

Fonction Gamma d'Euler et fonction zêta de Riemann

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

2. La fonction $\Gamma(z)$

Existe-t-il une manière naturelle d'*interpoler* la fonction factorielle $\mathbb{N} \ni n \mapsto n!$ entre deux entiers n et $n + 1$ quelconques ? La réponse est oui !

Pour $x > 0$ réel, la *fonction Gamma* est définie par :

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Cette intégrale converge près de $t = 0$, puisque la fonction t^{x-1} y est intégrable d'après le critère de Riemann, et elle converge aussi pour $t \rightarrow \infty$, simplement parce que la décroissance de e^{-t} neutralise toute croissance polynomiale. En intégrant par parties, le lecteur pourra vérifier que l'on a $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, mais il peut s'en dispenser, puisque nous allons aussi faire ce calcul dans un instant. Sans attendre, décollons vers l'imaginaire !

Quelques observations simples permettent en effet d'étendre le domaine de définition.

Théorème 2.1. *La fonction $\mathbb{R}_+^* \ni x \mapsto \Gamma(x)$ se prolonge comme fonction holomorphe dans le demi-plan droit $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, par la formule :*

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

Évidemment, on note :

$$z = x + iy.$$

Démonstration. Commençons par observer que :

$$|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} |e^{(z-1)\log t}| = e^{-t} e^{(x-1)\log t} = e^{-t} t^{x-1},$$

de telle sorte que cette intégrale complexe converge effectivement lorsque $\operatorname{Re} z = x > 0$, puisqu'elle est majorée par :

$$\begin{aligned} |\Gamma(z)| &= \left| \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_0^\infty |e^{-t} t^{z-1}| dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \Gamma(x) < \infty. \end{aligned}$$

Mais pourquoi l'application $z \mapsto \Gamma(z)$ serait-elle de surcroît holomorphe ?

Il suffit de faire voir, pour tous nombres positifs $0 < \delta < M < \infty$, que cette intégrale définit une fonction qui est holomorphe dans la bande verticale :

$$B_{\delta, M} := \{z \in \mathbb{C} : \delta < \operatorname{Re} z < M\}.$$

Puisqu'elle peut être envisagée comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}$, introduisons :

$$\Phi_{\varepsilon}(z) := \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{-t} e^{(z-1) \log t} dt.$$

D'après un théorème connu, puisque l'intégrande est visiblement holomorphe par rapport à z , cette fonction $z \mapsto \Phi_{\varepsilon}(z)$ est holomorphe dans la bande $B_{\delta, M}$. En prenant $\varepsilon := \frac{1}{n}$, il suffit alors de montrer que la suite $(\Phi_{\frac{1}{n}}(z))_{n=1}^{\infty}$ de fonctions holomorphes dans $B_{\delta, M}$ converge uniformément vers $\Gamma(z)$, car un théorème connu de Cauchy garantira alors que la limite γ est holomorphe.

À cette fin, estimons :

$$|\Gamma(z) - \Phi_{\varepsilon}(z)| \leq \int_0^{\varepsilon} e^{-t} t^{x-1} dt + \int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (z \in B_{\delta, M}).$$

La première intégrale converge uniformément vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, puisqu'on peut la majorer par :

$$\int_0^{\varepsilon} e^{-t} t^{x-1} dt \leq 1 \cdot \int_0^{\varepsilon} t^{x-1} dt = \left[\frac{1}{x} t^x \right]_0^{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^x}{x} \leq \frac{\varepsilon^{\delta}}{\delta}.$$

Quant à la seconde :

$$\left| \int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \right| \leq \int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t} t^{M-1} dt \leq \text{constante} \int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t/2} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad \square$$

Malgré le fait que l'intégrale qui définit $\Gamma(z)$ n'est *pas* absolument convergente pour les valeurs de z telles que $\operatorname{Re} z \leq 0$, nous allons pouvoir prolonger méromorphiquement Γ au plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier, avec peu de pôles, seulement aux points entiers négatifs $z = 0, -1, -2, -3, \dots$. L'unicité de ce prolongement méromorphe sera alors garantie par le principe d'unicité pour les fonctions holomorphes, en-dehors de cet ensemble discret de pôles. Nous continuerons à noter $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ ce prolongement méromorphe.

L'existence de pôles aux points entiers négatifs provient en fait d'une identité fonctionnelle importante.

