Examens corrigés

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Examen 1

Exercice 1. Soient H et K deux espaces de Hilbert, soit F un sous-espace vectoriel arbitraire de H, et soit L une application linéaire continue quelconque de F dans K. L'objectif est de démontrer qu'il existe (au moins) un prolongement linéaire continu $\widetilde{L}\colon H \to K$ de l'application L à H tout entier, *i.e.* satisfaisant $\widetilde{L}\big|_F = L$ et $|\!|\!|\widetilde{L}|\!|\!| < \infty$, dont la norme d'opérateur reste inchangée : $|\!|\!|\widetilde{L}|\!|\!| = |\!|\!|L|\!|\!|$.

(a) Rappeler la définition de la norme d'opérateur $|\!|\!|L|\!|\!|$.

(b) Montrer tout d'abord que L admet un unique prolongement linéaire continu $L' \in \mathrm{Lin}\big(\overline{F}, K\big)$.

(c) Établir que l'application $h \mapsto \pi_{\overline{F}}(h)$, de H à valeurs dans $\overline{F}$, « projection orthogonale sur $\overline{F}$ », est linéaire continue. Que vaut $|\!|\!|\pi_{\overline{F}}|\!|\!|$?

(d) Considérer l'opérateur $\widetilde{L} := L' \circ \pi_{\overline{F}}$ et conclure.

Exercice 2. Soit $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \dots, \mathscr{C}_k, \dots$ une suite de sous-ensembles convexes fermés non vides dans un espace de Hilbert H qui satisfont :

$$\mathscr{C}_{k+1} \subset \mathscr{C}_k \qquad (k \geqslant 1).$$

(a) Montrer par un exemple géométrique simple que l'intersection :

$$\mathscr{C}_\infty := \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathscr{C}_k$$

peut se réduire à l'ensemble vide.

(b) On suppose dorénavant que $\mathscr{C}_\infty \neq \emptyset$. Vérifier alors que $\mathscr{C}_\infty$ est un sous-ensemble convexe fermé de H.

(c) Fixons à présent un élément $h \in H$ arbitraire. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on note :

$$h_k := \pi_{\mathscr{C}_k}(h)$$

le projeté de h sur $\mathscr{C}_k$, et aussi :

$$\pi_{\mathscr{C}_\infty}(h)$$

le projeté de h sur $\mathscr{C}_\infty$. Vérifier alors que :

$$\|h - h_k\|^2 \leqslant \|h - h_{k+1}\|^2 \leqslant \|h - \pi_{\mathscr{C}_\infty}(h)\|^2.$$

(d) Qu'en déduire sur la suite $\big(\|h-h_k\|^2\big)_{k\geqslant 1}$?

(e) En utilisant l'identité du parallélogramme (que l'on rappellera ou que l'on reconstituera), établir que la suite $(h_k)_{k\geqslant 1}$ est alors nécessairement de Cauchy dans H pour la distance associée à la norme hilbertienne.

(f) Si on note :

$$h_\infty := \lim_{k\to\infty} h_k,$$

montrer que l'on a, pour tout $g \in \mathscr{C}_\infty$:

$$\mathrm{Re}\,\langle h-h_\infty,\, g-h_\infty\rangle \leqslant 0.$$

(g) En déduire :

$$h_\infty = \pi_{\mathscr{C}_\infty}(h),$$

et énoncer le résultat obtenu sous la forme d'un théorème clair.

Exercice 3. Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la n-ème somme de Fejér est continue sur le cercle $\mathbb{T}$ et satisfait :

$$\|\sigma_n(f)\|_{\mathscr{C}^0} \leqslant \|f\|_{\mathscr{C}^0}.$$

Exercice 4. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie pour tout $\theta \in [-\pi,\pi]$ par :

$$f(\theta) := 1 - \frac{\theta^2}{\pi^2},$$

et prolongée comme fonction 2π-périodique (continue) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 5. On considère la série de fonctions :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin^3(n\theta)}{n!}.$$

(a) Montrer que cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note $S(\theta)$ sa somme.

(b) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et 2π-périodique.

(c) En développant $\sin^3(n\theta)$, exprimer $S(\theta)$ en fonction de (justifier aussi l'existence) :

$$\sigma(\theta) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin\,(n\theta)}{n!}.$$

(d) Montrer que $S(\theta)$ est développable en série de Fourier et trouver son développement.

(e) En considérant aussi :

$$\tau(\theta) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n!},$$

calculer explicitement $\tau(\theta)+i\sigma(\theta)$.

(f) En déduire que pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on a la formule explicite :

$$S(\theta) = \tfrac{3}{4}\sin\big(\sin\theta\big)\,e^{\cos\theta} - \tfrac{1}{4}\sin\big(\sin 3\theta\big)\,e^{\cos 3\theta}.$$

Exercice 6. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$ ayant une série de Fourier de la forme $\sum_{n\geqslant 1} b_n \sin(n\theta)$ avec $b_n \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que ses sommes de Fejér $\sigma_n(f)(\theta)$ sont impaires et en déduire que f elle-même est impaire.

(b) On considère la fonction $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(\theta) := -\int_0^\theta f(t)\,dt.$$

Montrer que F est 2π-périodique, de classe $\mathscr{C}^1$, et que ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$\left[\begin{aligned} &\widehat{F}(0) = \int_0^{2\pi} t\,f(t)\,\frac{dt}{2\pi}, \\ &\widehat{F}(k) = \frac{1}{2|k|}\,b_{|k|}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}^*. \end{aligned}\right.$$

Exercice 7. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$. Montrer que la série :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\widehat{f}(k)}{k}$$

est absolument convergente.

2. Corrigé de l'examen 1

Exercice 1. On supposera $F \neq \{0\}$, car si F se réduit à $\{0\}$, l'application linéaire continue $H \to K$ identiquement nulle convient comme prolongement de l'application nulle $\{0\} \to K$ préservant la norme d'opérateur.

(a) La norme de l'opérateur linéaire :

$$L\colon \big(F,\, \|\cdot\|_H\big) \longrightarrow \big(K,\, \|\cdot\|_K\big)$$

est classiquement définie par :

$$|||L||| := \sup_{\substack{f\in F\\ f\neq 0}} \frac{\|L(f)\|_K}{\|f\|_H} = \sup_{\substack{f\in F\\ \|f\|=1}} \|L(f)\|_K.$$

(b) Tout élément $\overline{f} \in \overline{F}$ de l'adhérence du sous-espace vectoriel $F \subset H$ s'obtient comme la limite dans H d'une certaine suite $(f_k)_{k\geqslant 1}$ d'éléments $f_k \in F$, laquelle est alors nécessairement de Cauchy. Or la majoration uniforme :

$$\|L(f_{k_2}) - L(f_{k_1})\|_K \leqslant |||L|||\, \|f_{k_2} - f_{k_1}\|_H$$

montre que la suite $\big(L(f_k)\big)_{k\geqslant 1}$ est alors aussi de Cauchy dans l'espace de Hilbert K, lequel est complet par définition. Donc il existe un unique $\overline{g} \in K$ tel que $\lim_{k\to\infty} L(f_k) = \overline{g}$.

Maintenant, cette application (noter le léger changement de notation par rapport à l'énoncé, où le prolongement $\overline{L}$ était noté L') $\overline{L}$ qui à un tel $\overline{f} \in \overline{F}$ associe ce $\overline{g}$ est *linéaire*, puisque, si $f_k' \to \overline{f}' \in \overline{F}$, si $\overline{g}' := \overline{L}(\overline{f}')$, si $f_k'' \to \overline{f}'' \in \overline{F}$, si $\overline{g}'' := \overline{L}(\overline{f}'')$, et si λ', λ'' sont deux constantes arbitraires, la suite $\lambda' f_k' + \lambda'' f_k''$ converge vers $\lambda'\overline{f}' + \lambda''\overline{f}''$, et on déduit de la linéarité de L que :

$$\lim_{k\to\infty} L\big(\lambda'\, f_k' + \lambda''\, f_k''\big) = \lambda' \lim_{k\to\infty} L(f_k') + \lambda'' \lim_{k\to\infty} L(f_k'') = \lambda'\,\overline{g}' + \lambda''\,\overline{g}'',$$

donc l'unique élément que $\overline{L}$ associe à $\lambda'\overline{f}' + \lambda''\overline{f}''$ est bien égal à $\lambda'\overline{L}(\overline{f}') + \lambda''\overline{L}(\overline{f}'')$.

Ensuite, en passant à la limite dans les inégalités :

$$\|L(f_k)\|_K \leqslant |||L|||\, \|f_k\|_H \qquad\qquad (k\geqslant 1\,;\ f_k\in F),$$

on obtient :

$$\|\overline{L}\big(\,\overline{f}\,\big)\|_K \leqslant |||L|||\, \|\overline{f}\|_H,$$

et donc $|||\overline{L}||| \leqslant |||L|||$, ce qui montre que $\overline{L}$ est un opérateur linéaire continu. En fait, comme $\overline{L}\big|_F = L$, on a même, plus précisément :

$$|||\overline{L}||| = |||L|||.$$

Enfin, si deux applications linéaires continues $\overline{L}_1\colon \overline{F} \to K$ et $\overline{L}_2\colon \overline{F} \to K$ prolongent toutes deux $L\colon F \to K$, à savoir $\overline{L}_1\big|_F = L$ et $\overline{L}_2\big|_F = L$, alors, puisque tout élément

élément $\overline{f} \in \overline{F}$ de l'adhérence de F peut s'écrire comme la limite $\overline{f} = \lim_{k\to\infty} f_k$ d'une suite d'éléments $f_k \in F$, et puisque $\overline{L}_1$ et $\overline{L}_2$ sont continues, on voit que :

$$\begin{aligned}\overline{L}_1\big(\,\overline{f}\,\big) = \overline{L}_1\big(\underset{k\to\infty}{lim}\, f_k\big) &= \lim_{k\to\infty} \overline{L}_1(f_k) = \lim_{k\to\infty} L(f_k) = \\ &= \lim_{k\to\infty} \overline{L}_2(f_k) = \overline{L}_2\big(\lim_{k\to\infty} f_k\big) = \overline{L}_2\big(\,\overline{f}\,\big),\end{aligned}$$

d'où $\overline{L}_1 = \overline{L}_2$.

Ainsi l'application $\overline{L}$ définit l'unique prolongement linéaire continu $\overline{L} \in \mathrm{Lin}\big(\overline{F}, K\big)$ de L, c'est-à-dire satisfaisant $\overline{L}\big|_F = L$.

(c) D'après un résultat du cours, puisque $\overline{F}$ est fermé, l'espace de Hilbert H se décompose comme somme directe orthogonale :

$$H = \overline{F} \overset{\perp}{\oplus} \overline{F}^{\perp}$$

de $\overline{F}$ avec son orthogonal :

$$\overline{F}^{\perp} := \big\{ g \in H\colon\ \langle g, f\rangle = 0,\ \forall\, f \in \overline{F} \big\},$$

lequel est lui aussi fermé. Ainsi, tout élément $h \in H$ se décompose comme :

$$h = \pi_{\overline{F}}(h) + \pi_{\overline{F}^{\perp}}(h),$$

où les deux projections $\pi_{\overline{F}}(\cdot)$ et $\pi_{\overline{F}^{\perp}}(\cdot)$ sont linéaires, et l'orthogonalité assure que le théorème de Pythagore est satisfait :

$$\|h\|^2 = \big\|\pi_{\overline{F}}(h)\big\|^2 + \big\|\pi_{\overline{F}^{\perp}}(h)\big\|^2.$$

Mais alors, si on néglige le second terme à droite qui est positif, cette égalité peut être vue comme une inégalité :

$$\|h\|^2 \geqslant \big\|\pi_{\overline{F}}(h)\big\|^2,$$

laquelle exprime que la norme de l'opérateur de projection orthogonale $\pi_{\overline{F}}(\cdot)$ est toujours $\leqslant 1$. Enfin, puisque cet opérateur se réduit à l'identité en restriction à $\overline{F} \neq \{0\}$, on a en fait :

$$|\!|\!|\pi_{\overline{F}}|\!|\!| = 1.$$

(d) L'opérateur $\widetilde{L} := \overline{L} \circ \pi_{\overline{F}}$ est linéaire continu, puisque $\overline{L}$ et $\pi_{\overline{F}}$ le sont tous deux. De plus, grâce à la majoration connue de la norme d'opérateur d'une composition d'opérateurs continus :

$$\begin{aligned}|\!|\!|\widetilde{L}|\!|\!| &\leqslant |\!|\!|\overline{L}|\!|\!|\ \underbrace{|\!|\!|\pi_{\overline{F}}|\!|\!|}_{=1} \\ &= |\!|\!|\overline{L}|\!|\!| \\ &= |\!|\!|L|\!|\!|,\end{aligned}$$

on voit que $\widetilde{L}$ est continu lui aussi, de norme d'opérateur majorée par celle de L. Mais comme sa restriction $\widetilde{L}\big|_F = L$ à $F \neq \{0\}$ est clairement égale à L par définition, il se trouve que $|\!|\!|\widetilde{L}|\!|\!| = |\!|\!|L|\!|\!|$ en fait.

En conclusion, il existe (au moins) un prolongement linéaire continu $\widetilde{L}\colon H \to K$ de l'application L à H tout entier, *i.e.* satisfaisant $\widetilde{L}\big|_F = L$ et $|\!|\!|\widetilde{L}|\!|\!| < \infty$, dont la norme d'opérateur reste inchangée : $|\!|\!|\widetilde{L}|\!|\!| = |\!|\!|L|\!|\!|$. Ce théorème est vrai plus généralement dans n'importe quel espace vectoriel normé (espace dit de Banach), d'après le fameux *Théorème de Hahn-Banach* (cours de M1).

Exercice 2. **(a)** Dans $H = \mathbb{R}^2(x, y)$, une famille de demi-espaces fermés à bords parallèles qui est poussée à l'infini telle que, disons, $\mathscr{C}_k := \{x \geqslant k\}$, offre un exemple simple de suite de sous-ensembles convexes fermés non vides $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \dots, \mathscr{C}_k, \dots$ emboîtés les uns dans les autres : $\mathscr{C}_{k+1} \subset \mathscr{C}_k$ mais dont l'intersection $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathscr{C}_k = \emptyset$ est vide.

(b) L'intersection $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathscr{C}_k =: \mathscr{C}_\infty$ est toujours un fermé, car au niveau abstrait de la topologie générale, une intersection quelconque d'ensembles fermés est encore fermée, sachant que l'ensemble vide est un fermé lui aussi.

Si $\mathscr{C}_\infty$ est non vide, soient $f, g \in \mathscr{C}_\infty$. Alors pour tout entier k, ces deux éléments f et g appartiennent à $\mathscr{C}_k$. Mais puisque $\mathscr{C}_k$ est convexe, le segment fermé $\{tf + (1-t)g \colon 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ qu'ils délimitent est contenu dans $\mathscr{C}_k$, et ce, pour tout $k \geqslant 1$. Donc ce segment est aussi contenu dans l'*intersection* $\mathscr{C}_\infty$ de tous les $\mathscr{C}_k$, d'où il découle que $\mathscr{C}_\infty$ est convexe.

