

Mais heureusement, comme ce compact $L_\varepsilon \supset K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}$ est plus gros, il est clair que :

$$\delta(\varepsilon) \leqslant d = \mathsf{dist}\big(C_1, K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}\big),$$

ce qui implique une inclusion entre anneaux cruciale :

$$\boldsymbol{A}_{1,1+\delta(\varepsilon)} \subset \boldsymbol{A}_{1,1+d}.$$

Si maintenant z est un point quelconque dans l'anneau qui nous intéresse :

$$z \in \boldsymbol{A}_{1,1+\delta(\varepsilon)} \subset \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{D}},$$

il vient :

$$\begin{aligned} \big|f(z)\big| &\in |f|\big(\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{D}}\big) \\ \text{[Hypothèse en cours]} \qquad &\subset \big]1, \mathrm{P}'\big[, \end{aligned}$$

et en comparant avec l'appartenance obtenue plus haut, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \big|f(z)\big| &\in \big]1, \mathrm{P}'\big[\bigcap \Big(\big]1, 1+\varepsilon\big[\cup \big]\mathrm{Q}', \mathrm{R}'\big[\Big) \\ &= \big]1, 1+\varepsilon\big[. \end{aligned}$$

ce qui offre le résultat en faisant $\varepsilon \longrightarrow 0$:

$$\lim_{\substack{|z|\to 1 \\ z \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}}} \big|f(z)\big| = 1.$$

Quand $|f|\big(\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{D}}\big) \subset]\mathrm{Q}', \mathrm{R}'[$, le même type de raisonnements (symétriques) permet d'obtenir que la limite en question vaut R'.

(e) En utilisant les compacts alternatifs paramétrés par $\varepsilon > 0$:

$$H_\varepsilon := \big\{z \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \colon\ \mathrm{P}' \leqslant |f(z)| \leqslant \mathrm{R}' - \varepsilon\big\},$$

le même type de raisonnements montre que la limite en question :

$$\lim_{\substack{|z|\to \mathrm{R} \\ z \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}}} \big|f(z)\big| \in \big\{1,\ \mathrm{R}'\big\}$$

existe et vaut ou bien 1, ou bien R'.

Supposons par l'absurde que cette limite vale aussi 1. Mais comme f est surjective, il existe en tout cas une suite $\big\{w_n\big\}_{n=1}^{\infty}$ de points $w_n \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$ tels que $\big|f(w_n)\big| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{R}'$.

Observons qu'il est impossible que $|w_n| \longrightarrow 1$ ou que $|w_n| \longrightarrow \mathrm{R}$, car nous venons de supposer que $\big|f(z)\big| \longrightarrow 1$ quand $|z| \longrightarrow 1$ et quand $|z| \longrightarrow \mathrm{R}$. Donc cette suite $\big\{w_n\big\}_{n=1}^{\infty}$ reste dans un certain compact de l'anneau ouvert $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$, et grâce à Cauchy, une certaine sous-suite $\big\{w_{n_k}\big\}_{k=1}^{\infty}$ converge vers un certain point intérieur :

$$w_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} w_\infty \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}.$$

Mais alors comme f est un biholomorphisme, on a $f(w_\infty) \in \boldsymbol{A}'_{1,\mathrm{R}'}$, c'est-à-dire $1 < \big|f(w_\infty)\big| < \mathrm{R}'$, ce qui contredit le fait que la continuité de f en w_∞ donne :

$$\mathrm{R}' = \lim_{k\to\infty} \big|f\big(w_{n_k}\big)\big| = \big|f\big(w_\infty\big)\big|.$$

Ainsi, $|f|$ se prolonge par continuité à l'anneau fermé $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}$, avec $|f|\big|_{C_1} \equiv 1$ ainsi que : $|f|\big|_{C_\mathrm{R}} \equiv \mathrm{R}'$.

(f) Grâce aux questions qui précèdent, nous savons que g, holomorphe dans $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$, est continue sur $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}$, puisque la singularité $z = 0$ de $\frac{1}{z^n}$ n'appartient pas à $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}$.

La présence de z^{-n} en facteur force alors les limites des modules au bord à être égales :

$$\begin{aligned}
\lim_{|z|\to 1} \big|z^{-n}\, f(z)\big| &= 1^{-n} \lim_{|z|\to 1} \big|f(z)\big| = 1,\\
\lim_{|z|\to \mathrm{R}} \big|z^{-n}\, f(z)\big| &= \mathrm{R}^{-n} \lim_{|z|\to \mathrm{R}} \big|f(z)\big| = \mathrm{R}^{-n}\, \mathrm{R}' = 1.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\big|g(z)\big| = 1$ sur $\partial \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} = C_1 \cup C_\mathrm{R}$. Le principe du maximum donne alors $\big|g(z)\big| \leqslant 1$ dans $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}$.

De plus, comme g ne s'annule jamais, la fonction $\frac{1}{g}$ est aussi holomorphe dans $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$ et continue dans $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}$, et son module vaut aussi $\frac{1}{1} = 1$ sur le bord $\partial \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} = C_1 \cup C_\mathrm{R}$. Le principe du maximum — encore lui ! — donne donc $\big|\frac{1}{g(z)}\big| \leqslant 1$ dans $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}$.

En définitive, $\big|g(z)\big| \equiv 1$ dans $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}$.

Mais alors, le principe du maximum — encore lui et toujours lui ! qu'est-ce qu'il est collant ! — montre que g est constante, et comme elle est de module 1, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $g(z) \equiv e^{i\beta}$.

(g) Comme $e^{i\beta} \equiv g(z) = \frac{1}{z^n}\, f(z)$, nous obtenons miraculeusement :

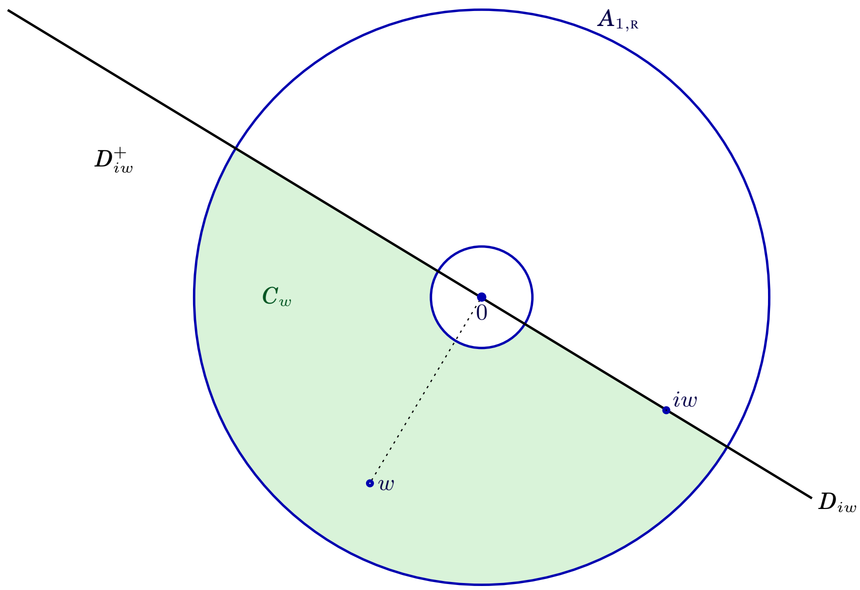
$$f(z) = e^{i\beta}\, z^n \qquad\qquad (\forall\, z \in \overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}).$$

Si cet entier $n \geqslant 2$ n'était pas égal à 1, d'où $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$, alors la fonction f ne serait pas injective, car pour un rayon intermédiaire quelconque $1 < r < \mathrm{R}$, on aurait :

$$f(r) = e^{i\beta}\, r^n = e^{i\beta}\, \big(r\, e^{\frac{2i\pi}{n}}\big)^n = f\big(r\, e^{\frac{2i\pi}{n}}\big),$$

ce qui contredirait l'hypothèse que f est un biholomorphisme $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{A}'_{1,\mathrm{R}'}$, donc *a minima* est une application injective.

(h) La figure suivante contient les 7 éléments exigés :



On « voit » que ce demi-anneau C_w n'a aucun « trou » en son intérieur de Jordan, donc cet ouvert est simplement connexe.

(i) Comme nous venons de démontrer de la manière la plus rigoureuse qui soit, du point de vue des mathématiques axiomatiques, que C_w est simplement connexe, et comme la fonction identité $z \longmapsto z$ ne s'annule jamais sur C_w, un théorème du cours fournit un logarithme complexe de cette fonction, et plus précisément, il fournit une fonction holomorphe $G \in \mathscr{O}\big(C_w\big)$ telle que :

$$e^{G(z)} \,=\, z \qquad\qquad (\forall\, z \in C_w),$$

d'où en prenant les modules :

$$e^{\,\mathsf{Re}\, G(z)} \,=\, \big|e^{G(z)}\big| \,=\, |z|,$$

et enfin, en prenant la puissance réelle moins p-ième :

$$e^{-\mathsf{p}\,\mathsf{Re}\, G(z)} \,=\, |z|^{-\mathsf{p}},$$

Ainsi, nous avons construit une fonction holomorphe :

$$g(z) \,:=\, e^{-\mathsf{p}\, G(z)},$$

qui satisfait bien $\big|g(z)\big| \equiv |z|^{-\mathsf{p}}$.

(j) Tout d'abord, on a bien compris que la fonction produit $g\,f \,\in\, \mathscr{O}\big(C_w\big) \cap \mathscr{C}^0\big(\overline{C}_w\big)$, holomorphe dans notre demi-anneau et continue jusqu'en son bord, satisfaisait :

$$\big|g(z)\, f(z)\big| \,=\, |z|^{-\mathsf{p}}\, \big|f(z)\big| \,=\, \phi(z) \qquad\qquad (\forall\, z \in \overline{C}_w),$$

et que, d'après ce qui précède, elle atteignait le maximum de son module en le point intérieur w :

$$\max_{z\,\in\,\overline{C}_w} \big|g(z)\, f(z)\big| \,=\, \big|g(w)\, f(w)\big| \,=\, \phi(w) \,>\, 1.$$

Mais alors, le principe du maximum la force à être égale à une certaine constante :

$$g(z)\, f(z) \,\equiv\, \alpha \qquad\qquad (\forall\, z \in \overline{C}_w),$$

qui est de module $|\alpha| = \big|g(w)\, f(w)\big| > 1$ strictement supérieur à 1, et par conséquent aussi :

$$\phi(z) \equiv \big|g(z)\, f(z)\big| \equiv |\alpha| > 1 \qquad\qquad (\forall\, z \in \overline{C}_w).$$

Mais cela est impossible ! — car le bord de notre demi-anneau intersecte non trivialement le bord de l'anneau de départ le long de deux demi-cercles :

$$\partial \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \cap \partial \boldsymbol{C}_w = \big[C_1 \cap \overline{\boldsymbol{D}}_{iw}^+\big] \bigcup \big[C_{\mathrm{R}} \cap \overline{\boldsymbol{D}}_{iw}^+\big],$$

le long desquels notre fonction $\phi(z) = \frac{|f(z)|}{|z|^{\mathsf{p}}} \equiv |\alpha|$ avait été construite exprès pour valoir identiquement $1 \neq |\alpha|$ — contradiction !

(k) En supposant par l'absurde qu'il existe un (autre) point $w \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$ avec :

$$\min_{z \in \overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}} \phi(z) = \phi(w) < 1,$$

tous ces arguments se transfèrent à la fonction inverse :

$$\psi(z) := \frac{|z|^{\mathsf{p}}}{|f(z)|} = \frac{1}{\phi(z)},$$

et on obtient $\psi \leqslant 1$ dans $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}$, c'est-à-dire $\phi \geqslant 1$.

En définitive, nous avons établi que :

$$\big|f(z)\big| \equiv |z|^{\frac{\log \mathrm{R}'}{\log \mathrm{R}}} \qquad\qquad (\forall\, z \in \overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}).$$

(l) En effet, $h(z)$ est holomorphe, puisqu'elle est produit de fonctions holomorphes dans $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \big\backslash \mathbb{R}_-$. Elle est continue sur $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}} \big\backslash \mathbb{R}_-$, puisque f l'est d'après ce qui précède, et puisque $\log z$ est continue sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_- \supset \overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}} \big\backslash \mathbb{R}_-$. Enfin :

$$\big|h(z)\big| = e^{-\mathsf{p}\,\mathrm{Re}\log z}\,\big|f(z)\big| = e^{-\mathsf{p}\log|z|}\,\big|f(z)\big| = |z|^{-\mathsf{p}}\,\big|f(z)\big| = \phi(z) \equiv 1.$$

(m) Comme $\big|h(z)\big| \equiv 1$, le module de la fonction $h(z)$ holomorphe dans l'ouvert connexe $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \big\backslash \mathbb{R}_-$ atteint son maximum en un (en tous les) point(s) intérieur(s) $z \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$, donc le principe du maximum la force à être constante dans $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$. Par continuité, elle est alors aussi constante sur $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}} \big\backslash \mathbb{R}_-$.

Mais attention ! Cette fonction $h(z)$ n'est *a priori pas* continue sur $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}$, car cet anneau est « tranché » par $\mathbb{R}_-$ à cause du logarithme.

(n) Grâce à notre connaissance de la fonction $\log z = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$ pour $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$ avec $\big|\mathrm{Arg}\, z\big| < \pi$, il vient :

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A_{1,\mathrm{R}}^-}} h(z) = e^{-\mathsf{p}(-i\pi)}\,|z_0|^{-\mathsf{p}}\, f(z_0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A_{1,\mathrm{R}}^+}} h(z) = e^{-\mathsf{p}i\pi}\,|z_0|^{-\mathsf{p}}\, f(z_0).$$

Comme h est constante ces deux limites doivent s'égaler, et comme $|z_0|^{-\mathsf{p}}\, f(z_0) \neq 0$, nous en tirons :

$$\begin{aligned} e^{-\mathsf{p}(-i\pi)} = e^{-\mathsf{p}i\pi} \qquad & \Longleftrightarrow \qquad e^{\mathsf{p}2i\pi} = 1 \\ & \Longleftrightarrow \qquad \mathsf{p} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Toutefois, $\mathsf{p} = \frac{\log \mathrm{R}'}{\log \mathrm{R}} \geqslant 1$, donc $\mathsf{p} \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$.

(o) Mais quand $\mathsf{p} = n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, nous avons déjà travaillé pour obtenir $\mathsf{p} = 1$! C'est terminé !

(p) Nous avons vu que les deux limites :

$$\ell_1 := \lim_{|z|\to 1} \big|f(z)\big| \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \ell_{\mathrm{R}} := \lim_{|z|\to \mathrm{R}} \big|f(z)\big|$$

existent et valent simultanément ou bien $\ell_1 = 1$, $\ell_{\mathrm{R}} = \mathrm{R}$, ou bien $\ell_1 = \mathrm{R}$, $\ell_{\mathrm{R}} = 1$.

Dans le premier cas, la fonction $\frac{f(z)}{z}$ est holomorphe dans $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$, continue et jamais nulle sur $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}$, et son module vaut constamment 1 au bord. Une double application du principe du maximum (vue en TD et revue plus haut dans un contexte plus compliqué) à $\frac{f(z)}{z}$ et à $\frac{z}{f(z)}$ montre alors que cette fonction est constante. Donc il existe une constante $\beta \in \mathbb{R}$ telle que $f(z) \equiv e^{i\beta}\, z$.

Une rotation ! Rien qu'une rotation ! Ah mais oui, un anneau, ça roule un anneau, ça roule tout seul !

Le deuxième cas se ramène au premier après avoir effectué la transformation $z \longmapsto \frac{\mathrm{R}}{f(z)}$, et donc on en déduit que $f(z) \equiv e^{i\beta}\, \frac{\mathrm{R}}{z}$.

Dans tous les cas, le groupe d'automorphismes holomorphes d'un anneau quelconque $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$ est engendré par une unique inversion et des rotations d'angle quelconque :

$$\mathsf{Aut}_{\,\mathsf{bihol}}\big(\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}\big) \;=\; \Big\langle z \longmapsto \frac{\mathrm{R}}{z},\;\; \big\{z \longmapsto e^{i\beta}\, z\big\}_{\beta\in\mathbb{R}}\Big\rangle.$$

(q) Avec la transformation de Cayley $w \longmapsto i\,\frac{1-w}{1+w} =: z$ qui établit un biholomorphisme du disque unité $\mathbb{D} = \{|w| < 1\}$ sur le demi-plan supérieur $\big\{\mathsf{Im}\, z > 0\big\}$, il suffit de trouver une application holomorphe surjective $\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Un demi-plan, « c'est déjà la moitié d'être surjectif ! » Une idée serait d'étendre cette demi-nappe. Après l'essai $z \longmapsto z^2$ qui dédouble les angles mais ne couvre pas $\mathbb{R}^+$, puis l'essai $z \longmapsto z^3$, qui couvre $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, on a l'idée de centrer non pas en 0, mais en un point de $\mathbb{H}$, par exemple i, et on vérifie que l'application $z \longmapsto \big(z-i\big)^2$ est surjective de $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{C}$.

9. Examen 5

Exercice 1. On introduit les deux fonctions définies pour $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$:

$$f(z) := \frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} \qquad \text{et} \qquad g(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-z)^2}.$$

(a) Justifier que f est holomorphe dans $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$.

(b) Montrer que g est holomorphe dans $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$. Indication: Avec $\mathrm{N} \geqslant 1$ entier, décomposer :

$$g(z) = \sum_{|n| \leqslant \mathrm{N}} \frac{1}{(n-z)^2} + \sum_{|n| \geqslant \mathrm{N}+1} \frac{1}{(n-z)^2},$$

et en supposant $|z| < \mathrm{N}$, majorer la deuxième somme par une série normale convergente.

(c) Montrer que f et g ont des pôles d'ordre 2 en $z = 0$, puis déterminer leurs parties singulières $\frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z}$ et $\frac{b_{-2}}{z^2} + \frac{b_{-1}}{z}$ dans leurs développements de Laurent respectifs. Indication: Observer que f est paire.

(d) Justifier que f et g sont 1-périodiques.

(e) Montrer que la fonction $h := f - g$ se prolonge en une fonction holomorphe entière et qu'elle est 1-périodique.

(f) On introduit le fermé :

$$\Pi := \Big\{ z \in \mathbb{C} \colon \; -\tfrac{1}{2} \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant \tfrac{1}{2}, \;\; |\mathrm{Im}\, z| \geqslant 1 \Big\}.$$

Dessiner Π soigneusement.

(g) Établir que f et g sont bornées en module sur Π.

(h) Montrer que h est bornée sur $\mathbb{C}$, puis qu'elle est constante.

(i) Montrer que :

$$\lim_{y \to \infty} f\big(i\, y\big) = 0 = \lim_{y \to \infty} g\big(i\, y\big).$$

(j) En effectuant la synthèse des questions qui précèdent, établir la formule, belle :

$$\frac{\pi^2}{\big(\sin(\pi\, z)\big)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-z)^2}. \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}).$$

(k) En déduire la valeur exacte de :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 2. Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un contour $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ de Jordan, et soit $\Omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\mathsf{int}}$ un ouvert qui le contient ainsi que son domaine intérieur Γ_{int}. On suppose données deux fonctions holomorphes $f, g \in \mathscr{O}(\Omega)$ qui satisfont partout sur ce contour l'inégalité :

$$|g(z)| \,<\, |f(z)| \qquad\qquad (\forall\, z \in \Gamma).$$

On envisage alors la fonction $f + g$ comme une « perturbation » de f.

(a) On introduit la famille à un paramètre réel $t \in [0,1]$ de fonctions holomorphes $f_t(z) := f(z) + t\, g(z)$ dans Ω. Montrer que la fonction :

$$\mathrm{N}(t) \,:=\, \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}\, dz$$

est bien définie et qu'elle est *continue* de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

(b) Quelles valeurs peut prendre alors $\mathrm{N}(t)$? Indication: Sans chercher à reconstituer une démonstration, justifier la réponse en une ou deux lignes par un simple appel au cours.

(c) Montrer, avec multiplicités, l'égalité :

$$\#\,\mathsf{zéros}\,\big(f+g\big) \,=\, \#\,\mathsf{zéros}\,(f) \qquad\qquad (\text{dans } \Gamma_{\mathsf{int}}).$$

(d) Soit le polynôme $P(z) := 3\,z^{15} + 4\,z^8 + 6\,z^5 + 19\,z^4 + 3\,z + 2$. Montrer que P admet exactement 4 zéros dans le disque unité $\{|z| < 1\}$.

(e) Montrer que $P(z)$ admet exactement 11 zéros dans l'anneau $\big\{1 < |z| < 2\big\}$.

Exercice 3. L'objectif est, pour des réels quelconques $a, b > 0$, d'établir en détail la formule :

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x+a)^2 + b^2}\, dx \,=\, \frac{\log \sqrt{a^2+b^2}}{b}\, \arctan \frac{b}{a}.$$

(a) Soient des réels δ, ε, R quelconques satisfaisant :

$$0 \,<\, \delta \,<\, \varepsilon \,<\, 1 \qquad\qquad \text{ainsi que} \qquad\qquad \max\big(1,\, \sqrt{a^2+b^2}\big) \,<\, \mathrm{R}.$$

On introduit le cercle c_ε de centre 0 et de rayon ε, le cercle C_{R} de centre 0 et de rayon R, ainsi que les deux segments horizontaux :

$$I^+_{\delta,\varepsilon,\mathrm{R}} \,:=\, \big\{z \in \mathbb{C}\colon\, \mathsf{Im}\, z = \delta,\ \sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2} \leqslant \mathsf{Re}\, z \leqslant \sqrt{\mathrm{R}^2 - \delta^2}\big\},$$
$$I^-_{\delta,\varepsilon,\mathrm{R}} \,:=\, \big\{z \in \mathbb{C}\colon\, \mathsf{Im}\, z = -\,\delta,\ \sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2} \leqslant \mathsf{Re}\, z \leqslant \sqrt{\mathrm{R}^2 - \delta^2}\big\}.$$

Enfin, on introduit les deux grands arcs de cercles $c_{\delta,\varepsilon} \subset c_\varepsilon$ et $C_{\delta,\mathrm{R}} \subset C_{\mathrm{R}}$ définis par :

$$c_{\delta,\varepsilon} \,:=\, c_\varepsilon \big\backslash \big\{\mathsf{Re}\, z > 0,\ -\delta < \mathsf{Im}\, z < \delta\big\},$$
$$C_{\delta,\mathrm{R}} \,:=\, C_{\mathrm{R}} \big\backslash \big\{\mathsf{Re}\, z > 0,\ -\delta < \mathsf{Im}\, z < \delta\big\}.$$

Dessiner très soigneusement le contour de Jordan $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ en forme de *trou de serrure*, orienté dans le sens trigonométrique, que délimitent la succession des quatre courbes $C_{\delta,\mathrm{R}}$, $I^-_{\delta,\varepsilon,\mathrm{R}}$, $c_{\delta,\varepsilon}$, $I^+_{\delta,\varepsilon,\mathrm{R}}$, et signaler l'orientation de chacune de ces courbes sur la figure.

