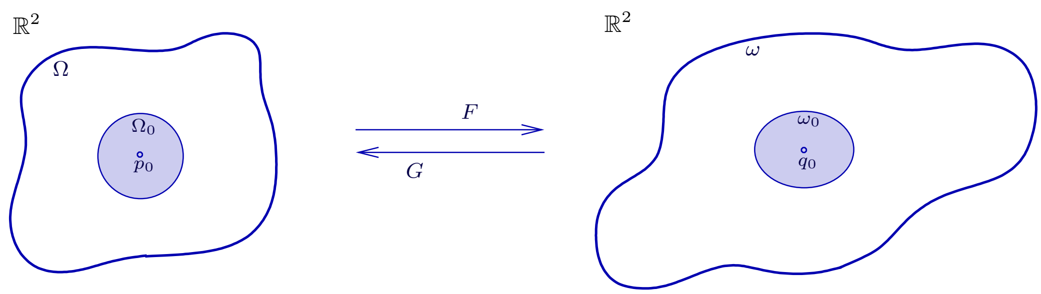
Théorème de l'application conforme de Riemann

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

2. Théorèmes d'inversion locale et globale dans $\mathbb{R}^2$

Dans deux plans euclidiens distincts pour lesquels on notifie des coordonnées courantes $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$ et $\mathbb{R}^2 \ni (u, v)$, soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à gauche et soit un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^2$ à droite.



Soit un entier $k \geqslant 1$, et soit une application de classe $\mathscr{C}^k$:

$$F\colon \quad \Omega \longrightarrow \omega.$$

Soit un point fixé $p_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, et soit $q_0 := F(p_0) =: (u_0, v_0)$ le point-image.

Si nous écrivons les deux composantes de F comme :

$$F(x,y) \;=:\; \big(U(x,y),\, V(x,y)\big),$$

la *matrice jacobienne* de F en un point quelconque $(x, y) \in \Omega$ est :

$$\mathsf{Jac}_F(x,y) \;:=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix}(x,y).$$

Les résultats de cette section, présentés ici à titre de rappel et par souci de complétude dans la pensée, seront considérés comme provenant d'un autre cours de mathématiques, et par conséquent, nous nous dispenserons de les redémontrer. Puisqu'il importe au plus haut point d'en comprendre le contenu géométrique sous-jacent, nous tracerons des figures afin d'éveiller l'intuition du lecteur au sujet de la nature des *transformations ponctuelles* entre ouverts de $\mathbb{R}^2$. Il faut s'imaginer des taches d'huile extensibles et compressibles, se déformant sans déchirement dans le plan.

Théorème 2.1. [d'inversion locale dans $\mathbb{R}^2$] *Si* $\mathsf{det\,Jac}_F(p_0) \neq 0$*, à savoir si :*

$$0 \neq \begin{vmatrix} U_x & U_y \\ V_x & V_y \end{vmatrix} (p_0),$$

alors il existe un voisinage ouvert $p_0 \in \Omega_0 \subset \Omega$ *en restriction auquel :*

$$F\big|_{\Omega_0} \colon \quad \Omega_0 \xrightarrow{\sim} F(\Omega_0) =: \omega_0,$$

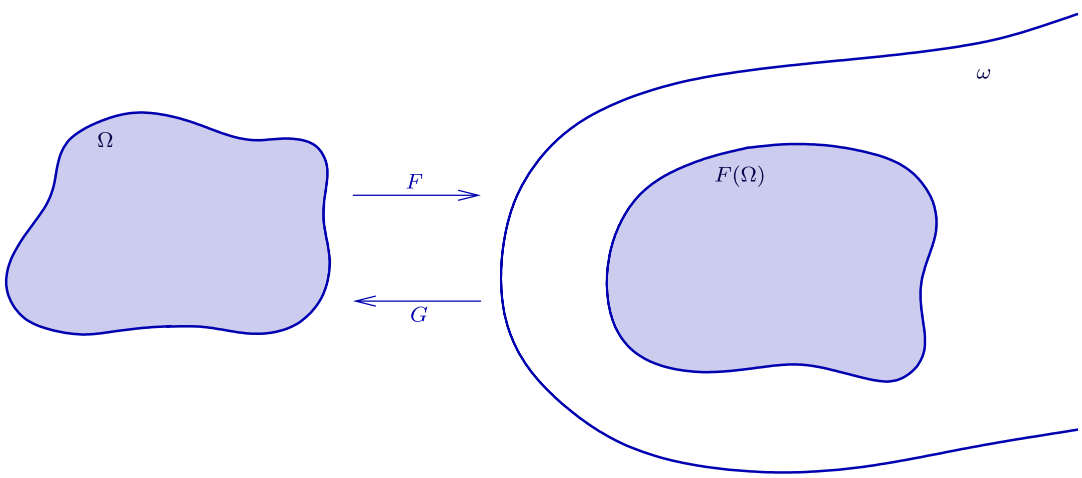
est bijective, homéomorphe sur son image, et d'application inverse :

$$\Omega_0 \xleftarrow{\sim} \omega_0 \quad : G,$$

elle aussi de classe $\mathscr{C}^k$ *et de déterminant jacobien non nul :*

$$0 \neq \mathsf{det\,Jac}_G(q_0). \qquad \square$$

Principalement, l'argument repose sur un théorème itératif de type « *point fixe à la Picard* ». Si la condition de non-annulation du déterminant jacobien est satisfaite en tout point, le résultat se globalise.



Théorème 2.2. [d'inversion globale dans $\mathbb{R}^2$] *Si* $F \colon \Omega \longrightarrow \omega$ *est une application de classe* $\mathscr{C}^{k \geqslant 1}$ *entre deux ouverts* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *et* $\omega \subset \mathbb{R}^2$ *qui est* injective *et satisfait :*

$$0 \neq \mathsf{det\,Jac}_F(x,y) \qquad (\forall\,(x,y) \in \Omega),$$

alors F *est un homéomorphisme* $\Omega \xrightarrow{\sim} F(\Omega) \subset \omega$ *sur son image, d'inverse :*

$$\Omega \xleftarrow{\sim} F(\Omega) \quad : G,$$

aussi de classe $\mathscr{C}^k$*, ayant aussi un déterminant jacobien non nul :*

$$0 \neq \mathsf{det\,Jac}_G(u,v),$$

en tout point $(u,v) \in F(\Omega)$. $\square$

On dit alors que $F \colon \Omega \xrightarrow{\sim} \omega$ est un $\mathscr{C}^k$-*difféomorphisme* de Ω sur ω.

3. Inversion holomorphe

Maintenant, quand $F = f \in \mathscr{O}(\Omega)$ est une application réelle entre ouverts de $\mathbb{R}^2$ induite par une fonction holomorphe, décomposée en parties réelle et imaginaire sous la forme :

$$f(z) \,=\, u(x,y) + i\, v(x,y),$$

les équations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} && \text{en abrégé} && u_x \,=\, v_y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\,\frac{\partial v}{\partial x} && \text{en abrégé} && u_y \,=\, -\,v_x, \end{aligned}$$

permettent d'écrire une expression de la dérivée de f :

$$f'(z) \,=\, u_z + i\, v_z \,=\, \tfrac{1}{2}\, u_x - \tfrac{i}{2}\, u_y + \tfrac{i}{2}\, v_x + \tfrac{1}{2}\, v_y \,=\, u_x - i\, u_y,$$

et impliquent, comme nous l'avons déjà vu, que le déterminant jacobien de la transformation réelle associée $F(x,y) := \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ prend une forme simplifiée agréable :

$$\begin{aligned} \mathsf{det\,Jac}_F &= u_x\, v_y - u_y\, v_x \\ &= \big(u_x\big)^2 + \big(u_y\big)^2 \\ &= \big|f'(z)\big|^2. \end{aligned}$$

Rappelons que les fonctions holomorphes sont $\mathscr{C}^\infty$, donc les deux Théorèmes 2.1 et 2.2 s'appliquent aux fonctions holomorphes $f = F$, vues comme applications réelles à deux variables. Mais naturellement, la question de pose de savoir si l'inverse réel local ou global G dont nous venons de rappeler l'existence correspond à une fonction *holomorphe*. La réponse est positive, et elle nécessite un auxiliaire technique.

Lemme 3.1. *Soient trois ouverts $\Omega, \omega, \varpi \subset \mathbb{R}^2$ et soient deux applications $\mathscr{C}^\infty$ composables :*

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{\quad F \quad} & \omega & \xrightarrow{\quad G \quad} & \varpi \\[1ex] (x,y) & \longmapsto & F(x,y) & & \\ & & (u,v) & \longmapsto & G(u,v). \end{array}$$

Alors leurs dérivées partielles complexes par rapport aux variables $z = x + i\, y$ de Ω et $w = u + i\, v$ de ω satisfont :

$$\begin{aligned} \big(G \circ F\big)_z &= G_w \cdot F_z + G_{\overline{w}} \cdot \overline{F}_z, \\ \big(G \circ F\big)_{\overline{z}} &= G_w \cdot F_{\overline{z}} + G_{\overline{w}} \cdot \overline{F}_{\overline{z}}. \end{aligned}$$

Bien entendu, la classe de différentiabilité $\mathscr{C}^1$ suffit pour que l'énoncé soit vrai.

Démonstration. Pour traiter la première ligne, notons parties réelle et imaginaire de F comme plus haut :

$$F(x,y) \,=\, U(x,y) + i\, V(x,y),$$

et dérivons la composée $G \circ F$ par rapport à z :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\Big[G \circ F(x,y)\Big] &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) G\big(U(x,y), V(x,y)\big) \\
&= \frac{1}{2}\Big[G_u\,U_x + G_v\,V_x - i\,G_u\,U_y - i\,G_v\,V_y\Big].
\end{aligned}
$$

Ensuite, utilisons :

$$
\begin{aligned}
\partial_u &= \partial_w + \partial_{\overline{w}}, & \qquad \partial_x &= \partial_z + \partial_{\overline{z}}, \\
\partial_v &= i\,\partial_w - i\,\partial_{\overline{w}}, & \qquad \partial_y &= i\,\partial_z - i\,\partial_{\overline{z}},
\end{aligned}
$$

pour remplacer puis calculer de manière détaillée :

$$
\begin{aligned}
\big(G \circ F\big)_z &= \tfrac{1}{2}\Big[\big(G_w + G_{\overline{w}}\big)\big(U_z + U_{\overline{z}}\big) + \big(i\,G_w - i\,G_{\overline{w}}\big)\big(V_z + V_{\overline{z}}\big) - \\
&\qquad - i\,\big(G_w + G_{\overline{w}}\big)\big(i\,U_z - i\,U_{\overline{z}}\big) - i\,\big(i\,G_w - i\,G_{\overline{w}}\big)\big(i\,V_z - i\,V_{\overline{z}}\big)\Big] \\
&= \tfrac{1}{2}\Big[G_w\,U_z + \underline{G_w\,U_{\overline{z}}}_{\circ} + G_{\overline{w}}\,U_z + \underline{G_{\overline{w}}\,U_{\overline{z}}}_{\circ} + i\,G_w\,V_z + \underline{i\,G_w\,V_{\overline{z}}}_{\circ} - i\,G_{\overline{w}}\,V_z - \underline{i\,G_{\overline{w}}\,V_{\overline{z}}}_{\circ} + \\
&\qquad + G_w\,U_z - \underline{G_w\,U_{\overline{z}}}_{\circ} + G_{\overline{w}}\,U_z - \underline{G_{\overline{w}}\,U_{\overline{z}}}_{\circ} + i\,G_w\,V_z - \underline{i\,G_w\,V_{\overline{z}}}_{\circ} - i\,G_{\overline{w}}\,V_z + \underline{i\,G_{\overline{w}}\,V_{\overline{z}}}_{\circ}\Big] \\
&= G_w\,U_z + G_{\overline{w}}\,U_z + i\,G_w\,V_z - i\,G_{\overline{w}}\,V_z \\
&= G_w\,\big(U_z + i\,V_z\big) + G_{\overline{w}}\,\big(U_z - i\,V_z\big) \\
&= G_w\,F_z + G_{\overline{w}}\,\overline{F}_z.
\end{aligned}
$$

Le traitement de la deuxième ligne est évidemment en tous points analogue. □

Maintenant, en revenant à l'inversion (locale ou globale), écrivons l'identité :

$$
z \equiv G\big(f(z)\big),
$$

qui exprime, que la fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, vue comme application réelle, admet un difféomorphisme inverse *réel* :

$$
\Omega \overset{\sim}{\longleftarrow} f(\Omega) \quad : G,
$$

et appliquons le Lemme 3.1 pour dériver cette identité par rapport à $\overline{z}$:

$$
\begin{aligned}
0 &\equiv G_w \cdot \underline{f_{\overline{z}}}_{\circ} + G_{\overline{w}}\,\overline{f}_{\overline{z}} \\
&\equiv 0 + G_{\overline{w}}\,\overline{f}_{\overline{z}}.
\end{aligned}
$$

Or comme les fonctions holomorphes sont localement des séries entières $\sum a_n\,(z - z_0)^n$ pour lesquelles conjugaison et dérivation commutent, on reconnaît :

$$
\overline{f}_{\overline{z}} = \overline{f_z} \neq 0 \qquad \text{(hypothèse)},
$$

et donc :

$$
0 \equiv G_{\overline{w}} \qquad (\forall\, w \in f(\Omega)),
$$

ce qui montre que l'inverse G de la fonction holomorphe f est bel est bien *holomorphe* lui aussi ! Énonçons ce résultat avec cette information supplémentaire agréable.

Théorème 3.2. [d'inversion holomorphe locale et globale] *Soit* $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe définie dans un ouvert* $\Omega \subset \mathbb{C}$.

(1) *En tout point* $z_0 \in \Omega$ *où* $f'(z_0) \neq 0$*, il existe un (petit) voisinage ouvert* $z_0 \in \Omega_0 \subset \Omega$ *en restriction auquel* $f|_{\Omega_0}\colon \Omega_0 \xrightarrow{\sim} f(\Omega_0)$ *établit un* $\mathscr{C}^\infty$*-difféomorphisme sur son image* $f(\Omega_0)$*, qui a pour inverse :*

$$\Omega_0 \xleftarrow{\sim} f\big(\Omega_0\big) \quad : g,$$

une application $\mathscr{C}^\infty$ holomorphe *dans* $f(\Omega_0)$ *satisfaisant* $g'(w_0) \neq 0$ *au point-image* $w_0 := f(z_0)$.

(2) *Si* $f'(z) \neq 0$ *en tout point* $z \in \Omega$ *et si de plus* f *est* globalement injective*, alors* f *établit un* $\mathscr{C}^\infty$*-difféomorphisme* $\Omega \xrightarrow{\sim} f(\Omega)$ *sur son image, et admet pour inverse une fonction* holomorphe :

$$\Omega \xleftarrow{\sim} f(\Omega) \quad : \ g,$$

qui satisfait aussi :

$$0 \neq g'(w) \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\, w \in f(\Omega))}. \qquad \square$$

Ces faits conduisent naturellement à une conceptualisation nouvelle.