Lemme 2.2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $x = \operatorname{Re} z > 0$, on a :*

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z),$$

et :

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Démonstration. Une simple intégration par parties dans le domaine de convergence $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ explique l'identité :

$$\begin{aligned} z \Gamma(z) &= \int_0^{\infty} e^{-t} z t^{z-1} dt \\ &= \left[e^{-t} t^z \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-t} t^z dt \\ &= 0 + \Gamma(z+1), \end{aligned}$$

et comme :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^\infty = 1,$$

une récurrence instantanée donne $\Gamma(n+1) = n!$ — point d'exclamation de plaisir! $\square$

C'est la division nécessaire par le facteur z dans la formule quasi-équivalente $\Gamma(z) = \frac{1}{z} \Gamma(z+1)$ qui va introduire des pôles — heureusement simples !

Théorème 2.3. *La fonction $\Gamma(z)$, initialement définie dans $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, bénéficie d'un prolongement méromorphe au plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier dont les seules singularités sont des pôles simples aux entiers négatifs $z = 0, -1, -2, -3, \dots$, où elle a pour résidus :*

$$\operatorname{res}_{z=-n} \Gamma = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Démonstration. Il suffit de prolonger Γ à tout demi-plan de la forme $\{\operatorname{Re} z > -m\}$ avec un entier $m \geq 1$ quelconque.

Pour $\operatorname{Re} z > -1$, définissons :

$$\Phi_1(z) := \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Puisque $\Gamma(z+1)$ est holomorphe dans $\{\operatorname{Re} z > -1\}$, il est clair que Φ_1 est méromorphe dans ce demi-plan, et qu'elle y a une unique singularité, un pôle d'ordre 1 en $z = 0$. Comme $\Gamma(1) = 1$, son résidu y vaut $1 = \frac{(-1)^0}{0!}$. De plus, dans le sous-demi-plan $\{\operatorname{Re} z > 0\} \subset \{\operatorname{Re} z > -1\}$, l'identité fondamentale montre que cette fonction :

$$\Phi_1(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \Gamma(z)$$

coïncide bien avec la fonction à prolonger.

Pour un entier $m \geq 1$ quelconque, définissons dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} z > -m\}$ la fonction :

$$\Phi_m(z) := \frac{\Gamma(z+m)}{(z+m-1) \cdots (z+n+1)(z+n)(z+n-1) \cdots (z+1)z}.$$

Visiblement, cette fonction est méromorphe avec des pôles simples en $z = -m+1, \dots, -1, 0$, et en un point entier négatif $z = -n$ avec $0 \leq n \leq m-1$ quelconque, elle y a pour résidu :

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=-n} \Phi_m(z) &= \lim_{z \rightarrow -n} (z - (-n)) \Phi_m(z) \\ &= \frac{\Gamma(-n+m)}{(-n+m-1) \cdots (1) \emptyset (-1) \cdots (-n+1)(-n)} \\ &= \frac{(m-n+1)!}{(m-n+1)! (-1)^n n!} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

De plus, dans le sous-demi-plan $\{\operatorname{Re} z > 0\} \subset \{\operatorname{Re} z > -m\}$, une itération de l'identité fondamentale du Lemme 2.2 :

$$\Gamma(z+m) = (z+m-1) \cdots (z+1)z \Gamma(z)$$

montre aussitôt que $\Phi_m(z) = \Gamma(z)$ coïncide bien avec la fonction à prolonger.

D'ailleurs, le principe d'identité garantit aussi que $\Phi_m = \Phi_n$ pour tous entiers $1 \leq n \leq m$, dans $\{\operatorname{Re} z > -n\} \setminus \mathbb{Z}_-$. $\square$

L'identité fondamentale $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ continue d'être satisfaite (exercice mental) dans l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ — c'est-à-dire en-dehors des pôles — parce que (solution) les deux côtés de cette formule coïncident dans $\{\operatorname{Re} z > 0\}$.