(b) On abrège $\rho := \sqrt{a^2+b^2}$. Montrer que :

$$-\,a + i\,b \,=\, \rho\, e^{i\,\varphi_+}, \qquad\qquad \text{où} \qquad\qquad \varphi_+ \,:=\, \pi - \arctan\big(\tfrac{b}{a}\big),$$
$$-\,a - i\,b \,=\, \rho\, e^{i\,\varphi_-}, \qquad\qquad \text{où} \qquad\qquad \varphi_- \,:=\, \pi + \arctan\big(\tfrac{b}{a}\big).$$

(c) On introduit la fonction :

$$f(z) \,:=\, \frac{[\log z]^2}{(z+a)^2+b^2},$$

avec une puissance de $\log z$ d'une unité supérieure à celle de l'intégrale qui nous intéresse. Ici, la fonction $z \longmapsto \log z$ est supposée définie dans $\mathbb{C}\backslash[0,\infty[$, être holomorphe dans ce domaine, avec $\log(-1) = i\,\pi$. Calculer les résidus de f aux deux points :

$$w_- \,:=\, -a - i\,b \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad w_+ \,:=\, -a + i\,b.$$

Indication: On a donc $\log r\,e^{i\theta} \,=\, \log r + i\,\theta$ pour tout $z \,=\, r\,e^{i\theta} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ avec $r > 0$ et $0 < \theta < 2\pi$. On calculera ces résidus en fonction de ρ, φ_-, φ_+.

(d) Trouver, en fonction de a, b, ρ, la valeur de :

$$\int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon,\mathrm{R}}} f(z)\,dz \,=\, \frac{\pi}{b}\left(4\pi\,\mathrm{arctan}\,\tfrac{b}{a} - 4i\log\rho\;\mathrm{arctan}\,\tfrac{b}{a}\right).$$

(e) On abrège par $\mathrm{A} + i\,\mathrm{B}$ la valeur de cette intégrale. Montrer que :

$$\mathrm{A}+i\,\mathrm{B} \,=\, \int_{C_{\mathrm{R}}} f(z)\,dz - \int_\varepsilon^{\mathrm{R}} \frac{\big[\log x + 2i\pi\big]^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx - \int_{c_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_\varepsilon^{\mathrm{R}} \frac{\big[\log x\big]^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx.$$

(f) Soit $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ une constante fixée. Montrer rigoureusement que :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_\varepsilon^{\mathrm{R}} \frac{\big[\log x + \mathrm{K}\big]^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx \,=\, \int_0^\infty \frac{\big[\log x + \mathrm{K}\big]^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx.$$

Indication: On pourra utiliser le fait — que l'on justifiera très brièvement — qu'il existe des constantes $0 < \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3 < \infty$ telles que :

$$\big[\log x + \mathrm{K}\big]^2 \,\leqslant\, \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2\,[\log x]^2 \qquad (\forall\, 0 < x < 1),$$

$$\frac{\big[\log x + \mathrm{K}\big]^2}{(x+a)^2+b^2} \,\leqslant\, \frac{\mathrm{M}_3}{x\,\sqrt{x}} \qquad (\forall\, 1 < x).$$

(g) Montrer que :

$$0 \,=\, \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \int_{c_\varepsilon} f(z)\,dz.$$

(h) Montrer que :

$$0 \,=\, \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_{C_{\mathrm{R}}} f(z)\,dz.$$

(i) Conclure.

---

10. Corrigé de l'examen 5

Exercice 1. (a) Puisque la fonction $z \longmapsto \sin(\pi z)$ est holomorphe *entière*, *i.e.* définie sur $\mathbb{C}$ tout entier, et puisque son lieu d'annulation est précisément égal à $\mathbb{Z}$, la première fonction $f(z)$ est holomorhe dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.

(b) Quant à $g(z)$, bien que ses pôles $z = n$ soient visibles à l'œil nu, il nous faut encore justifier la convergence de la série qui la définit. À cette fin, fixons un entier $\mathrm{N} \geqslant 1$ et décomposons, pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$:

$$g(z) = \underbrace{\sum_{|n|\leqslant \mathrm{N}} \frac{1}{(n-z)^2}}_{=:\, g_{\mathrm{N}}(z)} + \underbrace{\sum_{|n|\geqslant \mathrm{N}+1} \frac{1}{(n-z)^2}}_{=:\, \boldsymbol{R}_{\mathrm{N}}(z)}.$$

Ici, il est clair que g_{N} est holomorphe dans $\mathbb{D}_{\mathrm{N}}(0)\big\backslash\big\{-\mathrm{N}+1, \dots, 0, \dots, \mathrm{N}-1\big\}$.

Pour ce qui est de la série-reste $\boldsymbol{R}_{\mathrm{N}}(z)$ dont tous les éléments sont holomorphes dans $\mathbb{D}_{\mathrm{N}}(0)$, en supposant $|z| < \mathrm{N}$, nous pouvons la majorer par une *série normale* convergente :

$$\begin{aligned}
\big|\boldsymbol{R}_{\mathrm{N}}(z)\big| &\leqslant \sum_{|n|\geqslant \mathrm{N}+1} \left|\frac{1}{(n-z)^2}\right| \\
&\leqslant \sum_{|n|\geqslant \mathrm{N}+1} \frac{1}{\big(|n|-\mathrm{N}\big)^2} \\
&= \sum_{|n|\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = 2\left(\tfrac{\pi^2}{6} - 1\right) < \infty,
\end{aligned}$$

et ceci garantit, grâce à un théorème magique de Cauchy, que $\boldsymbol{R}_{\mathrm{N}}(z)$ est holomorphe dans le disque $\mathbb{D}_{\mathrm{N}}(0)$. Au final, la somme $g(z) = g_{\mathrm{N}}(z) + \boldsymbol{R}_{\mathrm{N}}(z)$ est holomorphe dans $\mathbb{D}_{\mathrm{N}}(0)\big\backslash\big\{-\mathrm{N}+1, \dots, 0, \dots, \mathrm{N}-1\big\}$, et comme $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ était arbitraire, on a bien $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z})$.

(c) On sait que la fonction $z \longmapsto \sin(\pi z)$ s'annule à l'ordre 1 en $z = 0$. Donc $f(z)$ admet un pôle d'ordre 2 en $z = 0$. De plus, comme f est visiblement paire, on doit avoir $a_{-1} = 0$ dans son développement de Laurent en $z = 0$. Dans ces conditions :

$$a_{-2} = \lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\pi z}{\sin(\pi z)}\right)^2 = 1^2 = 1.$$

Pour ce qui est de :

$$g(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} \frac{1}{(n-z)^2},$$

le même raisonnement que dans la Question **(b)** montre que la (grosse) somme est holomorphe dans un voisinage de 0, et ainsi l'unique terme singulier $\frac{1}{z^2}$ signifie que $b_{-1} = 0$ et que $b_{-2} = 1$. Tiens ! Comme pour f !

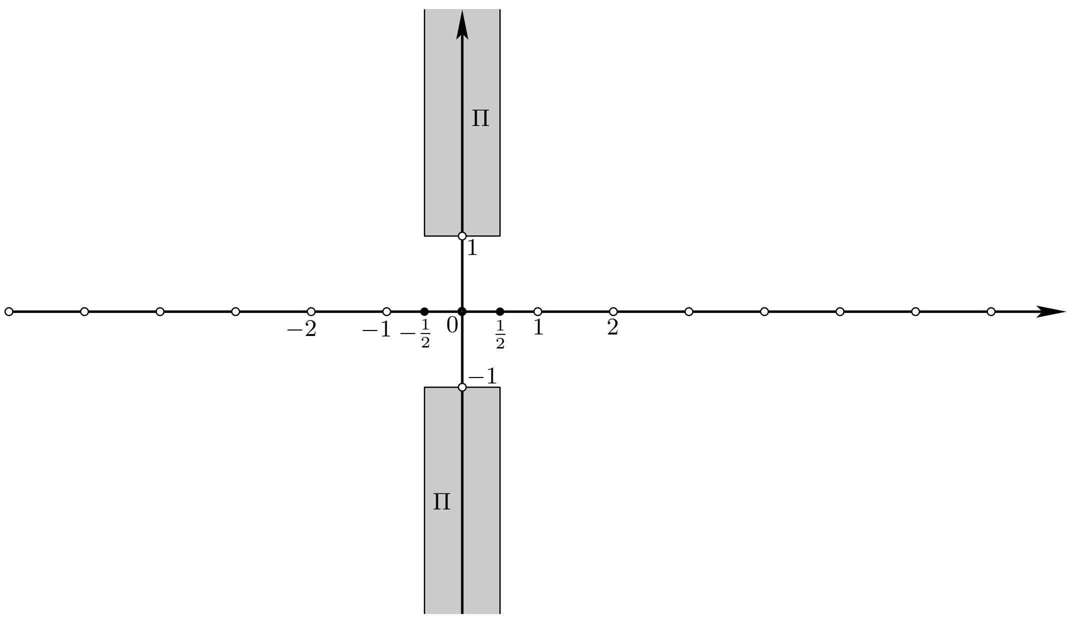
(d) La fonction f est 1-périodique, puisque $z \longmapsto \sin(\pi z)$ l'est. Pour ce qui est de g, quel que soit $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, en effectuant un décalage sommatoire $n-1 =: m$, on trouve :

$$g(z+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-z-1)^2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m-z)^2} = g(z),$$

ces calculs formels étant justifiés par la convergence normale des sommes-restes correspondantes, convergence que nous avons établie dans la Question **(b)**.

(e) Grâce à la Question **(c)**, les deux fonctions f et g ont même partie singulière en 0. Par 1-périodicité, f et g ont aussi mêmes parties singulières en tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$. Dans la soustraction $f-g$, toutes les singularités en les $z=n$ sont alors éliminées d'un seul coup, donc h est holomorphe entière. Évidemment, elle hérite aussi d'une agréable 1-périodicité.

(f) Voici à quoi ressemble Π, ensemble fondamental qui pourrait être démultiplié par 1-périodicité.



(g) Soit donc $z = x + i\,y \in \Pi$, c'est-à-dire avec $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ et $|y| \geqslant 1$.

Premièrement, pour majorer la fonction f qui est paire, on peut supposer $y \geqslant 1$, et on procède comme suit :

$$\begin{aligned}\big|f(z)\big| = \frac{\pi^2\,|2\,i|^2}{\big|e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}\big|^2} = \frac{4\,\pi^2}{\big|e^{i\pi x-\pi y}-e^{-i\pi x+\pi y}\big|^2} &\leqslant \frac{4\,\pi^2}{\big(e^{\pi\,y}-e^{-\pi\,y}\big)^2} \\ &\leqslant \frac{4\,\pi^2}{\big(e^{\pi}-e^{-\pi}\big)^2} < \infty.\end{aligned}$$

Deuxièmement, nous pouvons majorer dans Π la fonction g comme suit :

$$\big|g(z)\big| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\big|n-x-i\,y\big|^2} \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n-x|^2} \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\big(|n|-\frac{1}{2}\big)^2} < \infty.$$

(h) Nous venons de voir que $h = f - g$ est bornée en module sur Π, puisque f et g le sont. Ensuite, sur le rectangle compact $\big\{\big|\mathrm{Re}\,z\big| \leqslant \frac{1}{2},\ |\mathrm{Im}\,z| \leqslant 1\big\}$ étranglé entre les deux colonnes verticales de Π, il est évident que h est bornée, car elle est continue sur $\mathbb{C}$. Ainsi, h est bornée sur la bande infinie $\big\{\big|\mathrm{Re}\,z\big| \leqslant \frac{1}{2}\big\}$, puis sur $\mathbb{C}$ tout entier, par 1-périodicité.

L'impitoyable théorème de Liouville force alors h à être constante.

(i) Pour ce qui est de f, utilisons l'estimation établie dans la Question **(g)** ci-dessus :

$$\lim_{y\to\infty} \big|f\big(i\,y\big)\big| \;\leqslant\; \lim_{y\to\infty} \frac{4\,\pi^2}{\big(e^{\pi\,y} - e^{-\pi\,y}\big)^2} \;=\; 0.$$

Quant à la série g, puisqu'on peut supposer $1 \leqslant y \longrightarrow \infty$, nous pouvons majorer chacun de ses termes par des quantités indépendantes de y :

$$\frac{1}{|n-i\,y|^2} \;=\; \frac{1}{n^2+y^2} \;\leqslant\; \frac{1}{n^2+1},$$

dont la somme complète $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+1} < \infty$ converge, et alors le théorème de convergence dominée pour les séries offre le résultat :

$$\lim_{y\to\infty} \big|g\big(i\,y\big)\big| \;=\; \lim_{y\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-i\,y)^2} \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{(n-i\,y)^2} \;=\; 0.$$

(j) Nous avons démontré en **(h)** que la fonction holomorphe $h \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$, égale à $f-g$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, est constante sur $\mathbb{C}$. Que vaut, alors, cette constante ?

Puisque la demi-droite verticale $\big\{i\,y\colon\; y \geqslant 1\big\}$ est contenue dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ et puisque nous venons de voir que f *et* g tendent vers zéro quand on prend l'ascenseur vers l'infini du ciel imaginaire, la constante en question est forcément nulle. Ainsi, $h(z) \equiv 0$, donc $f(z) \equiv g(z)$, ce qui est la belle formule !

(k) Récrivons notre belle formule sous la forme :

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{(n-z)^2} \;=\; \frac{\pi^2}{\big[\sin(\pi\,z)\big]^2} - \frac{1}{z^2},$$

réduisons le membre de droite au même dénominateur, et effectuons un développement limité :

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2\,z^2 - \big[\sin(\pi\,z)\big]^2}{z^2\,\big[\sin(\pi\,z)\big]^2} \;&=\; \frac{\pi^2\,z^2 - \big[\pi\,z - \frac{1}{6}\,\pi^3\,z^3 + \mathrm{O}(z^5)\big]^2}{z^2\,\big[\pi\,z - \frac{1}{6}\,\pi^3\,z^3 + \mathrm{O}(z^5)\big]^2} \;=\; \frac{\frac{2\,\pi^4}{6}\,z^4 + \mathrm{O}(z^6)}{\pi^2\,z^4 + \mathrm{O}(z^6)}\\ &=\; \frac{\pi^2}{3} + \mathrm{O}(z^2).\end{aligned}$$

Enfin, le théorème de convergence dominée pour les séries — encore lui ! — permet de justifier que :

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \;=\; \lim_{z\to 0} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{(n-z)^2} \;=\; \lim_{z\to 0}\Big(\frac{\pi^2}{3} + \mathrm{O}(z^2)\Big) \;=\; \frac{\pi^2}{3},$$

d'où en conclusion :

$$\zeta(2) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \;=\; \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2. **(a)** Pour tout $z \in \Gamma$, puisque $0 \leqslant t \leqslant 1$, on peut minorer :

$$\begin{aligned} \big|f_t(z)\big| &\geqslant |f(z)| - \big|t\,g(z)\big| \\ &\geqslant |f(z)| - |g(z)| \\ &> 0. \end{aligned}$$

De plus, comme l'ensemble $[0,1] \times \Gamma$ est *compact*, cette minoration implique — exercice de révision en topologie — qu'il existe une constante $c > 0$ telle qu'on ait en fait :

$$\big|f_t(z)\big| \geqslant c > 0 \qquad\qquad (\forall\, t \in [0,1],\ \forall\, z \in \Gamma).$$

Par conséquent, la fonction :

$$F(t,z) := \frac{f'(z) + t\,g'(z)}{f(t) + t\,g(z)}$$

est continue sur le compact $[0,1] \times \Gamma$. Donc le théorème de continuité des intégrales à paramètres s'applique comme de la crème solaire sur le capot d'une Bugatti orange.

(b) Un théorème vu en cours énonce que $\mathrm{N}(t) \in \mathbb{Z}$, toujours, et même, que $\mathrm{N}(t)$ compte, avec multiplicités, le nombre de zéros que la fonction possède $f_t(z)$ dans Γ_{int}, sachant que l'inégalité vue plus haut garantissait sans que nous l'ayons expressément mentionné, que $f_t(z)$ n'a *aucun* zéro sur Γ. Et tout ceci est vrai quel que soit $t \in [0,1]$.

(c) Comme $t \longmapsto \mathrm{N}(t)$ est continue de l'intervalle connexe $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, comme elle est en fait à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et comme $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ est *discret*, cette application est nécessairement *constante*, et donc, l'orange crémée tombe entre nos mains après avoir rebondi sur le capot :

$$\#\,\text{zéros}\,(f) = \mathrm{N}(0) = \mathrm{N}(t) = \mathrm{N}(1) = \#\,\text{zéros}\,\big(f + 1\,g\big).$$

(d) En effet, prenons $f(z) := 19\,z^4$ et aussi $g(z) := P(z) - f(z)$, puis, majorons bêtement sur le cercle unité $\{|z| = 1\}$

$$\begin{aligned} |g(z)| = \Big|3\,z^{15} + 4\,z^8 + 6\,z^5 + 0 + 3\,z + 2\Big| &\leqslant 3\,|z|^{15} + 4\,|z|^8 + 6\,|z|^5 + 0 + 3\,|z| + 2 \\ &= 3 + 4 + 6 + 0 + 3 + 2 \\ &= 18 \\ &< 19 = \big|19\,z^4\big| = |f(z)|, \end{aligned}$$

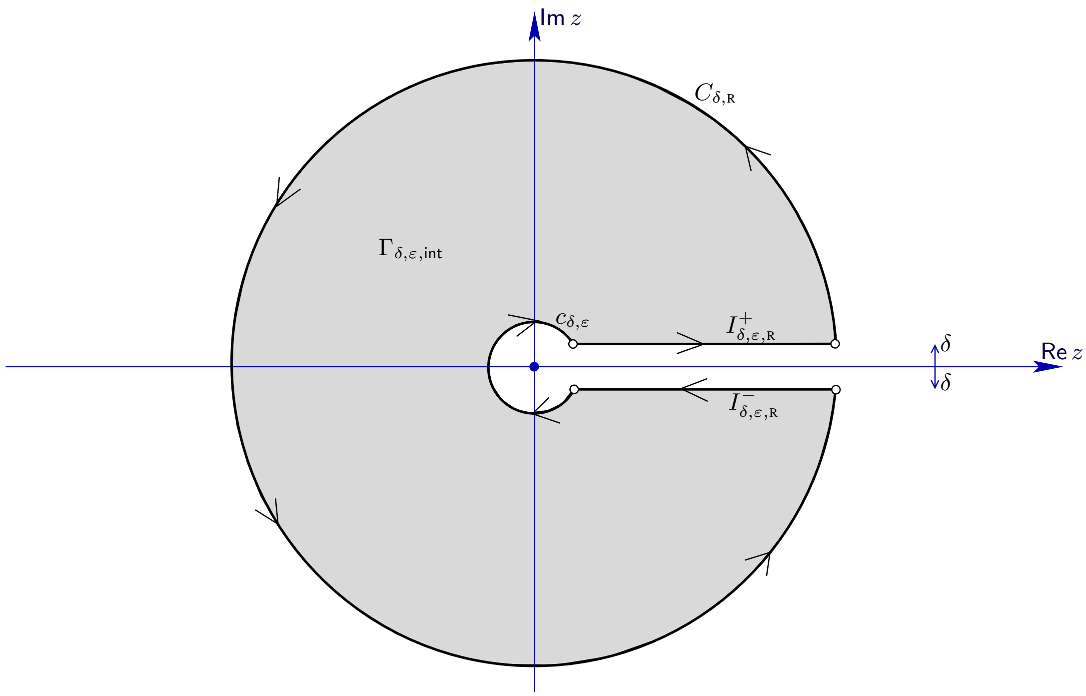
donc le résultat de la Question **(c)** — qui n'est autre que le *Théorème de Rouché* démontré d'une autre manière en cours — garantit que $P(z) = f(z) + g(z)$ a le même nombre de zéros dans $\{|z| < 1\}$ que $f(z) = 19\,z^4$, fonction qui a évidemment 4 zéros !

(e) On sait grâce au Théorème de d'Alembert-Gauss que notre polynôme $P(z)$ de degré $15 = 4+11$ possède précisément 15 zéros dans $\mathbb{C}$, comptés avec multiplicité. Pour conclure, il suffirait de faire voir que $P(z)$ n'a *aucun* zéro dans $\{|z| \geqslant 2\}$, ce qui n'est pas sorcier.

Étant donné un rayon $\mathrm{R} \geqslant 2$ quelconque, et un point $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = \mathrm{R}$ quelconque, il suffit en effet de minorer astucieusement :

$$\begin{aligned}\big|P(z)\big| &\geqslant 3\,|z|^{15} - 4\,|z|^8 - 6\,|z|^5 - 19\,|z|^4 - 3\,|z| - 2 \\ &= 3\,\mathrm{R}^{15} - 4\,\mathrm{R}^8 - 6\,\mathrm{R}^5 - 19\,\mathrm{R}^4 - 3\,\mathrm{R} - 2 \\ &= \mathrm{R}^8\left(3\,\mathrm{R}^7 - 4 - \tfrac{6}{\mathrm{R}^3} - \tfrac{19}{\mathrm{R}^4} - \tfrac{3}{\mathrm{R}^7} - \tfrac{2}{\mathrm{R}^8}\right) \\ &\geqslant 2^8\Big(\underbrace{3\,2^7 - 4 - \tfrac{6}{2^3} - \tfrac{19}{2^4} - \tfrac{3}{2^7} - \tfrac{2}{2^8}}_{>0}\Big).\end{aligned}$$

Exercice 3. **(a)** *Maître*, votre dévoué serviteur vous apporte la pièce métallique désirée :



(b) Pour $a, b > 0$, nous savons qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned}a + i\,b &= \rho\left(\tfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\,\tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ &= \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right),\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\varphi &:= \arctan\frac{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}} \\ &= \arctan\tfrac{b}{a}.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}-a - i\,b &= -\left(a + i\,b\right) \\ &= -\rho\,e^{i\arctan\frac{b}{a}} \\ &= \rho\,e^{i\left(\pi + \arctan\frac{b}{a}\right)} \;=:\; \rho\,e^{i\varphi_-},\end{aligned}$$

Rappelons que la fonction :

$$\arctan\colon\quad]-\infty, \infty[\;\longrightarrow\;]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[$$

est définie pour tous les nombres réels, et qu'elle est impaire. Donc la formule ci-dessus est en fait aussi vraie pour $b \in \mathbb{R}$ de signe quelconque, ce qui nous permet de conclure :

$$\begin{aligned} -a + i\,b &= -\big(a - i\,b\big) \\ &= -\rho\, e^{i\,\mathrm{arctan}\,\frac{-b}{a}} \\ &= \rho\, e^{i\left(\pi - \mathrm{arctan}\,\frac{b}{a}\right)} \;=:\; \rho\, e^{i\,\varphi_+}. \end{aligned}$$

(c) La factorisation $(z+a)^2 + b^2 = (z-w_-)\,(z-w_+)$ montre que ces deux uniques pôles sont *simples*, ce qui facilite le calcul de :

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_f(w_-) &= \lim_{z \to w_-} \underline{(z-w_-)}\; \frac{[\log z]^2}{\underline{(z-w_-)}\,(z-w_+)} \\ &= \frac{\big[\log w_-\big]^2}{w_- - w_+} \\ &= \frac{\big[\log \rho + i\,\varphi_-\big]^2}{-\,2i\,b}, \end{aligned}$$

puis celui très similaire de :

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_f(w_+) &= \lim_{z \to w_+} \underline{(z-w_+)}\; \frac{[\log z]^2}{(z-w_-)\,\underline{(z-w_+)}} \\ &= \frac{\big[\log w_+\big]^2}{w_+ - w_-} \\ &= \frac{\big[\log \rho + i\,\varphi_+\big]^2}{2i\,b}. \end{aligned}$$

(d) Le Théorème des résidus de Jordan-Cauchy offre :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon,\mathrm{R}}} f(z)\,dz &= \frac{2i\pi}{2i\,b}\left(\big[\log \rho + i\,\varphi_+\big]^2 - \big[\log \rho + i\,\varphi_-\big]^2\right) \\ &= \frac{\pi}{b}\left(2\log \rho\,\big(i\,\varphi_+ - i\,\varphi_-\big) - \big(\varphi_+\big)^2 + \big(\varphi_-\big)^2\right) \\ &= \frac{\pi}{b}\left(2\log \rho\,\big(-\,2i\,\mathrm{arctan}\,\tfrac{b}{a}\big) - \big(\pi - \mathrm{arctan}\,\tfrac{b}{a}\big)^2 + \big(-\,\pi - \mathrm{arctan}\,\tfrac{b}{a}\big)^2\right) \\ &= \frac{\pi}{b}\left(4\pi\,\mathrm{arctan}\,\tfrac{b}{a} - 4i\log \rho\;\mathrm{arctan}\,\tfrac{b}{a}\right) \\ &=: \mathrm{A} + i\,\mathrm{B}. \end{aligned}$$

(e) Il suffit de faire tendre $\delta \overset{>}{\longrightarrow} 0$, en prenant bonne note du fait que le segment orienté $I^-_{\delta,\varepsilon,\mathrm{R}}$ tend, par en-dessous l'axe réel positif $\mathbb{R}_+$, vers l'intervalle $[\mathrm{R}, \varepsilon]$ *orienté de la droite vers la gauche*, et en faisant bien attention au fait que les valeurs du logarithme $\log e^{i\theta} = i\,\theta$ tendent vers $2i\pi$ lorsque $\theta < 2\pi$ tend vers 2π, toujours lorsqu'on s'approche de l'axe réel (strictement) positif *par en-dessous*.