(c) D'après un résultat du cours, si $h \in H$ est un élément arbitraire, ses projections $h_k := \pi_{\mathscr{C}_k}(h)$ $(k \geqslant 1)$ et $\pi_{\mathscr{C}_\infty}(h)$ sur les convexes fermés $\mathscr{C}_k$ $(k \geqslant 1)$ et $\mathscr{C}_\infty$ existent et sont uniques. Or à cause des deux inclusions :

$$\mathscr{C}_\infty \subset \mathscr{C}_{k+1} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{C}_{k+1} \subset \mathscr{C}_k,$$

on a immédiatement :

$$\pi_{\mathscr{C}_\infty}(h) \in \mathscr{C}_{k+1} \qquad \text{et} \qquad h_{k+1} \in \mathscr{C}_k,$$

et alors grâce aux deux propriétés de minimisation de la distance :

$$\|h - h_{k+1}\| = \min_{g \in \mathscr{C}_{k+1}} \|h - g\| \qquad \text{et} \qquad \|h - h_k\| = \min_{g \in \mathscr{C}_k} \|h - g\|$$

on peut en déduire, si l'on pose $g := \pi_{\mathscr{C}_\infty}(h)$ puis $g := h_{k+1}$, respectivement, les deux inégalités désirées :

$$\|h - h_{k+1}\|^2 \leqslant \|h - \pi_{\mathscr{C}_\infty}(h)\|^2 \qquad \text{et} \qquad \|h - h_k\|^2 \leqslant \|h - h_{k+1}\|^2.$$

(d) On en déduit que la suite de nombre réels tous positifs $\big(\|h - h_k\|^2\big)_{k \geqslant 1}$, qui est croissante et majorée par $\|h - \pi_{\mathscr{C}\infty}(h)\|$ admet une unique limite, disons $d_\infty \geqslant 0$, dans $\mathbb{R}_+$.

(e) L'identité du parallélogramme, qui remonte à Pythagore et à Euclide, stipule que pour tous $u, v \in H$, on a :

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = 2\left\|\tfrac{u+v}{2}\right\|^2 + \tfrac{1}{2}\,\|u - v\|^2.$$

Appliquons donc cette identité à $u := h - h_{k_1}$ et à $v := h - h_{k_2}$ pour deux entiers $k_1 \leqslant k_2$, en plaçant $\|u - v\|^2$ seul à gauche, ce qui nous donne :

$$\tfrac{1}{2}\,\|h_{k_2} - h_{k_1}\|^2 = \|h - h_{k_1}\|^2 + \|h - h_{k_2}\|^2 - 2\,\left\|h - \tfrac{h_{k_1} + h_{k_2}}{2}\right\|^2.$$

Or, puisque h_{k_1} et h_{k_2} appartiennent tous deux à $\mathscr{C}_{k_1} \supset \mathscr{C}_{k_2}$, leur milieu $\frac{h_{k_1} + h_{k_2}}{2}$ appartient aussi au convexe $\mathscr{C}_{k_1}$, et donc encore grâce à la propriété de minimisation, on a :

$$\|h - h_{k_1}\| \leqslant \left\|h - \tfrac{h_{k_1} + h_{k_2}}{2}\right\|,$$

c'est-à-dire de manière équivalente en multipliant par -1 :

$$-\left\|h - \tfrac{h_{k_1} + h_{k_2}}{2}\right\| \leqslant -\|h - h_{k_1}\|.$$

En revenant à l'égalité précédente, on en déduit alors une inégalité :

$$\tfrac{1}{2}\,\|h_{k_2}-h_{k_1}\|^2 \leqslant \|h-h_{k_2}\|^2 - \|h-h_{k_1}\|^2$$

qui implique que la suite double $\|h_{k_2}-h_{k_1}\|$ satisfait la condition dite de Cauchy pour la distance associée à la norme hilbertienne, puisque nous venons de voir que la suite décroissante positive $\big(\|h-h_k\|^2\big)_{k\geqslant 1}$ converge. Par complétude de l'espace de Hilbert H, la suite des h_k converge donc vers une certaine limite dans H. Soit h_∞ cette limite. Puisque $h_k \in \mathscr{C}^k$ pour tout k, on a $h_\infty \in \mathscr{C}^\infty$.

(f) D'après un résultat du cours (Théorème 5.2), pour k fixé quelconque, le projeté $h_k = \pi_{\mathscr{C}_k}(h)$ de h sur le convexe fermé $\mathscr{C}_k$ est caractérisé par la propriété que :

$$\mathrm{Re}\,\langle h-h_k,\, g-h_k\rangle \leqslant 0,$$

pour tout autre élément $g \in \mathscr{C}_k$. En particulier puisque $\mathscr{C}_\infty$ est contenu dans $\mathscr{C}_k$, cette inégalité est satisfaite pour tout $g \in \mathscr{C}_\infty$. Mais d'après la question précédente, la limite :

$$h_\infty := \lim_{k\to\infty} h_k$$

existe, et par continuité du produit scalaire, en passant à la limite quand $k\to\infty$, la famille d'inégalités précédentes devient :

$$\mathrm{Re}\,\langle h-h_\infty,\, g-h_\infty\rangle \leqslant 0,$$

pour tout $g \in \mathscr{C}_\infty$, ce qu'il fallait démontrer.

(g) Toujours d'après le même résultat du cours, ce jeu d'inégalités caractérise uniquement la projection de h sur le convexe fermé $\mathscr{C}_\infty$, donc il en découle que :

$$h_\infty = \pi_{\mathscr{C}_\infty}(h).$$

Pour conclure, le théorème « clair » énonce : 1) que la limite des projetés orthogonaux sur des convexes fermés emboîtés en famille dénombrable dont l'intersection totale est non vide existe ; 2) qu'elle est unique ; et 3) qu'elle coïncide avec la projection orthogonale sur le convexe fermé qui est l'intersection totale de tous ces convexes fermés ; ce résultat pourra aussi être considéré comme mathématiquement plus « clair » si on l'exprime sous la forme d'une seule équation :

$$\lim_{k\to\infty} \pi_{\mathscr{C}_k}(h) = \pi_{\cap_{k=1}^{\infty}\mathscr{C}_k}(h).$$

Exercice 3. Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la n-ème somme de Fejér (exercice subsidiaire : établir que :

$$\mathsf{K}_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{k=+n} \Big(1-\frac{|k|}{n}\Big)\, e^{ik\theta} \qquad \text{et que :} \qquad \sigma_n(f)(\theta) = \sum_{k=-n}^{k=+n} \Big(1-\frac{|k|}{n}\Big)\, \widehat{f}(k)\, e^{ik\theta})$$

qui est par définition la n-ème somme de Cesàro des sommes partielles de la série de Fourier de f :

$$\sigma_n(f)(\theta) = \frac{S_0(f)(\theta)+S_1(f)(\theta)+\cdots+S_{n-1}(f)(\theta)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=-k}^{l=+k} \widehat{f}(l)\, e^{il\theta}$$

est évidemment continue sur le cercle $\mathbb{T}$, puisque c'est un polynôme de degré $\leqslant n$ en les exponentielles complexes $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$. D'après un calcul du cours, cette somme s'exprime comme la convolution avec le n-ème noyau de Fejér F_n :

$$\sigma_n(f)(\theta) = \mathsf{F}_n * f\,(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{F}_n(\eta)\, f(\theta-\eta)\, \frac{d\eta}{2\pi},$$

donc on peut alors majorer aisément :

$$\begin{aligned}\big|\sigma_n(f)(\theta)\big| &\leqslant \max_{|\eta|\leqslant\pi} \big|f(\theta-\eta)\big| \int_{-\pi}^{\pi} |\mathsf{F}_n(\eta)|\, \frac{d\eta}{2\pi} \\ &= \|f\|_{\mathscr{C}^0},\end{aligned}$$

en se souvenant de la propriété cruciale que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale sur $[-\pi, +\pi]$ de ce noyau *positif* est toujours égale à 1 :

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{F}_n(\theta)\, \frac{d\theta}{2\pi} = \|\mathsf{F}_n\|_{L^1},$$

ce qui démontre finalement l'inégalité désirée en prenant le maximum sur θ à gauche :

$$\|\sigma_n(f)\|_{\mathscr{C}^0} \leqslant \|f\|_{\mathscr{C}^0}.$$

Exercice 4. Le zéro-ème coefficient de Fourier complexe de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$ par :

$$f(\theta) := 1 - \frac{\theta^2}{\pi^2},$$

et prolongée comme fonction 2π-périodique (continue) sur $\mathbb{R}$ tout entier est égal à :

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(1 - \frac{\theta^2}{\pi^2}\Big)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \Big(2\pi - \frac{1}{\pi^2}\, 2\, \frac{\pi^3}{3}\Big) = \frac{2}{3}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, si l'on se souvient que que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{il\theta}\, d\theta = 0$ pour tout entier $l \neq 0$, le k-ème coefficient de Fourier complexe de ladite fonction f se calcule grâce à deux intégrations par parties dont la nécessité ne fait pas de doute :

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(\underline{1} - \tfrac{\theta^2}{\pi^2}\big)\, e^{-ik\theta}\, d\theta \\ &= \underline{\frac{1}{2\pi} \Big[-\frac{\theta^2}{\pi^2}\, \frac{1}{-ik}\, e^{-ik\theta}\Big]_{-\pi}^{\pi}} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\theta}{\pi^2}\, \frac{1}{ik}\, e^{-ik\theta}\, d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \Big[\frac{2\theta}{\pi^2}\, \frac{1}{k^2}\, e^{-ik\theta}\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \underline{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{\pi^2}\, \frac{1}{k^2}\, e^{-ik\theta}\, d\theta} \\ &= -\frac{2}{\pi^2}\, \frac{1}{k^2}\, (-1)^n.\end{aligned}$$

Exercice 5. **(a)** La série de fonctions :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin^3(n\theta)}{n!}.$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue $S(\theta)$, puisque qu'elle converge normalement (et même très rapidement) :

$$\sum_{n\geqslant 1} \left|\frac{\sin^3(n\theta)}{n!}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \infty,$$

sachant que $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ croît plus vite, lorsque n tend vers l'infini, que toute puissance fixe n^a.

(b) - (c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$4\,\mathsf{sin}^3 t = 3\,\mathsf{sin} t - \mathsf{sin}(3t),$$

d'après une formule classique de trigonométrie que l'on peut retrouver et re-deviner — au cas où l'on ne s'en souvienne pas — en développant tout simplement $\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$. Si donc l'on pose :

$$\sigma(\theta) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{\mathsf{sin}(n\theta)}{n!},$$

série qui converge à nouveau uniformément grâce au même argument que ci-dessus, on voit que :

$$S(\theta) = \tfrac{3}{4}\,\sigma(\theta) - \tfrac{1}{4}\,\sigma(3\theta),$$

formule que l'on pouvait aussi re-deviner en examinant un peu à l'avance l'équation qui était écrite à la dernière question **(f)**. Pour montrer que $S(\theta)$ est $\mathscr{C}^\infty$, il suffit visiblement de montrer que $\sigma(\theta)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Mais si l'on dérive p fois terme à terme la série σ, on obtient une série :

$$\sum_{n \geqslant 1} n^p \, \frac{\mathsf{sin}(n\theta)}{n!}$$

qui est à nouveau normalement convergente, puisque $n!$ croît plus vite que toute puissance fixe n^a. D'après le théorème classique d'existence d'une série dérivée, il en découle par récurrence sur p que la dérivée p-ème de σ existe, qu'elle est continue et 2π-périodique et qu'elle est donnée par cette série infinie normalement convergente dérivée terme à terme :

$$\sigma^{(p)}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \, \frac{\mathsf{sin}(n\theta)}{n!}.$$

(d) Puisque $\sigma(\theta)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, donc en particulier de classe $\mathscr{C}^1$, le théorème connu de Dirichlet — En fait, le théorème le plus élémentaire de Dini s'applique aussi directement, non pas seulement aux fonctions höldériennes de classe $\mathscr{C}^\alpha$ avec $0 < \alpha \leqslant 1$, mais aussi bien entendu aux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ qui sont beaucoup plus régulières — montre qu'elle s'identifie, en tout point du cercle, à sa série de Fourier :

$$\sigma(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{sin}(n\theta)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\sigma}(k)\, e^{ik\theta}.$$

Mais comme $\sigma(\theta)$ s'écrit déjà sous la forme d'une série trigonométrique absolument convergente, on en déduit sans aucun calcul — grâce à un résultat du cours qui dit qu'une série trigonométrique normalement convergente est la série de Fourier de la fonction continue qu'elle définit sur le cercle — que $\widehat{\sigma}(0) = 0$ et que :

$$\widehat{\sigma}(k) = \frac{1}{2i}\, \frac{\mathsf{sign}(k)}{|k|!} \qquad \text{pour } \ |k| \geqslant 1,$$

Maintenant, en remplaçant θ par 3θ :

$$\sigma(3\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \frac{e^{i3n\theta} - e^{-i3n\theta}}{2i},$$

et en revenant à la relation $S(\theta) = \frac{3}{4}\,\sigma(\theta) - \frac{1}{4}\,\sigma(3\theta)$, il vient $\widehat{S}(0) = 0$ et enfin pour tout $k \geqslant 1$:

$$\widehat{S}(3k-2) = \tfrac{1}{2i}\big(\tfrac{3}{4}\tfrac{1}{(3k-2)!}\big), \qquad \widehat{S}(3k-1) = \tfrac{1}{2i}\big(\tfrac{3}{4}\tfrac{1}{(3k-1)!}\big), \qquad \widehat{S}(3k) = \tfrac{1}{2i}\big(\tfrac{3}{4}\tfrac{1}{(3k)!} - \tfrac{1}{4}\tfrac{1}{k!}\big),$$

$$\widehat{S}(-3k+2) = \tfrac{1}{2i}\big(\tfrac{3}{4}\tfrac{-1}{(3k-2)!}\big), \qquad \widehat{S}(-3k+1) = \tfrac{1}{2i}\big(\tfrac{3}{4}\tfrac{-1}{(3k-1)!}\big), \qquad \widehat{S}(-3k) = \tfrac{1}{2i}\big(\tfrac{3}{4}\tfrac{-1}{(3k)!} - \tfrac{1}{4}\tfrac{-1}{k!}\big).$$

(e) - (f) Pour le calcul explicite de $\tau(\theta)+i\sigma(\theta)$, si l'on introduit, comme cela a été suggéré :

$$\tau(\theta) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n!},$$

on observe en posant $z := e^{i\theta}$, que l'on peut écrire $\tau + i\sigma$ sous une forme simple :

$$\tau(\theta) + i\sigma(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z - 1$$

qui fait naturellement apparaître l'exponentielle complexe e^z. Donc on a :

$$\tau(\theta) + i\sigma(\theta) = e^z = e^{e^{i\theta}} = e^{\cos\theta + i\sin\theta} = e^{\cos\theta}\, e^{i\sin\theta} = e^{\cos\theta}\big[\cos(\sin\theta) + i\,\sin(\sin\theta)\big],$$

ce qui donne en identifiant les parties imaginaires à gauche et à droite :

$$\sigma(\theta) = e^{\cos\theta}\,\sin(\sin\theta).$$

Enfin, on obtient bien la formule explicite annoncée :

$$S(\theta) = \tfrac{3}{4}\sin\big(\sin\theta\big)\,e^{\cos\theta} - \tfrac{1}{4}\sin\big(\sin 3\theta\big)\,e^{\cos 3\theta}.$$

Exercice 6. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$ ayant une série de Fourier de la forme $\sum_{n\geqslant 1} b_n \sin(n\theta)$ avec $b_n \in \mathbb{R}$.

(a) Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la n-ème somme partielle de la série de Fourier de f est donc égale à :

$$S_n(f)(\theta) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(k\theta),$$

fonction qui est visiblement impaire. Il en découle que la n-ème somme de Fejér $\sigma_n(f)(\theta)$ est elle aussi impaire, puisque :

$$\sigma_n(f)(\theta) = \frac{S_0(f)(\theta) + S_1(f)(\theta) + \cdots + S_{n-1}(f)(\theta)}{n}.$$

Or d'après le théorème de Fejér, la suite $\big(\sigma_n(f)(\theta)\big)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément, lorsque n augmente jusqu'à l'infinu, vers f. Donc f elle-même est impaire.

(b) La primitive $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de f définie par :

$$F(\theta) := -\int_0^{\theta} f(t)\,dt$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier puisque f est continue, et elle est aussi 2π-périodique, puisque l'on a grâce à la règle de Chasles :

$$F(\theta+\pi) - F(\theta-\pi) = -\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} f(t)\,dt = 0,$$

cette dernière intégrale s'annulant automatiquement par imparité de f.