On peut même se convaincre (exercice) qu'en un entier négatif quelconque $z = -n$ avec $n \geq 1$, les deux membres de l'identité $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ sont infinis, et que :

$$\operatorname{res}_{z=-n} \Gamma(z+1) = (-n) \operatorname{res}_{z=-n} \Gamma(z).$$

Enfin, en $z = 0$, notons que :

$$\Gamma(1) = \lim_{z \rightarrow 0} z\Gamma(z).$$

Voici une démonstration alternative du Théorème 2.3, encore plus éclairante, dont les idées se recontreront aussi plus tard. Elle consiste à décomposer l'intégrale qui définit $\Gamma(z)$ pour $\operatorname{Re} z > 0$ en deux morceaux :

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Grâce à la décroissance forte de e^{-t} , la deuxième intégrale définit une fonction holomorphe entière, définie sur $\mathbb{C}$. Quant au premier morceau, développons-y en série entière l'exponentielle, justifions la convergence normale (exercice), et intégrons terme à terme :

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^n}{n!} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}.$$

Ceci nous permet d'écrire formellement :

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

Assertion 2.4. Cette série infinie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$ définit une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ ayant pour seules singularités des pôles simples aux entiers négatifs $z = -n$ où elle a pour résidus $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Démonstration. Pour un grand rayon $R \gg 1$, et pour un entier $N > 2R$, décomposons-la en :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}.$$

La première somme, qui est finie, définit une fonction méromorphe dans le disque $\{|z| < R\}$ avec les pôles et les résidus annoncés, tout à fait en accord avec ce que la première démonstration a déjà fait voir.

Pour ce qui est de la deuxième somme portant sur des entiers $n > N > 2R$, toujours pour $|z| < R$, comme $|n+z| \geq R$ implique :

$$\left| \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} \right| \leq \frac{1}{n!R},$$

nous voyons instantanément qu'elle converge normalement sur le disque $\{|z| < R\}$, donc y définit une fonction holomorphe grâce à un théorème de Cauchy.

Comme $R \gg 1$ pouvait être choisi arbitrairement grand, tout ceci montre que la représentation de $\Gamma(z)$ sous la forme d'une série méromorphe infinie suivie d'une intégrale est valable dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ tout entier. $\square$

En définitive, nous avons pour *tout* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$:

$$(2.5) \quad \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+z)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Présentons maintenant d'autres propriétés de la fonction Γ . Voici une identité qui dévoile une symétrie fondamentale de Γ par rapport à la droite $\{\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\}$.

Théorème 2.6. [Formule des compléments] *En tout $z \in \mathbb{C}$:*

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Observons que $\Gamma(1-z)$ a des pôles simples aux entiers naturels $z = 1, 2, 3, \dots$, de telle sorte que le produit $\Gamma(z) \Gamma(1-z)$, une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, possède des pôles simples en *tous* les entiers relatifs $\in \mathbb{Z}$, tout aussi bien que la fonction $\frac{\pi}{\sin \pi z}$.

Démonstration. Il suffit d'établir cette identité en des points *réels* $0 < x < 1$, car alors le principe d'identité garantira aussitôt qu'elle est vraie dans tout l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.

Lemme 2.7. *Pour un paramètre réel $0 < a < 1$ quelconque, on a :*

$$\int_0^{\infty} \frac{v^{a-1}}{1+v} dv = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Démonstration. Il suffit d'effectuer le changement de variable $v = e^x$ et de se souvenir de l'intégration, déjà vue dans un chapitre qui précède, de la fonction $f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$ le long de rectangles de sommets $-R, R, R + 2i\pi, -R + 2i\pi$ avec $R \rightarrow \infty$, pour calculer l'intégrale qui apparaît :

$$\int_0^{\infty} \frac{v^{a-1}}{1+v} dv = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}. \quad \square$$

Pour établir le théorème, avec un paramètre $t > 0$ quelconque, en effectuant le changement de variable $vt = u$, préparons :

$$\Gamma(1-x) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-x} du = t \int_0^{\infty} e^{-vt} (vt)^{-x} dv,$$

et grâce à cette astuce, calculons, puis concluons :

$$\begin{aligned}
 \Gamma(1-x) \Gamma(x) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \Gamma(1-x) dt \\
 &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \left(t \int_0^\infty e^{-vt} (vt)^{-x} dv \right) dt \\
 &= \int_0^\infty v^{-x} \left(\int_0^\infty e^{-t(1+v)} dt \right) dv \\
 &= \int_0^\infty v^{-x} \left[\frac{e^{-t(1+v)}}{-1-v} \right]_0^\infty dv \\
 &= \int_0^\infty \frac{v^{-x}}{1+v} dv \\
 &= \frac{\pi}{\sin \pi (1-x)} \\
 &= \frac{\pi}{\sin \pi x}.
 \end{aligned}$$

□

En particulier, au point $z = \frac{1}{2}$, en observant que $\Gamma(x) > 0$ quand $x \in \mathbb{R}_+^*$, nous trouvons la valeur spéciale :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Poursuivons notre étude de la fonction Gamma en regardant son inverse, fonction qui devient entière et à croissance contrôlée.