Enfin, on vérifie mentalement que toutes les intégrales considérées sont continues en $\delta > 0$, grâce au fait que $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{R} < \infty$ sont fixés.

(f) L'existence de constantes $0 < \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3 < \infty$ telles que ces deux inégalités soient satisfaites découle aisément d'une connaissance du comportement de $x \longmapsto \log x$ lorsque $0 \xleftarrow{<} x$ et lorsque $x \longrightarrow \infty$, et aussi, du fait que $b > 0$.

Ensuite, on retrouve par un petit calcul connu que $x \longmapsto \log x$ a pour primitive $x \log x - x$:

$$\int 1 \cdot \log x \, dx \;=\; x \log x - \int x \, \frac{1}{x} \;=\; x \log x - x,$$

et puisque $\varepsilon \log \varepsilon \longrightarrow 0$ lorsque $0 \xleftarrow{<} \varepsilon$, il en découle que $\int_0^* \log x \, dx$ est intégrable en 0.

On doit en principe avoir déjà vu dans sa longue vie étudiante que la fonction $x \longmapsto [\log x]^2$ est aussi intégrable en 0, et si on ne l'a pas encore vu, il suffit, en intégrant par parties, d'en trouver la primitive :

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \big[\log x\big]^2 dx \;&=\; x \big[\log x\big]^2 - \int x \, \frac{2 \log x}{x} \\ &=\; x \big[\log x\big]^2 - 2\, x \log x + 2\, x,\end{aligned}$$

et de se souvenir qu'on a aussi $\varepsilon \big[\log \varepsilon\big]^2 \longrightarrow 0$ lorsque $0 \xleftarrow{<} \varepsilon$. (Plus généralement, toutes les puissances entières $[\log x]^k$ sont intégrables en 0.)

En découpant l'intégrale :

$$\int_\varepsilon^{\mathrm{R}} \frac{\big[\log x + \mathrm{K}\big]^2}{(x+a)^2 + b^2} \, dx \;=\; \int_\varepsilon^1 + \int_1^{\mathrm{R}},$$

l'existence et la valeur de la double limite en question est alors une conséquence immédiate du théorème de convergence dominée grâce aux deux inégalités exhibées.

(g) Paramétrons le cercle c_ε par $z = \varepsilon \, e^{i\theta}$, d'où $dz = \varepsilon \, i \, e^{i\theta} \, d\theta$. En supposant $0 < \varepsilon < 1$, nous venons de nous convaincre qu'il existe des constantes $0 < \mathrm{M}_4, \mathrm{M}_5 < \infty$ telles que :

$$\frac{\big|\log \varepsilon + i\,\theta\big|^2}{\big(\varepsilon \, e^{i\theta} + a\big)^2 + b^2} \;\leqslant\; \mathrm{M}_4 + \mathrm{M}_5 \, \big(\log \varepsilon\big)^2 \qquad\qquad (\forall\, 0 < \theta < 2\pi),$$

donc :

$$\begin{aligned}\bigg| \int_{c_\varepsilon} f(z) \, dz \bigg| \;&=\; \bigg| \int_0^{2\pi} \frac{\big[\log \varepsilon + i\,\theta\big]^2}{\big(\varepsilon \, e^{i\theta} + a\big)^2 + b^2} \; \varepsilon \, i \, e^{i\theta} \, d\theta \bigg| \\ &=\; \int_0^{2\pi} \Big(\mathrm{M}_4 + \mathrm{M}_5 \, \big(\log \varepsilon\big)^2\Big)^2 \, \varepsilon \; d\theta \\ &=\; 2\pi \Big(\mathrm{M}_4 \, \varepsilon + \mathrm{M}_5 \, \varepsilon \, \big(\log \varepsilon\big)^2\Big) \quad \xrightarrow[\;]{\varepsilon \,\underset{>}{\longrightarrow}\, 0} \quad 0.\end{aligned}$$

(h) De manière similaire, il existe des constantes $0 < \mathrm{M}_6, \mathrm{M}_7 < \infty$ telles que pour tout $1 < \mathrm{R}$ on a :

$$\frac{\big|\log \mathrm{R} + i\theta\big|^2}{\big(\mathrm{R} \, e^{i\theta} + a\big)^2 + b^2} \;\leqslant\; \frac{\mathrm{M}_6 + \mathrm{M}_7 \, \big(\log \mathrm{R}\big)^2}{\mathrm{R}^2} \qquad\qquad (\forall\, 0 < \theta < 2\pi),$$

donc :

$$\begin{aligned}\bigg|\int_{C_{\mathrm{R}}} f(z)\,dz\bigg| &= \bigg|\int_0^{2\pi} \frac{\big[\log \mathrm{R}+i\theta\big]^2}{\big(\mathrm{R}\,e^{i\theta}+a\big)^2+b^2}\,\mathrm{R}\,i\,e^{i\theta}\,d\theta\bigg| \\ &\leqslant \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{M}_6+\mathrm{M}_7\,\big(\log \mathrm{R}\big)^2}{\mathrm{R}^2}\,\mathrm{R}\,d\theta \\ &= 2\pi\,\frac{\mathrm{M}_6+\mathrm{M}_7\,\big(\log \mathrm{R}\big)^2}{\mathrm{R}^1} \quad \xrightarrow{\mathrm{R}\longrightarrow\infty} \quad 0.\end{aligned}$$

(i) D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}+i\,\mathrm{B} &= \frac{4\pi^2}{b}\,\mathrm{arctan}\,\frac{b}{a}-i\,\frac{4\pi}{b}\,\mathrm{arctan}\,\frac{b}{a}\,\log\sqrt{a^2+b^2} \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ >}}\,\lim_{\mathrm{R}\to\infty}\bigg(\int_{C_{\mathrm{R}}} f(z)\,dz-\int_\varepsilon^{\mathrm{R}}\frac{\big[\log x+2i\pi\big]^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx-\int_{c_\varepsilon} f(z)\,dz+\int_\varepsilon^{\mathrm{R}}\frac{\big(\log x\big)^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx\bigg) \\ &= 0-\int_0^\infty\frac{\big[\log x+2i\pi\big]^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx-0+\int_0^\infty\frac{\big[\log x\big]^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx.\end{aligned}$$

De manière cruciale, la puissance $(\bullet)^2$ de $\log x$ *disparaît dans la soustraction*, ce qui nous donne :

$$\mathrm{A}+i\,\mathrm{B} = \int_0^\infty\frac{-\,4i\pi\,\log x+4\pi^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx,$$

et en identifiant les parties imaginaires :

$$\frac{4\pi}{b}\,\mathrm{arctan}\,\frac{b}{a}\,\log\sqrt{a^2+b^2} \;=\; 4\pi\int_0^\infty\frac{\log x}{(x+a)^2+b^2}\,dx,$$

nous parvenons royalement au résultat demandé !

11. Examen 6

Exercice 1. La fonction de Bessel de $1^{\text{ère}}$ espèce et d'indice 0 est définie par :

$$J_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}\,(n!)^2}\, z^{2n}.$$

(a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière. Indication: Utiliser la formule de D'Alembert ; ou utiliser la formule de Stirling qui fournit un équivalent de $n!$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

(b) Montrer que $w(z) := J_0(z)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire du second ordre :

$$0 \equiv z^2\, w''(z) + z\, w'(z) + z^2\, w(z).$$

Exercice 2. Soit $C := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ le cercle unité, parcouru dans le sens trigonométrique.

(a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque, l'intégrale :

$$\int_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}.$$

Indication: Utiliser la formule du binôme de Newton.

(b) En déduire les valeurs de :

$$I_{2n} := \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} t\, dt \qquad \text{et} \qquad J_{2n} := \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n} t\, dt.$$

(c) Trouver les valeurs de :

$$I_{2n+1} := \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n+1} t\, dt \qquad \text{et} \qquad J_{2n+1} := \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n+1} t\, dt.$$

Exercice 3. [Théorème des trois cercles de Hadamard] Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert *connexe* $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui contient un anneau *fermé* :

$$A_{r,\mathrm{R}} := \big\{z \in \mathbb{C} \colon r \leqslant |z| \leqslant \mathrm{R}\big\} \subset \Omega,$$

où $0 < r < \mathrm{R}$ sont deux rayons positifs fixés. Pour $\rho \in [r, \mathrm{R}]$ quelconque, on note :

$$M_f(\rho) := \max_{|z|=\rho} \big|f(z)\big|.$$

(a) Après avoir dressé une figure soignée, pour ρ fixé avec $r \leqslant \rho \leqslant \mathrm{R}$, montrer qu'il existe $\theta \in [0, 1]$ unique tel que :

$$\rho = r^{\theta}\, \mathrm{R}^{1-\theta},$$

et donner la valeur explicite de θ.

(b) Montrer, pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $q \geqslant 1$ que l'on a :

$$\rho^p\, M_f(\rho)^q \leqslant \max\big\{r^p\, M_f(r)^q,\ \ \mathrm{R}^p\, M_f(\mathrm{R})^q\big\}.$$

(c) En déduire, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, que l'on a :

$$\rho^\alpha \, M_f(\rho) \;\leqslant\; \max\big\{r^\alpha \, M_f(r),\;\; \mathrm{R}^\alpha \, M_f(\mathrm{R})\big\}.$$

(d) En déduire que :

$$M_f(\rho) \;\leqslant\; M_f(r)^\theta \, M_f(\mathrm{R})^{1-\theta} \qquad\qquad (\forall\, \rho \text{ avec } r \leqslant \rho \leqslant \mathrm{R}).$$

(e) Interpréter le résultat obtenu en termes de fonctions convexes.

Exercice 4. Pour un paramètre réel $t \in \mathbb{R}$, l'objectif de cet exercice est de déterminer la limite, quand $\mathbb{R} \longrightarrow \infty$, des intégrales :

$$I_{\mathrm{R}}(t) \;:=\; \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{\sin x}{x} \, e^{it\,x} \, dx.$$

(a) On introduit la fonction méromorphe $f_t(z) := \frac{\sin z}{z} \, e^{itz}$. Vérifier que $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$, puis montrer que $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ est holomorphe *entière*.

(b) Pour $\mathrm{R} > 1$ quelconque, soit le segment $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$. Soit aussi β_{R} la courbe orientée, constituée des trois morceaux : le segment $[-\mathrm{R}, -1]$; le demi-cercle unité *inférieur*, *i.e.* situé *sous* l'axe des abscisses, orienté dans le sens trigonométrique, contenant -1, $-i$, 1 ; le segment $[1, \mathrm{R}]$. Dessiner très soigneusement $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$, $0 \in \mathbb{C}$, β_{R}, $-\mathrm{R}$, -1, $-i$, 1, R.

(c) Montrer l'égalité :

$$\int_{[-\mathrm{R},\mathrm{R}]} f_t(z) \, dz \;=\; \int_{\beta_{\mathrm{R}}} f_t(z) \, dz.$$

(d) Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $g_s(z) := \frac{1}{2i} \, \frac{e^{isz}}{z}$. Vérifier que :

$$I_{\mathrm{R}}(t) \;=\; J_{\mathrm{R}}(t+1) - J_{\mathrm{R}}(t-1) \qquad\qquad \text{en posant} \qquad\qquad J_{\mathrm{R}}(s) \;:=\; \int_{\beta_{\mathrm{R}}} g_s(z) \, dz.$$

(e) On introduit les deux courbes :

$$\gamma_{\mathrm{R}}^{+} \;:=\; \text{demi-cercle supérieur centré en } 0 \text{ de rayon } \mathrm{R} \text{ orienté positivement contenant } \mathrm{R},\; i\,\mathrm{R},\; -\,\mathrm{R},$$

$$\gamma_{\mathrm{R}}^{-} \;:=\; \text{demi-cercle inférieur centré en } 0 \text{ de rayon } \mathrm{R} \text{ orienté négativement contenant } \mathrm{R},\; -i\,\mathrm{R},\; -\,\mathrm{R}.$$

Exécuter très soigneusement une nouvelle figure complète, contenant tous les élément précédents ainsi que γ_{R}^{-}, $-i\,\mathrm{R}$, γ_{R}^{+}, $i\,\mathrm{R}$.

(f) Montrer que :

$$J_{\mathrm{R}}(s) \;=\; \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} e^{i\,s\,\mathrm{R}\,e^{i\theta}} \, d\theta.$$

(g) Calculer $\mathrm{Res}_{g_s}(0)$.

(h) Montrer que :

$$J_{\mathrm{R}}(s) \;=\; \pi - \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} e^{i\,s\,\mathrm{R}\,e^{i\theta}} \, d\theta.$$

(i) Montrer que pour tout $s < 0$, on a :

$$0 \;=\; \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_{\pi}^{2\pi} e^{i\,s\,\mathrm{R}\,e^{i\theta}} \, d\theta.$$

Indication: Utiliser un théorème expéditif du cours d'Intégration.

(j) Montrer que :

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty} J_{\mathrm{R}}(s) \;=\; \begin{cases} \pi & \text{lorsque } \ s > 0, \\ \pi/2 & \text{pour } \ s = 0, \\ 0 & \text{lorsque } \ s < 0. \end{cases}$$

(k) En déduire les valeurs recherchées :

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{\sin x}{x}\, e^{itx}\, dx \;=\; \begin{cases} \pi & \text{lorsque } \ |t| < 1, \\ \pi/2 & \text{pour } \ t = -1, 1, \\ 0 & \text{lorsque } \ |t| > 1. \end{cases}$$

(l) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f(z)$ définie au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$ telle que $z^2\, f(z)^2 = \sin(z^2)$.

Exercice 5. [Produits de Blaschke finis] L'objectif de cet exercice est de décrire *toutes* les fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1(0) = \{|z| < 1\}$, continues sur sa fermeture $\overline{\mathbb{D}}$, et dont le module prend une valeur *constante* au bord, sur le cercle unité $\partial\mathbb{D} = \{|z| = 1\}$.

(a) Plus généralement, soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe borné non vide, et soit $h \in \mathscr{O}(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ une fonction holomorphe dans Ω et continue jusqu'au bord $\partial\Omega = \overline{\Omega}\backslash\Omega$, dont le module $|h(\zeta)| \equiv a \in \mathbb{R}_+$ est constant pour tout $\zeta \in \partial\Omega$. Quand $a = 0$, justifier que $h(z) \equiv 0$ dans $\Omega \cup \partial\Omega$.

(b) On suppose dorénavant que le module $|h(\zeta)| \equiv a \in \mathbb{R}_+^*$ est constant non nul sur le bord pour tout $\zeta \in \partial\Omega$. Quand $h(z) \neq 0$ pour tout $z \in \overline{\Omega}$, montrer que $|h(z)| \equiv a$ est constant partout, pour tout $z \in \overline{\Omega} \cup \Omega$.
Indication: Penser à $\frac{1}{h(z)}$.

(c) Sous l'hypothèse de la Question **(b)**, montrer que $h(z) \equiv \mu \in \mathbb{C}^*$ est alors *constante*, partout dans $\Omega \cup \partial\Omega$.

(d) En supposant que h est *non constante* dans $\overline{\Omega}$, toujours avec $\big|h\big|_{\partial\Omega}$ constant, déduire que h admet alors (au moins) un zéro dans Ω.

(e) Soit donc une fonction $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\mathbb{D}})$ dont le module est constant sur $\partial\mathbb{D}$. En déduire que f est ou bien constante, ou bien admet une factorisation de la forme :

$$f(z) \;=\; \big(z - \alpha_1\big)^{m_1} \cdots \big(z - \alpha_p\big)^{m_p}\, g(z),$$

où $p \geqslant 1$ est entier, où $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{D}$ sont mutuellement distincts, où $m_1, \dots, m_p \geqslant 1$ sont entiers, et où $g \in \mathscr{O}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^*)$ est une fonction holomorphe jamais nulle dans $\mathbb{D}$. Indication: Justifier, lorsque f est non constante, qu'elle n'a qu'un nombre fini de zéros dans $\mathbb{D}$. Dresser une figure parlante.

(f) On supppose dorénavant que f n'est pas constante. Soit $\alpha \in \mathbb{D}$, et soit la fonction-type :

$$\phi_\alpha(z) \;:=\; \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}.$$

Montrer que $\big|\phi_\alpha(z)\big| \equiv 1$ sur le cercle unité $\{|z| = 1\}$.

(g) Soit la fonction :

$$h(z) \;:=\; f(z) \prod_{1\leqslant i\leqslant p} \frac{1}{(\phi_{\alpha_i}(z))^{m_i}}.$$

Montrer que h définit une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ dont le module $|h(z)| \equiv c \in \mathbb{R}_+^*$ est *constant* non nul sur le cercle unité $\partial\mathbb{D}$.

(h) En déduire qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}^*$ telle que :

$$f(z) \equiv \lambda \prod_{1 \leqslant i \leqslant p} \left(\frac{z-\alpha_i}{1-\overline{\alpha}_i z}\right)^{m_i} \qquad (\forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}).$$

(i) Trouver toutes les fonctions holomorphes dans le plan complexe $\mathbb{C}$ dont le module est constant sur le cercle unité.

Exercice 6. [Théorème de Gauss-Lucas] On rappelle que l'*enveloppe convexe* d'un ensemble fini $E_w := \{w_1, \dots, w_{\text{L}}\}$ de points $w_\ell \in \mathbb{C}$ avec $1 \leqslant \ell \leqslant \text{L}$ est définie comme :

$$\widehat{E_w} := \Big\{\lambda_1\, w_1 + \cdots + \lambda_{\text{L}}\, w_{\text{L}} \colon\; 0 \leqslant \lambda_1, \dots, \lambda_{\text{L}} \leqslant 1,\; \lambda_1 + \cdots + \lambda_{\text{L}} = 1\Big\}.$$

Soit un polynôme holomorphe $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ de degré $n \geqslant 1$, donc avec $a_n \neq 0$, et soient $z_1, \dots, z_n$ ses zéros, comptés avec multiplicités.

L'objectif est d'établir que les zéros $w_1, \dots, w_{n-1}$ de son polynôme dérivé $P'(z) = n a_n z^{n-1} + \cdots + a_1$ sont tous situés dans l'*enveloppe convexe* des zéros $z_1, \dots, z_n$.

(a) Pour un entier quelconque $1 \leqslant j \leqslant n-1$, si $w_j \neq z_1, \dots, z_n$ n'est *pas* l'un des zéros de $P(z)$, établir la formule :

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_j - z_i}{|w_j - z_i|^2}.$$

Indication: Décomposer $\frac{P'(z)}{P(z)}$ en élément simples et obtenir $\frac{1}{z-z_1} + \cdots + \frac{1}{z-z_n}$.

(b) Ré-écrire cette identité algébrique de manière à conclure. Indication: Trouver $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

12. Corrigé de l'examen 6

Exercice 1. **(a)** En vertu de l'équivalent de Stirling $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi\, n}$ lorsque $n \longrightarrow \infty$, l'inverse $\frac{1}{\mathrm{R}}$ du rayon de convergence de $J_0(z)$ vaut :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{R}} &= \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2^{2n}\,(n!)^2}\right|^{\frac{1}{2n}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left[\left((\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi\, n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2n}}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2}\,\frac{e}{n\left[2\pi\, n\right]^{\frac{1}{n}}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc le rayon de convergence $\mathrm{R} = \infty$ est infini, ce qui veut dire que $J_0(z)$ est une fonction holomorphe *entière*, définie sur le plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier.

(b) D'après un théorème du cours, la série de $J_0(z)$ et toutes ses séries dérivées terme terme à des ordres quelconques sont normalement convergentes sur les compacts arbitraires $K \subset \mathbb{C}$. Pour vérifier que l'équation différentielle est satisfaite, nous pouvons donc dériver gaillardement et effectuer sans inquiétude des manipulations algébriques élémentaires *derrière* le signe de sommation infinie :

$$\begin{aligned}
z^2\,J_0''(z) + z\,J_0'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(z^2\,(-1)^n\,\frac{1}{2^{2n}\,(n!)^2}\,2n\,(2n-1)\,z^{2n-2} + z\,(-1)^n\,\frac{1}{2^{2n}\,(n!)^2}\,2n\,z^{2n-1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\,2n\,\big(2n-1+1\big)\,\frac{1}{2^{2n}\,(n!)^2}\,z^{2n}\right) \\
&= -\,z^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{2^{2(n-1)}\,\big((n-1)!\big)^2}\,z^{2(n-1)} \\
&= -\,z^2\,J_0(z),
\end{aligned}$$

petites manipulations en catimini de niveau L1$^+$ qui concluent !

Exercice 2. **(a)** En vertu du théorème facile et crucial maintes fois cité et utilisé en cours :

$$\int_{|z|=1} z^m\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\theta}\,i\,e^{i\theta}\,d\theta = \begin{cases} 2i\pi & \text{pour } m=-1, \\ 0 & \text{lorsque } m\in\mathbb{Z}\backslash\{-1\}, \end{cases}$$

nous pouvons aisément calculer en développant grâce à la formule du binôme de Newton :

$$\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{z} = \sum_{0\leqslant k\leqslant 2n}\binom{2n}{k}\int_C z^{2n-2k-1}\,dz = \binom{2n}{n}\,2i\pi.$$

(b) En paramétrant le cercle unité par $z = e^{it}$, pour $t \in [-\pi, \pi]$, d'où $dz = i\, e^{it}\, dt$, puis $\frac{dz}{z} = i\, dt$, nous pouvons ré-exprimer l'intégrale dont nous venons de calculer la valeur :

$$\binom{2n}{n} 2i\pi \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \big(e^{it} + e^{-it}\big)^{2n}\, i\, dt \;=\; i\, 2^{2n} \int_{-\pi}^{\pi} \big(\cos t\big)^{2n}\, dt,$$

pour trouver :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} t\, dt \;=\; \frac{2\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n} t\, dt,$$

cette dernière égalité étant immédiate par changement de variable, puisque $\sin t = \cos\big(t - \frac{\pi}{2}\big)$.