Définition 3.3. Un *biholomorphisme :*

$$f\colon \quad \Omega \xrightarrow{\sim} \omega$$

entre deux ouverts $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $\omega \subset \mathbb{C}$ est une application satisfaisant :

(1) $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe et établit une bijection $\Omega \xrightarrow{\sim} \omega$;

(2) $f'(z) \neq 0$ quel que soit $z \in \Omega$;

(3) l'application inverse $\Omega \xleftarrow{\sim} \omega : f^{-1}$ est aussi holomorphe et elle vérifie de plus $\big(f^{-1}\big)'(w) \neq 0$ quel que soit $w \in \omega$.

En fait, la non-annulation de la dérivée de $f^{-1}(w)$ provient d'une dérivation de l'identité $z \equiv f^{(-1)}\big(f(z)\big)$.

Nous venons d'observer ci-dessus que la condition **(3)** est conséquence de **(2)**. Par ailleurs, puisque dans un cadre réel pour un difféomorphisme $F\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$, les deux conditions :

(1) F injective,

(2) $\det \mathsf{Jac}_F \neq 0$,

sont indépendantes et nécessaires pour que le Théorème 2.2 soit vrai — exercice : trouver un exemple ! —, on pourrait croire que les deux conditions ci-dessus :

(1) f injective,

(2) $f' \neq 0$,

sont elles aussi simultanément nécessaires pour avoir un biholomorphisme, mais il n'en est rien !

Un des objectifs de ce qui va suivre est en effet de démontrer qu'on peut se passer de **(2)** dans cette définition ! À nouveau, la prestidigitation holomorphe va escamoter une hypothèse :

$$\boxed{f \text{ holomorphe injective} \quad \Longrightarrow \quad f' \neq 0 \text{ partout.}}$$

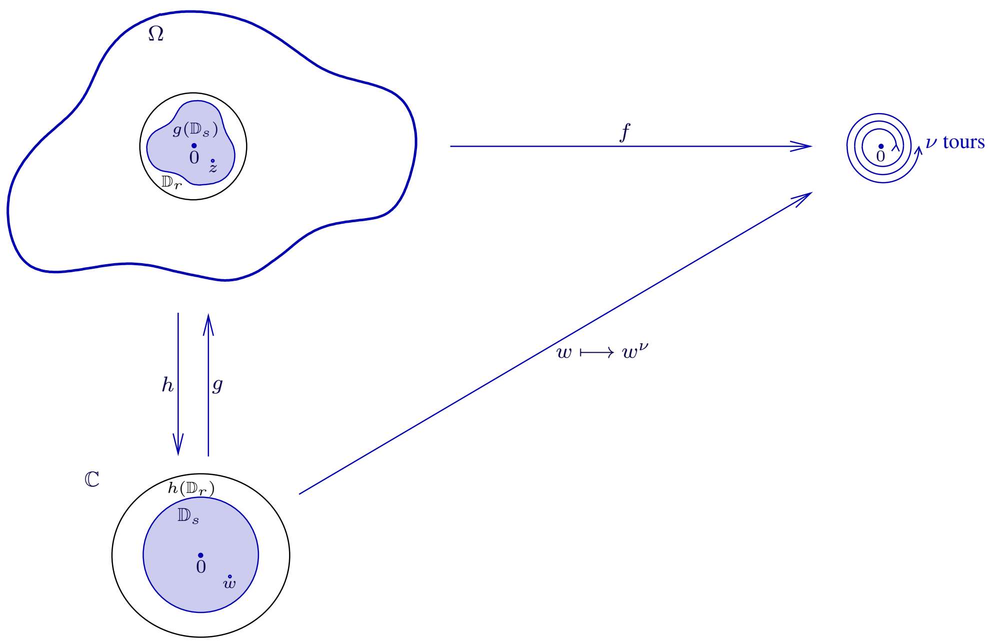
Mais avant de lever la baguette magique, un préliminaire s'impose.

4. Forme normale locale d'une fonction holomorphe

Quand on développe en série entière convergente une fonction holomorphe non identiquement nulle au voisinage de l'origine :

$$a_\nu\, z^\nu + a_{\nu+1}\, z^{\nu+1} + a_{\nu+2}\, z^{\nu+2} + \cdots \qquad\qquad (a_\nu \neq 0),$$

il y a toujours un premier monôme non nul, suivi en général d'une infinité de puissances supérieures de z. Le résultat paradoxal suivant montre qu'on peut toujours les « engloutir » toutes dans la première puissance, grâce à un changement de coordonnée holomorphe, c'est-à-dire grâce à un biholomorphisme.



Théorème 4.1. [Normalisation locale] *Dans un ouvert $0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$ contenant l'origine, soit une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ avec $f(0) = 0$ et $f \not\equiv 0$ près de 0, et soit $1 \leqslant \nu < \infty$ son ordre d'annulation en 0 :*

$$\nu \,:=\, \nu_f(0).$$

Alors il existe un rayon $s > 0$ et un biholomorphisme fixant 0 :

$$g\colon\quad \mathbb{D}_s(0) \xrightarrow{\sim} g\big(\mathbb{D}_s(0)\big) \,\subset\, \Omega,$$

tels que :

$$f\big(g(w)\big) \,\equiv\, w^\nu \qquad\qquad (\forall\, w \in \mathbb{D}_s(0)).$$

Autrement dit, après un changement de coordonnée holomorphe locale, en notant à nouveau z la coordonnée (au lieu de w), toute fonction holomorphe non identiquement nulle s'annulant en 0 s'écrit sous la forme normale simple :

$$f(z) \,=\, z^\nu \qquad\qquad (\nu = \nu_f(0) \geqslant 1),$$

dans laquelle tous les termes d'ordre supérieur de la série entière ont disparu, engloutis gloutonnement !

Démonstration. Factorisons le développement en série entière par la puissance minimale de z :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=\nu}^{\infty} a_n\, z^n && (a_\nu \neq 0) \\ &= z^\nu \big(a_\nu + \mathrm{O}(z)\big) \\ &=: z^\nu\, F(z) && (F(0) \neq 0). \end{aligned}$$

Choisissons un rayon $r > 0$ assez petit pour que $F \neq 0$ sur $\mathbb{D}_r$, ce qui est possible par continuité, car $F(0) = a_\nu \neq 0$.

Donc une fonction $\log F(z)$ holomorphe dans $\mathbb{D}_r$ (simplement connexe) existe, et on peut écrire au moyen d'une nouvelle fonction holomorphe $h \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_r)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \Big(z\, e^{\frac{1}{\nu} \log F(z)}\Big)^\nu \\ &=: \big(h(z)\big)^\nu. \end{aligned}$$

Avec ce choix de racine ν-ième cohérent avec le choix du logarithme, il est clair que $h(0) = 0$ et que :

$$\frac{d}{dz}\, h(z)\Big|_{z=0} = e^{\frac{1}{\nu} \log F(0)} = \big(a_\nu\big)^{\frac{1}{\nu}} \neq 0,$$

et le Théorème 3.2 **(1)** assure qu'en diminuant au besoin $r > 0$, la fonction $h\colon \mathbb{D}_r \xrightarrow{\sim} h\big(\mathbb{D}_r\big)$ établit un biholomorphisme.

Comme sur la figure, soit alors $s > 0$ assez petit pour que $\mathbb{D}_s(0) \subset h\big(\mathbb{D}_r\big)$. En notant :

$$g := h^{-1}\big|_{\mathbb{D}_s},$$

l'équation :

$$f(z) = \big(h(z)\big)^\nu \qquad\qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}_r),$$

dans laquelle on remplace $z = g(w)$ avec $w \in \mathbb{D}_s(0)$ offre la conclusion :

$$\begin{aligned} f\big(g(w)\big) &= \Big(h\big(g(w)\big)\Big)^\nu \\ &\equiv w^\nu. \end{aligned}$$

□

5. Multiplicités locales et théorème de l'application ouverte

Étant donné une fonction holomorphe quelconque $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ ne contenant pas forcément 0, le théorème précédent s'applique en localisant l'étude au voisinage de *tout* point $z_0 \in \Omega$, à condition de translater z_0 pour qu'il devienne l'origine et de soustraire $f(z_0)$:

$$\varphi(z) := f(z + z_0) - f(z_0).$$

Puisque cette fonction holomorphe s'annule en $z = 0$, on peut parler de son ordre d'annulation en $z = 0$.

Définition 5.1. La *multiplicité locale* d'une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ en un point quelconque $z_0 \in \Omega$ au voisinage duquel elle n'est pas constante est l'entier :

$$\mu_f(z_0) := \nu_{f - f(z_0)}(z_0) = \nu_\varphi(0).$$

On a donc toujours, si $f \not\equiv 0$ au voisinage de z_0 :

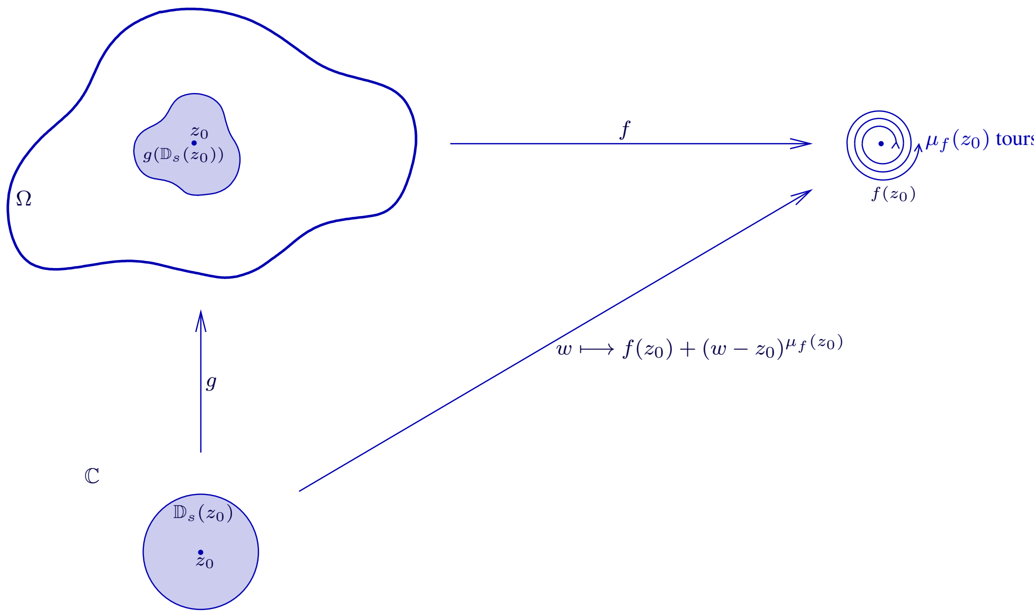
$$1 \leqslant \mu_f(z_0) < \infty.$$

Observons au passage que :

$$\Big(0 \neq f'(z_0) \quad\Longleftrightarrow\quad \mu_f(z_0) = 1\Big) \quad\Longrightarrow\quad 0 \neq f'(z) \text{ pour } z \text{ proche de } z_0$$
$$\Longrightarrow\quad \mu_f(z) = 1 \text{ pour } z \text{ proche de } z_0,$$

grâce à une lecture du développement :

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{n=\mu_f(z_0)}^{\infty} \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(z_0)\, \big(z - z_0\big)^n.$$



Théorème 5.2. *Dans un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit une fonction holomorphe* non constante $f \in \mathscr{O}(\Omega)$*. Alors en tout point $z_0 \in \Omega$, la multiplicité locale de f est finie :*

$$1 \leqslant \mu_f(z_0) < \infty,$$

et elle se lit dans le développement en série entière :

$$f(z) - f(z_0) = \big(z - z_0\big)^{\mu_f(z_0)} \Big[a_0 + a_1\,\big(z - z_0\big) + \cdots\Big] \qquad (a_0 \neq 0).$$

De plus, il existe un rayon $s > 0$ petit et un biholomorphisme fixant z_0 :

$$g\colon \quad \mathbb{D}_s(z_0) \stackrel{\sim}{\longrightarrow} g\big(\mathbb{D}_s(z_0)\big) \subset \Omega$$

tels que :

$$f\big(g(w)\big) \equiv f(z_0) + \big(w - z_0\big)^{\mu_f(z_0)} \qquad (\forall\, w \in \mathbb{D}_s(z_0)).$$

Autrement dit, après un changement de coordonnée holomorphe locale au voisinage de z_0, en notant à nouveau z la coordonnée (au lieu de w), on peut voir la fonction f comme étant simplement de la forme :

$$f(z) = f(z_0) + \big(z - z_0\big)^{\mu_f(z_0)},$$

sans aucun terme d'ordre supérieur.

Preuve. La fonction translatée :

$$\varphi(z) \;=\; f(z+z_0)-f(z_0)$$

satisfait $\varphi(0)=0$ et $\nu_\varphi(0)=\mu_f(z_0)$. Le Théorème 4.1 qui précède fournit alors un biholomorphisme local $\psi\colon \mathbb{D}_s(0) \xrightarrow{\sim} \psi\big(\mathbb{D}_s(0)\big)$ avec $\psi(0)=0$ tel que :

$$f\big(\psi(\zeta)+z_0\big)-f(z_0) \;=\; \varphi\big(\psi(\zeta)\big) \;=\; \zeta^{\mu_f(z_0)} \qquad\qquad (\forall\,\zeta\in\mathbb{D}_s(0)).$$

Translatons à présent la variable :

$$\zeta \;=:\; w-z_0,$$

et abrégeons :

$$\psi\big(w-z_0\big)+z_0 \;=:\; g(w),$$

pour obtenir comme annoncé :

$$f\big(g(w)\big)-f(z_0) \;=\; \big(w-z_0\big)^{\mu_f(z_0)}. \qquad \square$$

Juste pour le plaisir, voici un dernier corollaire de la normalisabilité locale des fonctions holomorphes. Rappelons qu'une application $\tau\colon X \longrightarrow Y$ entre espaces topologiques est dite *ouverte* si l'image par τ de tout ouvert de X est encore un ouvert de Y. On montre (exercice de révision) qu'il suffit que cela soit satisfait localement au voisinage de chaque point $x\in X$.

Théorème 5.3. [de l'application ouverte] *Une application holomorphe non constante $f\in\mathscr{O}(\Omega)$ dans un ouvert connexe $\Omega\subset\mathbb{C}$ est toujours* ouverte.

Preuve. D'après ce qui précède, cela revient à vérifier que chaque application normalisée :

$$z \;\longmapsto\; z^\mu,$$

où $\mu\geqslant 1$ est un entier, est ouverte en 0, ce qui est manifestement vrai, puisqu'un (petit) disque centré en 0 de rayon $r>0$ est envoyé surjectivement sur le disque ouvert de rayon strictement positif $r^\mu>0$. $\square$

6. Fonctions holomorphes injectives : théorème fondamental

Tout le décor est en place, maintenant, pour lever le rideau sur un phénomène exceptionnel : l'injectivité, dans l'univers holomorphe, implique la non-annulation de la dérivée, ce qui est faux dans le monde réel, comme le montre l'exemple simple de $\mathbb{R}\ni x\longmapsto x^3\in\mathbb{R}$.