Théorème 2.8. *La fonction $z \mapsto \Gamma(z)$ d'Euler jouit des propriétés suivantes.*

(1) $\frac{1}{\Gamma(z)} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ est holomorphe entière, avec des zéros simples aux entiers négatifs $z = 0, -1, -2, \dots$, et aucun zéro ailleurs.

(2) $\frac{1}{\Gamma(z)}$ a pour croissance :

$$\left| \frac{1}{\Gamma(z)} \right| \leq c_1 e^{c_2 |z| \log |z|} \quad (\forall z \in \mathbb{C}),$$

où $0 < c_1, c_2 < \infty$ sont des constantes universelles.

Une telle inégalité doit en fait s'interpréter quand $|z| \rightarrow \infty$. On dit alors que $\frac{1}{\Gamma(z)}$ est d'ordre (exponentiel) ≤ 1 , au sens où, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $0 < c_{1,\varepsilon} < \infty$ telle que :

$$\left| \frac{1}{\Gamma(z)} \right| \leq c_{1,\varepsilon} e^{c_2 |z|^{1+\varepsilon}}.$$

L'Exercice 1 montre que l'on ne peut pas ici se dispenser d'un $\varepsilon > 0$ dans la puissance $|z|^{1+\varepsilon}$.

Rappelons que les seuls zéros de $\sin \pi z = \frac{1}{2i}(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z})$ sont les $z \in \mathbb{C}$ tels que $e^{2i\pi z} = 1$, d'où $z = k \in \mathbb{Z}$, comme on doit s'en souvenir.

Démonstration. Grâce au Théorème 2.6 qui précède, nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \Gamma(1-z),$$

et à droite, les pôles simples de $\Gamma(1-z)$ situés aux entiers $z = 1, 2, 3, \dots$ sont annihilés par les zéros simples de $\sin \pi z$, donc $\frac{1}{\Gamma(z)}$ est holomorphe entière avec des zéros simples

aux zéros restants de $\sin \pi z$, c'est-à-dire en $z = 0, -1, -2, \dots$. De plus, $\frac{1}{\Gamma(z)} \neq 0$ ailleurs, car les seuls zéros de $\sin \pi z$ sont les $z = k \in \mathbb{Z}$.

Pour établir l'estimée de croissance, avec un réel $x \geq 0$ quelconque, et avec l'entier positif unique $x \leq n < x + 1$, commençons par :

$$\begin{aligned} \int_1^\infty e^{-t} t^x dt &\leq \int_0^\infty e^{-t} t^n dt \\ &= n! \\ &\leq n^n \\ &= e^{n \log n} \\ &\leq e^{(x+1) \log (x+1)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'identité (2.5) écrite pour $\Gamma(1 - z)$, nous avons :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n + 1 - z)} + \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_1^\infty e^{-t} t^{-z} dt,$$

Ensuite, comme $|e^w| \leq e^{|w|}$, et comme pour $t \geq 1$:

$$|t^{-z}| = |e^{-z \log t}| = e^{-\operatorname{Re} z \log t} \leq e^{|\operatorname{Re} z| \log t} \leq e^{|z| \log t} = t^{|z|},$$

nous pouvons estimer la croissance du deuxième terme :

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i\pi} \right| \left| \int_1^\infty e^{-t} t^{-z} dt \right| &\leq \frac{e^{\pi|z|}}{\pi} \int_1^\infty e^{-t} t^{|z|} dt \\ &\leq \frac{e^{\pi|z|}}{\pi} e^{(|z|+1) \log (|z|+1)} \\ &\leq c_1 e^{c_2 |z| \log |z|}. \end{aligned}$$

Quant au premier terme :

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n + 1 - z)},$$

dans un premier cas où $|\operatorname{Im} z| \geq 1$, puisqu'on a alors pour tout entier $n \geq 0$:

$$|n + 1 - z| \geq 1,$$

il se majore aisément :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin \pi z}{\pi} \right| \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n + 1 - z)} \right| &\leq \frac{e^{\pi|z|}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot 1} \\ &= \frac{e^{\pi|z|+1}}{\pi}. \end{aligned}$$

Dans l'autre cas où $|\operatorname{Im} z| < 1$, introduisons l'unique entier $k = k_z$ avec $k - \frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z < k + \frac{1}{2}$, et distinguons deux sous-cas.