(c) En vertu de ce changement de variable $t \longmapsto t - \frac{\pi}{2}$, et du fait que $t \longmapsto \sin^{2n+1} t$ est une fonction *impaire*, on retrouve, sans aucun calcul, l'Être le plus séduisant de toutes les mathématiques, le zéro adoré :

$$0 \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n+1} t\, dt \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n+1} t\, dt.$$

Exercice 3. (a) On a $\log \rho \in \big[\log r, \log \mathrm{R}\big]$, donc il existe $\theta \in [0,1]$ tel que :

$$\log \rho \;=\; \theta \log r + (1-\theta) \log \mathrm{R} \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad \theta \;=\; \frac{\log \mathrm{R} - \log \rho}{\log \mathrm{R} - \log r}.$$

En exponentiant cela, on déduit le résultat souhaité :

$$\rho \;=\; e^{\log \rho} \;=\; e^{\theta \log r + (1-\theta) \log \mathrm{R}} \;=\; r^{\theta}\, \mathrm{R}^{1-\theta}.$$

(b) La fonction $z \longmapsto z^p\, f(z)^q$ est holomorphe à l'intérieur de $A_{r,\mathrm{R}}$, continue jusqu'au bord, *i.e.* continue sur le compact $\overline{A}_{r,\mathrm{R}}$, puisqu'elle est en fait holomorphe dans un voisinage ouvert de $\overline{A}_{r,\mathrm{R}}$. L'inégalité demandée est alors une application immédiate du principe du maximum, vu en cours.

(c) On peut ré-écrire l'inégalité obtenue en **(b)** comme :

$$\rho^{p/q}\, M_f(\rho) \;\leqslant\; \max\Big\{ r^{p/q}\, M_f(r),\;\; \mathrm{R}^{p/q}\, M_f(\mathrm{R}) \Big\}.$$

Il suffit alors de considérer une suite p_n/q_n, avec $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, de rationnels qui convergent vers $\alpha \longleftarrow p_n/q_n$, et de passer à la limite.

(d) D'une part, si $M_f(r) = 0$, ou si $M_f(\mathrm{R}) = 0$, ce qui veut dire que f est nulle sur le cercle C_r ou sur le cercle C_{R} dont tous les points sont d'accumulation, le résultat est satisfait car le principe des zéros isolés force alors la fonction f, holomorphe dans $\Omega \supset C_r \cup C_{\mathrm{R}}$, à être identiquement nulle, et dans ces deux cas, l'inégalité $0 \leqslant 0^{\theta} \cdot M_f(\mathrm{R})^{1-\theta}$ ou $0 \leqslant M_f(r)^{\theta} \cdot 0^{1-\theta}$ est trivialement vérifiée.

Encore du zéro partout ! Beau barème — merci Monsieur de Marçay !

Nous pouvons donc supposer que $M_f(r) \neq 0$ et que $M_f(\mathrm{R}) \neq 0$. En prenant alors la valeur astucieuse :

$$\alpha \;:=\; \frac{-\log M_f(\mathrm{R}) + \log M_f(r)}{\log \mathrm{R} - \log r},$$

pour laquelle :

$$r^{\alpha}\, M_f(r) \;=\; \mathrm{R}^{\alpha}\, M_f(\mathrm{R}),$$

nous nous arrangeons pour que les deux termes dont on prend le maximum dans la Question **(c)** soient égaux — donc il n'y a plus à prendre de maximum !

Cette Question (**c**) fournit alors l'inégalité :

$$\rho^\alpha\, M_f(\rho) \,\leqslant\, r^\alpha\, M_f(r),$$

qui, au prix de calculs un peu exigeants, nous conduit par la main jusqu'à la conclusion désirée :

$$\begin{aligned} M_f(\rho) \,&\leqslant\, \rho^{-\alpha}\, r^\alpha\, M_f(r) \\ &=\, e^{\alpha\,(\log r - \log \rho)}\, e^{\log M_f(r)} \\ &=\, e^{\frac{-\log M_f(\mathrm{R}) + \log M_f(r)}{\log \mathrm{R} - \log r}\,(\log r - \log \rho)}\, e^{\log M_f(r)} \\ &=\, e^{\frac{\log \rho - \log r}{\log \mathrm{R} - \log r}\,\log M_f(\mathrm{R})}\; e^{\left(\frac{\log r - \log \rho}{\log \mathrm{R} - \log r} + 1\right)\log M_f(r)} \\ &=\, \big[M_r(\mathrm{R})\big]^{\frac{\log \rho - \log r}{\log \mathrm{R} - \log r}}\; \big[M_f(r)\big]^{\frac{\log \mathrm{R} - \log \rho}{\log \mathrm{R} - \log r}} \\ &=\, M_f(\mathrm{R})^{1-\theta}\, M_f(r)^\theta. \end{aligned}$$

(e) L'inégalité obtenue peut s'interpréter en disant que la fonction $H\colon x \longmapsto \log M_f(e^x)$ est *convexe*, puisque :

$$\begin{aligned} H\big(\theta\, x + (1-\theta)\, y\big) \,&=\, \log\big(M_f\,\big(e^{\theta x}\, e^{(1-\theta) y}\big)\big) \\ {\scriptstyle [x\,:=\,\log r,\ y\,=\,\log \mathrm{R}]}\qquad &\leqslant\, \theta \log M_f(e^x) + (1-\theta)\log M_f(e^y) \\ &=\, \theta\, H(x) + (1-\theta)\, H(y). \end{aligned}$$

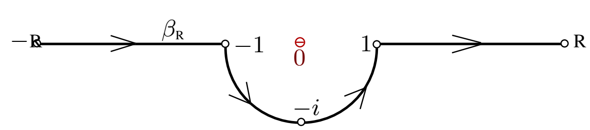
Exercice 4. (a) En-dehors de l'origine, la fonction est holomorphe partout dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, car $\sin z$ et $e^{it\,z}$ sont holomorphes dans $\mathbb{C}$ tout entier, et car $\frac{1}{z} \in \mathscr{O}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$.

Rappelons que $\sin z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, d'où $\sin z = z + \mathrm{O}(z^2)$, et par conséquent :

$$\frac{\sin z}{z} \,=\, 1 + \mathrm{O}(z) \,=\, \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\, \frac{z^{2n}}{(2n+1)!},$$

est holomorphe au voisinage de 0, grâce au théorème d'élimination des singularités de Riemann, ou grâce au théorème de Laurent.

(b) Voici la figure demandée.



(c) On décompose chacune de ces deux intégrales en trois sous-intégrales :

$$\begin{aligned} \int_{[-\mathrm{R},\mathrm{R}]} f_t(z)\, dz \,&=\, \int_{[-\mathrm{R},-1]} f_t(x)\, dx + \int_{[-1,1]} f_t(x)\, dx + \int_{[1,\mathrm{R}]} f_t(x)\, dx, \\ \int_{\beta_\mathrm{R}} f_t(z)\, dz \,&=\, \int_{[-\mathrm{R},-1]} f_t(x)\, dx + \int_{C^-} f_t(z)\, dz + \int_{[1,\mathrm{R}]} f_t(x)\, dx, \end{aligned}$$

où C^- est le demi-cercle unité inférieur parcouru dans le sens trigonométrique. Pour vérifier que ces deux intégrales sont égales, il suffit par soustraction, d'établir que celles au milieu sont égales :

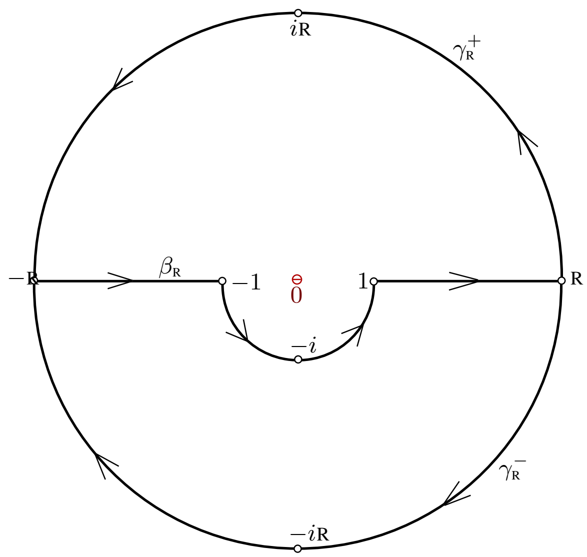
$$0 \,\overset{?}{=}\, \int_{[-1,1]} f_t(z)\, dz - \int_{C^-} f_t(z)\, dz.$$

Mais la concaténation du segment $[-1, 1]$ avec le demi-cercle inférieur C^- constitue une courbe fermée dans l'ouvert $\Omega := \mathbb{C}$, convexe, étoilé, simplement connexe (et tutti quanti), dans lequel les fonctions holomorphes admettent toujours une primitive. Grâce à un théorème du cours maintes fois répété au tableau, l'intégrale de $f_t(z)$ sur cette concaténation fermée est *nulle*, ce qui équivaut à l'égalité en question.

(d) Grâce à ce que nous venons de voir, nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned} I_{\text{R}}(t) \;=\; \int_{[-\text{R},\text{R}]} \frac{\sin z}{z}\, e^{itz}\, dz \;=\; \int_{\beta_{\text{R}}} \frac{\sin z}{z}\, e^{itz}\, dz \;&=\; \int_{\beta_{\text{R}}} \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i\, z}\, e^{itz}\, dz \\ &=\; \int_{\beta_{\text{R}}} \frac{1}{2i}\, \frac{e^{i(t+1)z}}{z}\, dz - \int_{\beta_{\text{R}}} \frac{1}{2i}\, \frac{e^{i(t-1)z}}{z}\, dz \\ &=\; J_{\text{R}}(t+1) - J_{\text{R}}(t-1). \end{aligned}$$

(e) Voici, sans insolence, la figure demandée, Ô Maître, Ô dur Maître !



(f) Le contour fermé $\beta_{\text{R}} \cup \gamma_{\text{R}}^-$ ne contient pas, dans son intérieur de Jordan, l'unique singularité, $\{0\}$, de la fonction méromorphe $g_s(z) = \frac{1}{2i}\,\frac{e^{isz}}{z}$. Donc le théorème de Jordan-Cauchy donne l'annulation de l'intégrale de cette fonction le long de ce contour, et en paramétrisant la courbe γ_{R}^- *inverse*, c'est-à-dire parcourue dans le sens *positif*, par $z = \text{R}\, e^{i\theta}$ avec $\theta \in [\pi, 2\pi]$, d'où $dz = \text{R}\, i\, e^{i\theta}\, d\theta$, on obtient bien :

$$0 \;=\; \int_{\beta_{\text{R}} \cup \gamma_{\text{R}}^-} g_s(z)\, dz \;=\; J_{\text{R}}(s) - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2i}\, \frac{e^{i\, s\, \text{R}\, e^{i\theta}}}{\text{R}\, e^{i\theta}}\, \text{R}\, i\, e^{i\theta}\, d\theta.$$

(g) Rien de plus aisé, ma Caramelle maternelle !

$$\text{Res}_{g_s}(0) \;=\; \lim_{z \to 0} z\, \frac{1}{2i}\, \frac{e^{isz}}{z} \;=\; \frac{1}{2i}\, e^0 \;=\; \frac{1}{2i}.$$

(h) L'*autre* contour fermé $\beta_{\text{R}} \cup \gamma_{\text{R}}^+$ possède maintenant un intérieur de Jordan qui *contient* l'unique singularité $\{0\}$ de $g_s(z)$. Nous devons donc appliquer le Théorème des résidus, vu lors de l'ultime séance de cours qui précédait cet examen partiel.

Sans hésitation, grâce à une paramétrisation du demi-cercle γ_{R}^+ par $z = \mathrm{R}\, e^{i\theta}$ pour $\theta \in [0, \pi]$, nous obtenons :

$$\pi = 2i\pi \, \frac{1}{2i} = \int_{\beta_{\mathrm{R}} \cup \gamma_{\mathrm{R}}^+} g_s(z)\, dz = J_{\mathrm{R}}(s) + \int_0^{\pi} \frac{1}{2i} \, \frac{e^{i\, s\, \mathrm{R}\, e^{i\theta}}}{\mathrm{R}\, e^{i\theta}} \, \mathrm{R}\, i\, e^{i\theta}\, d\theta.$$

(i) On a :

$$\left| e^{is\, \mathrm{R}\, e^{i\theta}} \right| = \left| e^{i\, s\, \mathrm{R} \cos\theta - s\, \mathrm{R} \sin\theta} \right| = e^{-s\, \mathrm{R} \sin\theta},$$

et pour $\pi < \theta < 2\pi$ avec $s < 0$, ce majorant est < 1 puisque trois fois le signe moins donne un signe moins, et tend vers zéro lorsque $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$.

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique immédiatement.

(j) Tout d'abord, la Question **(i)** qui précède donne, pour $s < 0$:

$$\left| J_{\mathrm{R}}(s) \right| \leqslant \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2}\, e^{-s\, \mathrm{R} \sin\theta}\, d\theta \underset{\mathrm{R} \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ensuite, pour $s = 0$, il est clair que :

$$J_{\mathrm{R}}(0) = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} e^{i0}\, d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Enfin, une modification légère du raisonnement effectué à l'instant dans la Question **(i)** montre, en revenant à l'identité de la Question **(h)**, que pour $s > 0$, on a de même grâce à une convergence très dominante :

$$\left| J_{\mathrm{R}}(s) - \pi \right| \leqslant \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2}\, e^{-\, s\, \mathrm{R} \sin\theta}\, d\theta \underset{\mathrm{R} \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

(k) En revenant à la Question **(d)** :

$$I_{\mathrm{R}}(t) = J_{\mathrm{R}}(t+1) - J_{\mathrm{R}}(t-1),$$

on vérifie mentalement que le résultat qui précède conclut.

(l) On constate que $\frac{\sin(z^2)}{z^2}$ est holomorphe jamais nulle près de 0. On peut en prendre le logarithme, puis une racine carrée $f(z)^2 = \frac{\sin(z^2)}{z^2}$.

Exercice 5. **(a)** Un des principes du maximum vu en cours offre sans efforts l'inégalité qui force h à être identiquement nulle :

$$\left| h(z) \right| \leqslant 0 = \max_{\zeta \in \partial\Omega} \left| h(\zeta) \right| \qquad (\forall\, z \in \overline{\Omega}).$$

(b) Notons donc $a \in \mathbb{R}_+^*$ la valeur *constante* de $|h|$ sur $\partial\Omega$, et supposons h jamais nulle dans Ω. Alors la fonction $\frac{1}{h(z)}$ est holomorphe dans Ω, continue sur $\overline{\Omega}$, et de module constant, égal à $\frac{1}{a}$, sur le bord $\partial\Omega$. Grâce au principe du maximum appliqué à $\frac{1}{h(z)}$, pour tout $z \in \Omega$, il vient :

$$\left| \frac{1}{h(z)} \right| \leqslant \frac{1}{a} \qquad \Longrightarrow \qquad \left| h(z) \right| \geqslant a.$$

De plus évidemment, $|h(z)| \leqslant a$ pour tout $z \in \Omega \cup \partial\Omega$, grâce au principe du maximum appliqué à h.

Mais alors ces deux inégalités inverses l'une de l'autre forcent $|h(z)|$ à être constant dans Ω, identiquement égal à $a \in \mathbb{R}_+^*$.

(c) On peut ré-appliquer le principe du maximum pour conclure directement.

Voici un autre argument qui effectue un détour. En dérivant l'identité $h(z)\overline{h}(\overline{z}) \equiv a^2$ par rapport à z, en utilisant l'annulation $\frac{\partial}{\partial z}(\overline{z}) = 0$, puisqu'une fonction antiholomorphe est indépendant de z, on obtient :

$$h'(z)\,\overline{h}(\overline{z}) \,\equiv\, 0.$$

Comme $\overline{h}$ n'est pas identiquement nulle dans Ω, cela force la fonction holomorphe $h(z)$ dans Ω à être identiquement nulle dans un sous-ouvert non vide $\omega \subset \Omega$, et donc le principe d'unicité et la connexité de Ω donnent $h'(z) \equiv 0$, donc h est constante.

(d) C'est exactement la contraposée de ce que nous venons de démontrer !

(e) Si f est non constante, d'après la Question **(d)** qui précède, f admet au moins un zéro dans $\mathbb{D}$. Nous affirmons alors que f n'admet qu'un nombre *fini* de zéros dans $\mathbb{D}$.

Sinon, si f admettait un nombre infini de zéros dans $\mathbb{D}$, disons une suite $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'éléments $\alpha_n \in \mathbb{D}$ avec $0 = f(\alpha_n)$, alors quitte à extraire une sous-suite, on pourrait supposer que $\alpha_n \longrightarrow \alpha_\infty \in \overline{\mathbb{D}}$ possède une limite dans le compact $\overline{\mathbb{D}}$.

Grâce au principe des zéros isolés, on ne pourrait pas avoir $\alpha_\infty \in \mathbb{D}$ (sinon, f serait identiquement nulle, ce qui n'est pas). Donc on aurait $\alpha_\infty \in \partial\mathbb{D}$.

Bien sûr, par continuité de f, il viendrait $f(\alpha_\infty) = 0$, puis $f\big|_{\partial\mathbb{D}} \equiv 0$, et donc on aurait $f \equiv 0$ dans $\overline{\mathbb{D}}$ à cause du principe du maximum, ce qui n'est pas.

Notons alors $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ avec $p \geqslant 1$ les zéros distincts de f, et $m_1, \dots, m_p$ leurs multiplicités. Rappelons que si α est un zéro d'une fonction holomorphe $h(z) \not\equiv 0$ définie au voisinage de α, alors on a une factorisation locale $h(z) = (z-\alpha)^m\, q(z)$ avec $m \geqslant 1$ entier et avec $q(z)$ holomorphe jamais nulle près de α.

En effectuant des factorisations locales de f en tous les zéros $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, on obtient la représentation demandée.

(f) Vérifions par le calcul que le module de $\phi_\alpha(e^{i\theta})$ vaut 1 pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\big|\phi_\alpha(e^{i\theta})\big| \,=\, \left|\frac{e^{i\theta}-\alpha}{1-\overline{\alpha}\,e^{i\theta}}\right| \,=\, \frac{|e^{i\theta}-\alpha|}{\big|e^{i\theta}\,(e^{-i\theta}-\overline{\alpha})\big|} \,=\, \frac{|e^{i\theta}-\alpha|}{|e^{-i\theta}-\overline{\alpha}|} \,=\, \frac{e^{i\theta}-\alpha}{\big|\overline{e^{i\theta}-\alpha}\big|} \,\equiv\, 1.$$

(g) Ce qui précède nous permet d'écrire :

$$h(z) \,=\, g(z) \prod_{1\leqslant i\leqslant p} \big(1-\overline{\alpha}_i\, z\big)^{m_i},$$

et donc h est holomorphe dans $\mathbb{D}$, continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. De plus, pour $|z| = 1$, on a $\big|\phi_\alpha(z)\big| \equiv 1$, et donc $|h(z)| = |f(z)|$ sur $\partial\mathbb{D}$. Ainsi, h est de module constant non nul sur le cercle unité $\partial\mathbb{D}$.

(h) D'après les Question **(a)**, **(b)**, **(c)**, **(d)**, $h(z)$ est ou bien constante, ou bien admet un zéro dans $\mathbb{D}$. Mais puisque ni g ni aucun des $\big(1-\overline{\alpha}_i z\big)$ n'admet de zéro dans $\mathbb{D}$, car $\big|\frac{1}{\overline{\alpha}_i}\big|$ est de module > 1, cette fonction h n'a aucun zéro dans $\mathbb{D}$, donc est constante, et cette constante est non nulle. En notant $\frac{1}{\lambda} \equiv h(z)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on en déduit le résultat demandé sur f en inversant l'identité suivante :

$$\frac{1}{\lambda} \,\equiv\, g(z) \prod_{1\leqslant i\leqslant p} \big(1-\overline{\alpha}_i\, z\big)^{m_i} \,=\, f(z) \prod_{1\leqslant i\leqslant p} \frac{1}{(z-\alpha_i)^{m_i}} \prod_{1\leqslant i\leqslant p} \big(1-\overline{\alpha}_i\, z\big)^{m_i}$$

(i) Grâce au travail qui précède, une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$, continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, et dont le module est constant sur le cercle unité est ou bien constante, ou bien nécessairement de la forme :

$$f(z) \equiv \lambda \prod_{1 \leqslant i \leqslant p} \left(\frac{z-\alpha_i}{1-\overline{\alpha}_i z}\right)^{m_i} \qquad\qquad (\forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}).$$

Mais comme $p \geqslant 1$, chaque dénominateur $\frac{1}{(1-\overline{\alpha}_i z)^{m_i}}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ possède un *zéro* au point $\frac{1}{\overline{\alpha}_i}$. Certes, ces points $\frac{1}{\overline{\alpha}_i}$ sont situés *hors* de $\overline{\mathbb{D}}$, puisque $|\alpha_i| < 1$, mais ils appartiennent tout de même à $\mathbb{C}$.

Par conséquent, il est nécessaire que $p = 0$, à savoir que $f(z)$ n'incorpore aucun *facteur de Blaschke* $\left(\frac{z-\alpha_i}{1-\overline{\alpha}_i z}\right)^{m_i}$, et donc en conclusion, seules les fonctions constantes $f(z) \equiv \lambda$ répondent à la question posée.

Exercice 6. (a) Une proposition vue en cours donne directement :

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{z-z_i} \qquad\qquad (z \in \mathbb{C}\backslash\{z_1,\dots,z_n\}),$$

mais on peut retrouver cette identité en partant de la représentation scindée $P(z) = a_n(z-z_1)\cdots(z-z_n)$ dont on prend la *dérivée* dite *logarithmique*, qui s'écrit de manière formelle comme suit, sans se soucier de problèmes d'existence :

$$\begin{aligned} \frac{P'(z)}{P(z)} = \big(\log P(z)\big)' &= \frac{d}{dz}\Big[\log a_n + \log\big(z-z_1\big) + \cdots + \log\big(z-z_n\big)\Big] \\ &= 0 + \frac{1}{z-z_1} + \cdots + \frac{1}{z-z_n}. \end{aligned}$$

Un calcul alternatif et rigoureusement rigoureux consisterait à prendre le temps d'écrire, grâce à la règle de Leibniz pour la différentiation d'un produit de fonctions :

$$P'(z) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_n \prod_{i' \neq i} \big(z - z_{i'}\big),$$

puis à quotienter pour obtenir la décomposition rationnelle en élément simples :

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{a_n \prod_{i' \neq i} \big(z-z_{i'}\big)}{a_n \prod_{1 \leqslant i' \leqslant n} \big(z-z_{i'}\big)} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{(z-z_i)}.$$

Ensuite, appliquons cette belle identité à $z := w_j$ égal à une racine de $P'(z)$, en supposant $w_j \neq z_1, \dots, z_n$, et en utilisant le fait que le dieu *Zéro* (dont la mythologie grecque ignorait l'existence) est tellement au *Centre du Monde* — mathématique — qu'il est égal à son propre conjugué :

$$\begin{aligned} 0 = \frac{P'(w_j)}{P(w_j)} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{w_j - z_i} = 0 = \overline{0} &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{\overline{w}_j - \overline{z}_i} \\ &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{w_j - z_i}{|w_j - z_i|^2}. \end{aligned}$$

(b) En mettant $w_j \neq z_1, \dots, z_n$ à gauche, cette identité se ré-écrit sous une forme :

$$w_j \left(\tfrac{1}{|w_j - z_1|^2} + \cdots + \tfrac{1}{|w_j - z_n|^2}\right) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \tfrac{1}{|w_j - z_i|^2}\, z_i$$

telle qu'on peut ensuite diviser, et obtenir :

$$w_j \;=\; \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\frac{1}{|w_j-z_i|^2}}{\frac{1}{|w_j-z_1|^2}+\cdots+\frac{1}{|w_j-z_n|^2}}\; z_i \;\;=:\; \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i\, z^i,$$

ce qui fait apparaître des nombres $1 \leqslant \lambda_i \leqslant n$ dont la somme est visiblement égale à 1.