Théorème 6.1. *Soit une fonction $f\in\mathscr{O}(\Omega)$ holomorphe dans un ouvert $\Omega\subset\mathbb{C}$. Si f est* localement injective *en un point $z_0\in\Omega$ au sens où il existe un voisinage ouvert $z_0\in\Omega_0\subset\Omega$ en restriction auquel $f\big|_{\Omega_0}$ est injective, alors $\mu_f(z_0)=1$, c'est-à-dire $f'(z_0)\neq 0$.*

Démonstration. Comme f est non constante, on sait que $1\leqslant\mu_f(z_0)<\infty$. Supposons par l'absurde que $2\leqslant\mu_f(z_0)$. Alors un changement biholomorphe (donc bijectif) de coordonnée locale fourni par le Théorème 5.2 normalise :

$$f\big(g(w)\big) \;=\; f(z_0)+\big(w-z_0\big)^{\mu_f(z_0)}.$$

Mais pour $\mu\geqslant 2$, l'application $w-z_0\longmapsto\big(w-z_0\big)^\mu$ n'est *jamais* injective, comme on le voit en passant aux coordonnées polaires $w=z_0+r\,e^{i\theta}$ avec $r>0$ petit et avec $0\leqslant\theta<2\pi$, puisque c'est :

$$r\,e^{i\theta} \;\longmapsto\; r^\mu\,e^{i\mu\theta},$$

et l'application $\theta \longmapsto \mu\,\theta$ du cercle unité $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dans lui-même est *non* injective, puisque tout point possède exactement $\mu \geqslant 2$ préimages. □

Être globalement injectif implique être localement injectif, n'est-ce pas ? Donc un corollaire direct — et spectaculaire ! — est le :

Théorème 6.2. *Si une fonction holomorphe* $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, *définie dans un ouvert* $\Omega \subset \mathbb{C}$, *est* globalement injective, *alors :*

$$\boxed{f'(z) \neq 0} \qquad (\forall\, z \in \Omega).$$

Preuve. Le théorème qui précède donne $\mu_f(z) = 1$, en *tout* point, et nous avons vu plus haut que ceci équivaut à $f'(z) \neq 0$. □

Si nous revenons à la Définition 3.3, nous constatons — enfin ! que la condition **(2)** peut être éliminée.

Voici ce qu'il faut retenir.

Théorème 6.3. [Fondamental] *Si une fonction holomorphe* $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie dans un ouvert* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *est* injective, *alors elle établit un biholomorphisme global sur son image :*

$$f\colon \quad \Omega \xrightarrow{\sim} f(\Omega).$$ □

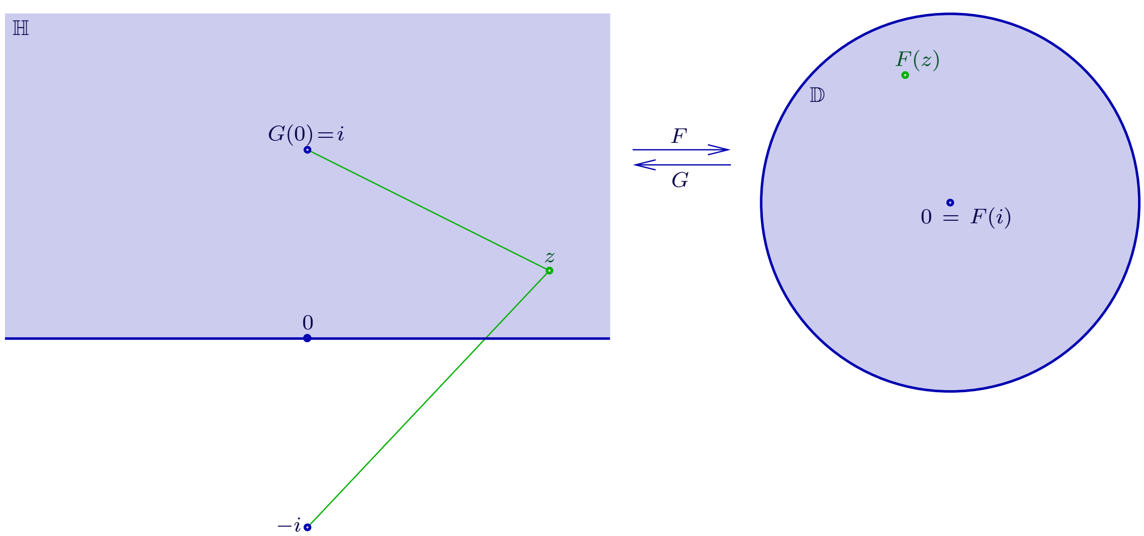
7. Équivalence entre le disque unité $\mathbb{D}$ et le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$

Le *demi-plan de Poincaré* consiste en les points du plan complexe dont la partie imaginaire est strictement positive :

$$\mathbb{H} := \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{Im}\, z > 0\big\}.$$

Un fait mathématique remarquable et surprenant est que $\mathbb{H}$ est biholomorphe au disque unité $\mathbb{D}$, grâce à des formules explicites simples. Introduisons en effet les deux applications rationnelles :

$$F(z) := \frac{i-z}{i+z} \qquad \text{et} \qquad G(w) := i\,\frac{1-w}{1+w}.$$



Théorème 7.1. *L'application* $F\colon \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ *établit un* biholomorphisme *entre* $\mathbb{D}$ *et* $\mathbb{H}$ *d'inverse* $\mathbb{H} \xleftarrow{\sim} \mathbb{D} : G$.

Démonstration. Commençons par observer (visuellement) que F et G sont holomorphes dans $\mathbb{H}$ et $\mathbb{D}$, puisque leurs uniques pôles $-i \notin \mathbb{H}$ et $-1 \notin \mathbb{D}$ n'y appartiennent pas.

Comme la figure l'indique, un point quelconque $z \in \mathbb{H}$ est toujours plus proche de i que de $-i$, donc on a une inégalité :

$$\big|F(z)\big| \;=\; \frac{|i-z|}{|i+z|} \;<\; 1,$$

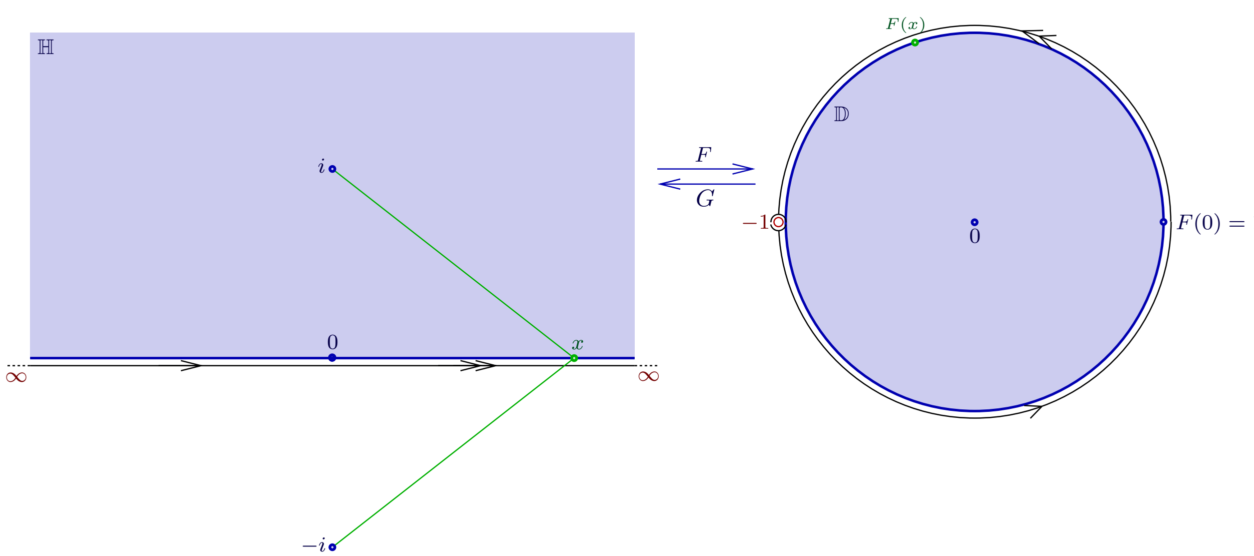
qui fait voir géométriquement que F envoie $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{D}$.

Pour voir que G envoie inversement $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{H}$, en notant $w = u + i\,v \in \mathbb{D}$, vérifions par un calcul la positivité de :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} G(w) &= \operatorname{Re} \frac{1-u-i\,v}{1+u+i\,v} \\
&= \operatorname{Re} \frac{(1-u-i\,v)(1+u-i\,v)}{(1+u)^2+v^2} \\
&= \frac{1-u^2-v^2}{(1+u)^2+v^2} \\
{\scriptstyle [u+i\,v\in\mathbb{D}]} \qquad &> 0.
\end{aligned}$$

Enfin, vérifions que $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$ et que $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathbb{H}}$, ce qui établira la bijectivité et conclura :

$$\begin{aligned}
F\big(G(w)\big) &= \frac{i - i\,\frac{1-w}{1+w}}{i + i\,\frac{1-w}{1+w}} = \frac{1+w-1+w}{1+w+1-w} = w, \\
G\big(F(z)\big) &= i\,\frac{1-\frac{i-z}{i+z}}{1+\frac{i-z}{i+z}} = i\,\frac{i+z-i+z}{i+z+i-z} = z. \qquad \square
\end{aligned}$$



Analysons maintenant le comportement de F au *bord* $\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$ du demi-plan supérieur. Comme la seule singularité de F est $z = -i$, sa restriction $F\big|_{\mathbb{R}}$ est continue, et même $\mathscr{C}^\infty$.

À présent, les distances à $+i$ et à $-i$ d'un point réel quelconque $x \in \mathbb{R}$ sont *égales*, donc :

$$\big|F(x)\big| \;=\; \frac{|i-x|}{|i+x|} \;=\; 1,$$

ce qui fait voir géométriquement que F envoie $\partial\mathbb{H}$ dans le cercle unité $\partial\mathbb{D}$. Mais son image ne recouvre pas tout !

En effet, écrivons :

$$F(x) \;=\; \frac{i-x}{i+x} \;=\; \frac{(i-x)(-i+x)}{1+x^2} \;=\; \frac{1-x^2}{1+x^2} + i\,\frac{2\,x}{1+x^2},$$

et paramétrons la droite réelle avec $t \in \,]-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$x \;:=\; \tan t.$$

Des réminiscences trigonométriques :

$$\begin{aligned}
\sin 2t \;&=\; 2\sin t\cos t \;=\; 2\,\frac{\sin t}{\cos t}\cos^2 t \;=\; \frac{2\tan t}{1+\tan^2 t} \;=\; \frac{2\,x}{1+x^2},\\
\cos 2t \;&=\; \cos^2 t - \sin^2 t \;=\; \bigg(1-\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\bigg)\cos^2 t \;=\; \frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t} \;=\; \frac{1-x^2}{1+x^2},
\end{aligned}$$

permettent alors de représenter :

$$F(x) \;=\; \cos 2t + i\sin 2t \;=\; e^{2it} \qquad\qquad (-\tfrac{\pi}{2}<t<\tfrac{\pi}{2}),$$

sous une forme qui montre clairement que l'image $F(\mathbb{R})$ recouvre le cercle unité *excepté le seul point* $\{-1\}$ — qui correspondrait à $t = \pm\frac{\pi}{2}$ — et que F établit un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme :

$$F\colon\, \mathbb{R} \;\xrightarrow{\sim}\; \partial\mathbb{D}\big\backslash\{-1\}.$$

Intuitivement, la préimage de ce point manquant -1 devrait être un certain couple de « *points à l'infini* » de $\mathbb{R}$, car :

$$-\,1 \;=\; \lim_{|x|\to\infty} \frac{i-x}{i+x}.$$

Pour terminer, observons que lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, l'image $F(x)$ voyage dans le sens trigonométrique le long de $\partial\mathbb{D}$.

8. Lemme de Schwarz

Rappelons qu'une *rotation* de $\mathbb{C}$ fixant l'origine est une transformation de la forme :

$$z \;\longmapsto\; e^{i\theta}\,z,$$

avec une constante $\theta \in \mathbb{R}$, appelée *angle de rotation*, et définie à un multiple entier de 2π près. L'énonciation et la démonstration du résultat suivant sont simples, mais les conséquences auront une grande portée.

Lemme 8.1. [de Schwarz] *Soit une fonction holomorphe $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ du disque unité à valeurs dans lui-même. Si $f(0)=0$, alors :*

(1) $\big|f(z)\big| \leqslant |z|$ *pour tout $z \in \mathbb{D}$;*

(2) *si $\big|f(z_0)\big| = |z_0|$ en un $z_0 \in \mathbb{D}$ avec $z_0 \neq 0$, alors $f(z) = e^{i\theta}\,z$ est une rotation ;*

(3) $\big|f'(0)\big| \leqslant 1$, *et s'il y a égalité $\big|f'(0)\big| = 1$, alors $f(z) = e^{i\theta}\,z$ est encore une rotation.*

Démonstration. **(1)** Développons f à l'origine en série entière convergeant dans $\mathbb{D}$:

$$f(z) \,=\, a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots .$$

Puisque $f(0)=0$, on a $a_0=0$, et par conséquent $\frac{f(z)}{z}$ est holomorphe dans $\mathbb{D}$, puisqu'elle a une singularité éliminable en $z=0$.

Ensuite, pour un rayon $0<r<1$ fixé arbitrairement proche de 1, comme $|f(z)|<1$ par hypothèse dans $\mathbb{D}$, il vient sur le cercle C_r :

$$\Big|\frac{f(z)}{z}\Big| \,<\, \frac{1}{r} \qquad\qquad (\forall\,|z|=r),$$

donc le principe du maximum offre la même inégalité dans $\overline{\mathbb{D}}_r$:

$$\Big|\frac{f(z)}{z}\Big| \,<\, \frac{1}{r} \qquad\qquad (\forall\,|z|\leqslant r),$$

et en faisant $r \overset{<}{\longrightarrow} 1$, nous obtenons bien $|f(z)|\leqslant|z|$ dans $\mathbb{D}$.

(2) Maintenant, si cette fonction holomorphe $\big|\frac{f(z)}{z}\big|\leqslant 1$ atteint son maximum $\big|\frac{f(z_0)}{z_0}\big|=1$ en un point *intérieur non nul* $z_0\in\mathbb{D}\backslash\{0\}$, le principe du maximum la force à être constante, disons $f(z)=c\,z$ avec $c\in\mathbb{C}$, puis $|z_0|=|f(z_0)|=|c|\,|z_0|$ force $|c|=1$, donc $f(z)=e^{i\theta}z$ est une rotation.

(3) Abrégeons $\frac{f(z)}{z} =: g(z)$, fonction holomorphe qui satisfait donc $|g(z)|\leqslant 1$ dans $\mathbb{D}$, et aussi :

$$g(0) \,=\, \lim_{\substack{z\to 0\\ \neq}} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} \,=\, f'(0),$$

d'où toujours $|f'(0)|\leqslant 1$.

Pour terminer, si $|f'(0)|=1=|g(0)|$, le principe du maximum — encore lui ! — force g à être constante, d'où à nouveau par le même raisonnement $f(z)=e^{i\theta}z$. □

9. Automorphismes du disque unité

Étudions maintenant les biholomorphismes d'un domaine $\Omega\subset\mathbb{C}$ sur lui-même $\omega:=\Omega$.