Lorsque $k \geq 1$, mettons en exergue, dans la somme infinie, le terme $n = k - 1$:

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n + 1 - z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)! (k - z)} + \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n \neq k-1} \frac{(-1)^n}{n! (n + 1 - z)},$$

et démontrons que les deux expressions à droite sont bornées.

Pour la première expression, avec la constante :

$$\max_{|w| \leq 3/2} \left| \frac{\sin \pi w}{\pi w} \right| =: c < \infty,$$

finie parce que $w \mapsto \frac{\sin \pi w}{\pi w}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ car en 0 on a $\sin \pi w = \pi w + O(w^2)$, estimons la par cette constante :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin \pi z}{\pi} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(k-z)} \right| &= \left| \frac{\sin \pi (k-z)}{\pi (k-z)} \right| \frac{1}{(k-1)!} \\ [w := k-z] \quad &\leq \max_{|w| \leq 3/2} \left| \frac{\sin \pi w}{\pi w} \right| \frac{1}{(k-1)!} = c \frac{1}{(k-1)!}, \end{aligned}$$

sachant que l'on a ici :

$$|w| = |k-z| \leq |k - \operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \frac{1}{2} + 1.$$

Ensuite, grâce à :

$$\begin{aligned} n \leq k-2 \quad &\implies \quad |n+1-z| \geq |n+1-\operatorname{Re} z| = \operatorname{Re} z - n - 1 \\ &\geq k - \frac{1}{2} - n - 1 \\ &\geq \frac{1}{2}, \\ n \geq k \quad &\implies \quad |n+1-z| \geq |n+1-\operatorname{Re} z| = n+1-\operatorname{Re} z \\ &\geq n+1-k - \frac{1}{2} \\ &\geq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

constatons que le second terme est lui aussi borné :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n \neq k-1} \frac{(-1)^n}{n!(n+1-z)} \right| &\leq \left| \frac{e^{i\pi x - \pi y} - e^{-i\pi x + \pi y}}{2i\pi} \right| \sum_{n \neq k-1} \frac{1}{n! \cdot \frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{e^{\pi|y|}}{\pi} 2e^1 \\ &\leq \frac{2}{\pi} e^{\pi+1}. \end{aligned}$$

Enfin, lorsque $k \leq 0$, d'où $\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}$ d'après notre supposition, il devient inutile de mettre un terme en exergue, car alors on a toujours :

$$|n+1-z| \geq n+1-\operatorname{Re} z \geq n+1-\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

d'où similairement :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1-z)} \right| &\leq \frac{e^{\pi|y|}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot \frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{2}{\pi} e^{\pi+1}. \quad \square \end{aligned}$$

Le fait que $\frac{1}{\Gamma(z)}$ satisfasse une condition d'ordre exponentiel du type qui a été discuté dans le chapitre sur les fonctions entières conduit naturellement à une factorisation de Hadamard.

Rappelons auparavant que la *constante d'Euler* :

$$\gamma := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N,$$

est bien définie, car :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N &= \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx + \frac{1}{N} - \int_1^N \frac{1}{x} dx \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x} \right) dx + \frac{1}{N}, \end{aligned}$$

avec, lorsque $n \leq x < n+1$:

$$0 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{x} = \frac{x-n}{x n} \leq \frac{1}{n^2},$$

donc :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \frac{1}{N},$$

avec $0 < a_n \leq \frac{1}{n^2}$, ce qui fait voir la convergence, grâce à $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$.

Théorème 2.9. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

Démonstration. Grâce au théorème de factorisation de Hadamard, et au fait que $\frac{1}{\Gamma(z)}$ est entière d'ordre ≤ 1 , avec des zéros simples en $z = 0, -1, -2, \dots$, nous pouvons représenter cette fonction sous la forme d'un produit de Weierstrass :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{Az+B} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}},$$

dans lequel il reste à déterminer les deux constantes $A, B \in \mathbb{C}$.