Enfin, il ne fallait pas oublier le cas laissé suspendu où w_j est égal à l'un des z_i, cas où toutes ces considérations s'effondrent. Mais quand $w_j = z_i$, il est évident et trivial que w_j appartient à l'enveloppe convexe de $\{z_1, \dots, z_n\}$, puisque l'enveloppe convexe $\widehat{E} \supset E$ d'un ensemble quelconque $E \subset \mathbb{C}$ contient toujours l'ensemble (exercice mental).

13. Examen 7

Exercice 1. Dans $\mathbb{C}$, soient $n \geqslant 1$ points distincts $z_1, z_2, \dots, z_n$ et soit un cercle $C \subset \mathbb{C}$ dont le disque intérieur Δ contient tous ces z_i, pour $i = 1, \dots, n$. Soit le polynôme :

$$p(z) := \big(z - z_1\big)\,\big(z - z_2\big)\,\cdots\,\big(z - z_n\big),$$

et soit une fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ holomorphe dans un ouvert $\Omega \supset \Delta \cup C$.

(a) Montrer que :

$$P(z) := \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(w)}{p(w)}\,\frac{p(w)-p(z)}{w-z}\,dw,$$

satisfait $P(z_i) = f(z_i)$ pour $i = 1, \dots, n$.

(b) Montrer que $P(z) \in \mathbb{C}_{n-1}[z]$ est un polynôme de degré $\leqslant n-1$.

(c) On fixe un rayon $\mathrm{R} > 0$. Montrer qu'il existe un entier $\mathrm{N}(\mathrm{R}) \gg 1$ assez grand pour que, quel que soit $n \geqslant \mathrm{N}(\mathrm{R})$, le polynôme :

$$P_n(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!},$$

n'ait aucun zéro dans le disque fermé $\big\{|z| \leqslant \mathrm{R}\big\}$.

(d) Soit Ω un ouvert connexe borné non vide dans $\mathbb{C}$, et soit une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega) \cap \mathscr{C}^0\big(\Omega \cup \partial\Omega\big)$ continue jusqu'au bord de l'ouvert, qui satisfait $|f(\zeta)| = 1$ pour tout $\zeta \in \partial\Omega$. Montrer que, ou bien f possède au moins un zéro $a \in \Omega$, ou bien f est constante.

(e) On suppose maintenant Ω simplement connexe, à bord $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^1$ qui est un contour de Jordan, toujours avec $|f(\zeta)| = 1$ sur $\partial\Omega$. Ensuite, on suppose que f possède un unique pôle simple $a \in \Omega$. Montrer que toute valeur $w \in \mathbb{C}$ avec $|w| > 1$ est prise par $f(z)$ avec $z \in \Omega$, une et une seule fois.

Exercice 2. Soit une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ avec $f(0) = 1$, qui est de *type exponentiel minimal*, au sens où :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \qquad \exists\,C_\varepsilon < \infty \qquad \text{tel que} \qquad \Big(\big|f(z)\big| \leqslant C_\varepsilon\,e^{\varepsilon\,|z|} \qquad \forall\,z \in \mathbb{C}\Big).$$

Soient $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ les zéros de f, supposés en nombre infini (dénombrable), répétés avec multiplicités, ordonnés par modules $|a_n| \leqslant |a_{n+1}|$ croissants.

On suppose de plus que :

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{|a_n|} < \infty.$$

(a) Montrer que le produit infni $\prod_{n=1}^\infty \big(1 - \frac{z}{a_n}\big)$ converge absolument sur tout compact $K \subset \mathbb{C}$, vers une fonction holomorphe entière.

(b) Montrer que $z \longmapsto \prod_{n=1}^\infty \big(1 - \frac{z}{a_n}\big)$ est de type exponentiel minimal. Indication: Utiliser $1 + x \leqslant e^x$, pour $x \in \mathbb{R}_+$.

(c) L'objectif est maintenant d'établir que $f(z) \overset{?}{=} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ s'identifie à ce produit infini, sans aucun facteur supplémentaire, toujours avec $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ de type exponentiel minimal, satisfaisant $f(0) = 1$, et ayant une infnité de zéros $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Montrer qu'il existe une fonction holomorphe entière $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ telle que :

$$f(z) \,=\, e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

(d) Pour $r > 0$ fixé, on découpe :

$$f(z) \,=\, e^{g(z)} \prod_{|a_n| \leqslant 2r} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \prod_{2r < |a_n|} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

Montrer, pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = r$, la majoration :

$$\left| \frac{f(z)}{\prod_{|a_n| \leqslant 2r} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)} \right| \leqslant C_\varepsilon \, e^{4\varepsilon r}.$$

Indication: Commencer à raisonner avec $|z| = 4\,r$.

(e) Montrer qu'il existe $r(\varepsilon) \gg 1$ assez grand afin que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = r \geqslant r(\varepsilon)$, on ait :

$$\left| e^{g(z)} \right| \leqslant C_\varepsilon \, e^{5\varepsilon r}.$$

Indication: Utiliser l'inégalité $1 - x \geqslant e^{-2x}$, valable pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

(f) On note :

$$A_g(r) \,:=\, \max_{\theta \in \mathbb{R}} \mathsf{Re}\, g\big(r\, e^{i\theta}\big),$$

et on développe $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, z^n$ en série entière convergente de rayon infini. Montrer, pour tout $n \geqslant 1$, l'inégalité :

$$b_n \, r^n \,=\, \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\mathsf{Re}\, g\big(re^{i\theta}\big) - A_g(r) \Big) \, e^{-in\theta} \, d\theta.$$

(g) Établir que $g(z) \equiv 0$, puis conclure.

(h) Soit maintenant $h \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$, avec $h(0) = 1$, satisfaisant, pour certaines constantes $0 \leqslant \mathrm{A}, \mathrm{B} < \infty$ convenables :

$$\big|h(z)\big| \leqslant \mathrm{A}\, e^{\mathrm{B}\,|z|}.$$

On suppose $h(-z) = h(z)$ paire, de zéros *distincts non nuls* $\pm a_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, et on suppose que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} < \infty$. Montrer que :

$$h(z) \,=\, \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{a_n^2}\right) \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

(i) Obtenir l'identité d'Euler :

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} \,=\, \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

Exercice 3. Soit une fonction holomorphe $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ non constante. On suppose que $f(0)$ est réel, avec :

$$0 \,<\, f(0) \,<\, 1.$$

Soit l'application $T\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ définie par :

$$T(w) \,:=\, \frac{w - f(0)}{1 - f(0)\,w} \,=:\, \zeta.$$

(a) Montrer que $\big|T\big(f(z)\big)\big| < |z|$, pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(b) Calculer l'inverse $w = T^{-1}(\zeta)$, après avoir justifié que $T\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est un biholomorphisme.

(c) On prend $z \in \mathbb{D}$ de la forme $z = r\,e^{i\theta}$ de module $0 \leqslant r < 1$, et on note son image par la composée $T \circ f$:

$$T\big(f(z)\big) \,=:\, \rho\, e^{i\varphi},$$

de module $0 \leqslant \rho < 1$.

On considère le cercle $\big\{|\zeta| = \rho\big\}$, et on introduit :

$$c(\rho) \,:=\, f_0\,\frac{(1-\rho)\,(1+\rho)}{(1-f_0\rho)\,(1+f_0\,\rho)},$$

où on a abrégé $f_0 := f(0)$.

Vérifier que $0 < c(\rho) \leqslant f_0$, puis, montrer que :

$$T^{-1}\big(\rho\, e^{i\varphi}\big) - c(\rho) \,=\, \rho\,\frac{(1-f_0)\,(1+f_0)}{(1-f_0\,\rho)\,(1+f_0\,\rho)}\;\frac{e^{i\varphi}+f_0\,\rho}{1+f_0\,\rho\,e^{i\varphi}}.$$

(d) Montrer que $T^{-1}\big(\{|\zeta| = \rho\}\big)$ est un cercle, que l'on déterminera.

(e) Montrer que ce cercle a pour diamètre le segment $\big[T^{-1}(-\rho),\ T^{-1}(\rho)\big]$, et que :

$$-\,1 \,<\, T^{-1}(-\rho) \,\leqslant\, T^{-1}(\rho) \,<\, 1.$$

(f) Premier cas : on suppose que $0 \leqslant \rho \leqslant f_0$. Montrer que :

$$\frac{f_0 - \rho}{1 - f_0\,\rho} \,\leqslant\, \big|f(z)\big| \,\leqslant\, \frac{\rho + f_0}{1 + f_0\,\rho}.$$

(g) Deuxième cas : on suppose que $f_0 < \rho < 1$. Montrer que :

$$\big|f(z)\big| \,\leqslant\, \frac{\rho + f_0}{1 + f_0\,\rho}.$$

(h) Toujours avec $z = r\,e^{i\theta} \in \mathbb{D}$ et avec $\big|T\big(f(z)\big)\big| = \rho$, établir l'inégalité :

$$\frac{f_0 - |z|}{1 - f_0\,|z|} \,\leqslant\, \big|f(z)\big| \,\leqslant\, \frac{f_0 + |z|}{1 + f_0\,|z|}.$$

(i) Sans l'hypothèse $0 < f(0) < 1$, montrer que toute application holomorphe $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ satisfait la paire d'inégalités :

$$\frac{|f(0)| - |z|}{1 - |f(0)|\cdot|z|} \,\leqslant\, \big|f(z)\big| \,\leqslant\, \frac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)|\cdot|z|} \qquad\qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}).$$

Exercice 4. L'objectif est de déterminer la valeur exacte de $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ et de $\int_0^\infty \cos x^2\,dx$, avec des techniques d'Analyse Complexe.

(a) Montrer que $\infty = \int_0^\infty \big|\sin x^2\big|\,dx$. Indication: Effectuer le changement de variable $u := x^2$.

(b) Pour $\mathrm{R} > 0$ quelconque, on introduit la courbe fermée simple orientée dans le sens trigonométrique :

$$\Gamma_{\mathrm{R}} \;:=\; \big[0, \mathrm{R}\big] \,\cup\, \mathrm{arc}\,\big(\mathrm{R},\, \mathrm{R}\,e^{i\pi/4}\big) \,\cup\, \big[\mathrm{R}e^{i\pi/4},\, 0\big] \;=:\; \Gamma_{\mathrm{R},1} \,\cup\, \Gamma_{\mathrm{R},2} \,\cup\, \Gamma_{\mathrm{R},3}.$$

Dessiner Γ_{R}, en indiquant l'orientation des 3 morceaux de son bord, ainsi que son intérieur $\Gamma_{\mathrm{R},\mathrm{int}}$.

(c) Que vaut $\int_{\Gamma_{\mathrm{R}}} e^{-z^2}\,dz$?

(d) Montrer que :

$$0 \;=\; \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \mathrm{R} \int_0^{\pi/2} e^{-\mathrm{R}^2 \sin t}\,dt.$$

Indication: Utiliser la minoration $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}\,t$, valable pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

(e) En admettant la valeur de $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, établir que :

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \;=\; \int_0^\infty \cos x^2\,dx.$$

14. Corrigé de l'examen 7

Exercice 1. (a) Remplaçons $z := z_i$, utilisons $p(z_i) = 0$:

$$\begin{aligned} P(z_i) &= \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(w)}{p(w)}\,\frac{p(w)}{w-z_i}\,dw - \underline{p(z_i)}\,\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(w)}{p(w)}\,\frac{1}{w-z_i}\,dw \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(w)}{w-z_i}\,dw - 0 \\ &= f(z_i), \end{aligned}$$

et réalisons que la formule de Cauchy sur un cercle s'applique directement.

(b) Écrivons après développement :

$$\begin{aligned} p(z) &= \big(z-z_1\big)\big(z-z_2\big)\cdots\big(z-z_n\big) \\ &=: z^n + a_{n-1}\,z^{n-1} + \cdots + a_1\,z + a_0, \end{aligned}$$

avec certains coefficients a_k, dont l'expression en fonction de $z_1, \dots, z_n$ ne sera pas utile, puis, au moyen de la formule classique :

$$A^{\mathrm{N}} - B^{\mathrm{N}} = \big(A-B\big)\Big(A^{\mathrm{N}-1} + A^{\mathrm{N}-2}\,B + \cdots + A\,B^{\mathrm{N}-2} + B^{\mathrm{N}-1}\Big),$$

éliminons le dénominateur dans le quotient :

$$\begin{aligned} \frac{p(w)-p(z)}{w-z} &= \frac{w^n - z^n}{w-z} + a_{n-1}\,\frac{w^{n-1}-z^{n-1}}{w-z} + \cdots + a_2\,\frac{w^2-z^2}{w-z} + a_1\,\frac{w-z}{w-z} + a_0\,(1-1) \\ &= \big(w^{n-1} + \cdots + z^{n-1}\big) + a_{n-1}\,\big(w^{n-2} + \cdots + z^{n-2}\big) + \cdots + a_2\,\big(w+z\big) + a_1 + 0 \\ &=: z^{n-1} + A_{n-2}(w)\,z^{n-2} + \cdots + A_1(w)\,z^1 + A_0(w), \end{aligned}$$

et observons qu'il s'agit d'un polynôme en z de degré $n-1$, à coefficients $A_{n-2}(w), \dots, A_1(w), A_0(w)$ qui sont eux-mêmes des polynômes en w, donc sont holomorphes dans $\mathbb{C} \supset \Omega$.

Par linéarité de l'intégrale, l'expression considérée :

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(w)}{p(w)}\Big\{z^{n-1} + A_{n-2}\,z^{n-2} + \cdots + A_1(w)\,z^1 + A_0(w)\Big\}\,dw \\ &= z^{n-1}\,\frac{1}{2i\pi}\bigg(\int_C \frac{f(w)}{p(w)}\,dw\bigg) + \sum_{n-2\geqslant k\geqslant 0} z^k\,\frac{1}{2i\pi}\bigg(\int_C \frac{f(w)}{p(w)}\,A_k(w)\,dw\bigg), \end{aligned}$$

est effectivement un polynôme de degré $n-1$ en z.

(c) Comme nous savons que la fonction e^z n'a *aucun* zéro sur $\mathbb{C}$, l'idée est d'appliquer le Théorème de Rouché aux deux fonctions $P_n(z)$ et e^z.

Sur le cercle $C_{\mathrm{R}} = \big\{|z| = \mathrm{R}\big\}$, peut-on avoir :

$$\big|e^z - P_n(z)\big| \overset{?}{<} \big|e^z\big| \qquad\qquad (\forall\,|z| = \mathrm{R}),$$

de manière à conclure que $P_n(z)$ a autant de zéros — c'est-à-dire zéro ! aucun ! — que e^z sur $\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$? Oui, comme suit.

Premièrement, comme $-\,\mathrm{R} \leqslant \mathsf{Re}\, z \leqslant \mathrm{R}$ sur le cercle C_{R}, nous avons la *minoration :*

$$e^{-\mathrm{R}} \leqslant e^{\mathsf{Re}\, z} = \big|e^z\big|.$$

Deuxièmement, comme la série entière de e^z converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$, notamment sur $\overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$, il est clair que l'on peut choisir un entier $\mathrm{N}(\mathrm{R}) \gg 1$ assez grand pour avoir, quel que soit $n \geqslant \mathrm{N}(\mathrm{R})$, la *majoration* valable pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$:

$$\begin{aligned}\Big|e^z - P_n(z)\Big| &= \bigg|\sum_{k\geqslant n+1} \frac{z^k}{k!}\bigg| \\ &\leqslant \sum_{k\geqslant n+1} \frac{\mathrm{R}^k}{k!} \\ &\leqslant \tfrac{1}{2}\, e^{-\mathrm{R}}.\end{aligned}$$

Avec un tel choix de $\mathrm{N}(\mathrm{R})$, l'inégalité *stricte* $\overset{?}{<}$ de Rouché est bien satisfaite, ce qui donne la conclusion demandée.

(d) Si $f(z)$ n'a aucun zéro dans Ω, alors la fonction $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ est aussi holomorphe sans zéros dans Ω, elle est aussi continue dans $\Omega \cup \partial\Omega = \overline{\Omega}$, et elle satisfait aussi $|g(\zeta)| = 1$ pour tout $\zeta \in \partial\Omega$.

Grâce au principe du maximum appliqué aux deux fonctions f et g, nous obtenons :

$$|f(z)| \leqslant 1 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \Big|\tfrac{1}{f}(z)\Big| \leqslant 1 \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\, z \in \overline{\Omega})},$$

ce qui force $|f(z)| = 1$ partout dans $\overline{\Omega}$, donc $|f|$ atteint son maximum en un point de l'ouvert connexe Ω, donc f est constante à cause du principe du maximum.

(e) Avec $w \in \mathbb{C}$, $|w| > 1$ fixé, la fonction $f(z) - w$ a aussi un unique pôle simple $a \in \Omega$. Une formule du cours nous donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w}\, d\zeta = \#\, &\text{zéros de } f(z) - w \text{ dans } \Omega \\ -\, \#\, &\text{pôles de } f(z) - w \text{ dans } \Omega.\end{aligned}$$

Par ailleurs, avec un paramètre réel $0 \leqslant t \leqslant 1$, comme $|f(\zeta)| = 1 < |w|$, l'intégrale :

$$I_{f,w}(t) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{t\, f'(\zeta)}{t\, f(\zeta) - w}\, d\zeta \in \mathbb{Z},$$

est continue par rapport à $t \in [0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{Z}$ qui est discret, donc constamment égale à sa valeur, 0, en $t = 0$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}0 = I_{f,w}(0) &= I_{f,w}(1) \\ &= \text{zéros de } f(z) - w \text{ dans } \Omega - 1,\end{aligned}$$

c'est-à-dire la conclusion :

$$1 = \text{zéros de } f(z) - w \text{ dans } \Omega.$$

Exercice 2. **(a)** Ce produit infini de fonctions holomorphes est de la forme vue en cours $\prod_{n=1}^{\infty}\big(1+F_n(z)\big)$, avec $F_n(z) := -\frac{z}{a_n}$. A-t-on convergence absolue de $\sum|F_n(z)|$ sur les compacts $K \subset \mathbb{C}$?

Oui, très certainement, car avec $z \in K$, d'où $|z| \leqslant r$ pour $r \gg 1$ assez grand, on peut majorer :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big|-\frac{z}{a_n}\Big| = |z|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|} \leqslant r\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|} < \infty.$$

Un thèorème du cours garantit alors que $z \longmapsto \prod_{n=1}^{\infty}\big(1-\frac{z}{a_n}\big)$ est une fonction holomorphe entière.

(b) Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et soit $\mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1$ un entier assez grand pour que :

$$\sum_{n\geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)}\frac{1}{|a_n|} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors avec un certain polynôme $Q_\varepsilon(z)$, et avec $x := \big|\frac{z}{a_n}\big|$, nous pouvons estimer :

$$\begin{aligned}
\Big|\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z}{a_n}\Big)\Big| &= \Big|\prod_{n=1}^{\mathrm{N}(\varepsilon)-1}\Big(1-\frac{z}{a_n}\Big)\Big|\cdot\Big|\prod_{n\geqslant\mathrm{N}(\varepsilon)}\Big(1-\frac{z}{a_n}\Big)\Big| \\
&=: \big|Q_\varepsilon(z)\big|\cdot\prod_{n\geqslant\mathrm{N}(\varepsilon)}\Big|1-\frac{z}{a_n}\Big| \\
&\leqslant \big|Q_\varepsilon(z)\big|\cdot\prod_{n\geqslant\mathrm{N}(\varepsilon)}\Big|1+\frac{z}{a_n}\Big| \\
[1+x\leqslant e^x] \qquad &\leqslant \big|Q_\varepsilon(z)\big|\cdot\prod_{n\geqslant\mathrm{N}(\varepsilon)} e^{\left|\frac{z}{a_n}\right|} \\
&= \big|Q_\varepsilon(z)\big|\cdot\exp\Big\{\sum_{n\geqslant\mathrm{N}(\varepsilon)}\frac{1}{|a_n|}\Big\} \\
&\leqslant C_\varepsilon\, e^{\frac{\varepsilon}{2}|z|}\, e^{\frac{\varepsilon}{2}|z|},
\end{aligned}$$

car l'exponentielle l'emporte, en croisssance, sur tout polynôme.

(c) Le quotient méromorphe sur $\mathbb{C}$:

$$\frac{f(z)}{\prod_{n=1}^{\infty}\big(1-\frac{z}{a_n}\big)} =: f_1(z) \in \mathscr{M}(\mathbb{C}),$$

n'a que des singularités illusoires aux points $z = a_n$, puisque $f(z)$ y a aussi les mêmes zéros, donc en fait $f_1(z) \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ est *holomorphe* dans $\mathbb{C}$ tout entier, et ne s'annule jamais.

Comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe, un théorème vu en cours fournit une fonction holomorphe $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ telle que $f_1(z) = e^{g(z)}$, d'où effectivement :

$$f(z) = e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z}{a_n}\Big).$$

(d) Afin de majorer $\frac{1}{\left|1-\frac{z}{a_n}\right|}$, il s'agit de *minorer* $\left|1-\frac{z}{a_n}\right|$. En supposant comme cela a été indiqué $|z| = 4\,r$ sur le cercle de rayon $4\,r$ — et non pas r —, il vient :

$$\left|1-\frac{z}{a_n}\right| \geqslant \left|\frac{z}{a_n}\right| - 1 \geqslant \frac{4\,r}{2\,r} - 1 = 1,$$

et donc, toujours pour $|z| = 4\,r$:

$$\begin{aligned}\frac{|f(z)|}{\left|\prod_{|a_n|\leqslant 2r}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\right|} &\leqslant \frac{|f(z)|}{1} \\ &\leqslant C_\varepsilon\, e^{4\varepsilon r}.\end{aligned}$$

Ensuite, comme la fonction considérée :

$$z \longmapsto \frac{f(z)}{\prod_{|a_n|\leqslant 2r}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)},$$

est holomorphe dans $\mathbb{C}$, puisqu'elle n'a que des singularités illusoires aux points a_n avec $|a_n| \leqslant 2r$, le principe du maximum implique que cette inégalité est vraie pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leqslant 4\,r$, et donc pour tout z avec $|z| = r$, comme cela était demandé.

(e) Grâce à la Question **(d)**, nous avons obtenu :

$$\left|e^{g(z)}\right| \cdot \left|\prod_{2r<|a_n|}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\right| \leqslant C_\varepsilon\, e^{4\varepsilon r}.$$

Il s'agit, maintenant encore, de minorer ce deuxième produit (infini).