Maintenant, calculons en appliquant le théorème de Fubini à la fonction continue (dont intégrable) $(t,\theta) \longmapsto f(t)$ le zéro-ème coefficient de Fourier de F :

$$
\begin{aligned}
\widehat{F}(0) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\theta} f(t)\,dt\right]d\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\int_t^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,(t-2\pi)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t f(t)\,dt - \underbrace{\int_0^{2\pi} f(t)\,dt}_{=\widehat{f}(0)=0}
\end{aligned}
$$

Ensuite, calculons, à nouveau grâce au théorème de Fubini, le k-ème coefficient de Fourier de F, pour un $k \in \mathbb{Z}^*$ arbitraire :

$$
\begin{aligned}
\widehat{F}(k) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\theta} f(t)\,dt\right]e^{-ik\theta}\,d\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left[\int_t^{2\pi} e^{-ik\theta}\,d\theta\right]dt \\
&= \frac{1}{2ik\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-e^{-ikt}\right)f(t)\,dt = \frac{1}{ik}\left(\underline{\widehat{f_0}} - \widehat{f}(k)\right) = -\frac{1}{ik}\,\widehat{f}(k).
\end{aligned}
$$

Mais comme on a par hypothèse :

$$
\widehat{f}(k) = \begin{cases} -\frac{i}{2}\,b_k & \text{pour } k \geqslant 1, \\ +\frac{i}{2}\,b_{-k} & \text{pour } k \leqslant -1, \end{cases}
$$

on obtient bien comme voulu :

$$
\widehat{F}(k) = \frac{1}{2|k|}\,b_{|k|} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}^*.
$$

Exercice 7. D'après la formule de Parseval, la série de terme général $|\widehat{f}(k)|^2$ converge et est égale au carré de la norme L^2 de la fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$, à savoir l'on a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(k)\right|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2\,\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \|f\|_{L^2}^2 < \infty.
\end{aligned}
$$

Mais par ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, de majorer la somme partielle à étudier :

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{|k|\leqslant n \\ k\neq 0}} \frac{|\widehat{f}(k)|}{k} &\leqslant \left(\sum_{\substack{|k|\leqslant n \\ k\neq 0}} |\widehat{f}(k)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\substack{|k|\leqslant n \\ k\neq 0}} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \\
&\leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}\cdot\left(2\,\tfrac{\pi^2}{6}\right)^{1/2} \\
&< \infty,
\end{aligned}
$$

par une quantité qui est bornée uniformément par rapport à n, ce qui montre que la série à termes positifs $\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\frac{|\widehat{f}(k)|}{k}$ est effectivement *absolument* convergente, *cqfd*.

3. Examen 2

Exercice 1. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ telle que :

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R})$. Soit $(\rho_j)_{j\geqslant 1}$ une suite régularisante, c'est-à-dire plus précisément une suite de fonctions $\rho_j \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ telles que $\rho_j \geqslant 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_j(x)\,dx = 1$ et $\operatorname{supp}\rho_j \subset [-\varepsilon_j, +\varepsilon_j]$ pour une certaine suite de réels ε_j tels que $0 < \varepsilon_j \leqslant 1$ satisfaisant $\lim_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0$.

(a) Montrer que toutes les régularisées $f * \rho_j$ de la fonction f sont identiquement nulles.

(b) Soit a un réel strictement positif et posons $b := a + 1$. Montrer que, pour tout réel x tel que $|x| \leqslant a$ et pour tout entier $j \geqslant 1$, on a :

$$\rho_j * f(x) = \rho_j * \big(\mathbf{1}_{[-b,b]}\, f\big)(x) = 0.$$

(c) Montrer que :

$$\big\|\mathbf{1}_{[-b,b]}\, f - \rho_j * \big(\mathbf{1}_{[-b,b]}\, f\big)\big\|_{L^1} \geqslant \int_{-a}^{+a} |f(x)|\,dx.$$

(d) En déduire que $f = 0$ presque partout.

Exercice 2. On considère l'espace $\mathscr{C} := \mathscr{C}^0([-1,1], \mathbb{C})$ des fonctions continues sur le segment $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ à valeurs complexes, et on le munit du produit sesquilinéaire :

$$\langle f,\, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \qquad\qquad (f, g \in \mathscr{C}).$$

(a) Justifier en quelques mots le caractère sesquilinéaire de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et expliquer brièvement pourquoi $\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ définit une norme sur les éléments $f \in \mathscr{C}$.

(b) En les énonçant soigneusement, rappeler au moins trois théorèmes fondamentaux du cours concernant l'espace $L^2\big([-1,1],\, \mathbb{C}\big)$.

(c) On s'intéresse à la suite, indexée par un entier $n \geqslant 1$, de fonctions (impaires) $f_n\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de $\mathscr{C}$ qui sont définies par :

$$f_n(t) := \begin{cases} n\,t & \text{lorsque } \ |t| < \frac{1}{n} \\ \mathsf{sgn}(t)\cdot 1 & \text{lorsque } \ \frac{1}{n} \leqslant |t| \leqslant 1. \end{cases}$$

Montrer que pour tous entiers $1 \leqslant n \leqslant m$, on a la majoration (non optimale) :

$$\big\|f_m - f_n\big\| \leqslant \tfrac{2}{\sqrt{3\,n}}.$$

Indication: Majorer séparément $\int_0^{\frac{1}{m}}$ et $\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}}$, ou trouver une majoration alternative simple qui pourra interpréter le rôle qu'on attend d'elle.

(d) Montrer que cette suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge pour la norme $\|\cdot\|$ sur l'espace $L^2([-1,1],\mathbb{C})$ vers une fonction qui vaut presque partout 1 sur $]0,1]$ et presque partout -1 sur $[-1,0[$.

(e) L'espace $\mathscr{C}$ muni de la norme $\|\cdot\|$ est-il un espace de Hilbert ? Interpréter intelligemment la réponse proposée.

Exercice 3. Sur la droite numérique complète $\mathbb{R}$, on considère l'*équation de la chaleur* définie en temps $t > 0$ par :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad\qquad {\scriptstyle (x\in\mathbb{R},\; t>0)},$$

d'inconnue $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*)$, avec distribution de température $u(x,0)$ prescrite à l'origine des temps comme étant une certaine fonction intégrable donnée $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$0 \;=\; \lim_{\substack{t \longrightarrow 0 \\ >}} \big\| u(\cdot,t) - f(\cdot)\big\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Jusqu'à la Question **(g)** incluse, on suppose qu'il en existe une solution $u = u(x,t)$ de classe $\mathscr{C}^2$ par rapport à (x,t) pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, s'amenuisant ainsi que ses dérivées à l'infini :

$$0 \;=\; \lim_{|x|\to\infty} u(x,t) \;=\; \lim_{|x|\to\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\, t>0)},$$

et qui est de plus contrôlée ainsi que sa dérivée temporelle en termes d'une certaine fonction-majorante positive intégrable fixée $g \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$:

$$\big|u(x,t)\big| \;\leqslant\; g(x) \qquad\quad \text{et} \qquad\quad \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right| \;\leqslant\; g(x) \qquad\qquad {\scriptstyle (\text{pour presque tout } x\in\mathbb{R})},$$

uniformément pour tout $t > 0$. On rappelle que la *transformée de Fourier* d'une fonction $h \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par :

$$\widehat{h}(\xi) \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx.$$

(a) La transformée de Fourier de u par rapport à x s'exprimant alors comme :

$$\widehat{u}(\xi,t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx,$$

vérifier qu'elle est bien définie et qu'elle prend des valeurs finies.

(b) Montrer, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et tout $t \geqslant 0$, que :

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi,t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx.$$

(c) Concocter une équation différentielle du premier ordre satisfaite par $\widehat{u}(\xi,t)$.

(d) Montrer que la fonction $t \longmapsto \widehat{u}(\xi,t)$ est continue en $t = 0$, $t \geqslant 0$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ fixé.

(e) Montrer que :

$$\widehat{u}(\xi,t) \;=\; \widehat{u}(\xi,0)\, e^{-4\pi^2\xi^2 t} \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\, \xi\in\mathbb{R},\; \forall\, t\geqslant 0)}.$$

(f) Soient deux fonctions intégrables $h_1, h_2 \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Comment s'exprime la transformée de Fourier $\widehat{h_1 * h_2}$ du produit de convolution — dont on rappellera la définition précise — en termes de $\widehat{h_1}$ et de $\widehat{h_2}$?

(g) Montrer que :

$$u(x,t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,e^{-\frac{y^2}{4t}}\,dy.$$

Indication: On rappelle que pour tout paramètre réel $\sigma > 0$, la transformée de Fourier de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ est la fonction $\xi \longmapsto e^{-2\pi^2\sigma^2\xi^2}$.

(h) Conclure en démontrant que cette expression pour une fonction u résout le problème de la chaleur, *i.e.* satisfait les conditions requises.

Exercice 4. Soit l'espace $\mathscr{C}$ défini dans l'Exercice 2.

(a) Pour un entier $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on note $\mathscr{P}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}$ qui est constitué des fonctions polynomiales de degré $\leqslant n$ restreintes à $[-1,1]$, et on note $\pi_n \colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{P}_n$ le projecteur orthogonal, pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. À l'aide du cours, justifier soigneusement que :

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty} \big\| f - \pi_n(f) \big\| \qquad\qquad (\forall\, f \in \mathscr{C}).$$

(b) Soit $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ une famille infinie d'éléments $p_n \in \mathscr{P}_n$ qui est de plus orthonormale. Justifier que la sous-famille finie $\{p_0, \dots, p_n\}$ est libre pour tout $n \in \mathbb{N}$, et montrer ensuite que $\{p_0, \dots, p_n\}$ forme une base de $\mathscr{P}_n$, quel que soit n.

(c) Montrer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $f \in \mathscr{C}$, que :

$$\pi_n(f) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \langle f,\, p_i \rangle \cdot p_i$$

puis que :

$$\big\| \pi_n(f) \big\|^2 \;=\; \sum_{i=0}^{n} \big| \langle f,\, p_i \rangle \big|^2.$$

(d) Montrer, pour une fonction $f \in \mathscr{C}$ quelconque, que la série de terme général $|\langle f, p_n \rangle|^2$ est convergente.

(e) Montrer en fait que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big| \langle f,\, p_n \rangle \big|^2 \;=\; \| f \| \qquad\qquad (\forall\, f \in \mathscr{C}).$$

(f) Tout en établissant son existence, déterminer la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f(t)\,\overline{p_n(t)}\,dt.$$

4. Corrigé de l'examen 2

Exercice 1. (a) Les régularisées $f * \rho_j(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\rho_j(x-y)\,dy$ de la fonction f sont identiquement nulles, puisque chaque fonction $y \mapsto \rho_j(x-y)$ appartient à $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Soit a un réel strictement positif, soit $b := a+1$, et soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leqslant a$. Alors, puisque le support chaque fonction ρ_j est contenu dans $[-1,1]$ (par hypothèse, $0 < \varepsilon_j \leqslant 1$), le support de $y \mapsto \rho_j(x-y)$ est contenu dans $[-b,b]$, donc :

$$\begin{aligned}0 = \rho_j * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_j(x-y)\,f(y)\,dy &= \int_{-b}^{+b} \rho_j(x-y)\,f(y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_j(x-y)\,f(y)\,\mathbf{1}_{[-b,b]}(y)\,dy \\ &= \rho_j * \big(\mathbf{1}_{[-b,b]}\,f\big)(x).\end{aligned}$$

(c) Sachant que pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$, et pour tout $a > 0$ quelconque, on a trivialement :

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,dx &= \int_{-a}^{+a} |g(x)|\,dx + \int_{|x|>a} |g(x)|\,dx \\ &\geqslant \int_{-a}^{+a} |g(x)|\,dx,\end{aligned}$$

on voit immédiatement que :

$$\begin{aligned}\big\|\mathbf{1}_{[-b,b]}\,f - \rho_j * \big(\mathbf{1}_{[-b,b]}\,f\big)\big\|_{L^1} &\geqslant \int_{-a}^{+a} \big|\mathbf{1}_{[-b,b]}\,f - \underline{\rho_j * \big(\mathbf{1}_{[-b,b]}\,f\big)}\big|\,dx \\ &\geqslant \int_{-a}^{+a} |f(x)|\,dx.\end{aligned}$$

(d) Observons que $\mathbf{1}_{[-b,b]}\,f$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$, puisque $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ par hypothèse. D'après un théorème du cours, le membre de gauche de la dernière inégalité tend vers zéro quant j tend vers ∞. Ainsi, $\int_{-a}^{+a} |f(x)|\,dx = 0$, et puisque le réel positif a était arbitraire, on en déduit, comme demandé, que $f = 0$ presque partout.

Exercice 2. (a) Soient $f, f', f'', g, g', g'' \in \mathscr{C}^0\big([-1,1],\mathbb{C}\big)$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

satisfait manifestement :

$$\begin{aligned}\langle f' + f'', g \rangle &= \langle f', g \rangle + \langle f'', g \rangle, \\ \langle f, g' + g'' \rangle &= \langle f, g' \rangle + \langle f, g'' \rangle,\end{aligned}$$

ainsi que :

$$\langle \lambda f, g \rangle \;=\; \int_{-1}^{1} \lambda\, f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \;=\; \lambda\, \langle f, g \rangle,$$
$$\langle f, \mu g \rangle \;=\; \int_{-1}^{1} f(x)\, \overline{\mu g(x)}\, dx \;=\; \overline{\mu}\, \langle f, g \rangle,$$

ce qui montre qu'il est bien sesquilinéaire.

Ensuite, la quantité positive :

$$\|f\| \;:=\; \bigg(\int_{-1}^{1} \big|f(t)\big|^2\, dt\bigg)^{\frac{1}{2}} \;=\; \sqrt{\langle f, f\rangle},$$

satisfaisant $\|\lambda f\| = |\lambda|\, \|f\|$, qui s'annule si et seulement si $f(t) = 0$ pour presque tout $t \in [-1,1]$, donc pour *tout* $t \in [-1,1]$ puisque f est continue, constitue une *norme* sur $\mathscr{C} = \mathscr{C}^0\big([-1,1], \mathbb{C}\big)$ — d'après un théorème du cours qui démontre que l'inégalité de Minkowski s'en déduit :

$$\|f + g\| \;\leqslant\; \|f\| + \|g\|.$$

(b) • *Premier théorème fondamental.* L'espace $L^2\big([-1,1], \mathbb{C}\big)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé muni du produit scalaire standard :

$$\langle f, g \rangle_{L^2} \;:=\; \int_{-1}^{1} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \qquad\qquad (\forall\, f, g \in L^2[-1,1]),$$

et sa norme associée :

$$\|f\|_{L^2} \;:=\; \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

satisfait l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\big|\langle f, g\rangle_{L^2}\big| \;\leqslant\; \|f\|_{L^2}\, \|g\|_{L^2} \qquad\qquad (\forall\, f, g \in L^2[-1,1]).$$

• *Deuxième théorème fondamental.* Cet espace muni de la distance associée à sa norme :

$$d(f,g) \;:=\; \|f - g\|_{L^2}$$

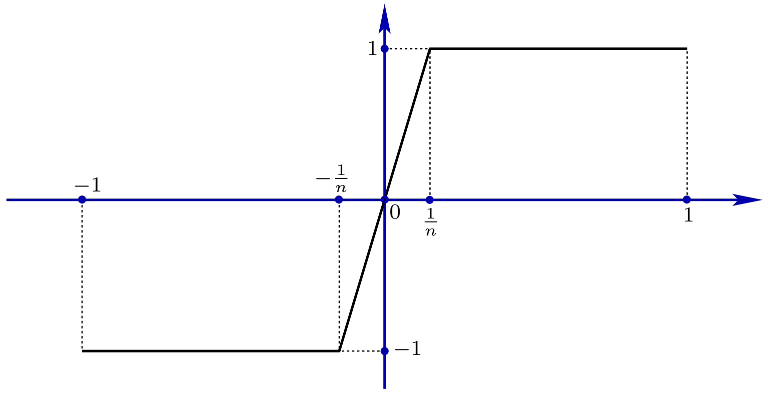
est *complet :* toutes les suites de Cauchy y sont convergentes vers des limites qui lui appartiennent.