Mais si nous nous souvenons que $z \Gamma(z) \rightarrow 1$ quand $z \rightarrow 0$, nous trouvons $B = 0$, ou n'importe quel multiple entier de $2i\pi$, ce qui ne change rien.

Ensuite, assignons $z := 1$ et utilisons $\Gamma(1) = 1$:

$$\begin{aligned}
 e^{-A} &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\sum_{n=1}^N [\log(1+1/n) - 1/n]} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\sum_{n=1}^N [\log(n+1) - \log n] - \sum_{n=1}^N 1/n} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\log(N+1) - \sum_{n=1}^N 1/n} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\log(1+1/N) + \log N - \sum_{n=1}^N 1/n} \\
 &= e^{-\gamma}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, $A = \gamma + 2ik\pi$ pour un entier $k \in \mathbb{Z}$, mais comme $\Gamma(x)$ est réelle pour $x > 0$ réel, il faut $k = 0$, ce qui conclut. $\square$

Ces arguments montrent que $\frac{1}{\Gamma(z)}$ est essentiellement caractérisée, à des constantes normalisatrices près, comme la fonction holomorphe entière :

- qui a des zéros simples en $z = 0, -1, -2, \dots$ et ne s'annule nulle part ailleurs ;
- est d'ordre de croissance ≤ 1 .

Observons que $\sin \pi z$ a des propriétés analogues, excepté le fait qu'elle s'annule en *tous* les entiers $z = k \in \mathbb{Z}$. Cependant, tandis que $\sin \pi z$ jouit d'une propriété de croissance de la forme $\sin \pi z = O(e^{c|z|})$, l'Exercice 1 montre que tel n'est *pas* le cas pour $\frac{1}{\Gamma(z)}$.

3. La fonction $\zeta(s)$

La *fonction zêta* de Riemann est définie, pour $s \in \mathbb{C}$ complexe avec $\operatorname{Re} s > 1$, par la série :

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

convergente et définit, comme nous l'avons déjà vu dans le chapitre consacré aux produits infinis, une fonction holomorphe dans le demi-plan complexe $\{\operatorname{Re} s > 1\}$.

Comme la fonction $\Gamma(z)$ d'Euler, cette fonction $\zeta(s)$ de Riemann peut être prolongée méromorphiquement au plan complexe tout entier, avec un unique pôle, simple, en $s = 1$. En fait, il existe de nombreuses démonstrations de ce prolongement, et nous en présentons une qui dévoile une équation fonctionnelle importante satisfaite par $\zeta(s)$.

Toutefois, le prolongement de $\zeta(s)$ au plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier est plus délicat que celui de la fonction $\Gamma(z)$. La voie argumentative que nous choisissons relie $\zeta(s)$ et $\Gamma(z)$ à une autre fonction importante en théorie analytique des nombres. Commençons par quelques préliminaires.

D'après le cours d'*Analyse de Fourier*, on sait que la fonction $x \mapsto e^{-\pi x^2}$ — qui appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des fonctions à décroissance (très) rapide à l'infini — coïncide avec sa transformée de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi \xi x} dx = e^{-\pi \xi^2}.$$

Avec un paramètre réel $t > 0$, le changement de variable dans cette intégrale :

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{t}}$$

donne que la transformée de Fourier de la fonction $f(x) := e^{-\pi t x^2}$ est $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi \xi^2}{t}}$.

Rappelons aussi la *formule sommatoire de Poisson*, valable pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n),$$

qui donne ici :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t n^2} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{t}}.$$

Si donc nous introduisons la fonction ϑ définie, pour $t > 0$ réel, par :

$$\vartheta(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t},$$

nous voyons qu'elle satisfait l'équation fonctionnelle :

$$(3.1) \quad \vartheta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \vartheta\left(\frac{1}{t}\right).$$

L'information dont nous aurons besoin concerne la décroissance exponentielle de cette fonction :

$$\vartheta(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t},$$

lorsque $t \rightarrow \infty$, ainsi que son comportement singulier quand $t \xrightarrow{>} 0$.