Définition 9.1. Une application biholomorphe $f\colon\Omega\overset{\sim}{\longrightarrow}\Omega$ d'un ouvert $\Omega\subset\mathbb{C}$ sur lui-même est appelée un *automorphisme holomorphe* de Ω. Leur collection sera notée :

$$\mathsf{Aut}_{\mathsf{hol}}(\Omega) \,:=\, \big\{f\colon\Omega\overset{\sim}{\longrightarrow}\Omega \text{ biholomorphe}\big\}.$$

Elle forme un groupe — abstrait ! En effet, l'identité $z\longmapsto z$ de $\mathbb{C}$ se restreint en une identité de Ω, la composition est transitive et préserve le caractère biholomorphe, et enfin l'inverse — pour la structure de groupe — de $f\colon\Omega\overset{\sim}{\longrightarrow}\Omega$ est tout simplement le biholomorphisme réciproque $\Omega\overset{\sim}{\longleftarrow}\Omega : f^{-1}$.

Question 9.2. *Pour* $\Omega=\mathbb{D}$, *peut-on décrire* $\mathsf{Aut}_{\mathsf{hol}}(\mathbb{D})$?

Visiblement, toute rotation $z\longmapsto e^{i\theta}z$ d'angle $\theta\in\mathbb{R}$ fixé est un automorphisme de $\mathbb{D}$, d'inverse la rotation $z\longmapsto e^{-i\theta}z$ d'angle opposé.

D'autres automorphismes existent, qui ont une grande utilité dans de nombreux chapitres de l'Analyse Complexe.

Lemme 9.3. *Pour tout* $\alpha\in\mathbb{C}$ *avec* $|\alpha|<1$, *l'application :*

$$\psi_\alpha\colon\quad z\,\longmapsto\,\frac{\alpha-z}{1-\overline{\alpha}z}$$

constitue un automorphisme holomorphe du disque unité $\mathbb{D}$.

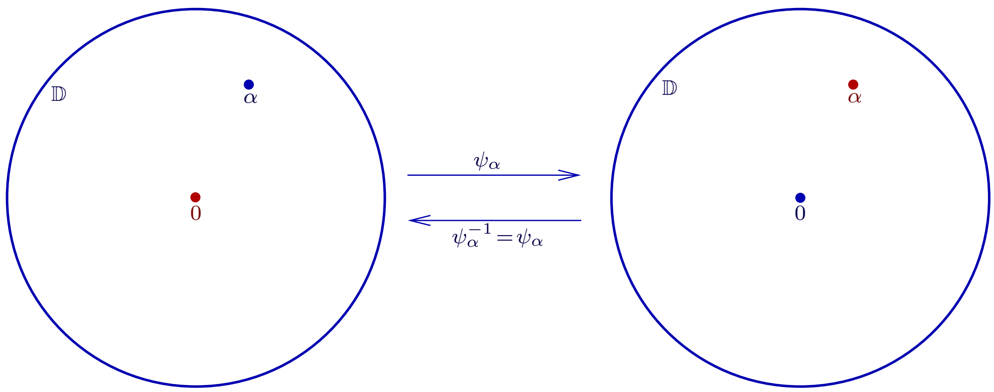
Démonstration. L'unique pôle $\frac{1}{\overline{\alpha}}$ de $\psi_\alpha(z)$ étant de module $\left|\frac{1}{\overline{\alpha}}\right| > 1$, l'application ψ_α est holomorphe dans $\mathbb{D}$, et même holomorphe dans le voisinage ouvert $\mathbb{D}_{\frac{1}{|\alpha|}} \supset \overline{\mathbb{D}}$ du disque unité fermé.

Sur le bord, pour $z = e^{i\theta}$, ré-écrivons :

$$\begin{aligned}\psi_\alpha\big(e^{i\theta}\big) &= \frac{1}{e^{i\theta}}\,\frac{\alpha - e^{i\theta}}{e^{-i\theta}-\overline{\alpha}} \\ &=: -\,\frac{1}{e^{i\theta}}\,\frac{w}{\overline{w}},\end{aligned}$$

pour faire voir que $\left|\psi_\alpha(e^{i\theta})\right| \equiv 1$, puis déduire grâce au principe du maximum que :

$$\left|\psi_\alpha(z)\right| < 1 \qquad\qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}).$$



Enfin, pour vérifier la bijectivité de $\psi_\alpha \colon \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$, calculons la composition de ψ_α avec elle-même :

$$\begin{aligned}\big(\psi_\alpha \circ \psi_\alpha\big)(z) &= \frac{\alpha - \frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z}}{1-\overline{\alpha}\,\frac{\alpha-z}{1-\overline{\alpha}z}} \\ &= \frac{\alpha - \alpha\overline{\alpha}\,z - \alpha + z}{1-\overline{\alpha}z - \alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}z} \\ &= \frac{\big(1-\alpha\overline{\alpha}\big)\,z}{1-\alpha\overline{\alpha}} \\ &= z,\end{aligned}$$

pour constater que ψ_α est sa propre inverse ! □

Voici une dernière constatation simple qui présente un grand intérêt géométrique.

Observation 9.4. *L'automorphisme $\psi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z}$ du disque unité $\mathbb{D}$ avec $|\alpha| < 1$ échange 0 et α :*

$$\psi_\alpha(0) = \alpha \qquad \textit{et} \qquad \psi_\alpha(\alpha) = 0. \qquad □$$

Le résultat principal de cette section dévoile, grâce au Lemme 8.1 de Schwarz, que la combinaison des rotations et des applications ψ_α fournit *tous* les automorphismes holomorphes du disque unité.

Théorème 9.5. *Si $f \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{hol}}(\mathbb{D})$ est un automorphisme holomorphe de $\mathbb{D}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{D}$ tels que :*

$$f(z) = e^{i\theta}\,\frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z} = e^{i\theta}\,\psi_\alpha(z).$$

Démonstration. Puisque $f \colon \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ est bijective, il existe une unique préimage $\alpha \in \mathbb{D}$ de $0 = f(\alpha)$. Introduisons alors l'automorphisme composé :

$$g \,:=\, f \circ \psi_\alpha,$$

qui satisfait maintenant $g(0) = 0$. Le Lemme 8.1 de Schwarz s'applique donc, et donne :

$$\big|g(z)\big| \,\leqslant\, |z| \qquad\qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}).$$

Mais il s'applique *aussi* à l'inverse $\mathbb{D} \xleftarrow{\sim} \mathbb{D}$: g^{-1} satisfaisant $g^{-1}(0) = 0$, pour donner de même :

$$\big|g^{-1}(w)\big| \,\leqslant\, |w| \qquad\qquad (\forall\, w \in \mathbb{D}),$$

et si nous y remplaçons bêtement $w = g(z)$, nous obtenons une inégalité :

$$\Big|g^{-1}\big(g(z)\big)\Big| \,=\, |z| \,\leqslant\, \big|g(z)\big| \qquad\qquad (\forall\, w \in \mathbb{D}),$$

inverse de celle qui précède, ce qui force $|g(z)| = |z|$ partout !

La partie **(2)** du Lemme 8.1 de Schwarz offre alors que $g(z) = e^{i\theta} z$ est une rotation, c'est-à-dire :

$$f\big(\psi_\alpha(z)\big) \,=\, e^{i\theta}\, z.$$

Pour terminer, en substituant là-dedans $z := \psi_\alpha(z)$ et en nous souvenant que $\psi_\alpha \circ \psi_\alpha = \mathsf{Id}$, nous concluons :

$$f(z) \,=\, f\big(\psi_\alpha(\psi_\alpha(z))\big) \,=\, e^{i\theta}\, \psi_\alpha(z). \qquad \square$$

Il est clair qu'un tel automorphisme $z \longmapsto e^{i\theta}\, \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$ ne fixe l'origine que lorsque $\alpha = 0$.

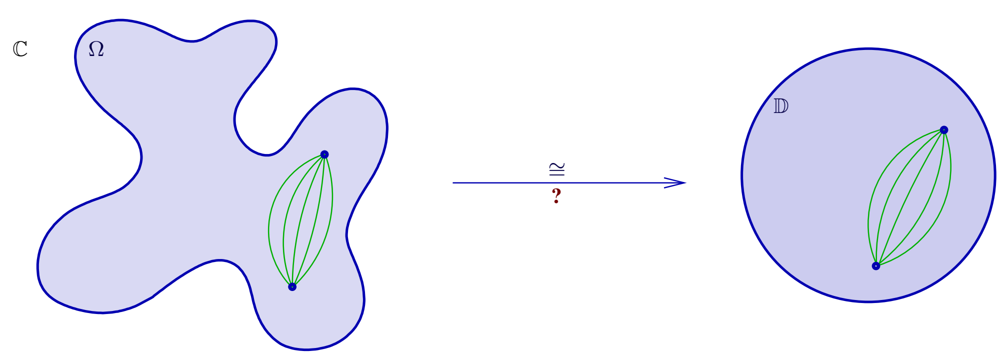
Corollaire 9.6. *Les seuls automorphismes holomorphes de $\mathbb{D}$ qui fixent l'origine $0 \in \mathbb{D}$ sont les rotations $z \longmapsto e^{i\theta} z$.* $\square$

Enfin, étant donné deux points quelconques $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$, on peut envoyer $\alpha \longmapsto 0$ au moyen de ψ_α, puis $0 \longmapsto \beta$ au moyen de ψ_β, et donc la composition $\psi_\beta \circ \psi_\alpha \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{hol}}(\mathbb{D})$ envoie α sur β : passer par Paris pour aller de Toulouse à Marseille, il fallait y penser !

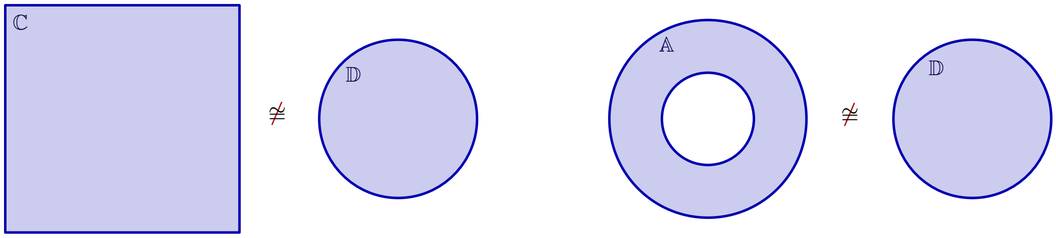
Corollaire 9.7. *Le groupe $\mathsf{Aut}_{\mathsf{hol}}(\mathbb{D})$ est transitif.* $\square$

10. Présentation du théorème de Riemann

Une question se pose de savoir si un ouvert connexe non vide $\Omega \subset \mathbb{C}$ peut être « *normalisé* » au sens où il soit biholomorphiquement équivalent au disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$.



Dans le cas où $\Omega = \mathbb{C}$, la réponse est négative, à cause du théorème de Liouville qui force toute application holomorphe $F \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{D}$, donc bornée, à être constante.



Ensuite, l'existence d'un biholomorphisme $F\colon \Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ permet de transférer les homotopies entre courbes dans $\mathbb{D}$ comme homotopies entre courbes dans Ω. Puisque $\mathbb{D}$ est simplement connexe, car convexe, Ω doit nécessairement être *aussi* simplement connexe. Ainsi, aucun anneau $\mathbb{A}$ n'est équivalent à $\mathbb{D}$.

Il est absolument remarquable que ces deux conditions nécessaires aient été découvertes comme aussi suffisantes par Riemann, dans sa thèse soutenue en 1851 à l'âge de 21 ans.

Théorème 10.1. [de l'application conforme de Riemann] *Tout ouvert non vide* $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ *distinct de* $\mathbb{C}$, i.e. *avec* $\mathbb{C}\backslash\Omega \neq \emptyset$, *qui est connexe et simplement connexe, est* biholomorphe *au disque unité* $\mathbb{D}$.

De plus, pour tout $z_0 \in \Omega$ *fixé, il existe un unique biholomorphisme :*

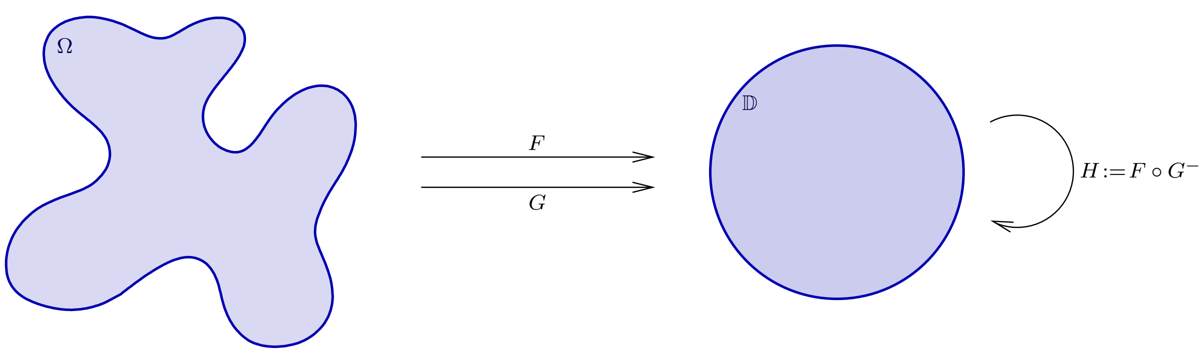
$$F\colon \quad \Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$$

satisfaisant les conditions de normalisation :

$$\begin{aligned} F(z_0) &= 0, \\ F'(z_0) &\in \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad F'(z_0) > 0. \end{aligned}$$

Comme il n'y a qu'un seul « *modèle* », $\mathbb{D}$, et que les biholomorphismes peuvent être composés et inversés, il en découle un

Corollaire 10.2. *Deux ouverts connexes et simplement connexes quelconques* $\Omega_1, \Omega_2 \subsetneqq \mathbb{C}$ *sont toujours biholomorphes.* □



Preuve de l'unicité. Étant donné *deux* biholomorphismes normalisés :

$$F,\, G\colon \quad \Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{D},$$

la composition $H := F \circ G^{-1}$ devient un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ fixant l'origine :

$$H(0) = F\big(G^{-1}(0)\big) = F(z_0) = 0.$$

Puisque $\mathsf{Aut}_{\mathsf{hol}}(\mathbb{D}) = \big\{z \longmapsto e^{i\theta}\,\frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}\big\}$, on sait par le Corollaire 9.6 que de tels biholomorphismes sont nécessairement de la forme $H(z) = e^{i\theta} z$.

Mais la formule de dérivation composée et l'hypothèse de normalisation :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \;=\; H'(0) \;=\; F'\big(G^{-1}(0)\big)\cdot(G^{-1})'(0) \\ =\; F'(z_0)\,\frac{1}{G'(z_0)}\;\in\;\mathbb{R}_+^*, \end{aligned}$$

force $e^{i\theta}=1$, d'où $H=\mathsf{Id}$, c'est-à-dire $G=F$. □

La partie difficile, et profonde, de la démonstration du Théorème 10.1 de l'application conforme de Riemann concerne l'*existence*. À grands traits, en voici les idées. Introduisons l'ensemble :

$$\mathscr{R} \;:=\; \big\{f\colon \Omega\longrightarrow\mathbb{D}\text{ holomorphe}\colon\; f(z_0)=0\text{ et }f\text{ injective}\big\}.$$

Nous avons déjà démontré dans le Théorème 6.3 fondamental que la seule injectivité de f assure qu'on a toujours un biholomorphisme de f sur son image :

$$f\colon\quad \Omega\;\stackrel{\sim}{\longrightarrow}\;f(\Omega)\;\subset\;\mathbb{D}.$$

Puisqu'on cherche un *biholomorphisme* $\Omega\stackrel{\sim}{\longrightarrow}\mathbb{D}$, il est naturel de maximiser l'image $f(\Omega)\subset\mathbb{D}$, c'est-à-dire de « *remplir* » $\mathbb{D}$.