Puisque par hypothèse on a $\sum \frac{1}{|a_n|} < \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ comme précédemment, il existe $r(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$\sum_{2r(\varepsilon)<|a_n|} \frac{1}{|a_n|} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors pour tout $r \geqslant r(\varepsilon)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = r$, en appliquant la minoration indiquée $1-x \geqslant e^{-2x}$ aux nombres réels $x := \left|\frac{z}{a_n}\right|$ qui vérifient bien $\left|\frac{z}{a_n}\right| = \frac{r}{|a_n|} < \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire en appliquant la minoration :

$$1 - \left|\tfrac{z}{a_n}\right| \geqslant e^{-2\left|\frac{z}{a_n}\right|},$$

il vient après inversion :

$$\frac{1}{1-\left|\frac{z}{a_n}\right|} \leqslant e^{2\left|\frac{z}{a_n}\right|},$$

ce qui nous permet d'atteindre la majoration demandée :

$$\begin{aligned}
\left|e^{g(z)}\right| &\leqslant C_\varepsilon\, e^{4\varepsilon r}\, \frac{1}{\prod_{2r<|a_n|}\left|1-\left|\frac{z}{a_n}\right|\right|} \\
&\leqslant C_\varepsilon\, e^{4\varepsilon r} \prod_{2r<|a_n|} e^{2\left|\frac{z}{a_n}\right|} \\
&= C_\varepsilon\, e^{4\varepsilon r} \exp\left\{2\Big(\sum_{2r<|a_n|}\frac{1}{|a_n|}\Big)\,|z|\right\} \\
&\leqslant C_\varepsilon\, e^{4\varepsilon r}\, e^{2\,\frac{\varepsilon}{2}\,r} \\
&= C_\varepsilon\, e^{5\varepsilon r}.
\end{aligned}$$

(f) Comme la série entière $\sum b_n\, z^n$ converge uniformément sur n'importe quel compact $K \subset \mathbb{C}$, sommation et intégration sont interchangeables. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, g\big(r\,e^{i\theta}\big)\, e^{-in\theta}\, d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(g\big(r\,e^{i\theta}\big)+\overline{g\big(r\,e^{i\theta}\big)}\Big)\, e^{-in\theta}\, d\theta \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b_k\, r^k\, e^{i(k-n)\theta}\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b_k\, r^k\, e^{-i(k+n)\theta}\, d\theta\right) \\
\Big[\int_0^{2\pi} e^{i\ell\theta}\, d\theta = 0 \text{ pour } \ell\in\mathbb{Z}^*\Big] \qquad &= b_n\, r^n.
\end{aligned}$$

Enfin, comme $\int_0^{2\pi} \text{constante}\, e^{-in\theta}\, d\theta = 0$, nous pouvons insérer un terme supplémentaire et obtenir effectivement :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\mathrm{Re}\, g\big(re^{i\theta}\big) - A_g(r)\Big)\, e^{-in\theta}\, d\theta = b_n\, r^n.$$

(g) Tout d'abord, d'après la Question **(a)**, pour tout $|z| = r \geqslant r(\varepsilon)$, nous avons :

$$\mathrm{Re}\, g\big(r\,e^{i\theta}\big) \leqslant \log C_\varepsilon + 5\varepsilon\, r.$$

Ensuite, puisque :

$$A_g(r) = \max_{|z|=r} \mathrm{Re}\, g(z),$$

nous connaissons la valeur absolue de :

$$\Big|\mathrm{Re}\, g\big(r\,e^{i\theta}\big) - A_g(r)\Big| = A_g(r) - \mathrm{Re}\, g\big(r\,e^{i\theta}\big) \qquad\qquad (\forall\,\theta\in\mathbb{R}),$$

et donc en appliquant l'inégalité triangulaire intégrale depuis l'identité obtenue à la Question **(f)**, nous pouvons estimer :

$$\begin{aligned}
|b_n|\, r^n &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Big(A_g(r) - \mathrm{Re}\, g\big(r\,e^{i\theta}\big)\Big)\, d\theta \\
&= 2\,A_g(r) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k\geqslant 1} b_k\, r^r\, e^{ik\theta} + \sum_{k\geqslant 1}\overline{b_k}\, r^k\, e^{-ik\theta}\right) d\theta \\
&= 2\,A_g(r) \\
&\leqslant 2\log C_\varepsilon + 10\,\varepsilon\, r.
\end{aligned}$$

Alors pour tout $n \geqslant 2$, l'inégalité :

$$|b_n| \leqslant \frac{2 \log C_\varepsilon + 10\, \varepsilon\, r}{r^n} \xrightarrow[]{r \to \infty} 0,$$

force l'annulation $b_n = 0$. Ainsi, $g(z) = b_1\, z$ est un polynôme de degré 1, mais à nouveau :

$$|b_1| \leqslant \frac{2 \log C_\varepsilon}{r} + 10\, \varepsilon \xrightarrow[]{r \to \infty} 10\, \varepsilon,$$

force $b_1 = 0$ car $\varepsilon > 0$ était arbitrairement petit.

En conclusion, $g(z) \equiv 0$, et nous avons bien démontré que :

$$f(z) = e^0 \prod_{n \geqslant 1} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big),$$

est un produit simple sans facteur exponentiel.

(h) Soit le développement en série entière $h(z) = 1 + \sum_{k=1}^\infty c_k\, z^k$. L'hypothèse $h(-z) \equiv h(z)$ force l'annulation $c_{2\ell+1} = 0$ des coefficients d'indices impairs. Donc nous avons $h(z) = h_1(z^2)$ avec :

$$h_1(z) := 1 + \sum_{\ell=1}^\infty c_{2\ell}\, z^{2\ell}.$$

Les zéros de $h_1(z)$ sont les a_n^2. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} \big|h_1(z)\big| &\leqslant \mathrm{A}\, e^{\mathrm{B}\, |z|^{1/2}} \\ &\leqslant C_\varepsilon\, e^{\varepsilon |z|}. \end{aligned}$$

La Question **(g)** précédente s'applique :

$$h_1(z) = \prod_{n=1}^\infty \Big(1 - \frac{z}{a_n^2}\Big),$$

d'où la conclusion :

$$h(z) = \prod_{n=1}^\infty \Big(1 - \frac{z^2}{a_n^2}\Big).$$

(i) La fonction $h(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z} = h_1(z^2)$ est paire, a pour valeur $h(0) = 1$ (singularité illusoire) à l'origine, est holomorphe entière, a pour zéros $\big\{ \pm n \colon n \in \mathbb{N}^* \big\}$, et satisfait l'estimation :

$$\begin{aligned} |h(z)| &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i\pi z t}}{i\pi z} \right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_{-1}^{1} e^{i\pi z t}\, dt \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{\pi |z|}\, dt \\ &= e^{\pi |z|}, \end{aligned}$$

exponentielle d'ordre 1, donc la Question **(h)** s'applique, et nous offre une démonstration alternative (par rapport à celle du cours) de la magnifique formule d'Euler :

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

Exercice 3. (a) Comme il est visible que $T \circ f(0) = T\big(f(0)\big) = 0$, et comme $T \circ f \colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est holomorphe, le Lemme de Schwarz s'applique, et donne $\big|T \circ f(z)\big| \leqslant |z|$, pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(b) D'après le cours, un biholomorphisme général $\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est de la forme :

$$w \longmapsto e^{i\theta}\, \frac{\alpha - w}{1 - \overline{\alpha}\, w},$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{D}$ sont des constantes quelconques. Ici, avec $\theta := \pi$ et $\alpha := f(0) = \overline{\alpha}$, on retrouve bien $T(w)$.

Ensuite, pour trouver l'expression de l'inverse $T^{-1}(\bullet)$, résolvons w en partant de :

$$\begin{aligned}
\frac{w - f(0)}{1 - f(0)\, w} = \zeta \qquad &\Longleftrightarrow \qquad w - f(0) = \zeta - f(0)\, w\, \zeta \\
&\Longleftrightarrow \qquad -\zeta - f(0) = -w\,\big(1 + f(0)\,\zeta\big) \\
&\Longleftrightarrow \qquad \frac{\zeta + f(0)}{1 + f(0)\,\zeta} = w,
\end{aligned}$$

donc nous trouvons :

$$T^{-1}(\zeta) = \frac{\zeta + f(0)}{1 + f(0)\,\zeta}.$$

(c) Il est visible que $0 < c(\rho)$, car $0 \leqslant \rho < 1$ et $0 < f_0 < 1$.

Ensuite, comme $0 < f_0 < 1$, pour tout $0 \leqslant \rho < 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\rho^2 \geqslant f_0^2\, \rho^2 \qquad &\Longrightarrow \qquad 1 - \rho^2 \leqslant 1 - f_0^2\, \rho^2 \\
&\Longrightarrow \qquad (1-\rho)\,(1+\rho) \leqslant \big(1 - f_0\,\rho\big)\,\big(1 + f_0\,\rho\big) \\
&\Longrightarrow \qquad \frac{(1-\rho)\,(1+\rho)}{(1 - f_0\rho)\,(1 + f_0\rho)} \leqslant 1 \\
&\Longrightarrow \qquad f_0\, \frac{(1-\rho)\,(1+\rho)}{(1 - f_0\rho)\,(1 + f_0\rho)} \leqslant f_0 < 1.
\end{aligned}$$

Après avoir vérifié cela, calculons :

$$
\begin{aligned}
T^{-1}\big(\rho\, e^{i\varphi}\big) - c(\rho) &= \frac{\rho\, e^{i\varphi} + f_0}{1 + f_0\, \rho\, e^{i\varphi}} - f_0\, \frac{(1-\rho)\,(1+\rho)}{(1-f_0\rho)\,(1+f_0\rho)} \\
&= \frac{\big(\rho\, e^{i\varphi} + f_0\big)\,\big(1 - f_0^2\,\rho^2\big) - f_0\,\big(1-\rho^2\big)\,\big(1 + f_0\,\rho\, e^{i\varphi}\big)}{(1-f_0\rho)\,(1+f_0\rho)\,(1+f_0\rho e^{i\varphi})} \\
&= \frac{\rho\, e^{i\varphi} - \underline{f_0^2\,\rho^3\, e^{i\varphi}}_{\circ\circ} + \underline{f_0}_{\circ} - f_0^3\,\rho^2 - \underline{f_0}_{\circ} - f_0^2\,\rho\, e^{i\varphi} + f_0\rho^2 + \underline{f_0\,\rho^3\, e^{i\varphi}}_{\circ\circ}}{(1-f_0\rho)\,(1+f_0\rho)\,(1+f_0\rho e^{i\varphi})} \\
&= \frac{\rho\,\big[e^{i\varphi} - f_0^3\,\rho - f_0^2\, e^{i\varphi} + f_0\,\rho\big]}{(1-f_0\rho)\,(1+f_0\rho)\,(1+f_0\rho e^{i\varphi})} \\
&= \rho\,\frac{(1-f_0^2)}{(1-f_0^2\rho^2)}\,\frac{e^{i\varphi} + f_0\,\rho}{1 + f_0\rho e^{i\varphi}} \qquad\qquad \text{OUI.}
\end{aligned}
$$

(d) Grâce aux calculs qui précèdent, nous allons constater que l'image inverse $T^{-1}\big(\{|\zeta| = \rho\}\big)$ est le cercle, contenu dans $\{|w| < 1\}$, de centre $c(\rho)$, et de rayon $\rho\,\frac{1-f_0^2}{1-f_0^2\rho^2}$.

En effet, nous savons que pour $\alpha \in \mathbb{D}$ fixé, le quotient $\frac{\alpha - e^{i\theta}}{1-\overline{\alpha}\, e^{i\theta}}$ est constamment de module 1 pour $e^{i\theta}$ sur le cercle unité, et ici, de manière similaire, nous constatons que :

$$
\left|\frac{e^{i\varphi} + f_0\,\rho}{1 + f_0\,\rho\, e^{i\varphi}}\right| = \left|e^{i\varphi}\,\frac{1 + f_0\,\rho\, e^{-i\varphi}}{1 + f_0\,\rho\, e^{i\varphi}}\right| = 1 \cdot \frac{|\overline{\beta}|}{|\beta|} = 1,
$$

avec $\beta \neq 0$, puisque $\big|f_0\,\rho\, e^{i\varphi}\big| = f_0\,\rho < 1$.

De plus, l'application :

$$
e^{i\varphi} \quad\longmapsto\quad \frac{e^{i\varphi} + f_0\,\rho}{1 + f_0\,\rho\, e^{i\varphi}},
$$

est *bijective* du cercle unité sur lui-même, comme c'est le cas de $e^{i\theta} \longmapsto \frac{\alpha - e^{i\theta}}{1-\overline{\alpha}\, e^{i\theta}}$.

Par conséquent, quel que soit $\varphi \in \mathbb{R}$, on a :

$$
\begin{aligned}
\Big|T^{-1}\big(\rho\, e^{i\varphi}\big) - c(\rho)\Big| &= \rho\,\frac{1 - f_0^2}{1 - f_0^2\,\rho^2}\,\left|\frac{e^{i\varphi} + f_0\,\rho}{1 + f_0\,\rho\, e^{i\varphi}}\right| \\
&= \rho\,\frac{1 - f_0^2}{1 - f_0^2\,\rho^2}\, 1,
\end{aligned}
$$

donc $T^{-1}\big(\{|\zeta| = \rho\}\big)$ est le cercle :

$$
\Big\{w \in \mathbb{C}\colon\ \big|w - f_0\,\tfrac{1-\rho^2}{1-f_0^2\rho^2}\big| = \rho\,\tfrac{1-f_0^2}{1-f_0^2\rho^2}\Big\}.
$$

(e) Vérifions l'inégalité centrale 2 :

$$
\frac{-\rho + f_0}{1 - f_0\,\rho} \overset{?}{\leqslant} \frac{\rho + f_0}{1 + f_0\,\rho},
$$

c'est-à-dire :

$$
-\rho + \underline{f_0}_{\circ} - \underline{\rho^2\, f_0}_{\circ\circ} + \rho\, f_0^2 \overset{?}{\leqslant} \rho + \underline{f_0}_{\circ} - \underline{\rho^2\, f_0}_{\circ\circ} - \rho\, f_0^2,
$$

qui équivaut à l'inégalité effectivement satisfaite :

$$
2\,\rho\, f_0^2 \overset{\text{OUI}}{\leqslant} 2\,\rho.
$$

Les deux inégalités 1 et 3 se vérifient de manière similaire.

(f) Nous venons de comprendre que $T^{-1}\big(\{|\zeta| = \rho\}\big)$ est le cercle de centre $c(\rho)$ et de diamètre $\big[T^{-1}(-\rho),\ T^{-1}(\rho)\big] \subset \mathbb{R}_+$, contenu dans l'axe réel positif.

Par construction, le point $f(z)$ appartient à ce cercle, puisque $T\big(f(z)\big)$ appartient au cercle $\big\{|\zeta| = \rho\big\}$.

Or une figure élémentaire montre que ce cercle est forcément contenu dans l'anneau centré en 0 dont le cercle-bord intérieur intersecte $\mathbb{R}_+$ en le point $T^{-1}(-\rho)$, et dont le cercle-bord extérieur intersecte $\mathbb{R}_+$ en le point $T^{-1}(\rho)$. Par conséquent :

$$T^{-1}(-\rho) \leqslant \big|f(z)\big| \leqslant T^{-1}(\rho),$$

ce qui est exactement l'inégalité demandée.

(g) Cette fois-ci :

$$T^{-1}(-\rho) = -\frac{\rho - f_0}{1 - f_0\,\rho} < 0,$$

est négatif, tandis que $T^{-1}(\rho)$ reste toujours positif. En valeur absolue, a-t-on :

$$\big|T^{-1}(\rho)\big| \overset{?}{\leqslant} T^{-1}(\rho),$$

c'est-à-dire, est-il vrai que :

$$\frac{\rho - f_0}{1 - f_0\,\rho} \overset{?}{\leqslant} \frac{\rho + f_0}{1 + f_0\,\rho},$$

i.e. :

$$\begin{aligned}
\underline{\rho}_{\circ} - f_0 + f_0\,\rho^2 - \underline{f_0^2\,\rho}_{\circ\circ} &\overset{?}{\leqslant} \underline{\rho}_{\circ} + f_0 - f_0\,\rho^2 - \underline{f_0^2\,\rho}_{\circ\circ} \\
0 &\overset{?}{\leqslant} 2\,f_0 - 2\,f_0\,\rho^2 \\
0 &\underset{\text{OUI}}{\leqslant} 2\,f_0\,\big(1 - \rho^2\big).
\end{aligned}$$

Une figure élémentaire montre alors que $f(z)$ est situé sur le cercle centré en $c(\rho)$ et de rayon $\rho\,\frac{1-f_0^2}{1-f_0^2\rho^2}$, lui-même contenu dans le disque $\big\{|w| \leqslant T^{-1}(\rho)\big\}$, ce qui donne l'inégalité demandée :

$$\big|f(z)\big| \leqslant T^{-1}(\rho) = \frac{\rho + f_0}{1 + f_0\,\rho}.$$

(h) Commençons par observer que dans les deux cas qui précèdent, nous avons obtenu la paire d'inégalités :

$$\frac{f_0 - \rho}{1 + f_0\,\rho} \leqslant \big|f(z)\big| \leqslant \frac{f_0 + \rho}{1 + f_0\,\rho},$$

puisque, dans le Cas 2, le membre de gauche est $\leqslant 0$, de toute façon.

Ensuite, observons que les deux fonctions :

$$\begin{aligned}
[0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\
\rho &\longmapsto \frac{f_0 - \rho}{1 - f_0\,\rho},
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
[0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\
\rho &\longmapsto \frac{f_0 + \rho}{1 + f_0\,\rho},
\end{aligned}$$

sont, respectivement, décroissante et croissante, parce que leurs dérivées valent :

$$\frac{-1 + f_0^2}{(1 - f_0\,\rho)^2} < 0, \qquad\qquad \frac{1 - f_0^2}{(1 + f_0\,\rho)^2} > 0.$$

Et comme nous avons vu grâce au Lemme de Schwarz que :

$$\rho = \big|T\big(f(z)\big)\big| \leqslant |z|,$$

nous obtenons bien l'inégalité demandée :

$$\frac{f_0 - |z|}{1 - f_0\,|z|} \leqslant \frac{f_0 - \rho}{1 - f_0\,\rho} \leqslant \big|f(z)\big| \leqslant \frac{f_0 + \rho}{1 + f_0\,\rho} \leqslant \frac{f_0 + |z|}{1 + f_0\,|z|}.$$

(i) Si $f(0) = 0$, cela est le lemme de Schwarz :

$$-\,|z| \overset{\text{Trivial}}{\leqslant} \big|f(z)\big| \overset{\text{Schwarz}}{\leqslant} |z|.$$

Supposons donc que $f(0) \neq 0$. En remplaçant $f(z)$ par $e^{i\psi}\,f(z) =: f_1(z)$ avec l'argument ψ opposé à celui de $f(0)$ de manière à garantir que $f_1(0)$ est réel avec $0 < f_1(0) < 1$, nous pouvons appliquer à $f_1(z)$ les inégalités obtenues à l'instant dans la Question **(h)** :

$$\frac{f_1(0) - |z|}{1 - f_1(0)\,|z|} \leqslant \big|f(z)\big| \leqslant \frac{f_1(0) + |z|}{1 + f_1(0)\,|z|},$$

et constater que cela *est* la paire demandée d'inégalités, puisque $f_1(0) = |f(0)|$.

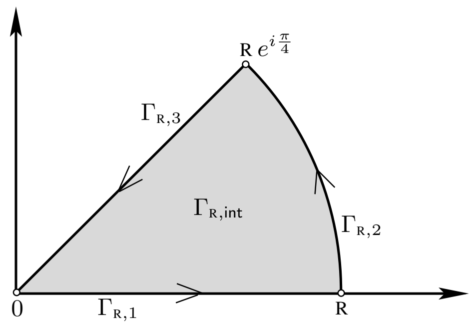
Exercice 4. (a) Pour $x \in \,]0,\infty[$, en effectuant le changement de variable indiqué $x =: \sqrt{u}$, d'où $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$, et en découpant de manière appropriée l'intervalle $]0,\infty[$, nous pouvons calculer et minorer l'intégrale en question par une quantité divergente :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \big|\sin x^2\big|\,dx &= \int_0^\infty \big|\sin u\big|\,\frac{du}{2\sqrt{u}} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \big|\sin u\big|\,\frac{du}{2\sqrt{u}} \\
&\geqslant \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \underbrace{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \big|\sin u\big|\,du}_{\int_0^\pi \sin u\,du \,=\, 2} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $x \longmapsto \big|\sin x^2\big|$ n'est *pas* Lebesgue-intégrable sur $]0,\infty[$.

Nous allons néanmoins démontrer que l'intégrale sans valeur absolue $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ existe au sens des intégrales généralisées de Cauchy ou de Riemann, à savoir que $\lim\limits_{R\to\infty} \int_0^R \sin x^2\,dx$ existe.

(b) Voici une représentation graphique complète et soignée :



(c) La fonction exponentielle étant holomorphe dans $\mathbb{C}$, il est clair que $z \longmapsto e^{-z^2}$ est holomorphe entière, définie dans $\mathbb{C}$ tout entier. Comme $\mathbb{C}$ est convexe, l'un des tous premiers théorèmes de Cauchy nous donne immédiatement :

$$0 = \int_{\Gamma_{\mathrm{R}}} e^{-z^2}\, dz.$$

(d) Grâce à la majoration suggérée :

$$-\sin t \leqslant -\tfrac{2}{\pi}\, t \qquad\qquad (t \in [0, \pi/2]),$$

nous pouvons estimer et conclure :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \mathrm{R} \int_0^{\pi/2} e^{-\mathrm{R}^2 \sin t}\, dt &\leqslant \mathrm{R} \int_0^{\pi/2} e^{-\mathrm{R}^2 \frac{2}{\pi} t}\, dt \\ &= \mathrm{R} \left[\frac{e^{-\mathrm{R}^2 \frac{2}{\pi} t}}{-\mathrm{R}^2 \frac{2}{\pi}} \right]_0^{\pi/2} \\ &= -\frac{\pi}{2\,\mathrm{R}} \left[e^{-\mathrm{R}^2 \frac{2}{\pi} t} \right]_0^{\pi/2} \\ &= -\frac{\pi}{2\,\mathrm{R}} \Big(e^{-\mathrm{R}^2} - 1 \Big) \xrightarrow[]{\ \mathrm{R} \to \infty\ } 0. \end{aligned}$$

(e) Ainsi :

$$0 = \int_{\Gamma_{\mathrm{R},1}} e^{-z^2}\, dz + \int_{\Gamma_{\mathrm{R},2}} e^{-z^2}\, dz + \int_{\Gamma_{\mathrm{R},3}} e^{-z^2}\, dz.$$

Admettons donc, pour la première intégrale, que :

$$\int_0^{\mathrm{R}} e^{-x^2}\, dx \xrightarrow[]{\ \mathrm{R} \to \infty\ } \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ensuite, regardons la deuxième intégrale, en paramétrant l'arc de cercle $z = \mathrm{R}\, e^{it}$ avec $0 \leqslant t \leqslant \pi/4$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\mathrm{R},2}} e^{-z^2}\, dz &= \int_0^{\pi/4} e^{-(\mathrm{R}\, e^{it})^2}\; i\,\mathrm{R}\, e^{it}\, dt \\ &= i\,\mathrm{R} \int_0^{\pi/4} e^{-\mathrm{R}^2 e^{2it}}\; e^{it}\, dt \\ &= i\,\mathrm{R} \int_0^{\pi/4} e^{-\mathrm{R}^2 \cos 2t} \cdot e^{i\,(t - \mathrm{R}^2 \sin 2t)}\, dt, \end{aligned}$$

et majorons :

$$
\begin{aligned}
\bigg|\int_{\Gamma_{\mathrm{R},2}} e^{-z^2}\,dz\bigg| &\leqslant \mathrm{R}\int_0^{\pi/4} e^{-\mathrm{R}^2\cos 2t}\cdot 1\,dt \\
{\scriptstyle [u\,:=\,2\,t]} \qquad &= \frac{\mathrm{R}}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-\mathrm{R}^2\cos u}\,du \\
{\scriptstyle [v\,:=\,\pi/2-u]} \qquad &= \frac{\mathrm{R}}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-\mathrm{R}^2\sin v}\,dv \\
{\scriptstyle [\text{Question } (\mathbf{d})]} \qquad &\xrightarrow[]{\mathrm{R}\to\infty} 0.
\end{aligned}
$$

Enfin, sur le dernier segment orienté négativement et paramétré par $z = e^{i\pi/4}\,t$:

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{\mathrm{R},3}} e^{-z^2}\,dz &= -\int_0^{\mathrm{R}} e^{-(t\,e^{i\pi/4})^2}\; e^{i\pi/4}\,dt \\
&= -\int_0^{\mathrm{R}} e^{-t^2\,e^{i\pi/2}}\,\Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}+\tfrac{i}{\sqrt{2}}\Big)\,dt \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\mathrm{R}} e^{-it^2}\,\big(1+i\big)\,dt \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\mathrm{R}} \Big(\cos t^2 - i\sin t^2\Big)\,dt - \frac{i}{\sqrt{2}}\int_0^{\mathrm{R}} \Big(\cos t^2 - i\sin t^2\Big)\,dt.
\end{aligned}
$$

En revenant à l'identité $0 = \int_{\Gamma_{\mathrm{R},1}} + \int_{\Gamma_{\mathrm{R},2}} + \int_{\Gamma_{\mathrm{R},3}}$ donnée par le théorème des résidus, et en faisant $\mathrm{R}\longrightarrow\infty$, nous obtenons :

$$
0 = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\infty}\Big(\cos t^2 - i\sin t^2\Big)\,dt - \frac{i}{\sqrt{2}}\int_0^{\infty}\Big(\cos t^2 - i\sin t^2\Big)\,dt,
$$

puis en prenant les parties réelle et imaginaire :

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\infty}\Big(\cos t^2 + \sin t^2\Big)\,dt, \\
0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\infty}\Big(\sin t^2 - \cos t^2\Big)\,dt,
\end{aligned}
$$

ce qui conclut :

$$
\int_0^{\infty}\cos t^2\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = \int_0^{\infty}\sin t^2\,dt.
$$

15. Examen 8

Exercice 1. On définit la branche (non principale) de la fonction logarithme par :

$$\log r\, e^{i\theta} \;=\; \log r + i\,\theta,$$

lorsque $r > 0$ et $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Pour $0 < r < 1 < R$, soient γ_r et γ_R les deux demi-cercles fermés de rayons r et R contenus dans le demi-plan supérieur fermé $\big\{\mathrm{Im}\, z \geqslant 0\big\}$, et orientés dans le sens trigonométrique positif.