• *Troisième théorème fondamental.* Enfin, $L^2\big([-1,1], \mathbb{C}\big)$ est *séparable*, à savoir il contient une suite (dénombrable !) de fonctions $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ qui est *dense :*

$$\forall\, g \in L^2\big([-1,1], \mathbb{C}\big) \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1 \quad \big\|f_{\mathrm{N}(\varepsilon)} - g\big\|_{L^2} \leqslant \varepsilon.$$

(c) Soit donc la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $f_n \in \mathscr{C}$ définies par :

$$f_n(t) \;:=\; \begin{cases} nt & \text{lorsque } |t| \leqslant \frac{1}{n}, \\ \mathsf{sign}(t) \cdot 1 & \text{lorsque } \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$



Soient aussi deux entiers $1 \leqslant n \leqslant m$. Comme f_n et f_m sont impaires :

$$\left\|f_m - f_n\right\|_{L^2} = 2\left(\int_0^1 \left|f_m(t) - f_n(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Calculons alors comme suggéré tout d'abord :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{m}} \left|f_m(t) - f_n(t)\right|^2 dt &= \int_0^{\frac{1}{m}} \big(mt - nt\big)^2 dt \\ &\leqslant \int_0^{\frac{1}{m}} \big(mt\big)^2 dt \\ &= m^2 \frac{1}{3}\left(\frac{1}{m}\right)^3 \\ &= \frac{1}{3\,m} \leqslant \frac{1}{3\,n},\end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \left|f_m(t) - f_n(t)\right|^2 dt = \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \big(1 - nt\big)^2 dt &\leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} \big(1 - 2nt + n^2t^2\big)\, dt \\ &= \frac{1}{n} - 2n\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + n^2\,\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 \\ &= \frac{1}{3\,n},\end{aligned}$$

la troisième intégrale $\int_{\frac{1}{n}}^1 (1-1)^2 = 0$ étant nulle, ce qui fait que nous obtenons bien :

$$\left\|f_m - f_n\right\|_{L^2}^2 \leqslant 2\left(\frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} + 0\right),$$

à savoir $\left\|f_m - f_n\right\|_{L^2} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3\,n}}$.

(d) Ces inégalités montrent que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy, puisque le majorant $\frac{2}{\sqrt{3\,n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme $L^2[-1,1]$ est complet (théorème du cours), la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vers une certaine fonction-limite, $f_\infty \in L^2[-1,1]$, laquelle est manifestement égale à 1 sur $]0,1]$, puisque $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ en tout $x \in]0,1]$, et égale à -1 sur $[-1,0[$, pour la raison similaire que $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1$ en tout $x \in [-1,0[$. Enfin, $f_n(0) = 0$ pour tout n, donc $f_\infty(0) = 0$.

(e) Si $\mathscr{C}^0[-1,1]$ était un espace de Hilbert, il devrait être complet, et comme notre suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vers la fonction *discontinue :*

$$f_\infty(x) := \begin{cases} -1 & \text{lorsque } \ -1 \leqslant x < 0, \\ 0 & \text{pour } \ x = 0, \\ 1 & \text{lorsque } \ 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

n'appartenant donc *pas* à $\mathscr{C}^0[-1,1]$, nous avons *contredit* la complétude.

En conclusion, l'espace $\mathscr{C}^0[-1,1]$, muni de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ hérité de l'inclusion $\mathscr{C}^0 \subset L^2$, n'est *pas* un espace de Hilbert — tant pis pour lui !

Exercice 3. (a) En utilisant l'hypothèse $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, on majore la transformée de Fourier par rapport à la variable x de la fonction u :

$$\begin{aligned} \big|\widehat{u}(\xi,t)\big| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx\right| \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \big|u(x,t)\big|\, dx \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx \\ &= \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty, \end{aligned}$$

donc $\widehat{u}$ prend bien des valeurs finies.

(b) Le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale s'applique grâce à l'hypothèse de domination de $|u(x,t)|$ et de $\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|$ par la fonction-majorante $g(x) \geqslant 0$ intégrable, et donc on a bien :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx \\ \text{[Équation de la chaleur]} \qquad &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx. \end{aligned}$$

(c) Pour transformer cette intégrale, il est alors avisé d'effectuer *deux* intégrations par parties successives, en tenant compte des *deux* hypothèses agréables :

$$0 = \lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t),$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi,t) &= \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\, e^{-2i\pi\xi x}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{\circ} + 2i\pi\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx \\ &= 0 + 2i\pi\xi \underbrace{\left[u(x,t)\, e^{-2i\pi\xi x}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{\circ} + (2i\pi\xi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx, \end{aligned}$$

et conduit bien à une équation différentielle :

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi,t) = -4\pi^2\, \xi^2\, \widehat{u}(\xi,t).$$

(d) Le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre s'applique grâce à l'hypothèse de domination uniforme $|u(x,t)| \leqslant g(x)$ valable pour tout $t \geqslant 0$, avec $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, et donne :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \widehat{u}(\xi,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \Big(u(x,t)\, e^{-2i\pi\xi x} \Big)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx \\ &= \widehat{u}(\xi,0).\end{aligned}$$

(e) L'équation différentielle de la Question **(c)** se résout, pour $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, en :

$$\widehat{u}(\xi,t) = \mathsf{constante} \cdot e^{-4\pi\xi^2 t^2} \qquad\qquad (t > 0),$$

et comme on vient de justifier la continuité en $t = 0$, cette constante, qui dépend *a priori* de ξ, vaut alors nécessairement $\widehat{u}(\xi,0)$, car $e^{-4\pi\xi^2 0} = 1$, ce qui démontre bien que :

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{u}(\xi,0)\, e^{-4\pi^2\xi^2 t} \qquad\qquad (\forall\, \xi \in \mathbb{R},\ \forall\, t \geqslant 0).$$

(f) Le cours a démontré que le produit de convolution :

$$h_1 * h_2(x) := \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x-y)\, h_2(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(y)\, h_2(x-y)\, dy,$$

commutatif, est toujours bien défini entre deux fonctions quelconques $h_1, h_2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, qu'il appartient aussi à $L^1(\mathbb{R}^d)$, avec une norme L^1 contrôlée par :

$$\big|\big| h_1 * h_2 \big|\big|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant ||h_1||_{L^1(\mathbb{R})} \cdot ||h_2||_{L^1(\mathbb{R})},$$

et il a aussi démontré que le produit de convolution transforme une étoile en une multiplication :

$$\widehat{h_1 * h_2} = \widehat{h_1} \cdot \widehat{h_2}.$$

(g) Pour reconnaître dans l'indication fournie la fonction $\xi \longmapsto e^{-4\pi^2\xi^2 t}$ qui est apparue dans la Question **(e)**, il suffit de poser :

$$\sigma^2 := 2t,$$

ce qui offre l'information que la transformée de Fourier de la fonction :

$$\mathsf{N}_t\colon \quad x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} \qquad\qquad (t > 0)$$

vaut :

$$\widehat{\mathsf{N}}_t(\xi) = e^{-2\pi^2 2t\xi^2},$$

et donc, en revenant aux Question **(e)** et **(f)** dont le résultat devient :

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{u}(\xi,0) \cdot \mathsf{N}_t(\xi) = u(\cdot,\widehat{0) * \mathsf{N}}_t(\cdot)(\xi),$$

on déduit grâce à l'injectivité de la transformée de Fourier que pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \big(u(\cdot,0) * \mathsf{N}_t(\cdot) \big)(x) \\ &= f * \mathsf{N}_t(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{y^2}{4t}}\, dy.\end{aligned}$$

Observons d'ailleurs, comme $f \in L^1(\mathbb{R})$ et comme $t > 0$, que cette intégrale est très convergente grâce à la présence du facteur exponentiel fortement décroissant à l'infini.

(h) Jusqu'à présent, on a raisonné *par analyse*, à savoir en supposant qu'il existe une solution, et il est temps maintenant de raisonner *par synthèse*.

Si donc $f \in L^1(\mathbb{R})$ est la condition de température au bord donnée, nous affirmons que l'expression :

$$u(x,t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{y^2}{4t}}\, dy$$

résout l'équation de la chaleur.

Tout d'abord, l'expression alternative :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, \frac{1}{4\pi t}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, dy$$

permet, en trouvant des majorants des dérivées partielles, que u est $\mathscr{C}^\infty$ dans $\{(x,t)\colon x \in \mathbb{R}, t > 0\}$, grâce à la décroissance très forte du facteur exponentiel, et grâce à $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Ensuite, comme la famille :

$$\bigg(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{y^2}{4t}}\bigg)_{t>0},$$

qui est une simple renormalisation du noyau gaussien :

$$\bigg(\mathsf{K}_\delta(x) := \frac{1}{\sqrt{\delta}}\, e^{-\frac{\pi y^2}{\delta}}\bigg)_{\delta>0},$$

est une approximation de l'unité pour la convolution lorsque $\delta \xrightarrow{>} 0$, ce qui a été vu en cours, on déduit la convergence :

$$0 = \lim_{t \underset{>}{\longrightarrow} 0} \big\| f * \mathsf{N}_t - f \big\|_{L^1(\mathbb{R})} = \lim_{t \underset{>}{\longrightarrow} 0} \big\| u(\cdot, t) - f(\cdot) \big\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

ce qui démontre que $u(x,t) = f * \mathsf{N}_t(x)$ pour $t > 0$ satisfait bien la condition au bord en $t = 0$.

Exercice 4. (a) Soit donc l'espace $\mathscr{C} = \mathscr{C}^0\big([-1,1], \mathbb{C}\big)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ de norme associée $\| \cdot \|_{L^2}$, et soient les sous-espaces vectoriels :

$$\mathscr{P}_n := \Big\{ x \longmapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \big|_{[-1,1]} \colon\ a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C} \Big\}.$$

Puisque l'intervalle $[-1,1]$ est d'intérieur non vide, $\mathscr{P}_n$ est de dimension $n+1$.

Soit $f \in \mathscr{C}$. Nous savons d'après le théorème de Weierstrass que toute fonction continue sur $[-1,1]$ est limite uniforme de fonctions polynomiales, à savoir qu'il existe une suite $(q_n)_{n=0}^\infty$ de polynômes $q_n \in \mathscr{P}_n$ telle que :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1 \quad \Big(n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \implies \big\| f - q_n \big\|_{\mathscr{C}^0[-1,1]} \leqslant \varepsilon \Big).$$

Or comme on a l'inégalité entre normes pour $h \in \mathscr{C}^0[-1,1] \subset L^2[-1,1]$:

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^2[-1,1]} = \bigg(\int_{-1}^{1} \big| h(x) \big|^2\, dx \bigg)^{\frac{1}{2}} &\leqslant \|h\|_{\mathscr{C}^0[-1,1]} \bigg(\int_{-1}^{1} 1\, dx \bigg)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|h\|_{\mathscr{C}^0[-1,1]}\, \sqrt{2}, \end{aligned}$$

il vient aussi la convergence en norme L^2 :

$$\big\|f - q_n\big\|_{L^2[-1,1]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Enfin, d'après un théorème du cours, si $\pi_n \colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{P}_n$ désigne la projection orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$, on a toujours pour tout polynôme $r_n \in \mathscr{P}_n$:

$$\begin{aligned}\big\|f - \pi_n(f)\big\|_{L^2} &= \inf_{r_n\in\mathscr{P}_n} \big\|f - r_n\big\|_{L^2}\\ &\leqslant \big\|f - q_n\big\|_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

(b) Soit donc $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ avec $p_n \in \mathscr{P}_n$ pour tout $n \geqslant 0$ satisfaisant l'orthonormalité :

$$\langle p_{n_1}, p_{n_2}\rangle_{L^2} = \delta_{n_1,n_2} \qquad (n_1, n_2 \geqslant 0).$$

Fixons $n \geqslant 0$, et supposons qu'il existe une relation de dépendance linéaire dans $\mathscr{P}_n$:

$$0 = \lambda_0\, p_0 + \cdots + \lambda_n\, p_n \qquad (\lambda_0,\dots,\lambda_n \in \mathbb{C}).$$

Alors en prenant tout simplement les produits scalaires $\langle\cdot, p_0\rangle, \dots, \langle\cdot, p_n\rangle$, il vient :

$$0 = \lambda_0,\ \dots\dots,\ 0 = \lambda_n,$$

ce qui établit l'indépendance linéaire. Enfin, comme $\{p_0, \dots, p_n\}$ est de cardinal $n+1 = \dim \mathscr{P}_n$, c'est nécessairement une base d'après un résultat connu d'algèbre linéaire.

(c) Le cours a démontré que :

$$\pi_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \langle f,\, p_i\rangle \cdot p_i,$$

et en a aussi déduit que :

$$\big\|\pi_n(f)\big\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \big|\langle f,\, p_i\rangle\big|^2.$$

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{C}$ est fermé car de dimension finie, donc son orthogonal $\mathscr{P}_n^{\perp}$ existe et est fermé, et d'ailleurs, toute fonction $f \in \mathscr{C}$ se décompose en :

$$f = \underbrace{\pi_n(f)}_{\in\mathscr{P}_n} + \underbrace{f - \pi_n(f)}_{\in\mathscr{P}_n^{\perp}},$$

avec, d'après le théorème de Pythagore (en dimension infinie) :

$$\|f\|^2 = \big\|\pi_n(f)\big\|^2 + \big\|f - \pi_n(f)\big\|^2,$$

d'où l'inégalité de contrôle fini uniforme en $n \geqslant 0$:

$$\sum_{i=0}^{n} \big|\langle f, p_i\rangle\big|^2 = \|\pi_n(f)\|^2 \leqslant \|f\|^2 < \infty,$$

ce qui montre bien que la série de terme général :

$$\big(|\langle f, p_i\rangle|^2\big)_{i=0}^{\infty}$$

est convergente.

(e) D'après la Question **(a)**, le terme-reste $\|f - \pi_n(f)\|^2$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, ce qui établit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big|\langle f, p_n\rangle\big|^2 \,=\, \|f\|^2.$$

(f) Soit une fonction $f \in \mathscr{C}$ fixée. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\langle f, p_n\rangle_{L^2[-1,1]} \,=\, \int_{-1}^{1} f(t)\,\overline{p_n(t)}\,dt,$$

et comme le membre de gauche tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini à cause de la convergence qui vient d'être établie, on conclut que :

$$0 \,=\, \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f(t)\,\overline{p_n(t)}\,dt.$$

5. Examen 3

Exercice 1. Soit la famille des noyaux de Fejér sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ indexée par $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathsf{F}_n(\theta) = \frac{1}{n}\left[\frac{\sin(\frac{n}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}\right]^2 \qquad \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}; \qquad \mathsf{F}_n\big|_{2\pi\mathbb{Z}} = n.$$

(a) Rappeler de manière concise les trois propriétés fondamentales dont jouissent ces F_n.

(b) Soit un exposant $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, d'exposant conjugué p'. En utilisant l'inégalité de Hölder et avec $1 = \frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'}$, montrer que pour toute fonction $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, on a :

$$\big|\sigma_n(f)(\theta)\big|^{\mathsf{p}} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(\theta - t)\big|^{\mathsf{p}}\,\mathsf{F}_n(t)\,dt.$$

(c) Montrer l'inégalité suivante entre normes L^{p} :

$$\big\|\sigma_n(f)\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

(d) Établir, pour tout $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, l'identité :

$$f(\theta) - \sigma_n(f)(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(\theta) - f(\theta - t)\big)\,\mathsf{F}_n(t)\,\frac{dt}{2\pi}.$$

(e) Montrer que l'on a :

$$\big(\big\|f - \sigma_n(f)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}} \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{F}_n(t)\bigg(\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(\theta) - f(\theta - t)\big|^{\mathsf{p}}\,d\theta\bigg)\,dt.$$

(f) Conclure que l'on a :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \big\|f - \sigma_n(f)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

Exercice 2. On dit qu'une suite d'éléments $(f_n)_{n\geqslant 1}$ d'un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert $\big(H, \|\cdot\|_H\big)$ converge *faiblement* vers un élément f de H si, pour tout $g \in H$, la suite numérique $\langle f_n, g\rangle$ converge, lorsque $n \to \infty$, vers $\langle f, g\rangle$. On dit qu'une telle suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge *fortement* (ou *converge en norme*) vers un élément f de H lorsque $0 = \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_H$.