Pour des raisons qui seront comprises ultérieurement, il s'avère que maximiser $f(\Omega)\subset\mathbb{D}$ est possible en se contentant de maximiser seulement $|f'(z_0)|$, cela, en choisissant une certaine fonction appropriée $f_{\mathsf{max}}\in\mathscr{R}$. Évidemment, on peut toujours trouver une suite maximisante $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions $f_n\in\mathscr{R}$ satisfaisant :

$$\lim_{n\to\infty}\big|f_n'(z_0)\big|\;=\;\sup_{g\in\mathscr{R}}\big|g'(z_0)\big|,$$

mais on n'a alors aucune garantie que ces f_n convergeront vers une fonction holomorphe dans Ω, et qui plus est, une fonction *injective*, de manière à réellement trouver une fonction intéressante $f_{\mathsf{max}}\in\mathscr{R}$. C'est ici que gît la difficulté principale, et pour la surmonter, commençons à déployer des concepts nouveaux concernant la convergence de suites $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions holomorphes $f_n\in\mathscr{O}(\Omega)$.

11. Théorème de Montel pour les familles uniformément bornées et continues

Dans notre cas, les $f_n\colon\Omega\longrightarrow\mathbb{D}$ sont à valeurs dans $\mathbb{D}$, donc elles sont toutes bornées (par 1), mais énonçons plus généralement une

Définition 11.1. Une famille $\mathscr{F}\subset\mathscr{O}(\Omega)$ de fonctions holomorphes est dite *uniformément bornée sur les compacts de* Ω si :

$$\begin{gathered}\forall\,K\;\subset\;\Omega\text{ compact}\qquad\exists\,0\leqslant\mathrm{M}_K<\infty\qquad\text{telle que}\\ \big|f(z)\big|\;\leqslant\;\mathrm{M}_K\qquad\qquad(\forall\,z\in K,\;\forall\,f\in\mathscr{F}).\end{gathered}$$

Une fonction holomorphe individuelle est bien entendu bornée sur un compact, mais on demande ici l'*uniformité* par rapport à la famille $\mathscr{F}$.

Le concept-clé apparaît maintenant.

Définition 11.2. Une famille $\mathscr{F}\subset\mathscr{O}(\Omega)$ de fonctions holomorphes est dite *uniformément équicontinue sur les compacts de* Ω si :

$$\begin{gathered}\forall\,K\;\subset\;\Omega\text{ compact}\qquad\forall\,\varepsilon>0\qquad\exists\,\delta=\delta(K,\varepsilon)>0\qquad\text{tel que}\\ \Big(z,w\in K\text{ avec }|z-w|\leqslant\delta\Big)\qquad\Longrightarrow\qquad\Big(\big|f(z)-f(w)\big|\leqslant\varepsilon\quad\forall\,f\;\in\;\mathscr{F}\Big).\end{gathered}$$

Cette condition est très forte : non seulement on a continuité spatiale uniforme — ce qui, d'après Heine-Borel, est automatique pour des fonctions continues sur un compact —, mais encore, on a uniformité par rapport à la famille $\mathscr{F}$.

Exemple 11.3. Sur le segment fermé $[0,1]$, soit la famille (suite) :

$$\big\{f_n(x) := x^n\big\}_{n=1}^{\infty},$$

uniformément bornée (par 1). Elle n'est pas uniformément équicontinue, car pour tout $x_0 < 1$ fixé arbitrairement proche de 1, on a :

$$\big|f_n(1) - f_n(x_0)\big| \,=\, 1 - x_0^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

quantité qui ne peut pas être rendue uniformément arbitrairement petite $\leqslant \varepsilon$, quelle que soit la proximité $1 - x_0 \leqslant \delta$.

Toutefois, cette famille $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ est uniformément équicontinue sur les compacts du segment *semi-ouvert* $[0,1[$, car c'est une suite qui converge uniformément vers 0 sur tout segment $[0, x_0]$ avec $0 \leqslant x_0 < 1$.

Exemple 11.4. Un meilleur contre-exemple dans le monde réel est, sur le même segment semi-ouvert $[0,1[$:

$$\big\{g_n(x) := \sin\big(2\pi\, nx\big)\big\}_{n=1}^{\infty}.$$

Cette famille (suite) y est uniformément bornée (par 1), mais elle n'est uniformément équicontinue sur aucun segment compact $[a,b] \subset [0,1[$ d'intérieur non vide, *i.e.* avec $0 \leqslant a < b < 1$, puisque (exercice), ses dérivées $2\pi n \cos\big(2\pi\, nx\big)$ y sont non bornées.

Dans le monde holomorphe, nous le savons, la magie domine. En voici une nouvelle illustration spectaculaire.

Théorème 11.5. [de Montel] *Soit une famille $\mathscr{F} \subset \mathscr{O}(\Omega)$ de fonctions uniformément bornées sur les compacts de Ω. Alors :*

(1) *$\mathscr{F}$ est uniformément équicontinue sur les compacts $K \subset \Omega$;*

(2) *$\mathscr{F}$ est une famille normale.*

Voici l'explicitation de ce dernier concept.

Définition 11.6. Une famille $\mathscr{F} \subset \mathscr{O}(\Omega)$ est dite normale (dans $\mathscr{O}(\Omega)$) si pour *toute* suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $f_n \in \mathscr{F}$, il existe au moins une sous-suite $\big\{f_{n_k}\big\}_{k=1}^{\infty}$ qui converge uniformément sur les compacts de Ω :

$$f_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g \,\in\, \mathscr{O}(\Omega).$$

[La notion de famille normale peut être formulée dans l'espace $\mathscr{C}^0(\Omega)$ des fonctions continues sur Ω, et aussi dans $\mathscr{C}^0(K)$ pour $K \subset \Omega$ compact, *voir infra* la Définition 12.1, où nous introduirons une autre terminologie.]

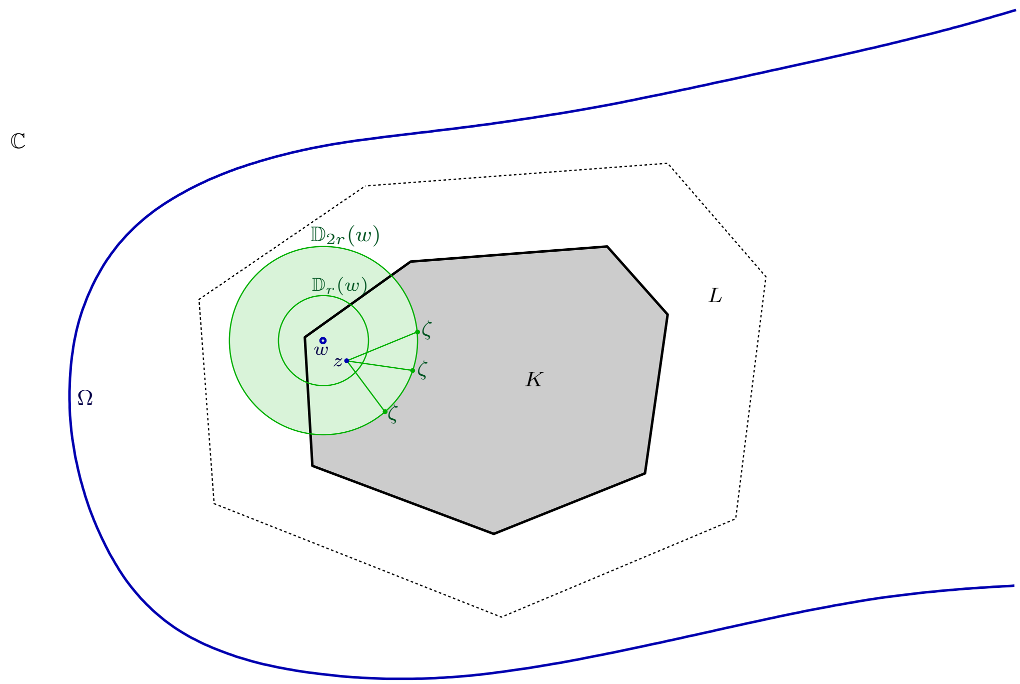
Rappelons qu'un théorème de Cauchy montre que la fonction-limite g est non seulement continue, mais aussi holomorphe. Il importe de faire remarquer qu'on ne demande pas que $g \in \mathscr{F}$ ici.

Plus haut, la suite de fonctions réelles $\big\{\sin(2\pi nx)\big\}_{n=1}^{\infty}$ sur $[0,1[$ n'est *pas* normale (exercice). Mais la suite $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ l'est sur les compacts de $[0,1[$, comme restriction à $[0,1[\subset \mathbb{D}$ de la suite de fonctions holomorphes $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ définies sur $\mathbb{D}$ et donc à laquelle ce Théorème 11.5 s'applique !

12. Démonstration du Théorème de Montel

Démonstration du Théorème 11.5 **(1)**. Commençons par établir le « miracle » **(1)** :

$$\mathscr{O}(\Omega) \supset \mathscr{F} \text{ uniformément bornée (sur les compacts)} \overset{\textbf{magie}}{\Longrightarrow} \mathscr{F} \text{ uniformément équicontinue (sur les compacts).}$$



Soit donc $K \subset \Omega$ un compact quelconque. Choisissons $r > 0$ assez petit pour que $3\,r < \mathrm{dist}\,\big(K, \mathbb{C}\backslash\Omega\big)$. Alors pour un point quelconque $w \in K$, on a $\overline{\mathbb{D}}_{2r}(w) \subset \Omega$, et même mieux :

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{D}}_{2r}(w) \subset \big\{\zeta \in \Omega\colon \mathrm{dist}\,(\zeta, K) \leqslant 2\,r\big\} \\ =: L.\end{aligned}$$

Puisque ce nouvel ensemble L est un compact de Ω, l'hypothèse que $\mathscr{F}$ est uniformément bornée fournit $\mathrm{M}_L < \infty$ satisfaisant :

$$\big|f(\zeta)\big| \leqslant \mathrm{M}_L \qquad\qquad (\forall\,\zeta \in L,\ \forall\,f \in \mathscr{F}).$$

Comme sur la figure, soit enfin un point quelconque $z \in \mathbb{D}_r(w)$. La formule de Cauchy appliquée deux fois sur le cercle de rayon $2\,r$ centré en w :

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{2r}(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \\ f(w) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{2r}(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w}\,d\zeta,\end{aligned}$$

donne, après soustraction :

$$f(z) - f(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{2r}(w)} f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w}\right] d\zeta,$$

et afin de faire voir la petitesse de $|f(z)-f(w)|$, il est avisé d'estimer celle de l'expression entre crochets :

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-w}\right| &= \frac{|z-w|}{|\zeta-z|\cdot|\zeta-w|} \\ &= \frac{|z-w|}{|\zeta-z|\cdot 2\,r} \\ {\scriptstyle [z\in\mathbb{D}_r(w)\text{ et }\zeta\in C_{2r}(w)\implies|\zeta-z|>r]} \qquad &\leqslant \frac{|z-w|}{r\cdot 2\,r}. \end{aligned}$$

En conclusion, nous obtenons bien une inégalité valable pour $z,w\in K$ avec $|z-w|\leqslant\delta\leqslant r$ qui fait voir comment choisir $\delta>0$ pour obtenir l'équicontinuité uniforme :

$$\begin{aligned} \big|f(z)-f(w)\big| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{M}_L\,\frac{|z-w|}{r\cdot 2\,r}\,2\pi\,2r \\ &= \mathsf{constante}\cdot|z-w| \\ &\leqslant \mathsf{constante}\cdot\delta \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Démonstration du Théorème 11.5 **(2)**. Cette deuxième partie de l'énoncé ne doit rien à l'holomorphie :

$$\left\{\begin{matrix}\mathscr{F}\text{ uniformément bornée}\\ \mathscr{F}\text{ uniformément équicontinue}\end{matrix}\right\}\quad\Longrightarrow\quad\mathscr{F}\text{ normale},$$

elle est valable en remplaçant $\Omega\subset\mathbb{C}$ par un espace métrique quelconque $\big(E,d(\cdot,\cdot)\big)$.

En effet, pour un compact arbitraire $K\subset E$, munissons l'espace :

$$\mathscr{C}(K) := \big\{f\colon\ K\longrightarrow\mathbb{C}\text{ continue}\big\},$$

de la topologie de la convergence uniforme :

$$\big|f-g\big|_{\mathscr{C}(K)} := \max_{x\in K}\big|f(x)-g(x)\big|.$$

Définition 12.1. [Analogue] Une famille $\mathscr{F}\subset\mathscr{C}(K)$ est dite :

- *uniformément bornée* s'il existe $0\leqslant\mathrm{M}<\infty$ telle que :

$$\big|f(x)\big| \leqslant \mathrm{M} \qquad\qquad (\forall\,x\in K,\ \forall\,f\in\mathscr{F});$$

- *uniformément équicontinue* si :

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0\quad\text{tel que}$$
$$\Big(x,y\in K\text{ avec }d(x,y)\leqslant\delta\Big)\quad\Longrightarrow\quad\Big(\big|f(x)-f(y)\big|\leqslant\varepsilon\quad\forall\,f\in\mathscr{F}\Big);$$

- *relativement compacte* si pour toute suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $f_n\in\mathscr{F}$, il existe au moins une sous-suite $\big\{f_{n_k}\big\}_{k=1}^{\infty}$ qui converge vers une certaine fonction continue $g\in\mathscr{C}(K)$ — mais n'appartenant pas forcément à $\mathscr{F}$ — :

$$0 = \lim_{n\to\infty}\big|f_n-g\big|_{\mathscr{C}(K)}.$$

Ici, dans un cadre topologique métrique, le terme de « *famille normale* », généralement réservé au monde holomorphe, est remplacé par « *famille relativement compacte* », ce qui correspond bien à la conception que l'adhérence $\overline{\mathscr{F}}^{|\cdot|_{\mathscr{C}(K)}}$ de $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}(K)$, pour la topologie de la norme uniforme $|\cdot|_{\mathscr{C}(K)}$ est un compact contenu dans $\mathscr{C}(K)$.

Théorème 12.2. [Ascoli] *Pour toute sous-famille $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}(K)$ de l'espace des fonctions réelles continues sur un compact $K \subset (E, d)$ d'un espace métrique, on a l'équivalence :*

$$\left\{ \begin{matrix} \mathscr{F} \text{ uniformément bornée} \\ \mathscr{F} \text{ uniformément équicontinue} \end{matrix} \right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{F} \text{ normale}.$$

Plutôt que de basculer dans le monde réel, revenons plutôt au monde imaginaire (holomorphe), et démontrons l'implication $\Longrightarrow$, dont le lecteur avisé constatera qu'elle se généralise presque sans modification pour obtenir ce théorème d'Ascoli ; la réciproque, moins intéressante, est aussi laissée en exercice.