(a) Élaborer une figure complète et soignée incorporant les éléments suivants :

- $-R$, -1, $-r$, 0, r, 1, R, ainsi que les quatre courbes orientées $[-R, -r]$, γ_r, $[r, R]$, γ_R ;
- i ;
- l'axe de coupure $\big\{i\,y \colon y \in \mathbb{R}_-\big\}$.

(b) Montrer que :

$$\int_r^R \frac{(\log x)^2}{x^2+1}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{(\log z)^2}{z^2+1}\,dz + \int_{-R}^{-r} \frac{\big(\log|x| + i\pi\big)^2}{x^2+1}\,dx - \int_{\gamma_r} \frac{(\log z)^2}{z^2+1}\,dz \;=\; -\frac{\pi^3}{4}.$$

(c) Montrer que :

$$0 \;=\; \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}\,dx.$$

(d) Montrer que :

$$0 \;=\; \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{(\log z)^2}{z^2+1}\,dz.$$

(e) Établir la formule :

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+1}\,dx \;=\; \frac{\pi^3}{8}.$$

Exercice 2. On pose $E_0(z) := 1 - z$, et pour $p \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, on pose :

$$E_p(z) \;:=\; (1-z)\, e^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}},$$

et on abrège :

$$L_p(z) \;:=\; z + \tfrac{z^2}{2} + \cdots + \tfrac{z^p}{p}.$$

(a) Montrer que :

$$-\,E_p'(z) \;=\; z^p\, e^{L_p(z)} \;=\; \sum_{k \geqslant p} a_k\, z^k,$$

avec des coefficients $a_k \geqslant 0$ tous positifs.

(b) Montrer que :

$$\frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, z^k,$$

définit une fonction holomorphe entière, *i.e.* un élément de $\mathscr{O}(\mathbb{C})$, avec des coefficients $b_k \geqslant 0$ tous positifs.

(c) Montrer que :

$$|z| \leqslant 1 \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad \left|\frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}}\right| \leqslant 1.$$

(d) Soit une suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, de points $z_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ pas nécessairement distincts entre eux, avec $|z_n| \longrightarrow \infty$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. On abrège :

$$r_n := |z_n| > 0.$$

Montrer que, pour tout rayon $r \geqslant 0$ fixé, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^n < \infty.$$

(e) On suppose dorénavant donnée une suite $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'entiers $p_n \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $r \geqslant 0$ fixé, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} < \infty.$$

Montrer que le produit infini :

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\Big(\frac{z}{z_n}\Big),$$

converge normalement sur les compacts de $\mathbb{C}$, et définit une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier.

(f) Maintenant, on suppose que les $z_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ sont *mutuellement distincts :*

$$z_{n_1} \neq z_{n_2} \qquad\qquad \text{pour} \qquad\qquad n_1 \neq n_2.$$

Montrer qu'il existe une fonction holomorphe entière $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ satisfaisant :

- $\big\{w \in \mathbb{C}\colon\; g(w) = 0\big\} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$;
- $0 \neq g'(z_m)$ pour tout $m \geqslant 1$.

(g) On pose :

$$f_n(z) := \frac{g(z)}{(z - z_n)\, g'(z)},$$
$$M_n := \max_{|z| \leqslant \frac{1}{2}|z_n|} \big|f_n(z)\big|.$$

Établir l'existence de constantes appropriées $c_n \in \mathbb{C}$ telles que :

$$h(z) := \sum_{n=1}^{\infty} w_n\, f_n(z)\, e^{c_n(z - z_n)},$$

constitue une fonction holomorphe entière $h \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ résolvant le *problème d'interpolation :*

$$h(z_m) = w_m \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\, m \geqslant 1)}.$$

Exercice 3. Dans un plan $\mathbb{C} \ni w$, soit la bande B, et dans un plan $\mathbb{C} \ni s$, soit le demi-plan droit, définis par :

$$\begin{aligned} B &:= \big\{w \in \mathbb{C}\colon \ \ -1 < \operatorname{Re} w < 1\big\}, \\ H &:= \big\{s \in \mathbb{C}\colon \ \operatorname{Re} s > 0\big\}. \end{aligned}$$

(a) Montrer que l'application :

$$s := \varphi(w) := e^{i\frac{\pi}{2}w},$$

constitue un biholomorphisme $B \xrightarrow{\sim} H$.

(b) Soit un disque unité :

$$\Delta := \big\{\zeta \in \mathbb{C}\colon \ |\zeta| < 1\big\}.$$

Montrer que l'application :

$$\zeta := \psi(s) := \frac{s-1}{i(s+1)},$$

constitue un biholomorphisme $H \xrightarrow{\sim} \Delta$.

(c) Montrer que l'application :

$$\zeta := \tan \tfrac{\pi}{4}\, w,$$

constitue un biholomorphisme $B \xrightarrow{\sim} \Delta$.

(d) On se donne maintenant une application holomorphe $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow B$ avec $f(0) = 0$, où $\mathbb{D} := \{|z| < 1\}$ est un disque unité.

Soit $g := \psi \circ \varphi \circ f$. Dresser une figure soignée incorporant les éléments suivants :

- $\mathbb{D}$, $0 \in \mathbb{D}$, un élément $z \in \mathbb{D}$, l'application f ;
- B, $0 \in B$, un élément $w \in B$, l'application φ, les points -1 et 1 ;
- H, $1 \in H$, un élément $s \in H$, l'application ψ ;
- Δ, $0 \in \Delta$, un élément $\zeta \in \Delta$, l'application g.

(e) Montrer que pour tout rayon $0 \leqslant r < 1$, on a :

$$g\big(\{|z| \leqslant r\}\big) \ \subset \ \{|\zeta| \leqslant r\}.$$

(f) Montrer que pour tout rayon $0 < r < 1$, l'image inverse :

$$\psi^{-1}\big(\{|\zeta| = r\}\big) \ = \ C_{\frac{2r}{1-r^2}}\big(\tfrac{1+r^2}{1-r^2}\big),$$

est un *cercle* dans le plan des s :

- de centre $\frac{1+r^2}{1-r^2}$;
- de rayon $\frac{2\,r}{1-r^2}$;
- de diamètre le segment $\big[\frac{1-r}{1+r}, \frac{1+r}{1-r}\big]$, contenu dans l'axe réel.

Indication: On pourra poser $s = \sigma + i\,t$.

(g) Vérifier que $\psi^{-1}\big(\{|\zeta| \leqslant r\}\big)$ est le disque $\overline{\mathbb{D}}_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\big)$ dans le plan $\mathbb{C}_s$, contenu dans H.

(h) Redessiner la figure de la Question **(d)**, en y ajoutant le cercle $\{|z| = r\}$, avec $f(C_r)$, avec $\varphi\big(f(C_r)\big)$, avec $\psi\big(\varphi\big(f(C_r)\big)\big)$, avec le cercle $C_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\big)$, et avec $\big\{|\zeta| = r\big\}$.

(i) Pour tout $s \in \overline{\mathbb{D}}_{\frac{2r}{1-r^2}}\big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\big)$, montrer que :

$$\big|\mathrm{Im}\,\varphi^{-1}(s)\big| \leqslant \tfrac{2}{\pi}\log\frac{1+r}{1-r}.$$

(j) Montrer que pour tout $|z|<1$, toujours avec $f\colon \mathbb{D}\longrightarrow B$ satisfaisant $f(0)=0$, on a :

$$\big|\mathrm{Im}\,f(z)\big| \leqslant \tfrac{2}{\pi}\log\tfrac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Indication: Observer que $\varphi^{-1}(s) = -\,i\frac{2}{\pi}\big(\log|s| + i\arg s\big)$, pour $s\in H$ avec $|\arg s| < \frac{\pi}{2}$.

(k) Montrer que pour tout $|z|<1$, toujours avec $f\colon \mathbb{D}\longrightarrow B$ holomorphe satisfaisant $f(0)=0$, on a :

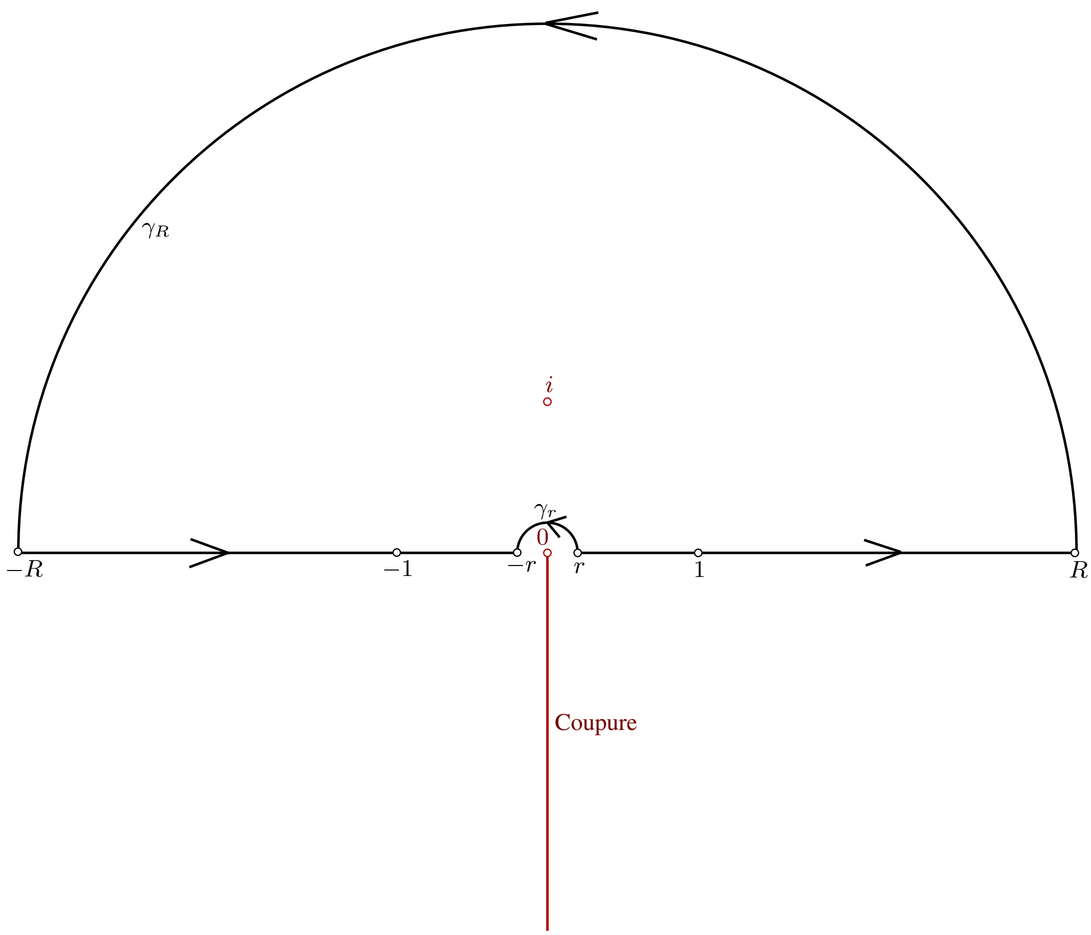
$$\big|\mathrm{Re}\,f(z)\big| \leqslant \tfrac{4}{\pi}\arctan|z|.$$

Indication: En dessinant une figure soignée, on pourra déterminer l'angle minimal $\alpha(r)$ tel que :

$$\overline{\mathbb{D}}_{\frac{2r}{1-r^2}}\big(\tfrac{1+r^2}{1-r^2}\big) \subset \big\{s\in\mathbb{C}\colon\ \mathrm{Re}\,s>0,\ \ |\arg s|\leqslant\alpha(r)\big\}.$$

16. Corrigé de l'examen 8

Exercice 1. **(a)** Voici la figure demandée :



(b) Le seul pôle de la fonction

$$f(z) := \frac{(\log z)^2}{z^2+1},$$

méromorphe dans le domaine :

$$\Omega := \mathbb{C} \backslash \big\{ i\, y : \ y \in \mathbb{R}_- \big\},$$

et qui est contenu dans l'intérieur du contour de Jordan :

$$\Gamma_{r,R} := [r, R] \cup \gamma_R \cup [-R, -r] \cup \gamma_r^-,$$

est $z_1 := i$, et il est d'ordre 1, avec un résidu égal à :

$$\mathsf{Res}_f(i) = \lim_{z \to i} (z-i) \frac{(\log z)^2}{(z-i)(z+i)} = \frac{(\log i)^2}{2\, i} = \frac{\big(i\, \frac{\pi}{2}\big)^2}{2\, i} = -\frac{\pi^2}{8\, i}.$$

L'identité visée est alors une expression du théorème des résidus appliqué à $f(z)$ sur le contour $\Gamma_{r,R}$:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi^3}{4} &= 2i\pi\,\mathsf{Res}_f(i) \\ &= \int_{\Gamma_{r,R}} f(z)\,dz. \end{aligned}$$

(c) Après découpage $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$ et changement de variable $x = \frac{1}{y}$, il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}\,dx &= \int_0^1 \frac{\log x}{x^2+1}\,dx + \int_1^\infty \frac{\log x}{x^2+1}\,dx \\ &= \int_\infty^1 \frac{\log\frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}+1}\Big(-\frac{dy}{y^2}\Big) + \mathsf{idem} \\ &= \int_1^\infty \frac{-\log y}{y^2+1}\,dy + \mathsf{idem} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(d) Sur γ_R, avec $z = R\,e^{i\theta}$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, on a :

$$\big|\log z\big| = \big|\log R + i\theta\big| \leqslant \log R + \pi,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \bigg|\int_{\gamma_R} \frac{(\log z)^2}{z^2+1}\,dz\bigg| &\leqslant \frac{\big(\log R + \pi\big)^2}{R^2-1}\,\pi\,R \\ &\xrightarrow[]{\mathrm{R}\to\infty} 0. \end{aligned}$$

(e) Tout d'abord, sur γ_r, on a avec $z = r\,e^{i\theta}$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$:

$$\big|\log z\big| = \big|\log r + i\pi\big| \leqslant \log r + \pi,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \bigg|\int_{\gamma_r} \frac{(\log z)^2}{z^2+1}\,dz\bigg| &\leqslant \frac{(\log r + \pi)^2}{1-r^2}\,\pi\,r \\ &\xrightarrow[]{r\to 0} 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, en faisant simultanément $r \longrightarrow 0$ et $R \longrightarrow \infty$ dans l'équation de la Question **(b)**, nous obtenons :

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+1}\,dx + 0 + \int_{-\infty}^0 \frac{\big(\log|x| + i\pi\big)^2}{x^2+1}\,dx + 0 = -\frac{\pi^3}{4}.$$

Il reste à changer $x \longmapsto -x$ dans cette deuxième intégrale :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty \frac{\big(\log x + i\pi\big)^2}{x^2+1}\,dx \\ &= \int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+1}\,dx + 2i\pi\underline{\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}\,dx} - \pi^2\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} \\ &= I_1 + 0 - \frac{\pi^3}{2}, \end{aligned}$$

d'où :

$$I_1 + I_1 - \frac{\pi^3}{2} \,=\, -\,\frac{\pi^3}{4},$$

et enfin :

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+1}\,dx \,=\, \frac{\pi^3}{8}.$$

Exercice 2. **(a)** Dérivons :

$$L_p'(z) \,=\, 1 + z + \cdots + z^{p-1} \,=\, \frac{1-z^p}{1-z},$$

puis calculons :

$$\begin{aligned} -\,E_p'(z) \,&=\, e^{L_p(z)}\Big[1 - \big(1-z\big)\,L_p'(z)\Big] \\ &=\, e^{L_p(z)}\Big[1 - \big(1-z^p\big)\Big] \\ &=\, z^p\,e^{L_p(z)}. \end{aligned}$$

Ensuite, comme $e^w = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!}\,w^\ell$ a des coefficients positifs, et comme les coefficients du polynôme $L_p(z)$ sont aussi positifs, il est clair qu'il en va de même pour la composée :

$$\begin{aligned} z^p\,e^{L_p(z)} \,&=\, z^p \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!}\Big(z + \tfrac{z^2}{2} + \cdots + \tfrac{z^p}{p}\Big)^\ell \\ &=: \sum_{k\geqslant p} a_k\,z^k. \end{aligned}$$

(b) Observons que $E_p(0) = 1$. Donc par intégration :

$$\begin{aligned} -\,E_p(z) + 1 \,&=\, \int_{[0,z]} -\,E_p'(\zeta)\,d\zeta \\ &=\, \sum_{k\geqslant p} \frac{a_k}{k+1}\,z^{k+1} \\ &=:\, z^{p+1}\sum_{k=0}^{\infty} b_k\,z^k, \end{aligned}$$

où les $b_k = \frac{a_k}{k+1}$ sont positifs, puisque les a_k le sont.

(c) Pour $|z| \leqslant 1$, majorons :

$$\begin{aligned} \left|\frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}\right| \,=\, \left|\sum_{k=0}^{\infty} b_k\,z^k\right| \,&\leqslant\, \sum_{k=0}^{\infty} b_k\,|z|^k \\ &\leqslant\, \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot 1^k \\ &=\, \frac{1-E_p(1)}{1^{p+1}} \\ &=\, 1. \end{aligned}$$

(d) Fixons $r \geqslant 0$, éventuellement arbitrairement grand. Comme $|z_n| \longrightarrow \infty$, il existe un entier $\mathrm{N}(r) \gg 1$ assez grand pour que :

$$n \geqslant \mathrm{N}(r) \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad r_n \geqslant 2\,r.$$

Par conséquent :

$$\left(\frac{r}{r_n}\right)^n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

ce qui assure la convergence de :

$$\sum_{n=\mathrm{N}(r)}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^n < \infty.$$

(e) Comme $|z_n| = r_n \longrightarrow \infty$, il existe $\mathrm{N}(r) \gg 1$ tel que :

$$n \geqslant \mathrm{N}(r) \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad r_n \geqslant r.$$

Écrivons :

$$E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) = 1 + a_n(z).$$

Grâce à la Question **(c)**, pour $z \in \overline{\mathbb{D}}_r$, il vient :

$$\Big(n \geqslant \mathrm{N}(r) \quad \text{et} \quad |z| \leqslant r \Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} \big|a_n(z)\big| &\leqslant \left(\frac{z}{z_n}\right)^{1+p_n} \cdot 1 \\ &\leqslant \left(\frac{r}{z_n}\right)^{1+p_n}, \end{aligned}$$

donc avec l'hypothèse de convergence de la série ci-dessus, nous voyons que $\sum_{n=1}^{\infty} \big|a_n(z)\big|$ converge normalement sur $\overline{\mathbb{D}}_r$, donc sur tout compact $K \subset \mathbb{C}$, puisque $r \geqslant 0$ était arbitraire.

Enfin, un théorème du cours assure que le produit infini :

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

converge (normalement, par définition) vers une fonction holomorphe définie sur $\mathbb{C}$ tout entier, dont les zéros sont exactement ceux de ses facteurs, à savoir les $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, avec répétitions éventuelles.

(f) Avec $p_n := n - 1$ comme à la Question **(d)**, la fonction construite à la Question **(e)** :

$$g(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_{n-1}\left(\frac{z}{z_n}\right),$$

a pour zéros exactement la suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ dont les éléments sont distincts.

Ensuite, d'après un théorème du cours :

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n} \frac{E_{n-1}'\big(\frac{z}{z_n}\big)}{E_{n-1}\big(\frac{z}{z_n}\big)},$$

d'où :

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n} E_{n-1}'\left(\frac{z}{z_n}\right) \prod_{k\neq n} E_{k-1}\left(\frac{z}{z_k}\right),$$

puis pour tout $m \geqslant 1$ fixé :

$$
\begin{aligned}
g'(z_m) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n}\, E'_{n-1}\Big(\frac{z_m}{z_n}\Big) \prod_{k \neq n} E_{k-1}\Big(\frac{z_m}{z_k}\Big) \\
&= \frac{1}{z_m}\, \underbrace{E'_{m-1}(1)}_{\neq 0}\, \underbrace{\prod_{k \neq m} E_{k-1}\Big(\frac{z_m}{z_k}\Big)}_{\neq 0}.
\end{aligned}
$$

Cette dérivée $g'(z_m)$ est non nulle, *car* les $E_{k-1}\big(\frac{z}{z_k}\big)$ avec $k \neq m$ ne s'annulent qu'en $z = z_k$, nulle part ailleurs, *et car*, d'après la Question **(a)** :

$$
\begin{aligned}
E'_{m-1}(z) &= -\, z^{m-1}\, e^{L_{m-1}(z)}, \\
E'_{m-1}(1) &= -\, 1^{m-1}\, e^{L_{m-1}(1)} \neq 0.
\end{aligned}
$$

(g) Tout d'abord, on peut bien diviser par $g'(z_n) \neq 0$. Ensuite, comme :

$$
\begin{aligned}
g(z) &= \underline{g(z_m)} + (z - z_m)\, g'(z_m) + \mathrm{O}\big((z - z_m)^2\big), \\
f_m(z) &= \frac{(z - z_m)\, g'(z_m) + \mathrm{O}\big((z - z_m)^2\big)}{(z - z_m)\, g'(z_m)},
\end{aligned}
$$

il est clair que :

$$
f_m(z_m) = 1,
$$

tandis que pour $m \neq n$:

$$
f_n(z_m) = \frac{\underline{g(z_m)}}{(z_m - z_n)\, g'(z_m)} = 0.
$$

Donc formellement, nous avons bien, pour tout $m \geqslant 1$:

$$
\begin{aligned}
h(z_m) &= w_m\, f_m(z_m)\, e^0 + \sum_{n \neq m} w_n\, \underline{f_n(z_m)}\, e^{c_n (z_m - z_n)} \\
&= w_m.
\end{aligned}
$$

Mais nous devons encore assurer que cette somme infinie converge normalement sur les compacts $K \subset \mathbb{C}$!