(a) En supposant qu'elle existe, montrer que la limite faible d'une suite est unique.

(b) Si $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge fortement vers f, montrer qu'elle converge faiblement vers f.

(c) Dans $\ell^2(\mathbb{C})$, trouver une suite qui converge faiblement sans converger fortement.

(d) Étant donné une suite quelconque $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels, la suite associée :

$$b_n^- := \inf\big\{b_m :\ m \geqslant n\big\}$$

est croissante, et on définit :

$$\liminf_{n\to\infty} b_n := \liminf_{n\to\infty} b_n^-,$$

un nombre appartenant à $[-\infty, \infty]$. Vérifier, pour tout entier $N \geqslant 1$ fixé, que l'on a :

$$\liminf_{n\to\infty} \big(b_n\big)_{n\geqslant 1} = \liminf_{n\to\infty} \big(b_n\big)_{n\geqslant N}.$$

(e) Si une autre suite de nombres réels $(a_n)_{n\geqslant 1}$ satisfait $a_n \leqslant b_n$ pour tout $n \geqslant 1$ et converge vers un réel $a \in \mathbb{R}$, en déduire que $a \leqslant \liminf_{n\to\infty} b_n$.

(f) Si $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers f, en déduire que :

$$\|f\|_H \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_H.$$

(g) Étant donné à nouveau une suite quelconque $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels, l'autre suite associée :

$$b_n^+ := \sup \big\{ b_m : \ m \geqslant n \big\}$$

est décroissante, et on définit :

$$\limsup_{n\to\infty} b_n := \lim_{n\to\infty} b_n^+,$$

un nombre appartenant aussi à $[-\infty, \infty]$. Vérifier que b_n converge vers une limite $b \in [-\infty, \infty]$ si et seulement si :

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(h) Montrer qu'une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge fortement vers un vecteur $f \in H$ si et seulement si elle converge faiblement vers f et si, de plus, $\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_H = \|f\|_H$.

Exercice 3. Le but ici est d'établir que de toute suite infinie d'éléments $(f_n)_{n\geqslant 1}$ d'un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert H qui est *bornée* :

$$\text{il existe une constante } \ M > 0 \ \text{ telle que } \ \|f_n\|_H \leqslant M \ \text{ pour tout } \ n \geqslant 1,$$

on peut extraire une sous-suite $(f_{n_l})_{l\geqslant 1}$ qui converge faiblement (au sens de l'Exercice précédent) vers un certain vecteur $f \in H$.

(a) Montrer par récurrence que pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe une suite $\big(f_n^k\big)_{n\geqslant 1}$ extraite de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ telle que, pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant k$, la limite :

$$\lim_{k\to\infty} \big\langle f_n^k, f_j \big\rangle$$

existe dans $\mathbb{C}$ et est égale à un certain nombre complexe c_j.

(b) On introduit la suite dite *diagonale* :

$$(g_l)_{l\geqslant 1} := \big(f_l^l\big)_{l\geqslant 1}.$$

Vérifier d'abord que :

$$\sup_{l\geqslant 1} \|g_l\|_H \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \|f_n\|_H \leqslant M.$$

Montrer ensuite que pour *tout* entier $j \geqslant 1$ fixé, la suite de nombres complexes $\big(\langle g_l, f_j \rangle \big)_{l\geqslant 1}$ converge aussi, lorsque $l \to \infty$, vers le même nombre complexe c_j.

(c) Soit $V := \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{f_n : \ n \geqslant 1\}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par tous les vecteurs f_n de la suite initiale. Montrer que pour tout $f \in V$, on a :

$$0 = \lim_{l,m\to\infty} \big| \langle f, \, g_m - g_l \rangle \big|.$$

(d) Soit $u \in H$ un vecteur arbitraire. Si $\overline{V}$ désigne l'adhérence (la fermeture) de V dans $\big(H, \|\cdot\|_H\big)$, justifier que l'on puisse écrire $u = v + w$ avec $v \in \overline{V}$ et $w \in \overline{V}^{\perp}$.

(e) Montrer alors que la suite $\big(\langle v, g_l \rangle \big)_{l\geqslant 1}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est de Cauchy.

(f) En déduire que pour tout $u \in H$, la suite $\langle u, g_l \rangle$ converge vers une certaine limite $\ell(u) \in \mathbb{C}$ et vérifier que l'application $\ell\colon H \to \mathbb{C}$ est linéaire.

(g) Montrer que $|\ell(u)| \leqslant M \, \|u\|_H$.

(h) Conclure qu'il existe un vecteur $g \in H$ tel que :

$$\lim_{l \to \infty} \langle u, g_l \rangle = \langle u, g \rangle ,$$

pour tout $u \in H$.

Exercice 4. Rappeler la définition du noyau de Fejér $\mathsf{F}_n(\theta)$ sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et montrer que pour toute fonction $h \in L^1(\mathbb{T})$ et tout réel $0 < \delta < \pi$, on a :

$$\left| \int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \mathsf{F}_n(t) \, h(t) \, \frac{dt}{2\pi} \right| \leqslant \frac{1}{n} \, \frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})} \, \|h\|_{L^1}.$$

Exercice 5. Soient E et F deux espaces de Hilbert et soit $T\colon E \to F$ un opérateur linéaire continu.

(a) Montrer qu'il existe un unique opérateur linéaire continu $T^*\colon F \to E$ satisfaisant :

$$\big\langle T(x),\, y \big\rangle_F = \big\langle x,\, T^*(y) \big\rangle_E,$$

pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in F$.

(b) Montrer que $|\!|\!| T^* |\!|\!| = |\!|\!| T |\!|\!|$.

(c) Montrer que $\big(T^*\big)^* = T$.

(d) Montrer que $|\!|\!| T^* \circ T |\!|\!| = |\!|\!| T |\!|\!|^2$.

Exercice 6. Soit f une application 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ qui est de classe $\mathscr{C}^k$, *i.e.* qui admet des dérivées jusqu'à l'ordre k et dont la k-ème dérivée $f^{(k)}$ est continue, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que :

$$\widehat{f}(n) = \mathrm{o}\big(\tfrac{1}{n^k}\big),$$

quand $|n| \longrightarrow \infty$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n(f)(\theta) = \sum_{|j| \leqslant n} \widehat{f}(j) \, e^{ij\theta}$ la n-ème somme partielle de la série de Fourier d'une fonction $f \in \mathscr{C}^k\big(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\big)$. Montrer que :

$$\big\| f - S_n(f) \big\|_{\mathscr{C}^0} = \mathrm{o}\big(\tfrac{1}{n^{k-1}}\big),$$

quand $n \longrightarrow \infty$.

(c) Soit $f \in L^1\big(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\big)$ et soit $k \geqslant 2$ un entier. Montrer que si :

$$\widehat{f}(n) = \mathrm{O}\big(\tfrac{1}{n^k}\big),$$

quand $|n| \longrightarrow \infty$, alors f est une une fonction de classe $\mathscr{C}^{k-2}$.

Exercice 7. Soit une fonction :

$$f \in \mathscr{C}^0\big(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\big) \cap \mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}\big(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\big)$$

une fonction continue, $\mathscr{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire que l'on a :

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \widehat{f}(n)\, e^{in\theta},$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

6. Corrigé de l'examen 3

Exercice 1. (a) • *Première propriété :* Tous les $\mathsf{F}_n \geqslant 0$ sont positifs sur $[-\pi, \pi]$.
• *Deuxième propriété :* $1 = \int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{F}_n(t)\,\frac{dt}{2\pi}$, quel que soit $n \geqslant 1$.
• *Troisième propriété :* Pour tout $0 < \delta < \pi$, on a :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sup_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \big|\mathsf{F}_n(t)\big|.$$

(b) En partant de :

$$\sigma_n(f)(\theta) = f * \mathsf{F}_n(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t)\,\mathsf{F}_n(t)\,\frac{dt}{2\pi},$$

et en utilisant la décomposition $1 = \frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'}$ du nombre 1 en deux parties, on majore :

$$\begin{aligned}
\big|\sigma_n(f)(\theta)\big| &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \big|f(\theta-t)\big|\,\mathsf{F}_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} \\
\text{[Astuce intersidérale !]} \qquad &= \int_{-\pi}^{\pi} \big|f(\theta-t)\big|\,\mathsf{F}_n(t)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \cdot \mathsf{F}_n(t)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}\,\frac{dt}{2\pi} \\
\text{[Inégalité de Hölder]} \qquad &\leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(\theta-t)\big|^{\mathsf{p}}\,\mathsf{F}_n(t)^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}}}\,\frac{dt}{2\pi}\right)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{F}_n(t)^{\frac{\mathsf{p}'}{\mathsf{p}'}}\,\frac{dt}{2\pi}\right)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}} \\
&= \left(\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(\theta-t)\big|^{\mathsf{p}}\,\mathsf{F}_n(t)\,\frac{dt}{2\pi}\right)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}.
\end{aligned}$$

(c) En appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, on parvient à l'inégalité demandée :

$$\begin{aligned}
\Big(\big\|\sigma_n(f)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} &= \int_{-\pi}^{\pi} \big|\sigma_n(f)(\theta)\big|^{\mathsf{p}}\,\frac{d\theta}{2\pi} \\
\text{[Question (b)]} \qquad &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(\theta-t)\big|^{\mathsf{p}}\,\mathsf{F}_n(t)\,\frac{dt}{2\pi}\,\frac{d\theta}{2\pi} \\
\text{[Tonelli]} \qquad &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{F}_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big|f(\theta-t)\big|^{\mathsf{p}}\,\frac{d\theta}{2\pi} \\
\text{[Poser } u := \theta - t\text{]} \qquad &= 1 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \big|f(u)\big|^{\mathsf{p}}\,\frac{du}{2\pi} \\
&= \big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}}.
\end{aligned}$$

(d) On calcule en effet aisément :

$$\begin{aligned}
f(\theta) - \sigma_n(f)(\theta) = f(\theta)\cdot 1 - \sigma_n(f)(\theta) &= f(\theta) \int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{F}_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta-t)\,\mathsf{F}_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(\theta) - f(\theta-t)\big)\,\frac{dt}{2\pi}.
\end{aligned}$$

(e) Il s'agit de ré-utiliser la même astuce intersidérale qui, à la Question **(b)**, consistait à écrire :

$$\mathsf{F}_n(t) \,=\, \mathsf{F}_n(t)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \cdot \mathsf{F}_n(t)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}},$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\big|f(\theta)-\sigma_n(f)(\theta)\big| \,&=\, \bigg|\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(\theta)-f(\theta-t)\big)\,\mathsf{F}_n(t)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}\cdot \mathsf{F}_n(t)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}\,\frac{dt}{2\pi}\bigg| \\
\text{[Hölder]} \qquad &\leqslant\, \bigg(\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(\theta)-f(\theta-t)\big|^{\mathsf{p}}\,\mathsf{F}_n(t)^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}}}\,\frac{dt}{2\pi}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \underbrace{\bigg(\int_{-\pi}^{\pi}\mathsf{F}_n(t)^{\frac{\mathsf{p}'}{\mathsf{p}'}}\,\frac{dt}{2\pi}\bigg)}_{=\,1!}^{\frac{1}{\mathsf{p}'}},
\end{aligned}$$

d'où en prenant la puissance p-ème et en intégrant par rapport à θ :

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(\theta)-f(\theta-t)\big|^{\mathsf{p}}\,\frac{d\theta}{2\pi} \,&\leqslant\, \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(\theta)-f(\theta-t)\big|^{\mathsf{p}}\,\mathsf{F}_n(t)\,\frac{dt}{2\pi}\,\frac{d\theta}{2\pi} \\
\text{[Tonelli]} \qquad &=\, \int_{-\pi}^{\pi}\mathsf{F}_n(t)\,\bigg(\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(\theta)-f(\theta-t)\big|^{\mathsf{p}}\,\frac{d\theta}{2\pi}\bigg)\,\frac{dt}{2\pi}.
\end{aligned}$$

(f) Soit l'opérateur de translation des fonctions :

$$\tau_t(f)(\theta) \,:=\, f(\theta-t).$$

Un théorème du cours a démontré que :

$$0 \,=\, \lim_{t\to 0}\big\|f-\tau_t(f)\big\|_{L^{\mathsf{p}}},$$

c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout $|t| \leqslant \delta$, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\big|f(\theta)-f(\theta-t)\big|^{\mathsf{p}}\,\frac{d\theta}{2\pi} \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Maintenant, découpons en deux morceaux l'intégrale $\int_{|t|\leqslant\pi} = \int_{|t|\leqslant\delta} + \int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}$ obtenue à l'instant :

$$\begin{aligned}
\Big(\big\|f-\sigma_n(f)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} \,&=\, \int_{|t|\leqslant\delta}\mathsf{F}_n(t)\,\bigg(\int_{-\pi}^{\pi}\big|f(\theta)-f(\theta-t)\big|^{\mathsf{p}}\,\frac{d\theta}{2\pi}\bigg)\,\frac{dt}{2\pi} + \int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\mathsf{F}_n(t)\,\bigg(\int_{-\pi}^{\pi}\big|f(\theta)-f(\theta-t)\big|^{\mathsf{p}}\,\frac{d\theta}{2\pi}\bigg)\,\frac{dt}{2\pi} \\
&\leqslant\, \int_{|t|\leqslant\delta}\mathsf{F}_n(t)\,\varepsilon\,\frac{dt}{2\pi} + \int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\mathsf{F}_n(t)\,\Big(\big\|f-\tau_t(f)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}}\,\frac{dt}{2\pi} \\
&\leqslant\, \varepsilon\int_{-\pi}^{\pi}\mathsf{F}_n(t)\,\frac{dt}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\mathsf{F}_n(t)\,\Big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}+\big\|\tau_t(f)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}}\,\frac{dt}{2\pi} \\
&=\, \varepsilon\cdot 1 + \big(2\,\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}}\underbrace{\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\mathsf{F}_n(t)\,\frac{dt}{2\pi}}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\,0},
\end{aligned}$$

et donc il existe $\mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que ce dernier terme soit $\leqslant \varepsilon$ quel que soit $n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)$, et au final :

$$\Big(\big\|f-\sigma_n(f)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} \,\leqslant\, \varepsilon+\varepsilon \qquad\qquad (\forall\, n\geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)).$$

Exercice 2. (a) Étant donné deux éléments f' et f'' satisfaisant, pour tout $g \in H$:

$$\langle f', g\rangle_H = \lim_{n\to\infty}\,\langle f_n, g\rangle_H = \langle f'', g\rangle_H\,,$$

on déduit par soustraction $0 = \|f''-f'\|_H^2$ en prenant $g := f''-f'$, c'est-à-dire $f'' = f'$.

(b) Supposons donc la convergence forte $0 = \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_H$. Alors pour $g \in H$ quelconque, on déduit grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\big|\, \langle f_n, g\rangle_H - \langle f, g\rangle_H \,\big| = \big|\, \langle f_n - f, g\rangle_H \,\big| \leqslant \|f_n - f\|_H \, \|g\|_H \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui montre effectivement que f_n converge faiblement vers f.

(c) Soit la base hilbertienne canonique $(e_i)_{i\geqslant 1}$ de $\ell^2(\mathbb{C})$ constituée des vecteurs élémentaires :

$$e_i = \big(0, \dots, 0, 1, 0, \dots\big) \in \mathbb{C}^\infty,$$

avec 1 à la i-ème place, et zéro partout ailleurs. Alors la suite $(e_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers 0, puisque, pour tout $g = (g_1, g_2, \dots) \in \ell^2(\mathbb{C})$, à savoir satisfaisant $\sum_{i=1}^{+\infty} |g_i|^2 < \infty$, on a immédiatement $\langle e_n, g\rangle = g_n$ qui tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, puisque le terme général de toute série convergente *doit au moins* converger vers 0. Mais bien entendu, cette suite $(e_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas fortement vers 0, puisque tous ces vecteurs de base e_n sont de norme 1 !