Soit donc une suite quelconque $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions holomorphes $f_n \in \mathscr{F}$ dans une famille $\mathscr{F} \subset \mathscr{O}(\Omega)$ uniformément bornée et uniformément équicontinue sur les compacts $K \subset \Omega$. L'objectif est de sélectionner une sous-suite qui est uniformément convergente sur les compacts de Ω. Deux idées interviennent.

La première idée consiste à faire converger une sous-suite $\{g_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sur une collection *dénombrable dense* $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ de points $w_j \in \Omega$.

La seconde consiste à constater que l'équicontinuité uniforme est la bonne hypothèse suffisante pour « juguler la sauvagerie éventuelle » (non-convergence) des suites numériques $\{g_\nu(\zeta)\}_{\nu=1}^{\infty}$ en d'*autres* points $\zeta \in \Omega \big\backslash \{w_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Premièrement, il est clair par densité et dénombrabilité de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ que le sous-ensemble :

$$\Omega \cap \big(\mathbb{Q} + \sqrt{-1}\,\mathbb{Q}\big) \;=:\; \big\{w_j\big\}_{j=1}^{\infty}$$

est dense et dénombrable, donc représentable comme une certaine *suite*.

Au point w_1, les valeurs $\big\{f_n(w_1)\big\}_{n=1}^{\infty}$ restent bornées. Extrayons alors une sous-suite de $\{f_n\}$, notée :

$$\big\{f_{n_1}^1\big\}_{n_1=1}^{\infty},$$

convergeant en w_1 :

$$f_{n_1}^1(w_1) \underset{n_1 \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_1 \in \mathbb{C}.$$

Dire que c'est une sous-suite revient à dire qu'il y a une application $n_1 \longmapsto n(n_1)$ strictement croissante telle que :

$$f_{n_1}^1 := f_{n(n_1)} \qquad \text{avec} \qquad n(n_1) \geqslant n_1 \qquad\qquad {\scriptstyle (n_1 \geqslant 1)}.$$

Au point w_2, les valeurs $\big\{f_{n_1}^1(w_2)\big\}_{n_1=1}^{\infty}$ restent aussi bornées, donc ré-extrayons :

$$f_{n_2}^2 := f_{n_1(n_2)}^1 = f_{n(n_1(n_2))} \qquad \text{avec} \qquad n_1(n_2) \geqslant n_2 \qquad\qquad {\scriptstyle (n_2 \geqslant 1)},$$

afin que :

$$f_{n_2}^2(w_2) \underset{n_2 \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_2 \in \mathbb{C}.$$

Mais alors, au point w_1, la convergence est conservée grâce à $n_1(n_2) \geqslant n_2$:

$$f_{n_2}^2(w_1) = f_{n_1(n_2)}^1(w_1) \underset{n_2 \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_1.$$

Diagrammatisons cela :

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 & f_9 & f_{10} & f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} & f_{17} \\
 & \boxed{f_1^1} & & f_2^1 & & f_3^1 & f_4^1 & f_5^1 & f_6^1 & & f_7^1 & & f_8^1 & f_9^1 & f_{10}^1 & & f_{11}^1 \\
 & & & f_1^2 & & \boxed{f_2^2} & f_3^2 & & f_4^2 & & f_5^2 & & f_6^2 & f_7^2 & & & f_8^2 \\
 & & & & & f_1^3 & & & f_2^3 & & \boxed{f_3^3} & & f_4^3 & f_5^3 & & & f_6^3 \\
 & & & & & & & & f_1^4 & & f_2^4 & & & f_3^4 & & & \boxed{f_4^4}
\end{array}
$$

Continuons cela au point w_3 :

$$
f_{n_3}^3 := f_{n_2(n_3)}^2 = f_{n_1(n_2(n_3))}^1 = f_{n(n_1(n_2(n_3)))} \qquad (n_3 \geqslant 1),
$$

pour avoir :

$$
f_{n_3}^3(w_3) \underset{n_3 \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_3,
$$

tout en conservant aux deux points précédents w_2, w_1 :

$$
\begin{aligned}
f_{n_3}^3(w_2) &= f_{n_2(n_3)}^2(w_2) \underset{n_3 \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_2, \\
f_{n_3}^3(w_1) &= f_{n_1(n_2(n_3))}^1(w_1) \underset{n_3 \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_1,
\end{aligned}
$$

parce que :

$$
\begin{aligned}
n_2(n_3) &\geqslant n_3, \\
n_1\big(n_2(n_3)\big) \geqslant n_2(n_3) &\geqslant n_3.
\end{aligned}
$$

Généralement, après avoir extrait $j-1$ fois :

$$
f_{n_1}^1(w_1) \underset{n_1 \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_1, \ \ldots\ldots\ldots, \ f_{n_{j-1}}^{j-1}(w_{j-1}) \underset{n_{j-1} \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_{j-1},
$$

extrayons une j-ème fois :

$$
f_{n_j}^j := f_{n_{j-1}(n_j)}^{j-1} = f_{n_{j-2}(n_{j-1}(n_j))}^{j-2} = \cdots\cdots\cdots = f_{n_1(\cdots(n_{j-2}(n_{j-1}(n_j)))\cdots)}^1,
$$

afin que :

$$
f_{n_j}^j(w_j) \underset{n_j \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_j \in \mathbb{C},
$$

avec par construction des inégalités mémorisant les extractions successives :

$$
\begin{aligned}
n_{j-1}(n_j) &\geqslant n_j, \\
n_{j-2}\big(n_{j-1}(n_j)\big) \geqslant n_{j-1}(n_j) &\geqslant n_j, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
n_1\big(\cdots\big(n_{j_2}\big(n_{j-1}(n_j)\big)\big)\cdots\big) \geqslant \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \geqslant n_{j-1}(n_j) &\geqslant n_j,
\end{aligned}
$$

et qui permettent de constater qu'aux points précédents w_{j-1}, w_{j-2}, ..., w_1, les convergences sont conservées :

$$
\begin{aligned}
f_{n_j}^j(w_{j-1}) &= f_{n_{j-1}(n_j)}^{j-1}\big(w_{j-1}\big) \xrightarrow[n_j \to \infty]{} \varphi_{j-1} && (\text{car } n_{j-1}(n_j) \geqslant n_j), \\
f_{n_j}^j(w_{j-2}) &= f_{n_{j-2}(n_{j-1}(n_j))}^{j-2}\big(w_{j-2}\big) \xrightarrow[n_j \to \infty]{} \varphi_{j-2} && (\text{car } n_{j-2}(n_{j-1}(n_j)) \geqslant n_j), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_{n_j}^j(w_1) &= f_{n_1(\cdots(n_{j-2}(n_{j-1}(n_j)))\cdots)}^1\big(w_1\big) \xrightarrow[n_j \to \infty]{} \varphi_1 && (\text{car } n_1(\cdots(n_{j-2}(n_{j-1}(n_j)))\cdots) \geqslant n_j).
\end{aligned}
$$

Ainsi, nous sommes parvenus à garantir une convergence sur un nombre fini $j \geqslant 1$ quelconque de points $w_1, \dots, w_j \in \Omega$.

Contrairement à une intuition d'impossibilité éventuelle, il est en fait possible de construire une sous-suite qui converge en *tous* les points infinis dénombrables $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$. Voici le diagramme qui donne l'idée :

$$
\begin{array}{ccccc}
\boxed{f_1^1} & f_2^1 & f_3^1 & f_4^1 & f_5^1 \\
f_1^2 & \boxed{f_2^2} & f_3^2 & f_4^2 & f_5^2 \\
f_1^3 & f_2^3 & \boxed{f_3^3} & f_4^3 & f_5^3 \\
f_1^4 & f_2^4 & f_3^4 & \boxed{f_4^4} & f_5^4 \\
f_1^5 & f_2^5 & f_3^5 & f_4^5 & \boxed{f_5^5}
\end{array}
$$

En effet, l'astuce est d'effectuer ce qu'on appelle une *extraction diagonale*, en introduisant la sous-suite :

$$g_\nu := f_\nu^\nu \qquad\qquad (\nu \geqslant 1),$$

c'est-à-dire que g_ν est le ν-ème terme de la ν-ème sous-suite extraite.

Assertion 12.3. *En* tout *point* $w_j \in \Omega \cap \big(\mathbb{Q} + \sqrt{-1}\,\mathbb{Q}\big)$*, on a convergence :*

$$g_\nu\big(w_j\big) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} \varphi_j \qquad\qquad (\forall\, j \geqslant 1).$$

Preuve. En effet, dès que $\nu \geqslant j$, toutes les fonctions g_ν appartiennent à la suite $\big\{f_{n_j}^j\big\}_{n_j=1}^{\infty}$, dont on vient de voir qu'elle converge en les points $w_1, \dots, w_j$. □

Comme annoncé, la deuxième idée exploite l'hypothèse d'équicontinuité uniforme des éléments de $\mathscr{F}$, donc des éléments de la suite $\big\{g_\nu = f_\nu^\nu\big\}_{\nu=1}^{\infty}$.

Proposition 12.4. *Sur un compact quelconque non vide $K \subset \Omega$, la suite extraite diagonale $\big\{g_\nu = f_\nu^\nu\big\}$ converge uniformément.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. En abrégeant :

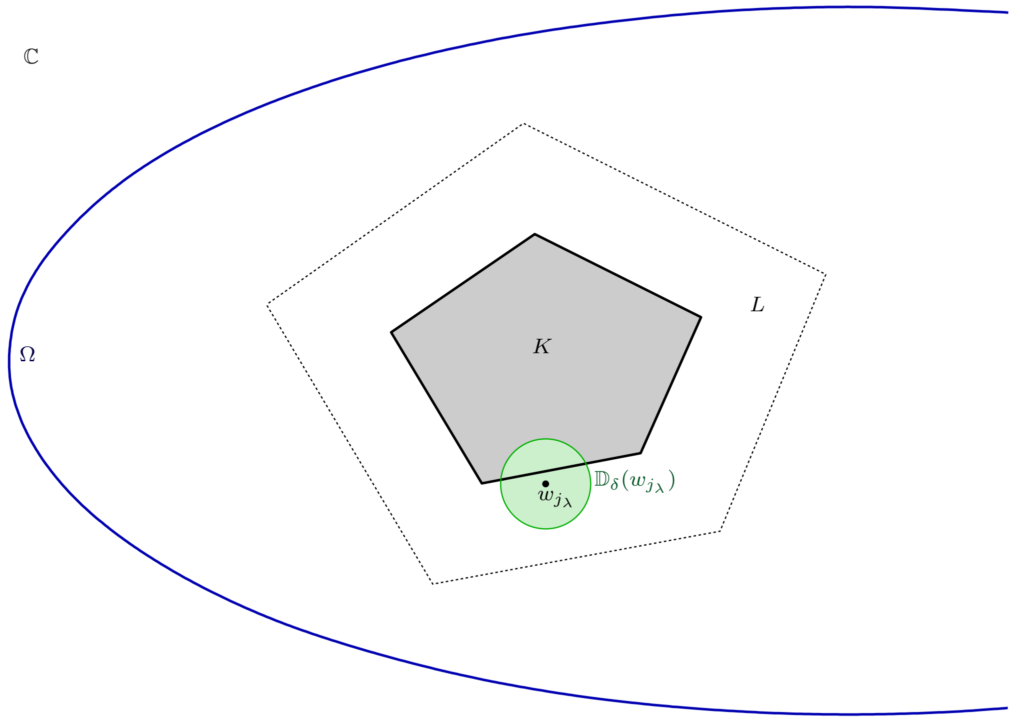
$$c := \min\big\{1,\ \tfrac{1}{2}\,\mathsf{dist}\,\big(K,\, \mathbb{C}\backslash\Omega\big)\big\},$$

qui satisfait $0 < c < \infty$, introduisons le sous-ensemble compact de Ω qui « élargit » K :

$$L := \big\{\zeta \in \Omega\colon\ \mathsf{dist}\,(\zeta, K) \leqslant c\big\},$$

ainsi que l'ouvert naturel que ce plus gros compact contient :

$$\begin{aligned} U &:= \big\{\zeta \in \Omega\colon\ \mathsf{dist}\,(\zeta, K) < c\big\} \\ &\subset L. \end{aligned}$$



Comme $\mathscr{F}\big|_L$ est uniformément équicontinue, il en va de même pour $\{g_\nu|_L\}_{\nu=1}^\infty$, donc il existe $\delta = \delta(L, \varepsilon) > 0$ assez petit pour que :

$$\Big(z, w \in L \text{ avec } |z - w| \leqslant \delta\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\big|g_\nu(z) - g_\nu(w)\big| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, \nu \geqslant 1\Big).$$

Si nécessaire, nous pouvons diminuer δ de façon à ce que :

$$0 \,<\, \delta \,<\, \tfrac{c}{2}.$$

Du recouvrement ouvert trivial :

$$K \,\subset\, \Omega \,\subset\, \bigcup_{j=1}^\infty \mathbb{D}_\delta(w_j),$$

Borel et Lebesgue extraient pour nous un recouvrement fini :

$$K \,\subset\, \mathbb{D}_\delta\big(w_{j_1}\big) \cup \cdots \cup \mathbb{D}_\delta\big(w_{j_\kappa}\big),$$

avec certains indices $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_\kappa$. Quitte à en supprimer quelques uns qui sont inutiles, nous pouvons supposer que :

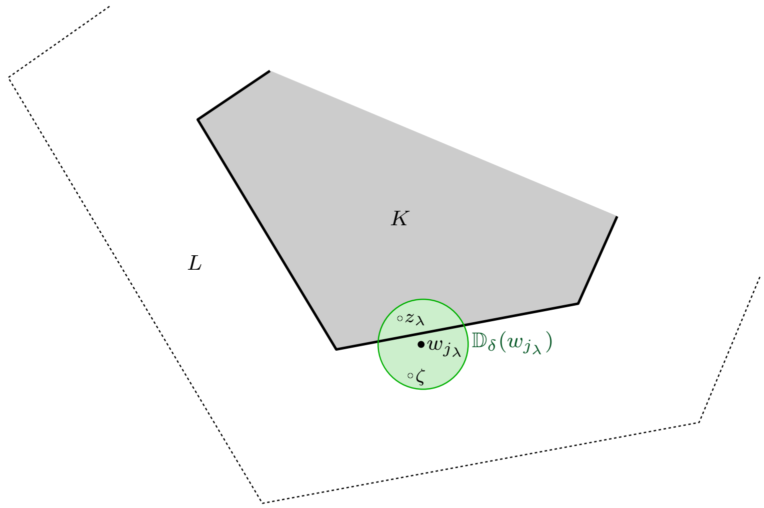
$$\emptyset \,\neq\, K \cap \mathbb{D}_\delta\big(w_{j_\lambda}\big) \qquad\qquad (\forall\,1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa).$$

Assertion 12.5. *Alors tous ces disques sont contenus dans le compact élargi :*

$$\mathbb{D}_\delta\big(w_{j_\lambda}\big) \,\subset\, L \qquad\qquad (\forall\,1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa).$$