Lemme 3.2. *Il existe une constante universelle $0 < C < \infty$ telle que :*

$$(0 \leq) \quad \vartheta(t) - 1 \leq C e^{-t} \quad (\forall t \geq 1),$$

et :

$$\vartheta(t) \leq C \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (\forall 0 < t \leq 1).$$

Démonstration. Comme $\{n^2 : n \geq 1\} \subset \{m \geq 1\}$, on a :

$$\begin{aligned} \vartheta(t) - 1 &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \leq 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi m t} \\ &= 2 e^{-\pi t} \left[1 + e^{-\pi t} + e^{-2\pi t} + e^{-3\pi t} + \dots \right] \\ &= 2 e^{-\pi t} \frac{1}{1 - e^{-\pi t}}, \end{aligned}$$

et pour $t \geq 1$, puisque $e^{-\pi t} \leq e^{-\pi}$, nous obtenons bien :

$$\vartheta(t) - 1 \leq 2 \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}.$$

Ensuite, grâce à l'équation fonctionnelle (3.1), pour $0 < t \leq 1$, d'où $1 \leq \frac{1}{t} < \infty$, en recyclant ce que nous venons de faire :

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= \frac{1}{\sqrt{t}} \vartheta\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{1}{t}}\right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 + 2 \frac{e^{-\pi \frac{1}{t}}}{1 - e^{-\pi \frac{1}{t}}}\right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 + 2 \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}\right). \end{aligned}$$

Tout ceci montre qu'on peut prendre comme constante universelle $C := 1 + 2 \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}$. $\square$

Nous sommes maintenant en position d'établir une relation importante entre les trois fonctions ζ , Γ , ϑ .

Théorème 3.3. *Pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} s > 1$, on a :*

$$\int_0^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1} \left[\frac{\vartheta(u) - 1}{2} \right] du = \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s).$$

Démonstration. Comme $\frac{\vartheta(u) - 1}{2}$ consiste en la sommation des termes $e^{-\pi n^2 u}$ pour $n = 1, \dots, \infty$, calculons les intégrales suivantes dans lesquelles nous effectuons le changement de variable $u = \frac{1}{\pi n^2} t$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} du &= \int_0^{\infty} \frac{\pi n^2}{(\pi n^2)^{\frac{s}{2}}} t^{\frac{s}{2}-1} e^{-t} \frac{dt}{\pi n^2} \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}} \frac{1}{n^s} \int_0^{\infty} t^{\frac{s}{2}-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}} \frac{1}{n^s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right). \end{aligned}$$

[Reconnaître Γ]

Les estimées du Lemme 3.2 justifient alors l'interversion entre sommation infinie et intégration dans le calcul conclusif suivant :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1} \left[\frac{\vartheta(u) - 1}{2} \right] du &= \int_0^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} \right) du \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} du \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}} \frac{1}{n^s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}} \zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right). \end{aligned}$$

$\square$

Au vu de cela, introduisons une certaine modification de la fonction ζ , appelée *fonction xi*, définie pour $\operatorname{Re} s > 1$ comme étant le résultat que nous venons d'obtenir :

$$\xi(s) := \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s),$$

et qui met en lumière une symétrie fondamentale.

Théorème 3.4. *Cette fonction $\xi(s)$ est holomorphe dans $\{\operatorname{Re} s > 1\}$ et possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier, holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, avec deux pôles simples en $s = 0$ et en $s = 1$.*

De plus, pour tout $s \in \mathbb{C}$:

$$\xi(s) = \xi(1 - s).$$

Bien entendu, en $s = 0$ et 1 , on a $\xi(0) = \infty = \xi(1)$.

Démonstration. Soit la fonction auxiliaire $\psi(u) := \frac{\vartheta(u)-1}{2}$, déjà considérée plus haut. L'équation fonctionnelle $\vartheta(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} \vartheta\left(\frac{1}{u}\right)$ se transmet à ψ :

$$2\psi(u) + 1 = \frac{1}{\sqrt{u}} \left[2\psi\left(\frac{1}{u}\right) + 1 \right],$$

c'est-à-dire :

$$\psi(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} \psi\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{1}{2}.$$

En partant du Théorème 3.3, découpons l'intégrale, insérons, changeons de variable, transformons, et calculons (patiemment) pour $\operatorname{Re} s > 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du \\ &= \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du \\ &= \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1} \left[\frac{1}{\sqrt{u}} \psi\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{1}{2} \right] du + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du \\ &= \int_0^1 \frac{u^{\frac{s}{2}}}{u\sqrt{u}} \psi\left(\frac{1}{u}\right) du + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(u^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} - u^{\frac{s}{2}-1} \right) du + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du \\ [u = \frac{1}{v}] \quad &= \int_1^\infty v^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \psi(v) dv + \frac{1}{2} \left[\frac{u^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}}{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} - \frac{u^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} \right]_0^1 + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \left(u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1} \right) \psi(u) du. \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\xi(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \left(u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1} \right) \psi(u) du.$$