(d) La suite translatée $(c_n)_{n\geqslant 1} := \big(b_{n+N-1}\big)_{n\geqslant 1}$ a pour suite croissante associée :

$$c_n^- = \inf\big\{c_m\colon\ m \geqslant n\big\} = \inf\big\{b_{m+N-1}\colon\ m \geqslant n\big\} = \inf\big\{b_m\colon\ m \geqslant n+N-1\big\} = \bar{b}_{n+N-1},$$

et comme une translatée quelconque d'une suite (croissante) convergente possède toujours la même limite que la suite originale, on déduit que l'on a bien :

$$\liminf_{n\to\infty} (b_n)_{n\geqslant 1} = \lim_{n\to\infty} b_n^- = \lim_{n\to\infty} b_{n+N-1}^- = \liminf_{n\to\infty} (b_n)_{n\geqslant N}.$$

(e) Maintenant, puisque par hypothèse a_n converge vers a lorsque $n\to\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $N = N(\varepsilon)$ assez grand pour que :

$$n \geqslant N \Longrightarrow \Big(a - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant a + \varepsilon\Big)$$

Alors pour tous ces entiers $n \geqslant N$, on déduit de l'hypothèse $a_n \leqslant b_n$ que :

$$a - \varepsilon \leqslant b_n.$$

Par conséquent, en appliquant **(d)** :

$$a - \varepsilon \leqslant \liminf_{n\to\infty} \big(b_n\big)_{n\geqslant N} = \liminf_{n\to\infty} \big(b_n\big)_{n\geqslant 1},$$

et comme $\varepsilon > 0$ était arbitrairement petit, on conclut comme demandé que $a \leqslant \liminf (b_n)_{n\geqslant 1}$.

(f) On a par hypothèse de convergence simple :

$$\big(\|f\|_H\big)^2 = \lim_{n\to\infty} \langle f, f_n\rangle_H \,.$$

Mais l'inégalité de Cauchy-Schwarz contraint, pour tout entier $n \geqslant 1$, à ce que :

$$\big|\, \langle f, f_n\rangle_H \,\big| \leqslant \|f\|_H \, \|f_n\|_H$$

Une application directe du résultat de la question précédente donne alors :

$$\big(\|f\|_H\big)^2 \leqslant \|f\|_H \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_H,$$

ce qui est la conclusion désirée à un facteur $\|f\|_H$ près.

(g) Il est immédiatement clair par définition que b_n jouit pour tout entier $n \geqslant 1$, de l'encadrement :

$$b_n^- \leqslant b_n \leqslant b_n^+,$$

et donc si les deux suites encadrantes convergent vers une limite identique, cela force manifestement b_n à converger vers la même limite.

Réciproquement, si b_n converge vers une limite b, à savoir si, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $N = N(\varepsilon)$ assez grand pour que :

$$n \geqslant N \Longrightarrow \Big(b - \varepsilon \leqslant b_n \leqslant b + \varepsilon\Big),$$

alors on déduit sans effort que pour ces mêmes entiers $n \geqslant N$:

$$b - \varepsilon \leqslant b_n^- \qquad \text{et} \qquad b_n^+ \leqslant b + \varepsilon,$$

d'où en prenant les deux limites :

$$b - \varepsilon \leqslant \liminf_{n\to\infty} b_n \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\to\infty} b_n \leqslant b + \varepsilon,$$

et comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, on a bien égalité des deux limites inférieure et supérieure.

(h) Si f_n converge fortement vers f, on a déjà vu qu'elle converge faiblement vers f, tandis que la continuité de la norme $\|\cdot\|_H$ vue en cours et la question qui précèdent assurent que :

$$\|f\|_H = \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_H = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_H = \limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_H$$

Réciproquement, le résultat de la question **(f)** et la deuxième hypothèse donnent un jeu d'(in)égalités :

$$\|f\|_H \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_H \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_H = \|f\|_H$$

qui contraint visiblement, grâce à la question qui précède, à l'existence de la limite :

$$\|f\|_H = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_H.$$

Si donc l'on veut établir que les f_n convergent fortement vers f, on estime la norme au carré de leurs différences :

$$\big\|f - f_n\big\|_H^2 = \|f\|_H^2 + \|f_n\|_H^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle f_n,\, f\rangle\,,$$

et l'on voit à droite que le second terme tend vers $\|f\|_H^2$, tandis que grâce à l'hypothèse de convergence faible, le troisième terme tend vers $-2\,\mathrm{Re}\,\langle f, f\rangle = -2\,\|f\|_H^2$, ce qui donne une somme qui tend vers 0, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 3. **(a)** Soit $k = 1$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\big|\,\langle f_n, f_1\rangle\,\big| &\leqslant \|f_n\|_H\,\|f_1\|_H \\ &\leqslant M\,\|f_1\|_H\end{aligned}$$

montre que la première suite $\big(\langle f_n, f_1\rangle\big)_{n\geqslant 1}$ de nombres complexes est bornée, à valeurs dans le disque fermé de centre l'origine dans $\mathbb{C}$ et de rayon $M\,\|f_1\|_H$. Par compacité d'un tel disque, il est donc possible d'extraire une sous-suite $\big(f_n^1\big)_{n\geqslant 1}$ de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de telle sorte que la suite de nombres complexes $\langle f_n^1, f_1\rangle$ converge vers un certain nombre complexe c_1 appartenant au disque fermé en question.

Supposons par récurrence que l'énoncé demandé soit démontré au niveau k. Alors avec le $(k+1)$-ème vecteur f_{k+1}, l'inégalité de Cauchy-Schwarz à nouveau :

$$\begin{aligned}\big|\,\big\langle f_n^k, f_{k+1}\big\rangle\,\big| &\leqslant \|f_n^k\|_H\,\|f_{k+1}\|_H \\ &\leqslant M\,\|f_{k+1}\|_H\end{aligned}$$

et la compacité du disque fermé de centre l'origine dans $\mathbb{C}$ et de rayon $M\,\|f_{k+1}\|_H$ assurent que l'on peut extraire une sous-suite $\big(f_n^{k+1}\big)_{n\geqslant 1}$ de la suite $\big(f_n^k\big)_{n\geqslant 1}$ — laquelle demeure constamment une sous-suite de la suite originale $(f_n)_{n\geqslant 1}$ — de telle sorte que la suite de nombres complexes $\big\langle f_n^{k+1}, f_{k+1}\big\rangle$ converge aussi vers un certain nombre complexe c_{k+1} appartenant au disque fermé en question. Or il est immédiatement clair par construction que toutes les limites des suites $\big\langle f_n^{k+1}, f_j\big\rangle$ demeurent les mêmes pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant k$, ce qui achève la preuve.

(b) La suite diagonale $(g_l)_{l\geqslant 1}$ étant extraite de la suite initiale $(f_n)_{n\geqslant 1}$, on a évidemment :

$$\sup_{l\geqslant 1} \|g_l\|_H \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \|f_n\|_H \leqslant M.$$

Ensuite, soit un vecteur fixé f_j, pour un certain entier $j \geqslant 1$. D'après les extractions de suites qui précèdent, on sait que :

$$\lim_{n\to\infty} \big\langle f_n^j,\, f_j\big\rangle = c_j.$$

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $J = J(\varepsilon)$ assez grand pour que :

$$n \geqslant J \Longrightarrow \Big(\big|\,\big\langle f_n^j,\, f_j\big\rangle - c_j\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Quitte à augmenter J si nécessaire, on peut supposer que $J \geqslant j$.

Considérons alors tous les vecteurs f_l^l pour $l \geqslant J \geqslant j$. Puisque $l \geqslant j$ et puisque chaque suite $(f_n^l)_{n\geqslant 1}$ est par construction (successivement) extraite de la suite $(f_n^j)_{n\geqslant 1}$, chaque f_l^l est nécessairement de la forme :

$$f_l^l = f_{n(l)}^j$$

pour un certain entier $n(l) \geqslant l \geqslant J$ (le l-ème terme d'une suite extraite est au moins le l-ème terme de la suite initiale), d'où l'on déduit :

$$\big|\,\big\langle f_l^l,\, f_j\big\rangle - c_j\big| = \big|\big\langle f_{n(l)}^j,\, f_j\big\rangle - c_j\big| \leqslant \varepsilon,$$

pour tout $l \geqslant J = J(\varepsilon)$. La quantité $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, ces inégalités démontrent bien que $c_j = \lim_{l\to\infty} \big\langle f_l^l, f_j\big\rangle$.

(c) En effet, tout vecteur $f \in V$ s'écrit comme combinaison linéaire finie :

$$f = \sum_{\text{finie}} a_j\, f_j$$

à coefficients complexes $a_j \in \mathbb{C}$ de vecteurs f_j de la suite initiale. Or grâce à la question qui précède, on sait que :

$$\lim_{l\to\infty} \big|\,\langle a_j f_j,\, g_l\rangle\,\big| = a_j\, c_j = \lim_{m\to\infty} \big|\,\langle a_j f_j,\, g_m\rangle\,\big|,$$

d'où par sommation de soustractions :

$$0 = \lim_{l,m\to\infty} \big|\,\langle f,\, g_m\rangle - \langle f,\, g_l\rangle\,\big|.$$

(d) Il s'agit là d'un résultat du cours, d'après lequel tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert possède un supplémentaire orthogonal.

(e) Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Par définition de l'adhérence, comme $v \in \overline{V}$, il existe $f \in V$ avec $\|f - v\| \leqslant \varepsilon$. Pour deux entiers l, m assez grands, on peut alors estimer en utilisant la question **(c)** :

$$\begin{aligned}\big|\langle v,\, g_m\rangle - \langle v,\, g_l\rangle\big| &\leqslant \big|\langle v - f,\, g_m - g_l\rangle\big| + \big|\langle f,\, g_m - g_l\rangle\big| \\ &\leqslant \varepsilon\,\big(\|g_m\|_H + \|g_l\|_H\big) + \text{terme qui tend vers } 0 \text{ lorsque } l, m \to \infty \\ &\leqslant \varepsilon\, 2M + \text{terme qui tend vers } 0 \text{ lorsque } m, l \to \infty.\end{aligned}$$

La quantité $\varepsilon > 0$ étant arbitrairement petite, cette inégalité montre bien que la suite numérique $\big(\langle v, g_l\rangle\big)_{l \geqslant 1}$ est de Cauchy.

(f) Puisque chaque vecteur g_l appartient par construction à V, on a par orthogonalité :

$$\langle u,\, g_l\rangle = \langle v,\, g_l\rangle + \underbrace{\langle w,\, g_l\rangle}_{\circ},$$

d'où la suite $\big(\langle u, g_l\rangle\big)_{l \geqslant 1}$ est elle aussi de Cauchy, donc converge vers une certaine limite $\ell(u)$, par complétude de $\mathbb{C}$. Maintenant, si $u = u' + u''$ ou si $u = \lambda\, u$, on a $v = v' + v''$ ou on a $v = \lambda\, v$, d'où aisément $\ell(u) = \ell(u') + \ell(u'')$ ou $\ell(u) = \lambda\, \ell(u)$, ce qui vérifie la linéarité.

(g) Par construction, on sait que :

$$\big|\langle u,\, g_l\rangle\big| \leqslant M\, \|u\|_H,$$

d'où immédiatement $|\ell(u)| \leqslant M\, \|u\|_H$.

(h) Ainsi l'application $u \longmapsto \ell(u)$ est-elle une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert H. Le théorème de représentation de Riesz garantit alors l'existence d'un vecteur $g \in H$ tel que :

$$\ell(u) = \lim_{l \to \infty}\, \langle u, g_l\rangle = \langle u, g\rangle\,,$$

pour tout $u \in H$. En conclusion, *la suite $(g_l)_{l \geqslant 1}$ extraite par procédé diagonal de la suite bornée initiale $(f_n)_{n \geqslant 1}$ possède bien la propriété d'être faiblement convergente vers ce vecteur $g \in H$.*

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le n-ème noyau de Fejér est égal à :

$$\mathsf{F}_n(\theta) = \frac{1}{n}\left[\frac{\sin\big(\frac{n}{2}\,\theta\big)}{\sin\big(\frac{\theta}{2}\big)}\right]^2,$$

sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Pour toute fonction $h \in L^1(\mathbb{T})$ et tout réel $0 < \delta < \pi$, la majoration triviale valable pour tout réel t avec $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$:

$$\mathsf{F}_n(t) \leqslant \frac{1}{n}\,\frac{1}{\sin^2\big(\frac{\delta}{2}\big)}$$

peut être intégée sur-le-champ pour déduire que l'on a effectivement, pour toute fonction $h \in L^1(\mathbb{T})$:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \mathsf{F}_n(t)\, h(t)\, \frac{dt}{2\pi}\right| &\leqslant \frac{1}{n}\,\frac{1}{\sin^2\big(\frac{\delta}{2}\big)} \int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} |h(t)|\, \frac{dt}{2\pi} \\ &\leqslant \frac{1}{n}\,\frac{1}{\sin^2\big(\frac{\delta}{2}\big)}\, \|h\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Exercice 5. (a) - (b) Pour tout $y \in F$ fixé, l'application :

$$x \longmapsto \langle T(x), y \rangle$$

est linéaire et continue. Grâce au théorème de représentation de Riesz, il existe alors un unique élément de E — que l'on notera $T^*(y)$ puisqu'il dépend de y — tel que cette application linéaire s'écrive comme un produit scalaire avec cet élément :

$$\langle T(x),\, y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle\,.$$

Pour tous $y_1, y_2 \in F$ et tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, on se convainc très aisément que $\lambda_1\, T^*(y_1) + \lambda_2\, T^*(y_2)$ satisfait la propriété qui caractérise $T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2\, y_2)$, ce qui montre que $y \mapsto T^*(y)$ est effectivement linéaire.

Maintenant, en appliquant la définition des normes d'opérateurs et en utilisant le fait que $\|z\| = \big\langle z, \frac{z}{\|z\|} \big\rangle$ pour tout vecteur de norme 1, on transforme successivement ces normes en passant par deux expressions centrales parfaitement symétriques :

$$\begin{aligned}
|||T^*||| &\overset{\text{def}}{=} \sup\big\{ \|T^*(y)\| \colon\ y \in F,\ \|y\|_F = 1 \big\} \\
&= \sup\big\{ \big| \langle x, T^*(y) \rangle \big| \colon\ x \in E,\ \|x\|_E = 1,\ y \in F,\ \|y\|_F = 1 \big\} \\
&= \sup\big\{ \big| \langle T(x), y \rangle \big| \colon\ x \in E,\ \|x\|_E = 1,\ y \in F,\ \|y\|_F = 1 \big\} \\
&= \sup\big\{ \|T(x)\| \colon\ x \in E,\ \|x\|_E = 1 \big\} \\
&\overset{\text{def}}{=} |||T|||,
\end{aligned}$$

d'où il découle que T^*, de norme visiblement finie, est en effet continu.

(c) La démonstration du fait que $\big(T^*\big)^* = T$ découle des définitions par simple symétrie logique, et — seule exception ici — le micro-détail des vérifications ne sera pas offert au lecteur par le correcteur.

(d) Avant de montrer que $|||T^* \circ T||| = |||T|||^2$, on a tout d'abord par majoration connue des normes d'une composition d'opérateurs et en utilisant la question **(b)** :

$$\begin{aligned}
|||T^* \circ T||| &\leqslant |||T^*||| \cdot |||T||| \\
&\leqslant |||T|||^2.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $x \in E$ avec $\|x\|_E \leqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|^2 &= \big\langle T(x),\, T(x) \big\rangle \\
&= \big\langle x,\, (T^* \circ T)(x) \big\rangle \\
&\leqslant \|x\|_E \cdot |||T^* \circ T||| \cdot \|x\|_E \\
&\leqslant |||T^* \circ T|||.
\end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité inverse $|||T|||^2 \leqslant |||T^* \circ T|||$, d'où l'égalité demandée.