En particulier, leurs centres :

$$w_{j_1}, \dots, w_{j_\kappa} \,\in\, L.$$



Preuve. En effet, pour $1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa$ fixé, il existe au moins un point $z_\lambda \in K \cap \mathbb{D}_\delta\big(w_{j_\lambda}\big)$, mais alors pour tout autre point arbitraire $\zeta \in \mathbb{D}_\delta\big(w_{j_\lambda}\big)$, il vient :

$$\begin{aligned}\big|\zeta - z_\lambda\big| &\leqslant \big|\zeta - w_{j_\lambda}\big| + \big|w_{j_\lambda} - z_\lambda\big| \\ &< \delta + \delta \\ &< c,\end{aligned}$$

ce qui signifie bien que $z \in U \subset L$. □

Maintenant, comme on a convergence ponctuelle en la collection finie $w_{j_1}, \dots, w_{j_\kappa}$ des centres de ces disques recouvrant K, toujours avec le même $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe $\mathrm{N} \gg 1$ assez grand pour que :

$$\nu,\, \nu' \geqslant \mathrm{N} \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\big|g_\nu\big(w_{j_\lambda}\big) - g_{\nu'}\big(w_{j_\lambda}\big)\big| \leqslant \varepsilon \qquad {\scriptstyle (\forall\, 1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa)}\Big).$$

Alors en un autre point quelconque $z \in K \subset L$, d'où $z \in \mathbb{D}_\delta\big(w_{j_{\lambda(z)}}\big)$ pour au moins un indice $1 \leqslant \lambda(z) \leqslant \kappa$, l'équicontinuité uniforme sur le compact L auquel *appartiennent* les deux points z et $w_{j_{\lambda(z)}}$ permet de majorer pour tous $\nu, \nu' \geqslant \mathrm{N}$ grâce à une inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\big|g_\nu(z) - g_{\nu'}(z)\big| &\leqslant \big|g_\nu(z) - g_\nu\big(w_{j_{\lambda(z)}}\big)\big| + \big|g_\nu\big(w_{j_{\lambda(z)}}\big) - g_{\nu'}\big(w_{j_{\lambda(z)}}\big)\big| + \big|g_{\nu'}\big(w_{j_{\lambda(z)}}\big) - g_{\nu'}(z)\big| \\ &\leqslant \qquad \varepsilon \qquad + \qquad \varepsilon \qquad + \qquad \varepsilon.\end{aligned}$$

Ici, la majoration des termes délicats 1 et 3 utilise crucialement en effet l'équicontinuité uniforme, laquelle vient de « forcer » la convergence uniforme en tous les points z assez proches d'un point $w_{j_{\lambda(z)}}$ en lequel la convergence ponctuelle a été arrangée à l'avance. □

En conclusion, $\big\{g_\nu = f_\nu^\nu\big\}_{\nu=1}^{\infty}$ converge bien uniformément sur tous les compacts $K \subset \Omega$ vers une certaine fonction-limite holomorphe dans Ω. Tout ceci termine la partie **(2)** du Théorème 11.5. □

13. Préservation de l'injectivité à la limite

Un dernier ingrédient essentiel est nécessaire avant d'entamer la démonstration proprement dite du Théorème 10.1 de l'application conforme de Riemann. À nouveau, il s'agit d'un phénomène typiquement holomorphe, n'ayant aucun analogue vrai dans le monde réel.

Proposition 13.1. *Dans un ouvert non vide* connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$*, soit une suite* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de fonctions holomorphes* $f_n \in \mathscr{O}(\Omega)$ *toutes* injectives. *Si* $\{f_n\}$ *converge uniformément sur les compacts de* Ω *vers une* $f \in \mathscr{O}(\Omega)$*, alors :*

$$f \;\; est \;\; \begin{cases} ou \; bien \; injective, \\ ou \; bien \; constante. \end{cases}$$

Démonstration. Supposons f non injective, à savoir, il existe $z_1 \neq z_2 \in \Omega$ distincts avec $f(z_1) = f(z_2)$. Le but est de faire voir que f est constante.

À cet effet, introduisons les fonctions :

$$g_n(z) \,:=\, f_n(z) - f_n(z_1) \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

qui ont pour seul zéro $z = z_1$. Si donc $r > 0$ est assez petit pour que $r < \frac{1}{2}\,|z_2 - z_1|$, d'où $g_n\big|_{\overline{\mathbb{D}}_r(z_2)} \neq 0$, une formule connue comptant le nombre de zéros donne :

$$0 \,=\, \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_2)} \frac{g_n'(\zeta)}{g_n(\zeta)}\, d\zeta \qquad\qquad (n \geqslant 1).$$

Par hypothèse :

$$\begin{aligned} g_n(z) \,&\xrightarrow[n\to\infty]{}\, f(z) - f(z_1) \\ &=:\, g(z). \end{aligned}$$

Observons que $g(z_2) = 0$.

Assertion 13.2. *On a* $g \equiv 0$.

Preuve. Sinon, si $g \not\equiv 0$, comme Ω est connexe, l'autre zéro z_2 de g doit être isolé, donc quitte à réduire $r > 0$, on a non-annulation :

$$g\big|_{\overline{\mathbb{D}}_r(z_2)\setminus\{z_2\}} \,\neq\, 0,$$

puis la même formule exprime l'ordre, fini, d'annulation de g en z_2 :

$$1 \,\leqslant\, \nu_g(z_2) \,=\, \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_2)} \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)}\, d\zeta.$$

Sur le cercle $C_r(z_2)$, la non-annulation $g\big|_{C_r(z_2)} \neq 0$ et un théorème de Cauchy offrent les deux convergences uniformes :

$$\frac{1}{g_n} \,\xrightarrow[n\to\infty]{}\, \frac{1}{g} \qquad \text{et} \qquad g_n' \,\xrightarrow[n\to\infty]{}\, g' \qquad\qquad (\text{sur}\, C_r(z_2)).$$

Mais alors ces deux convergences uniformes permettent d'intervertir limite et intégration pour aboutir à une contradiction :

$$\begin{aligned} 1 \,&\leqslant\, \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_2)} \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)}\, d\zeta \\ &=\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_2)} \frac{g_n'(\zeta)}{g_n(\zeta)}\, d\zeta \\ &=\, \lim_{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

□

En définitive, $0 \equiv g(z) = f(z) - f(z_1)$ montre bien que f était constante. □

14. Démonstration du théorème de Riemann conforme

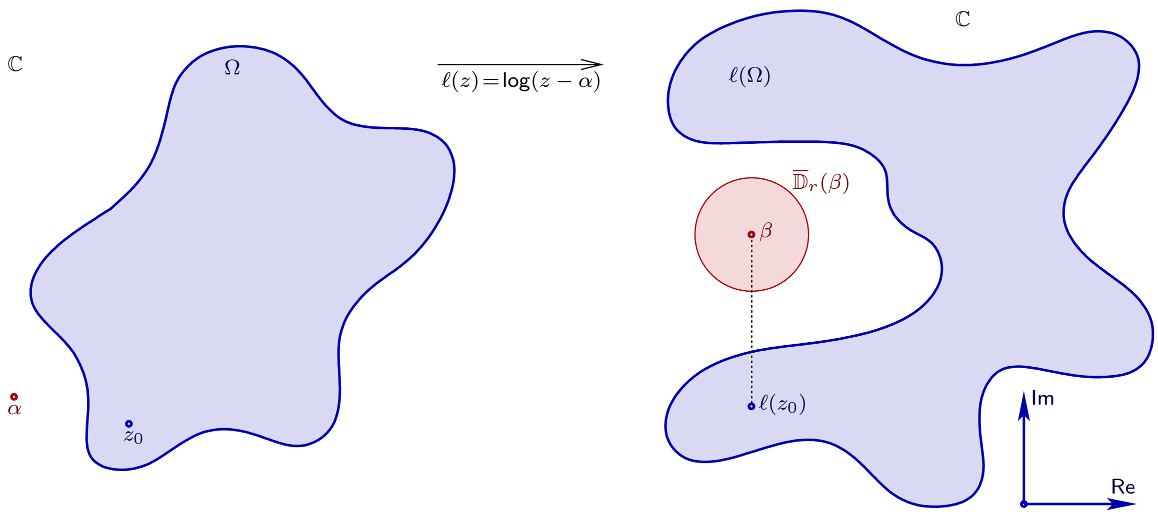
L'argumentation se déroule en trois étapes, la seconde étant la plus essentielle.

Étape 1. D'une manière qui pourrait paraître surprenante, le fait que l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ soit *distinct* de $\mathbb{C}$ est une hypothèse impliquant que Ω n'est en fait pas « gros », comme le dévoile le

Lemme 14.1. *Tout ouvert connexe et simplement connexe non vide $\emptyset \neq \Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$ est biholomorphe :*

$$f\colon \quad \Omega \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \omega$$

à un ouvert (non vide) $\omega \subset \mathbb{D}$ contenu dans le disque unité *avec $0 \in \omega$.*



Démonstration. Soit donc un point $\alpha \in \Omega \backslash \mathbb{C}$. Comme Ω est simplement connexe et comme $z - \alpha \neq 0$ dans Ω, grâce à un théorème d'un chapitre qui précède, il existe une fonction logarithme :

$$\ell(z) \;:=\; \log\,(z-\alpha),$$

holomorphe pour $z \in \Omega$, ce qui revient à écrire :

$$e^{\ell(z)} \;=\; z - \alpha \qquad\qquad (\forall\, z \in \Omega).$$

Or ceci implique que ℓ est injective, car si $\ell(z_1) = \ell(z_2)$, il vient $z_1 - \alpha = z_2 - \alpha$.

Fixons un point $z_0 \in \Omega$, et translatons son image $\ell(z_0)$ verticalement d'une hauteur 2π :

$$\beta \;:=\; \ell(z_0) + 2i\pi.$$

Assertion 14.2. *Il existe $r > 0$ assez petit pour que l'image complète de Ω par $\ell(z)$ évite le disque fermé de rayon r centré en β :*

$$\log\big(\Omega - \alpha\big) \;\subset\; \mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{D}}_r(\beta).$$

Preuve. Sinon, il existerait une suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points $z_n \in \Omega$ tels que :

$$\ell(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell(z_0) + 2i\pi \;=\; \beta$$

$$\Downarrow$$

$$z_n - \alpha \;=\; e^{\ell(z_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\ell(z_0)+2i\pi} \;=\; z_0 - \alpha,$$

ce qui impliquerait $z_n \longrightarrow z_0$, donc $\ell(z_n) \longrightarrow \ell(z_0)$ par continuité — contradiction avec le point de départ ! □

Ainsi :

$$\big|\ell(z) - \beta\big| > r \qquad\qquad (\forall\, z \in \Omega).$$

Effectuons une inversion (renormalisée) centrée au point β, afin d'échanger l'intérieur du cercle $C_r(\beta)$ avec son extérieur :

$$g(w) := \frac{r}{w-\beta},$$

ce qui donne par composition :

$$g\big(\ell(z)\big) = \frac{r}{\log\,(z-\alpha) - \beta}.$$

Comme ℓ et g sont injectives, leur composition $g \circ \ell$ l'est aussi. Le Théorème 6.2 fondamental garantit alors que :

$$g\circ\ell\colon \quad \Omega \xrightarrow{\ \sim\ } g\circ\ell\,(\Omega),$$

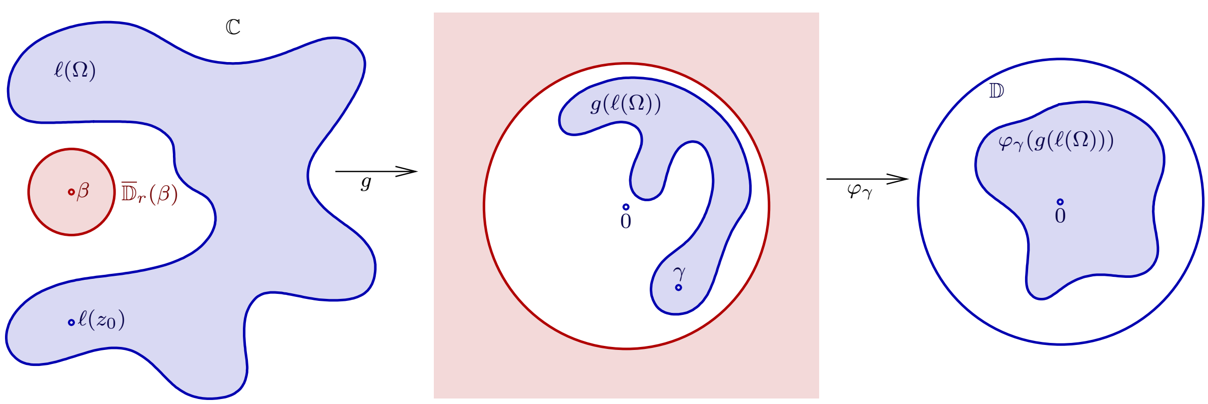
est un biholomorphisme. En particulier, $g\circ\ell(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Assertion 14.3. *On a* $g\circ\ell(\Omega) \subset \mathbb{D}$.

Preuve. En effet :

$$\begin{aligned}\big|g\circ\ell(z)\big| &\leqslant \frac{r}{|\ell(z)-\beta|}\\ &< \frac{r}{r} = 1.\end{aligned}$$

□



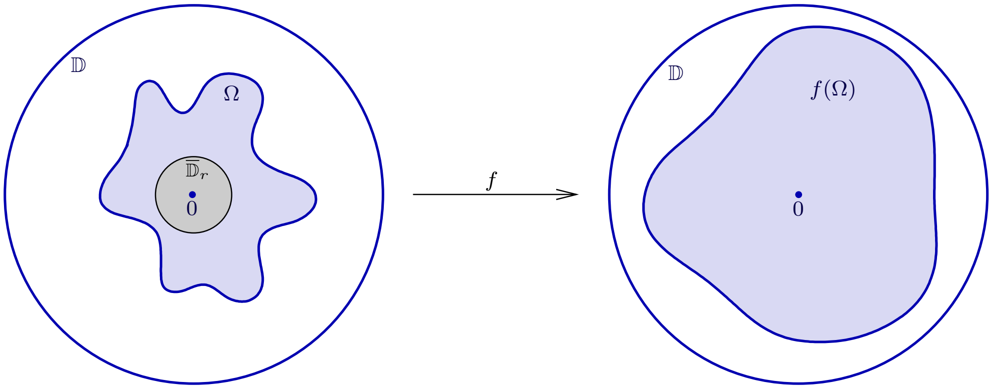
Toutefois, cet ouvert $g\circ\ell(\Omega) \subset \mathbb{D}$ ne contient pas forcément l'origine. Qu'à cela ne tienne, puisqu'il contient le point $g\big(\ell(z_0)\big) =: \gamma$, nous n'avons qu'à le composer avec l'automorphisme $\varphi_\gamma(w) = \frac{\gamma - w}{1-\overline{\gamma}w}$ du disque unité qui envoie γ sur $0 \in \mathbb{D}$, pour obtenir en conclusion :

$$f := \varphi_\gamma \circ g \circ \ell \qquad\qquad \text{avec} \qquad\qquad \omega := \varphi_\gamma\Big(g\big(\ell(\Omega)\big)\Big) \ni 0.$$

□

Étape 2. Grâce à ce qui précède, on peut dorénavant supposer que :

$$0 \in \Omega \subset \mathbb{D}.$$



Comme promis, introduisons alors l'espace fonctionnel :

$$\mathscr{R} := \big\{ f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{D} \text{ holomorphe} \colon\ f(0) = 0 \text{ et } f \text{ injective} \big\},$$

qui est non vide, puisqu'il contient l'identité $z \longmapsto z$. Souvenons-nous qu'alors toutes ces $f\colon \Omega \xrightarrow{\sim} f(\Omega)$ sont des biholomorphismes.