Or puisque la fonction ψ décroît exponentiellement à l'infini, cette dernière intégrale à paramètre définit une fonction holomorphe entière, ce qui fait clairement voir que :

$$\xi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}),$$

avec deux pôles simples en $s = 0$ et en $s = 1$.

De plus, il est visible que $\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$ est invariant lorsqu'on remplace $s \mapsto 1-s$, et on se convainc aisément que l'intégrale est aussi invariante à travers $s \mapsto 1-s$. En définitive, on a bien $\xi(s) = \xi(1-s)$. $\square$

Grâce à cette identité qui montre la symétrie de $\xi(s)$ à travers la réflexion d'axe $\{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}$, nous pouvons facilement déduire les propriétés de la fonction zêta de Riemann : son prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, ainsi que son équation fonctionnelle célèbre.

Théorème 3.5. *La fonction $\zeta(s)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, avec un unique pôle simple en $s = 1$ de résidu égal à 1, et elle satisfait l'équation fonctionnelle :*

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{1}{2} \pi s\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

Démonstration. Le prolongement méromorphe de $\zeta(s)$ est fournit instantanément par la formule :

$$\zeta(s) = \pi^{\frac{s}{2}} \frac{\xi(s)}{\Gamma(\frac{s}{2})}.$$

Mais comme $\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}$ est holomorphe entière, d'après le Théorème 2.8, avec des zéros simples en $s = 0, -2, -4, \dots$, le pôle simple de $\xi(s)$ en $s = 0$ est annihilé par le zéro correspondant de $\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}$. Par conséquent, il ne reste, comme singularité pour $\zeta(s)$, que le pôle simple de ξ en $s = 1$.

Ensuite, l'équation fonctionnelle pour $\xi(s)$:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \xi(s) = \xi(1-s) = \pi^{\frac{-1+s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s),$$

donne :

$$\zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \zeta(1-s),$$

et il nous faut encore remplacer ici $\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)$. Or avec $z := \frac{1-s}{2}$, la formule de l'Exercice 3 :

$$\Gamma(z) = \pi^{\frac{1}{2}} 2^{1-2z} \frac{\Gamma(2z)}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)}$$

devient :

$$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}} 2^s \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)}.$$

Nous pouvons donc remplacer, réorganiser et appliquer au final la formule des compléments :

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\pi^{\frac{1}{2}} 2^s \Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)} \zeta(1-s) \\ &= 2^s \pi^{s-1} \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)} \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \\ &= 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\pi \frac{s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s). \end{aligned}$$

[Théorème 2.6]

$\square$

4. Exercices

Exercice 1. (a) Montrer qu'il n'existe pas de constantes $0 < c_1, c_2 < \infty$ telles que :

$$\left| \frac{1}{\Gamma(z)} \right| \leq c_1 e^{c_2 |z|} \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Indication: Aux points $z = -k - \frac{1}{2}$ avec $k \geq 1$ entier, constater que :

$$\left| \frac{1}{\Gamma(-k - \frac{1}{2})} \right| \geq \frac{k!}{\pi}.$$

(b) Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe entière $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ de croissance $|F(z)| \leq c_1 e^{c_2 |z|}$ ayant des zéros simples aux entiers négatifs $z = 0, -1, -2, \dots$, et qui ne s'annule nulle part ailleurs.

Exercice 2. Montrer que la fonction Gamma (réelle) d'Euler :

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0),$$

est *logarithmiquement convexe*, c'est-à-dire satisfait :

$$\Gamma'(x) \Gamma'(x) \leq \Gamma(x) \Gamma''(x) \quad (\forall x > 0).$$

Exercice 3. (a) Montrer que la formule classique de Wallis peut s'écrire sous la forme :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} (2n+1)^{1/2}.$$

(b) En déduire l'identité satisfaite par la fonction méromorphe Gamma :

$$\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}} 2^{1-2z} \Gamma(2z) \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Exercice 4. EE

Exercice 5. EE