Exercice 6. (a) Après k intégrations par parties dans chacune desquelles les termes de bord s'annulent automatiquement par 2π-périodicité, on obtient :

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \frac{1}{(in)^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(\theta)\, e^{-in\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi}.
\end{aligned}$$

La k-ème dérivée de f étant continue par hypothèse, le lemme de Riemann-Lebesgue assure que :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(\theta)\, e^{-in\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi}$$

Il en découle que l'on a bien :

$$\widehat{f}(n) = \mathrm{o}\big(\tfrac{1}{|n|^k}\big),$$

lorsque $|n| \longrightarrow \infty$.

(b) Grâce à l'inégalité triangulaire infinie, on majore — sans finesse ni grossièreté — pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la différence :

$$\begin{aligned}\big|f(\theta) - S_n(f)(\theta)\big| &= \bigg|\sum_{|\ell| \geqslant n+1} \widehat{f}(\ell)\, e^{i\ell\theta}\bigg| \\ &\leqslant \sum_{|\ell| \geqslant n+1} \big|\widehat{f}(\ell)\big|.\end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, en appliquant la question qui précède, on déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \geqslant 1$ assez grand pour satisfaire :

$$\begin{aligned}\big\|f - S_n(f)\big\|_{\mathscr{C}^0} &\leqslant \varepsilon\, 2 \sum_{|\ell| \geqslant n+1} \frac{1}{n^\ell} \\ &\leqslant \varepsilon\, 2 \int_n^\infty \frac{dx}{x^k} \\ &\leqslant \frac{2\,\varepsilon}{(k-1)\, n^{k-1}}.\end{aligned}$$

Ainsi a-t-on bien comme annoncé :

$$\big\|f - S_n(f)\big\|_{\mathscr{C}^0} = \mathrm{o}\big(\tfrac{1}{n^{k-1}}\big).$$

lorsque $n \longrightarrow \infty$.

(c) Puisque $\widehat{f}(n) = \mathrm{O}\big(\frac{1}{|n|^k}\big)$ et que l'on a supposé $k \geqslant 2$, la série :

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\ell)$$

converge absolument, d'après le critère dit de Riemann. Par conséquent, la série de Fourier complète :

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\ell)\, e^{i\ell\theta}$$

converge uniformément vers une fonction au moins continue sur le cercle $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et un théorème du cours (basé sur l'utilisation du noyau de Fejér) assure que l'on peut écrire :

$$f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\, e^{ik\theta},$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, où le membre de droite converge uniformément.

Mais il y a plus : tant que $k' \leqslant k-2$, la série des dérivées terme à terme :

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\ell)\, (i\ell)^{k'}\, e^{i\ell\theta}$$

continue à converger absolument et normalement — toujours d'après le critère de Riemann —, donc le théorème de dérivation terme à terme assure l'existence et la continuité de telles dérivées k-èmes.

Exercice 7. (a) La fonction f' étant 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, elle appartient manifestement à l'espace $L^2(\mathbb{T})$. Ainsi, en tenant compte de l'intégration par parties :

$$\widehat{f'}(n) = in\,\widehat{f}(n),$$

on peut appliquer la formule de Plancherel à f', ce qui donne :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} n^2 \big|\widehat{f}(n)\big|^2 = \big\|f'\big\|_{L^2} < \infty.$$

Mais ensuite, une utilisation fréquente de l'inégalité de Cauchy-Schwarz finie qui consiste quelque peu astucieusement à faire apparaître un produit invisible montre que l'on a, pour tout entier $N \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant |n|\leqslant N} \big|\widehat{f}(n)\big| &= \sum_{1\leqslant |n|\leqslant N} \frac{1}{|n|}\,\big|n\,\widehat{f}(n)\big| \\
&\leqslant \bigg(\sum_{1\leqslant |n|\leqslant N} \frac{1}{n^2}\bigg)^{\frac{1}{2}} \bigg(\sum_{1\leqslant |n|\leqslant N} n^2\,\big|\widehat{f}(n)\big|^2\bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \bigg(\sum_{1\leqslant |n|\leqslant \infty} \frac{1}{n^2}\bigg)^{\frac{1}{2}} \bigg(\sum_{1\leqslant |n|\leqslant \infty} n^2\,\big|\widehat{f}(n)\big|^2\bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2\,\tfrac{\pi^2}{6}\,\big(\big\|f'\big\|_{L^2}\big)^2} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

ce qui établit la convergence normale demandée.

(b) Un théorème du cours — application du théorème fondamental de Fejér — assure alors que f est égale à sa série de Fourier :

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \widehat{f}(n)\,e^{in\theta},$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

7. Examen 4

Exercice 1. [Théorème du point fixe pour les applications strictement contractantes] Soit X un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$. Soit une application continue $T : X \to X$. On suppose que T est *strictement contractante*, à savoir on suppose qu'il existe une constante $\kappa \in \mathbb{R}_+$ avec $0 \leqslant \kappa < 1$ telle que :

$$\big\|T(x) - T(y)\big\| \leqslant \kappa \, \|x - y\| \qquad \text{pour tous } x, y \in X.$$

L'objectif est d'établir l'existence d'un unique $x^* \in X$ satisfaisant $T(x^*) = x^*$, c'est-à-dire l'existence et l'unicité d'un *point fixe* pour T.

(a) On choisit (au hasard) un $x_0 \in X$ initial quelconque et on itère sur x_0 l'application T un nombre arbitraire $n \geqslant 1$ de fois :

$$x_n := T^n(x_0) = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ fois}}(x_0).$$

Montrer alors que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\big\|x_{n+1} - x_n\big\| \leqslant \kappa^n \, \big\|T(x_0) - x_0\big\|.$$

(b) Déduire du point précédent que, pour tous entiers $0 \leqslant j < k$, on a la majoration générale :

$$\big\|x_k - x_j\big\| \leqslant \big(\kappa^{k-1} + \cdots + \kappa^j\big) \big\|T(x_0) - x_0\big\|.$$

(c) Déduire de ce qui précède que la suite $\big(x_k\big)_{k \geqslant 0}$ est convergente vers un (unique) point $x^* \in X$.

(d) Montrer que l'on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\big\|x^* - T(x^*)\big\| \leqslant \|x^* - x_{k+1}\| + \kappa \, \|x_k - x^*\|.$$

Conclure que l'on a $T(x^*) = x^*$.

(e) Montrer que si x^{**} vérifie aussi $T(x^{**}) = x^{**}$, alors nécessairement $x^{**} = x^*$.

Exercice 2. [Théorème des fonctions implicites de Zarantonello] On se donne un ensemble E, un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ muni de la norme associée $\|\cdot\|$ et une application :

$$\begin{aligned} F \colon \quad E \times X &\longrightarrow X \\ (\xi, x) &\longmapsto F(\xi, x). \end{aligned}$$

On suppose que :

• F est *fortement monotone en x, uniformément en ξ*, à savoir : il existe une constante réelle $a > 0$ telle que l'on ait, pour tout $\xi \in E$ et tous $x, y \in X$:

$$\big\langle F(\xi, x) - F(\xi, y), \ x - y \big\rangle \geqslant a \, \|x - y\|^2 \, ;$$

• F est *Lipschitzienne en x, uniformément en ξ*, à savoir : il existe une constante réelle $b > 0$ tel que l'on ait, pour tout $\xi \in X$ et tous $x, y \in X$:

$$\|F(\xi, x) - F(\xi, y)\| \leqslant b \, \|x - y\|.$$

On se propose d'établir l'existence d'une application $f : E \to X$ résolvant l'équation implicite $F = 0$, à savoir telle que, pour chaque $\xi \in E$, on ait :

$$\Big(F(\xi, x) = 0\Big) \iff \Big(x = f(\xi)\Big).$$

(a) Pour $c > 0$, on définit une application $G_c \colon E \times X \longrightarrow X$ par :

$$G_c(\xi, x) := x - c\, F(\xi, x).$$

Vérifier que, pour $\xi \in E$ fixé, on a $F(\xi, x) = 0$ si et seulement si x est un point fixe de l'application :

$$X \ni x \longmapsto G_c(\xi, x) \in X.$$

À quoi pense-t-on alors ?

(b) Montrer que l'on a, pour $c > 0$, $\xi \in X$ et $x, y \in X$:

$$\|G_c(\xi, x) - G_c(\xi, y)\|^2 \leqslant (1 - 2ac + c^2 b^2)\|x - y\|^2.$$

(c) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $\xi \in E$, l'application $G_c(\xi, \cdot)$ soit contractante.

(d) Pour tout $\xi \in E$, noter $f(\xi)$ l'unique point fixe de $G_c(\xi, \cdot)$. Montrer que l'application $f : E \to X$ ainsi définie vérifie la propriété suivante : pour tout $\xi \in E$ et tout $x \in X$, on a $F(\xi, x) = 0$ si et seulement si $x = f(\xi)$.

Exercice 3. [Fonctions continues à coefficients de Fourier positifs] Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$ une fonction continue sur le cercle unité. On dit qu'elle est *définie positive* si :

$$\forall\, \nu \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, \theta_1, \dots, \theta_\nu \in \mathbb{T}, \quad \forall\, c_1, \dots, c_\nu \in \mathbb{C}$$

$$\text{on a positivité de :} \qquad \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} f\big(\theta_\lambda - \theta_\mu\big)\, c_\lambda\, \overline{c}_\mu \;\geqslant\; 0.$$

(a) Montrer par le calcul que tout *monôme* trigonométrique $a_k\, e^{ik\theta}$ avec $a_k \geqslant 0$ est une fonction définie positive. En déduire qu'il en va de même pour toute somme *finie* à coefficients positifs $a_k \geqslant 0$:

$$\sum_{\substack{\text{finie} \\ k \in \mathbb{Z}}} a_k\, e^{ik\theta}.$$

(b) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$ une fonction continue sur le cercle unité dont *tous* les coefficients de Fourier $\widehat{f}(k) \geqslant 0$ sont positifs, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$. Rappeler et utiliser le théorème de Fejér concernant les $\sigma_n(f)(\theta) = \mathsf{F}_n * f(\theta)$ pour établir que f est définie positive en utilisant **(a)**.

(c) Soient deux fonctions continues $f, g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$. On introduit la fonction :

$$F(\theta) := \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \theta')\, g(\theta')\, \frac{d\theta'}{2\pi}.$$

Montrer que ses coefficients de Fourier $\widehat{F}(k)$ sont égaux aux produits $\widehat{f}(k)\, \widehat{g}(k)$.

(d) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$ définie positive. Pour toute fonction $h \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$, montrer en la ramenant à une somme double l'inégalité :

$$0 \;\leqslant\; \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \theta')\, h(\theta)\, \overline{h(\theta')}\, \frac{d\theta}{2\pi}\, \frac{d\theta'}{2\pi}.$$

(e) En déduire que si f est définie positive, tous ses coefficients de Fourier $\widehat{f}(k) \geqslant 0$ sont positifs, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4. [Noyau approximant et Théorème de Weierstrass sur le cercle] Sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, rappelons qu'un *polynôme trigonométrique* est une combinaison linéaire finie des $\big(e^{ik\theta}\big)_{k\in\mathbb{Z}}$. Pour tout entier positif $n \in \mathbb{N}$, on introduit le noyau :

$$\mathsf{C}_n(\theta) := c_n \left(\frac{1+\cos(\theta)}{2}\right)^n,$$

où $c_n \in \mathbb{R}_+^*$ est une certaine constante.

(a) Vérifier que la fonction 2π-périodique C_n est $\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que l'on peut choisir la constante $c_n > 0$ — sans la calculer ! — de telle sorte que :

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{C}_n(\theta)\, \frac{d\theta}{2\pi}.$$

(b) Montrer que :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \big\|\mathsf{C}_n\big\|_{\mathscr{C}^0([-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi])},$$

pour tout $\delta \in]0, \pi]$. Indication: Chercher à raisonner *sans avoir à calculer les constantes* c_n. On pourra d'abord vérifier et utiliser le fait que :

$$1 = c_n\, 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^n \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant c_n\, 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^n \sin\theta\, \frac{d\theta}{2\pi},$$

pour en déduire que $c_n \leqslant \frac{\pi}{2}(n+1)$, puis on pourra établir que :

$$\big\|\mathsf{C}_n\big\|_{\mathscr{C}^0([\delta,\pi])} \leqslant \frac{\pi}{2}\,(n+1) \left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^n.$$

(c) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$. On pose :

$$\kappa_n(f)(\theta) := \int_{\pi}^{\pi} f(\theta-t)\, \mathsf{C}_n(t)\, \frac{dt}{2\pi} = f * \mathsf{C}_n(\theta).$$

Montrer que les $\kappa_n(f)(\theta)$ sont des polynômes trigonométriques, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. On pourra utiliser (sans redémontrer) la formule du multinôme :

$$\left(\frac{2+e^{i(\theta-t)}+e^{-i(\theta-t)}}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n} \sum_{\substack{k+l\leqslant n\\ k\geqslant 0,\ l\geqslant 0}} \frac{n!\, 2^{n-k-l}}{(n-k-l)!\, k!\, l!}\, e^{i(k-l)(\theta-t)}.$$

(d) Soit $\delta > 0$ petit, notamment $\ll \pi$. Montrer que :

$$\big|\kappa_n(f)(\theta)-f(\theta)\big| \leqslant \int_{|t|\leqslant\delta} \big|f(\theta-t)-f(\theta)\big|\, \mathsf{C}_n(t)\, \frac{dt}{2\pi} + \int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} \big|f(\theta-t)-f(\theta)\big|\, \mathsf{C}_n(t)\, \frac{dt}{2\pi}.$$

(e) En déduire :

$$\big|\kappa_n(f)(\theta) - f(\theta)\big| \leqslant \max_{\substack{\theta\in\mathbb{R}\\ |t|\leqslant\delta}} \big|f(\theta-t) - f(\theta)\big| + 2\, \|f\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{T})}\, \big\|\mathsf{C}_n\big\|_{\mathscr{C}^0([-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi])}.$$

(f) En utilisant ce qui précède, établir que :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \big\|f - \kappa_n(f)\big\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{T})}.$$

8. Corrigé de l'examen 4

Exercice 1. Avant de commencer, il importe de faire observer au lecteur-étudiant que ce théorème est vrai *avec une démonstration identique sans aucune modification* plus généralement lorsque $\big(X, \|\cdot\|\big)$ est un espace de Banach, à savoir un espace vectoriel normé *complet* dont la norme $\|\cdot\|$ ne dérive pas nécessairement d'un produit scalaire (observer ci-dessous que le produit scalaire n'est absolument pas utilisé !).

(a) Tout d'abord, pour $n = 1$, c'est une conséquence immédiate de l'hypothèse de contraction (stricte) ci-dessus appliquée à $x := T(x_0)$ et $y := x_0$. Ensuite, supposant cette inégalité acquise au niveau n, on se place au niveau $n+1$ et on majore :

$$\begin{aligned}
\big\|x_{n+2} - x_{n+1}\big\| = \big\|T^{n+2}(x_0) - T^{n+1}(x_0)\big\| &= \big\|T\big(T^{n+1}(x_0)\big) - T\big(T^n(x_0)\big)\big\| \\
\text{[Hypothèse de contraction stricte]} \qquad &\leqslant \kappa \,\big\|T^{n+1}(x_0) - T^n(x_0)\big\| \\
\text{[Coïncidence notationnelle]} \qquad &= \kappa \,\big\|x_{n+1} - x_n\big\| \\
\text{[Hypothèse de récurrence]} \qquad &\leqslant \kappa\,\kappa^n \,\big\|T(x_0) - x_0\big\|,
\end{aligned}$$

ce qui conclut grâce au principe d'induction complète.