À cette fin, choisissons des constantes $c_n \in \mathbb{C}$ de telle sorte que :

$$
\begin{aligned}
&\arg z_n : && c_n\, z_n = \big|c_n\, z_n\big|, \\
&|z_n| : && |w_n|\, M_n\, e^{-|c_n|\, \frac{1}{2}\, |z_n|} \leqslant \tfrac{1}{2^n}.
\end{aligned}
$$

Ensuite, soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact quelconque. Comme $|z_n| \longrightarrow \infty$, il existe un entier $\mathrm{N}(K) \gg 1$ assez grand tel que :

$$
\begin{aligned}
n \geqslant \mathrm{N}(K) \quad &\Longrightarrow \quad \max_{z \in K} |z| \leqslant \tfrac{1}{2}\, |z_n| \\
&\Longrightarrow \quad \max_{z \in K} \big|f_n(z)\big| \leqslant M_n,
\end{aligned}
$$

d'où :

$$
|z_n| - |z| \geqslant \tfrac{1}{2}\, |z_n|,
$$

donc pour $z \in K$ et $n \geqslant \mathrm{N}(K)$, nous pouvons majorer :

$$\begin{aligned}
\left|w_n\, f_n(z)\, e^{c_n(z-z_n)}\right| &\leqslant |w_n|\, M_n \left|e^{c_n z}\, e^{-c_n z_n}\right| \\
&= |w_n|\, M_n \left|e^{c_n z}\right| e^{-|c_n\, z_n|} \\
&\leqslant |w_n|\, M_n\, e^{|c_n|\,|z|}\, e^{-|c_n|\,|z_n|} \\
&= |w_n|\, M_n\, e^{-|c_n|\,(|z_n|-|z|)} \\
&\leqslant |w_n|\, M_n\, e^{-|c_n|\,\frac{1}{2}\,|z_n|} \\
&\leqslant \tfrac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Ceci montre que la série :

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n\, f_n(z)\, e^{c_n(z-z_n)},$$

converge normalement sur tout compact $K \subset \mathbb{C}$, et donc constitue, d'après un théorème de Cauchy, une fonction holomorphe entière $h \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ qui résout complètement un problème d'interpolation analogue à l'interpolation polynomiale de Lagrange.

Exercice 3. (a) Écrivons $w = u + i\,v$. Dans la bande B, avec $-1 < u < 1$, avec $v \in \mathbb{R}$, on a :

$$s = e^{i\frac{\pi}{2}u}\, e^{-\frac{\pi}{2}v},$$

donc $|\arg s| < \frac{\pi}{2}$, et $|s| \in \mathbb{R}_+^*$ peuvent prendre des valeurs quelconques, et il est clair par cette formule que φ est bijective.

D'après un théorème du cours, la dérivée d'une application holomorphe injective est automatiquement non nulle, ce que nous vérifions :

$$\frac{d\varphi}{dw} = i\,\frac{\pi}{2}\, e^{i\frac{\pi}{2}w} \neq 0.$$

(b) Comme $\mathrm{Re}\, s > 0$, comme $1 \in \{\mathrm{Re}\, s > 0\}$, comme $-1 \notin \{\mathrm{Re}\, s > 0\}$, il est géométriquement clair que :

$$|s-1| < \big|s-(-1)\big|,$$

donc :

$$|\psi(s)| = \frac{|s-1|}{|s+1|} < 1,$$

ce qui montre que ψ est à valeurs dans Δ.

De plus, ψ est surjective, car :

$$\frac{s-1}{i(s+1)} = \zeta \qquad \Longleftrightarrow \qquad s = \frac{i-\zeta}{i+\zeta},$$

d'où :

$$2\,\mathrm{Re}\, s = \frac{i-\zeta}{i+\zeta} + \frac{-i-\overline{\zeta}}{-i+\overline{\zeta}} = 2\,\frac{1-\zeta\overline{\zeta}}{1+\zeta\overline{\zeta}} > 0.$$

Ces calculs et ces formules montrent d'ailleurs que ψ est bijective, donc injective, donc de dérivée jamais nulle d'après un théorème du cours.

On peut même vérifier directement la non-annulation de la dérivée :

$$i\,\psi'(s) \;=\; \frac{1\,(s+1)-(s-1)\,1}{(s+1)^2} \;=\; \frac{2}{(s+1)^2} \;\neq\; 0.$$

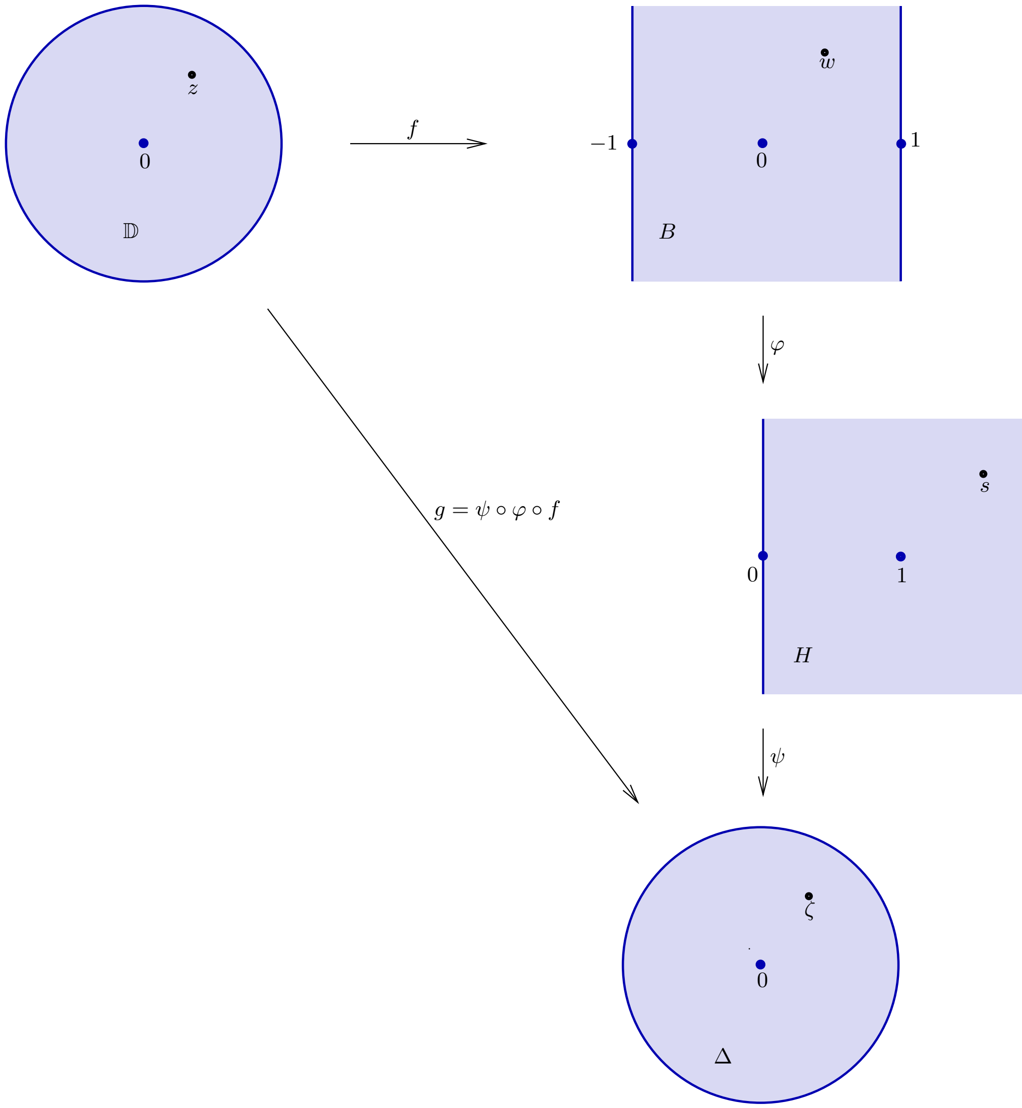
(c) Il suffit de composer les deux biholomorphismes précédents :

$$B \xrightarrow[\varphi]{\sim} H \xrightarrow[\psi]{\sim} \Delta,$$

ce qui donne un biholomorphisme $\psi \circ \varphi$, dont l'expression explicite est :

$$\begin{aligned}
\psi\circ\varphi\,(w) \;=\; \psi\big(e^{i\frac{\pi}{2}w}\big) \;&=\; \frac{e^{i\frac{\pi}{2}w}-1}{i\,\big(e^{i\frac{\pi}{2}}\,w+1\big)}\\
&=\; \frac{e^{\frac{i\pi}{4}w}-e^{-i\frac{\pi}{4}w}}{i\,\big(e^{\frac{i\pi}{4}w}+e^{-i\frac{\pi}{4}w}\big)}\\
&=\; \frac{2\,i\,\mathsf{sin}\,\frac{\pi}{4}\,w}{i\,2\,\mathsf{cos}\,\frac{\pi}{4}\,w}\\
&=\; \mathsf{tan}\,\frac{\pi}{4}\,w.
\end{aligned}$$

(d) Voici la figure demandée :



(e) La composition $g = \psi \circ \varphi \circ f$ est une application holomorphe $\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ satisfaisant $g(0) = 0$. Donc grâce au Lemme de Schwarz :

$$\big|g(z)\big| \leqslant |z| \qquad\qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}).$$

Donc si $|z| \leqslant r$, on a bien $\zeta := g(z)$ qui satisfait $|\zeta| \leqslant r$.

(f) Ainsi, décomposons $s = \sigma + i\,t$ en parties réelle et imaginaire, et explicitons la condition $\big|\psi(s)\big| = r$, à savoir :

$$\left|\frac{s-1}{i\,(s+1)}\right| = r,$$

comme suit :

$$\big|\sigma + i\,t - 1\big|^2 = r^2\,\big|\sigma + i\,t + 1\big|^2.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} 0 &= (\sigma-1)^2 + t^2 - r^2\,(\sigma+1)^2 - r^2\,t^2 \\ &= \sigma^2 - 2\,\sigma + 1 + t^2 - r^2\,\sigma^2 - 2\,r\,\sigma - r^2 - r^2\,t^2 \\ &= \sigma^2\,(1-r^2) - 2\,\sigma\,(1+r^2) + t^2\,(1-r^2) + 1 - r^2, \end{aligned}$$

d'où après division par $1 - r^2 \neq 0$:

$$0 \;=\; \sigma^2 - 2\,\sigma\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right) + t^2 + 1.$$

Ensuite, faisons apparaître un carré :

$$0 \;=\; \left(\sigma - \frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 \underline{-\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 + 1} + t^2,$$

sachant que les termes soulignés deviennent :

$$\frac{-1 - 2\,r^2 - r^4 + 1 - 2\,r^2 + r^4}{(1-r^2)^2} \;=\; \frac{-\,4\,r^2}{(1-r^2)^2} \;=\; -\left(\frac{2\,r}{1-r^2}\right)^2,$$

ce qui nous permet d'écrire l'équation algébrique du lieu $\psi^{-1}\big(\{|s| = r\}\big)$:

$$\left(\frac{2\,r}{1-r^2}\right)^2 \;=\; \left(\sigma - \frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 + \big(t-0\big)^2,$$

comme étant visiblement l'équation d'un *cercle*, de centre situé sur l'axe réel $\mathbb{R}_\sigma = \{t = 0\}$:

$$\frac{1+r^2}{1-r^2} + i\,0,$$

et de rayon :

$$\frac{2\,r}{1-r^2}.$$

Enfin, les deux points-extrémités du diamètre contenu dans l'axe $\mathbb{R}_\sigma$ sont :

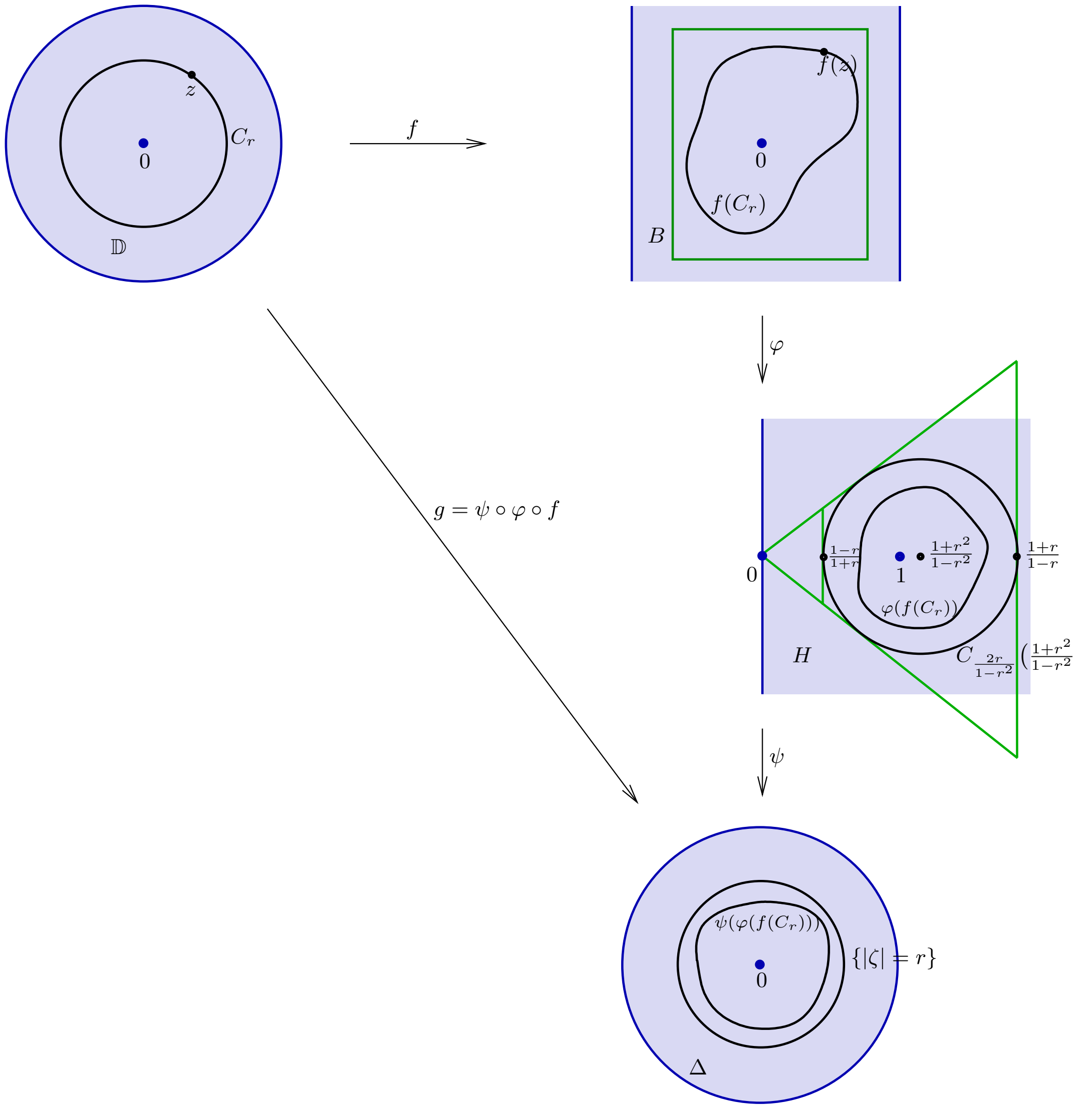
$$-\,\frac{2\,r}{1-r^2} + \frac{1+r^2}{1-r^2} \;=\; \frac{1-r}{1+r} \qquad \text{et} \qquad \frac{1+r^2}{1-r^2} + \frac{2\,r}{1-r^2} \;=\; \frac{1+r}{1-r}.$$

(g) Comme ψ est un biholomorphisme $H \xrightarrow{\sim} \Delta$, l'image inverse $\psi^{-1}\big(\{|\zeta| < r\}\big)$ est un domaine simplement connexe contenu dans H de bord $C_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\big)$ qui ne peut alors être que le disque ouvert $\mathbb{D}_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\big)$, grâce au théorème Jordan.

Clairement, le disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\frac{1-r^2}{1+r^2}\big)$ est contenu dans H, car son diamètre réel $\big[\frac{1-r}{1+r}, \frac{1+r}{1-r}\big]$ l'est.

(h) Redessiner la figure de la Question **(d)**, en y ajoutant le cercle $\{|z| = r\}$, avec $f(C_r)$, avec $\varphi\big(f(C_r)\big)$, avec $\psi\big(\varphi\big(f(C_r)\big)\big)$, avec le cercle $C_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\big)$, et avec $\big\{|\zeta| = r\big\}$.

(h) Voici la figure demandée :



(i) D'après l'expression de φ :

$$\operatorname{Im} \varphi^{-1}(s) \;=\; -\,\tfrac{2}{\pi}\,\log|s|.$$

Or pour s dans le disque $\overline{\mathbb{D}}_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\big)$, il est géométriquement clair que le module $|s|$ de s est compris entre les valeurs du *diamètre réel* calculé plus haut :

$$\frac{1-r}{1+r} \;\leqslant\; |s| \;\leqslant\; \frac{1+r}{1-r} \qquad\qquad \Big(\forall\, s\in\overline{\mathbb{D}}_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\tfrac{1+r^2}{1-r^2}\big)\Big).$$

Il suffit alors de prendre le logarithme :

$$\log\frac{1-r}{1+r} \;\leqslant\; \log|s| \;\leqslant\; \log\frac{1+r}{1-r},$$

puis d'observer que le majorant à droite est l'*opposé* du majorant à gauche.

(j) Si $z = 0$, l'inégalité est triviale. Fixons donc $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$, avec $0 < r < 1$ et avec :

$$r \;:=\; |z|.$$

Travaillons avec le cercle C_r comme ci-dessus. Alors $f(z)$ est contenu dans l'image $f(C_r)$.

Puis, $\psi\big(\varphi\big(f(z)\big)\big)$ est contenu dans $\psi\big(\varphi\big(f(C_r)\big)\big) = g(C_r)$. Mais cette image est aussi égale à $g(C_r)$, et grâce au Lemme de Schwarz à la Question **(e)**, elle est contenue à l'intérieur de l'autre cercle $C_r = \{|\zeta| = r\}$ de rayon r.

Autrement dit, $\psi\big(\varphi\big(f(z)\big)\big)$ est contenu dans $\{|\zeta| \leqslant r\}$.

Mais comme ψ est un biholomorphisme, $\varphi\big(f(z)\big)$ est contenu dans $\psi^{-1}\big(\{|\zeta| \leqslant r\}\big)$. Et comme φ est aussi un biholomorphisme, $f(z)$ est contenu dans :

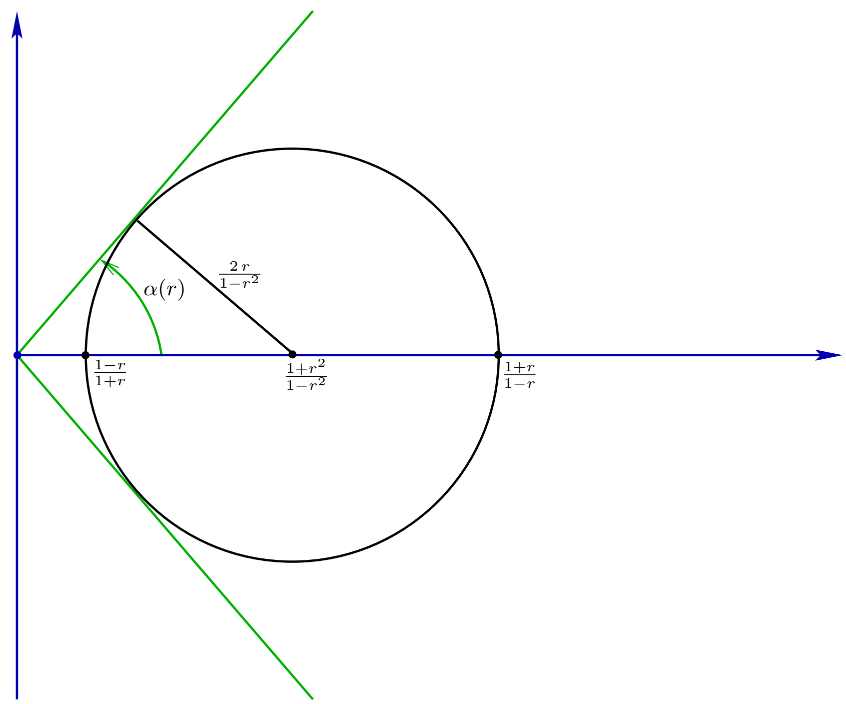
$$\varphi^{-1}\big(\psi^{-1}\big(\{|\zeta| \leqslant r\}\big)\big),$$

et nous venons de voir que cette image inverse est contenue dans :

$$\Big\{w \in \mathbb{C}\colon\ \big|\mathsf{Im}\, w\big| \leqslant \tfrac{2}{\pi} \log \tfrac{1+r}{1-r}\Big\}.$$

Comme $|z| = r$ depuis le début, nous avons bien démontré l'inégalité :

$$\big|\mathsf{Im}\, f(z)\big| \ \leqslant\ \tfrac{2}{\pi} \log \tfrac{1+|z|}{1-|z|}.$$



(k) Comme cela a été anticipé sur la figure, observons que notre disque $\overline{\mathbb{D}}_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\big)$ dans le plan des $s \in \mathbb{C}$ est contenu dans le secteur angulaire :

$$\big\{s \in \mathbb{C}\colon\ \mathsf{Re}\, s > 0,\ \ |\mathsf{arg}\, s| \leqslant \alpha(r),\big\}$$

où l'angle $\alpha(r)$ est déterminé par :

$$\sin \alpha(r) \ =\ \frac{2r/(1-r^2)}{(1+r^2)/(1-r^2)} \ =\ \frac{2\,r}{1+r^2},$$

d'où :

$$\cos^2 \alpha(r) \ =\ 1 - \sin^2\alpha(r) \ =\ \bigg(\frac{1-r^2}{1+r^2}\bigg)^2,$$

puis :

$$\tan \alpha(r) \,=\, \frac{2\,r}{1-r^2}.$$

Ensuite, comme :

$$\mathrm{Re}\,\varphi^{-1}(s) \,=\, \tfrac{2}{\pi}\,\arg s,$$

comme :

$$\big|\arg s\big| \,\leqslant\, \tfrac{2}{\pi}\,\alpha(r) \qquad\qquad (\forall\, s \in \mathbb{D}_{\frac{2\,r}{1-r^2}}(\tfrac{1+r^2}{1-r^2})),$$

et comme :

$$\varphi\big(f(z)\big) \,\in\, \overline{\mathbb{D}}_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\tfrac{1+r^2}{1-r^2}\big),$$

il vient par conséquent :

$$\begin{aligned}\big|\mathrm{Re}\,f(z)\big| &\,\leqslant\, \tfrac{2}{\pi}\,\alpha(r)\\ &\,=\, \tfrac{2}{\pi}\,\arctan \tfrac{2\,r}{1-r^2}.\end{aligned}$$

Enfin, la formule :

$$\tan 2\,\beta \,=\, \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} \qquad\Longleftrightarrow\qquad 2\arctan r \,=\, \arctan\frac{2\,r}{1-r^2},$$

permet de conclure :

$$\begin{aligned}\big|\mathrm{Re}\,f(z)\big| &\,\leqslant\, \tfrac{2}{\pi}\,2\arctan r\\ &\,=\, \tfrac{4}{\pi}\,\arctan|z|.\end{aligned}$$