Cette famille $\mathscr{R}$ est uniformément bornée — sans avoir besoin de se cantonner à des compacts ! —, car $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in \Omega$. Le Théorème 11.5 de Montel affirme alors que $\mathscr{R}$ est uniformément équicontinue et normale.

Ensuite, soit $r > 0$ assez petit pour que $\overline{\mathbb{D}}_r(0) \subset \Omega$. De la formule de Cauchy pour $g \in \mathscr{R}$ quelconque :

$$g'(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r} \frac{g(\zeta)}{\zeta^2}\, d\zeta,$$

découle une majoration :

$$\begin{aligned} \big|g'(0)\big| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{|\zeta|=r} |g| \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 2\pi r \\ &\leqslant 1 \cdot \frac{1}{r} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

bornant uniformément les modules des dérivées en 0, ce qui garantit la finitude de :

$$s := \sup_{g \in \mathscr{R}} \big|g'(0)\big| < \infty.$$

Avec l'identité $g(z) = z \in \mathscr{R}$, on voit que :

$$1 \leqslant s.$$

Proposition 14.4. **[Principale]** *Il existe une fonction $f \in \mathscr{R}$ — c'est-à-dire holomorphe injective $\Omega \longrightarrow \mathbb{D}$ avec $f(0) = 0$ — qui* réalise *ce supremum :*

$$s = \big|f'(0)\big| \qquad ({<}\infty).$$

Démonstration. Prenons une suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $f_n \in \mathscr{R}$ maximisante :

$$\big|f_n'(0)\big| \xrightarrow[n \to \infty]{} s.$$

Tout notre programme se réalise précisément maintenant, parce que le Théorème 11.5 de Montel nous offre une sous-suite, que nous noterons encore $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ pour simplifier, qui converge, uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}$, vers une certaine fonction holomorphe :

$$f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}).$$

Un théorème de Cauchy donne la convergence des dérivées $f_n' \longrightarrow f'$, donc $|f'(0)| = s$.

Rappelons que dans la Définition 11.6 du concept de famille normale $\mathscr{R} \subset \mathscr{O}(\Omega)$, nous n'avons pas demandé que les fonctions-limites appartiennent *encore* à la famille $\mathscr{R}$, et donc ici, il reste à argumenter que :

$$f \overset{?}{\in} \mathscr{R}.$$

C'est facile ! Premièrement, $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ offre $f(0) = 0$ sans effort.

Deuxièmement, puisque les f_n sont toutes injectives, et puisque f est non constante — car $|f'(0)| = s \geqslant 1$ —, la Proposition 13.1 offre l'injectivité de f. Ainsi, les deux conditions pour que $f \in \mathscr{R}$ sont satisfaites. □

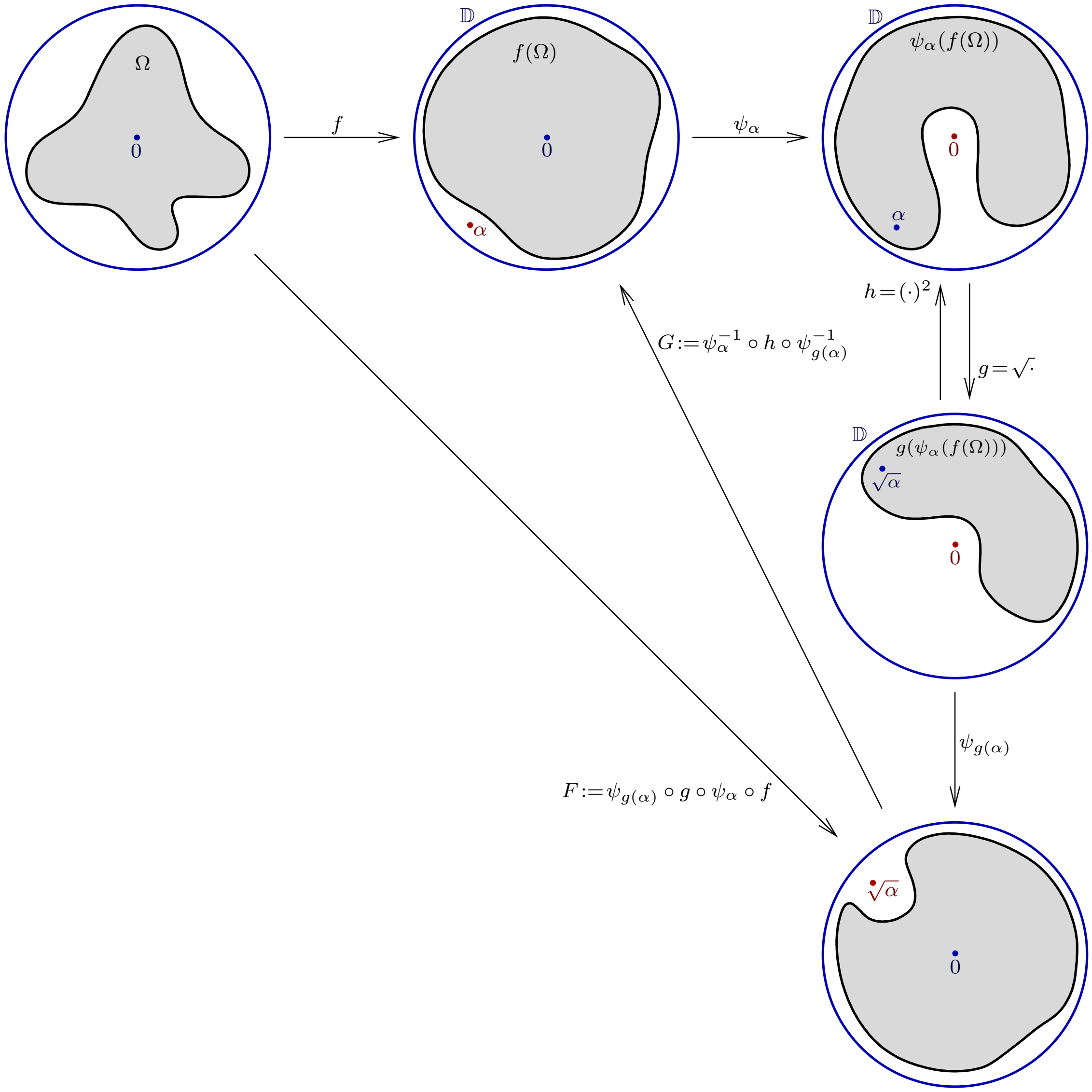
Étape 3. Dans cette dernière étape, nous établissons que cette fonction $f \in \mathscr{R}$ réalisant le supremum de la dérivée en 0 constitue un biholomorphisme $f \colon \Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$. Comme on sait que $f \colon \Omega \xrightarrow{\sim} f(\Omega)$ en est déjà un par injectivité, il ne reste plus qu'à traiter la *surjectivité*.

Affirmation 14.5. *La fonction* $f \in \mathscr{R}$ *satisfaisant* $|f'(0)| = \sup_{g \in \mathscr{R}} |g'(0)|$ *est surjective* $f \colon \Omega \twoheadrightarrow \mathbb{D}$.

Démonstration. Par l'absurde, supposons l'existence d'un :

$$\alpha \in \mathbb{D} \big\backslash f(\Omega).$$

Pour aboutir à une contradiction, nous allons construire une autre fonction $F \in \mathscr{R}$ de dérivée strictement supérieure $\big|F'(0)\big| > |f'(0)|$ à l'origine.



Considérons l'automorphisme ψ_α de $\mathbb{D}$ qui échange 0 et α :

$$\psi_\alpha(z) \;=\; \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}.$$

Comme Ω est simplement connexe, l'ouvert $\psi_\alpha(\Omega)$ l'est aussi, et il ne contient pas $\psi_\alpha(\alpha) = 0$. Nous pouvons donc définir une fonction racine carrée :

$$g(w) \;:=\; \sqrt{w} \;:=\; e^{\frac{1}{2}\log w},$$

holomorphe dans $\psi_\alpha \circ g(\Omega)$, et en composant avec g, on divise essentiellement par 2 l'« écartement angulaire » de $\psi_\alpha \circ f(\Omega)$ dans $\mathbb{D}$, comme tente de l'illustrer la figure.

Enfin, pour ramener le point $g \circ \psi_\alpha \circ f(0) = g \circ \psi_\alpha(0) = g(\alpha)$ à être l'origine, introduisons la composition :

$$F \;:=\; \psi_{g(\alpha)} \circ g \circ \psi_\alpha \circ f.$$

Assertion 14.6. *On a $F \in \mathscr{R}$.*

Preuve. On vient de faire $F(0) = 0$. Ensuite, F envoie Ω dans $\mathbb{D}$, puisque ψ_α, g, $\psi_{g(\alpha)}$ envoient $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. Enfin, f est injective par hypothèse, ψ_α est un automorphisme, $g(w) = \sqrt{w}$ est injective, $\psi_{g(\alpha)}$ est un automorphisme, donc la composition $F = \psi_{g(\alpha)} \circ g \circ \psi_\alpha \circ f$ est aussi injective. □

En notant $h(w) := w^2$ la fonction réciproque, il vient :

$$f \,=\, \underbrace{\psi_\alpha^{-1} \circ h \circ \psi_{g(\alpha)}^{-1}}_{=:\, G} \circ F.$$

Cette nouvelle fonction composée G envoie $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ et fixe l'origine :

$$G(0) \,=\, \psi_\alpha^{-1}\big(h\big(\psi_{g(\alpha)}^{-1}(0)\big)\big) \,=\, \psi_\alpha^{-1}\big(h\big(g(\alpha)\big)\big) \,=\, \psi_\alpha^{-1}\big((\sqrt{\alpha})^2\big) \,=\, \psi_\alpha(\alpha) \,=\, 0,$$

mais $G\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ n'est *pas* injective, car $h(w) = w^2$ ne l'est clairement pas.

Par conséquent, la partie **(3)** du Lemme 8.1 de Schwarz implique :

$$\big|G'(0)\big| \,<\, 1 \qquad\qquad \text{(strictement)}.$$

Une dérivation à l'origine de $f = G \circ F$ donne :

$$f'(0) \,=\, G'\big(F(0)\big)\, F'(0) \,=\, G'(0)\, F'(0),$$

et par conséquent :

$$|f'(0)| \,<\, \big|F'(0)\big|,$$

en contradiction *déflagrationnelle et libératrice* [1] avec l'hypothèse de maximalité de $|f'(0)|$ dans la famille $\mathscr{R}$. □

Pour terminer complètement l'argumentation du Théorème 10.1, il ne reste plus qu'à multiplier f par un nombre complexe approprié de module 1 pour avoir $f'(0) \in \mathbb{R}$ avec $f'(0) > 0$. □

15. Synthèse : sept caractérisations de la connexité simple

En examinant soigneusement les arguments de la démonstration du Théorème 10.1 de Riemann conforme, on se convainc que le seul endroit où l'hypothèse de simple connexité de l'ouvert $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ a été utilisée, c'était pour se servir d'une fonction logarithme et d'une fonction racine carrée. Par conséquent, nous aurions pu nous contenter de supposer que Ω est *holomorphiquement simplement connexe*, au sens où $0 = \int_\gamma f(z)\, dz$ pour toute courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée $\gamma \subset \Omega$ et toute $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, puisque nous avons démontré, à la fin du chapitre consacré aux séries de Laurent, que ceci suffit à garantir l'existence de logarithmes et de racines carrées.

Nous pouvons donc enfin énoncer un résultat qui réalise une synthèse théorique très importante. Ici, nous supposerons l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ *borné*, c'est-à-dire contenu dans un disque de rayon suffisamment grand, parce que la condition **(iv)** ci-dessous n'est par exemple pas satisfaite quand Ω est une bande infinie dirigée par une droite, simplement connexe, mais dont le complémentaire $\Omega \backslash \mathbb{C}$ consiste en *deux* composantes connexes.

1. Chapitre de 25 pages tapé intégralement (hors figures) en LaTeX-non-stop le Dimanche 7 Mai 2018, de 08h15 à 18h05.

Théorème 15.1. *Pour un ouvert connexe non vide* borné $\Omega \subset \mathbb{C}$, *les* 7 *conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\Omega \cong \mathbb{D}$ *est biholomorphe au disque unité* $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$.

(ii) Ω *est simplement connexe.*

(iii) $0 = \mathsf{Ind}_\gamma(w)$ *pour toute courbe* $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ *fermée* $\gamma \subset \Omega$ *et tout point* $w \in \mathbb{C}\backslash\Omega$.

(iv) $\mathbb{C}\backslash\Omega$ *est connexe.*

(v) *La propriété d'approximation uniforme des fonctions holomorphes par des polynômes sur les compacts est satisfaite :*

$$\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega) \quad \forall\, K \subset \Omega \text{ compact} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P(z) \in \mathbb{C}[z] \quad \textit{tel que} \quad \max_{z \in K} \big|f(z) - P(z)\big| \leqslant \varepsilon.$$

(vi) *Pour toute courbe* $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ *fermée, on a :*

$$0 = \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta \qquad\qquad (\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega)).$$

(vii) *Primitives, logarithmes, et racines existent :*

- $\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega)$, $\exists\, F \in \mathscr{O}(\Omega)$ *telle que* $F' = f$;
- $\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega, \mathbb{C}^*)$ *ne s'annulant jamais,* $\exists\, g \in \mathscr{O}(\Omega)$ *telle que* $f = e^g$;
- $\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega, \mathbb{C}^*)$ *ne s'annulant jamais,* $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\exists\, h \in \mathscr{O}(\Omega, \mathbb{C}^*)$ *telle que* $f = h^\alpha$.

Démonstration. Évidemment, quand $\Omega \subset \mathbb{C}$ est borné, il est clair que l'hypothèse $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$, du Théorème 10.1 de Riemann conforme est satisfaite.

Toutes les implications descendantes :

$$\textbf{(i)} \implies \textbf{(ii)} \implies \textbf{(iii)} \implies \textbf{(iv)} \implies \textbf{(v)} \implies \textbf{(vi)} \implies \textbf{(vii)},$$

ont déjà été démontrées dans les chapitres qui précèdent.

L'implication ascendante qui remonte d'un seul coup tous les échelons de cette échelle à saumon, de loin la plus difficile :

$$\textbf{(i)} \impliedby \textbf{(vii)},$$

n'est autre que le Théorème 10.1 de Riemann conforme que nous venons d'établir, en tenant compte de notre observation que l'hypothèse de simple connexité de Ω peut être remplacée par l'hypothèse **(vi)** que Ω est holomorphiquement simplement connexe. □

Quand $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ n'est pas forcément borné, il faut modifier cet énoncé en prenant le complémentaire par rapport au plan complexe $\mathbb{C}$ auquel on ajoute un point à l'infini :

$$\big(\mathbb{C} \cup \{\infty\}\big)\backslash\Omega.$$

Cet ensemble $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est homéomorphe à une sphère, dite *de Riemann*.

16. Exercices

Exercice 1. EE