(b) Tout d'abord, essayons de comprendre ce qui est demandé dans le cas particulier où $k = j + 2$. On devine qu'il est naturel d'insérer deux termes dont la somme s'annule afin de se ramener à ce qui vient d'être démontré :

$$\begin{aligned}
\|x_{j+2} - x_j\| = \big\|x_{j+2} - x_{j+1} + x_{j+1} - x_j\big\| &\leqslant \|x_{j+2} - x_{j+1}\| + \|x_{j+1} - x_j\| \\
\text{[Appliquer (a) deux fois]} \qquad &\leqslant \big(\kappa^{j+1} + \kappa^j\big)\,\big\|T(x_0) - x_0\big\|.
\end{aligned}$$

Le cas général où $k - j \geqslant 1$ est arbitraire se démontre aisément de manière similaire :

$$\begin{aligned}
\|x_k - x_j\| &= \big\|x_k - x_{k-1} + x_{k-1} - x_{k-2} + \cdots + x_{j+2} - x_{j+1} + x_{j+1} - x_j\big\| \\
&\leqslant \|x_k - x_{k-1}\| + \|x_{k-1} - x_{k-2}\| + \cdots + \|x_{j+2} - x_{j+1}\| + \|x_{j+1} - x_j\| \\
&\leqslant \big(\kappa^{k-1} + \cdots + \kappa^j\big)\,\big\|T(x_0) - x_0\big\|.
\end{aligned}$$

(c) L'espace de Hilbert X étant complet (par axiome !), il suffit de faire voir que la suite $\big(x_k\big)_{k\geqslant 0}$ est de Cauchy, car alors une limite unique x^* existera. Soit donc $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Ainsi la question est : peut-on choisir un entier $J \gg 1$ assez grand pour que :

$$\Big(k > j \geqslant J\Big) \implies \Big(\|x_k - x_j\| \leqslant \varepsilon\Big)\,?$$

La réponse est manifestement : oui grâce à la question qui précède ! Tout simplement parce que l'on sait parfaitement calculer des sommes géométriques tronquées :

$$\begin{aligned}\|x_k - x_j\| &\leqslant \kappa^j \left(\kappa^{k-j-1} + \cdots + \kappa + 1\right) \underbrace{\big\|T(x_0) - x_0\big\|}_{\text{constante}} \\ &= \kappa^j \, \frac{1-\kappa^{k-j}}{1-\kappa} \, \big\|T(x_0) - x_0\big\| \\ &\leqslant \kappa^J \, \underbrace{\frac{1}{1-\kappa} \, \big\|T(x_0) - x_0\big\|}_{\text{nouvelle constante}},\end{aligned}$$

et bien entendu aussi, parce que $\lim_{J\to\infty} \kappa^J = 0$ puisque $0 \leqslant \kappa < 1$ par hypothèse.

(d) Après insertion (artificielle) du terme nul $-x_{k+1} + x_{k+1}$, l'inégalité triangulaire donne :

$$\begin{aligned}\big\|x^* - T(x^*)\big\| &\leqslant \|x^* - x_{k+1}\| + \big\|x_{k+1} - T(x^*)\big\| \\ &= \|x^* - x_{k+1}\| + \big\|T(x_k) - T(x^*)\big\| \\ &\leqslant \|x^* - x_{k+1}\| + \kappa \, \|x_k - x^*\|.\end{aligned}$$

Pour conclure, en faisant tendre k vers ∞, le membre de droite tend visiblement vers $0+0$, puisque $x_k \longrightarrow x^*$ par construction, d'où :

$$\big\|x^* - T(x^*)\big\| \leqslant 0,$$

ce qui donne $x^* = T(x^*)$ par positivité stricte de la norme sur $X\backslash\{0\}$.

(e) Ici, il s'agissait simplement de deviner qu'une application de l'hypothèse de stricte contraction à $x := x^{**} = T(x^{**})$ et à $y := x^* = T(x^*)$ donne instantanément :

$$\underbrace{\big\|T(x^{**}) - T(x^*)\big\|}_{=\|x^{**}-x^*\|} \leqslant \kappa \, \|x^{**} - x^*\|,$$

à savoir :

$$(1-\kappa) \, \|x^{**} - x^*\| \leqslant 0,$$

et comme $0 \leqslant \kappa < 1$, cette quantité positive ne peut qu'être nulle, d'où $x^{**} = x^*$ par positivité stricte de la norme sur $X\backslash\{0\}$.

Exercice 2. Avant de commencer, mentionnons que ce théorème des fonctions implicites est valable sans aucune hypothèse sur l'application de départ F, ni continuité, ni linéarité — même partielle par rapport au second argument x —, de telle sorte que l'application résolvante f que nous allons construire n'a pas non plus de raison de jouir de propriétés spécifiques.

(a) La fixe-attitude de $G_c(\xi, \cdot)$:

$$x = G_c(\xi, x) = x - c\, F(\xi, x)$$

est manifestement équivalente — grâce à des opérations algébriques élémentaires dont la maîtrise remonte aux mathématiques babyloniennes et qui furent symbolisée de manière systématique par les mathématiciens arabes — à la zéro-itude de $F(\xi, x)$, puisque $c > 0$, lui au moins, il n'est pas atteint de nulle-itude ! Comme on a résolu sagement l'exercice précédent, on pense en un éclair au Théorème du point fixe !

(b) Dans un espace de Hilbert, le calcul d'une norme au carré doit s'effectuer en développant le produit scalaire par bilinéarité :

$$\begin{aligned}\big\|G_c(\xi,x)-G_c(\xi,y)\big\|^2 &= \big\|x-y-c\big(F(\xi,x)-F(\xi,y)\big)\big\|^2\\ &= \big\langle x-y-c\big(F(\xi,x)-F(\xi,y)\big),\ x-y-c\big(F(\xi,x)-F(\xi,y)\big)\big\rangle\\ &= \|x-y\|^2+c^2\,\big\|F(\xi,x)-F(\xi,y)\big\|^2-2c\,\big\langle x-y,\ F(\xi,x)-F(\xi,y)\big\rangle.\end{aligned}$$

Les deux hypothèses admises sur l'application F donnent alors deux majorations uniformes :

$$\begin{aligned}\big\|F(\xi,x)-F(\xi,y)\big\|^2 &\leqslant b^2\,\|x-y\|^2,\\ -\big\langle F(\xi,x)-F(\xi,y),\ x-y\big\rangle &\leqslant -a\,\|x-y\|^2\end{aligned}$$

que l'on peut reporter dans l'expresssion obtenue, ce qui donne la majoration cherchée :

$$\big\|G_c(\xi,x)-G_c(\xi,y)\big\|^2\leqslant\|x-y\|^2+c^2\,b^2\,\|x-y\|^2-2\,a\,c\,\|x-y\|^2,$$

en tenant compte bien sûr de la symétrie du produit scalaire dans le $\mathbb{R}$-espace de Hilbert X.

(c) Il est clair que pour $c>0$ assez petit on a :

$$1-2ac+c^2b^2\ <\ 1,$$

puisque $a>0$, sachant que $c^2\ll c$ (exercice mental). Aussi l'inégalité de la question précédente **(b)** montre le caractère contractant de l'application $x\longmapsto G_c(\xi,x)$, laquelle est uniforme en ξ, d'ailleurs.

(d) Pour tout ξ fixé, le *Théorème du point fixe* (ces deux termes n'ont pas exactement le même sens dans les deux cas !) assure alors qu'il existe un unique $x=x(\xi)\in X$ dépendant de ξ qui satisfait :

$$x(\xi)=G_c\big(x(\xi),x\big)\quad\Longleftrightarrow\quad F\big(\xi,x(\xi)\big)=0.$$

À tout $\xi\in E$ est donc associé d'une manière parfaitement déterminée cet unique $x=x(\xi)\in X$. Par définition même du concept d'*application* entre deux ensembles, ceci veut précisément dire qu'on a construit une *application* :

$$E\longrightarrow X$$

que l'on choisit ici de noter « f », et qui vérifie toutes les propriétés requises, comme on s'en convainc en effectuant la synthèse mentale des résultats démontrés dans cet Exercice.

Exercice 3. Comme on s'en est rendu compte en lisant le sujet, le but de cet exercice est d'établir qu'une fonction continue $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{T})$ est définie positive *si et seulement si* tous ses coefficients de Fourier sont positifs. Voilà donc un théorème amusant !

(a) Traitons d'abord le cas d'un seul monôme exponentiel $a_k\, e^{ik\theta}$ dont le coefficient a_k est $\geqslant 0$. On doit donc estimer l'expression suivante et déterminer si elle est toujours positive :

$$\begin{aligned} a_k \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} e^{ik(\theta_\lambda - \theta_\mu)}\, c_\lambda\, \overline{c_\mu} = & \\ & = a_k \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} c_\lambda\, e^{ik\theta_\lambda}\, \overline{c_\mu\, e^{ik\theta_\mu}} \\ & = a_k \bigg(\sum_{\lambda=1}^{\nu} c_\lambda\, e^{ik\theta_\lambda}\bigg) \overline{\bigg(\sum_{\mu=1}^{\nu} c_\mu\, e^{ik\theta_\mu}\bigg)} \\ = \underbrace{a_k}_{\geqslant 0} \underbrace{\bigg|\sum_{\lambda=1}^{\nu} c_\lambda\, e^{ik\theta_\lambda}\bigg|^2}_{\text{est aussi } \geqslant 0}, & \end{aligned}$$

ce qui s'avère être vrai ! Le cas d'une somme finie s'en déduit par linéarité de la condition qu'une fonction est définie positive : on somme un nombre fini de conditions sur chaque $a_k\, e^{ik\theta}$, qui sont toutes $\geqslant 0$, donc la somme est aussi $\geqslant 0$!

(b) Prenons et fixons un entier $\nu \in \mathbb{N}^*$, des points du cercle $\theta_1, \dots, \theta_\nu \in \mathbb{T}$ et des constantes $c_1, \dots, c_\nu \in \mathbb{C}$. Il s'agit de montrer que :

$$0 \,\leqslant\, \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} f\big(\theta_\lambda - \theta_\mu\big)\, c_\lambda\, \overline{c_\mu}.$$

Grâce au Théorème de Fejér, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier assez grand $n = n(\varepsilon) \gg 1$ tel que la n-ème somme de Fejér $\sigma_n(f) = \mathsf{F}_n * f$ — laquelle est un polynôme trigonométrique contenant des $e^{il\theta}$ seulement pour $|l| \leqslant n$ — satisfait la ε-proximité à f uniformément sur $\mathbb{T}$:

$$\big\|f - \sigma_n(f)\big\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{T})} \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Or grâce à la question **(a)** que nous venons de résoudre aisément puisque nous l'avons sûrement déjà résolue dans le Devoir 1 à la maison, nous savons pour un tel polynôme trigonométrique $\sigma_n(f)$ qu'il est défini positif, et donc on a positivité de :

$$0 \,\leqslant\, \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \sigma_n(f)\big(\theta_\lambda - \theta_\mu\big)\, c_\lambda\, \overline{c_\mu}.$$

Maintenant, la différence avec la somme qui nous intéresse peut être majorée par une quantité :

$$\begin{aligned} \bigg|\sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \big(f - \sigma_n(f)\big)\big(\theta_\lambda - \theta_\mu\big)\, c_\lambda\, \overline{c_\mu}\bigg| \,&\leqslant\, \varepsilon \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} c_\lambda\, \overline{c_\mu} \\ &= \varepsilon\, \underbrace{\big|c_1 + \cdots + c_\nu\big|^2}_{= \text{constante}} \end{aligned}$$

qui tend vers 0 avec $\varepsilon \to 0^+$. Par conséquent (exercice mental), la positivité de la somme double portant sur $\sigma_n(f)$ implique la positivité (désirée) de la somme double portant sur f.

(c) Par définition, le k-ème coefficient en question vaut l'intégrale :

$$\widehat{F}(k) := \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)\, e^{-ik\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta-\theta')\, g(\theta')\, e^{-ik\theta}\, \frac{d\theta'}{2\pi}\, \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Écrivons artificiellement (et astucieusement !) l'exponentielle sous la forme $e^{-ik\theta} = e^{-ik\theta'}\, e^{-ik(\theta-\theta')}$ et effectuons le changement de variable $\eta := \theta - \theta'$ qui induit $d\eta = d\theta$ dans l'intégrale double (permutable puisque le Théorème de Fubini s'applique sans problème aux fonctions continues) :

$$\widehat{F}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta')\, e^{-ik\theta'}\, \frac{d\theta'}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta-\theta')\, e^{-ik(\theta-\theta')}\, \frac{d\theta}{2\pi} = \widehat{g}(k)\, \widehat{f}(k).$$

(d) L'étudiant fin-comme-le-renard aura bien entendu réalisé que cette intégrale double (continue) manifeste des similarités troublantes avec les sommes doubles (discrètes) de l'hypothèse de définie positivité ! Il aura ensuite été guidé par son précieux flair pour se rappeler, par réminiscence (platonicienne), que les intégrales de Riemann (largement suffisantes pour les fonctions continues !) se calculent comme limites de sommes de Riemann *finies et discrètes*.

Subdivisons donc l'intervalle produit $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ en $\nu \times \nu$ petits intervalles tous de même longueur $\frac{2\pi}{\nu}$ en les points (équidistribués) de coordonnées :

$$\theta_\lambda := -\pi + \frac{\lambda-1}{\nu}\, 2\pi \qquad {\scriptstyle (\lambda = 1 \cdots \nu)} \qquad \text{et} \qquad \theta_\mu := -\pi + \frac{\mu-1}{\nu}\, 2\pi \qquad {\scriptstyle (\mu = 1 \cdots \nu)}$$

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $\nu = \nu(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que l'intégrale double soit ε-approximable par la somme double de Riemann correspondante :

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta-\theta')\, h(\theta)\, \overline{h(\theta')}\, \frac{d\theta}{2\pi}\, \frac{d\theta'}{2\pi} - \underbrace{\sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} f(\theta_\lambda - \theta_\mu)\, \underbrace{h(\theta_\lambda)}_{=:\, c_\lambda}\, \underbrace{\overline{h(\theta_\mu)}}_{=:\, \overline{c_\mu}}\, \frac{2\pi}{\nu}\, \frac{2\pi}{\nu}}_{\text{quantité toujours} \geqslant 0 \text{ par hypothèse !}} \right| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci implique (exercice mental) que l'intégrale double à gauche est nécessairement $\geqslant 0$.

(e) La question qui précède nous a convaincu que pour *toute* fonction continue $h \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$, on a l'inégalité :

$$0 \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta-\theta')\, h(\theta)\, \overline{h(\theta')}\, \frac{d\theta}{2\pi}\, \frac{d\theta'}{2\pi},$$

et on aimerait bien pouvoir se ramener à la question **(c)** :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta-\theta')\, g(\theta')\, e^{-ik\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi}\, \frac{d\theta'}{2\pi} = \widehat{f}(k)\, \widehat{g}(k).$$

Le problème quand on compare ces deux intégrales doubles, c'est que la fonction $h(\theta')$ apparaît conjuguée dans la première, tandis que dans la seconde, la fonction $g(\theta')$ n'apparaît pas conjuguée ! Qu'à cela ne tienne, on n'a qu'à déclarer que :

$$h(\theta) := e^{-ik\theta} \qquad \text{et que :} \qquad g(\theta') := \overline{h(\theta')} = e^{ik\theta'}.$$

Et cette fois-ci — c'est merveilleux ! —, tout s'enclenche bien : les deux intégrales doubles coïncident, on a $\widehat{g}(k) = 1$ — qui est positif ! — et donc au final :

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \text{ première intégrale double} &= \text{deuxième intégrale double} \\
&= \widehat{f}(k)\, \widehat{g}(k) \\
&= \widehat{f}(k),
\end{aligned}
$$

et cela, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ce qui conclut élégamment (on l'espère...) la démonstration.

Exercice 4. **(a)** Puisque $\cos\theta$ est > -1 sur $]-\pi, \pi[$, l'intégrale sur $[-\pi, \pi]$ de la fonction paire continue $\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^n$ strictement positive excepté aux bornes de l'intervalle est > 0, et on n'a alors pas d'autre choix que de prendre :

$$
c_n := \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^n \frac{d\theta}{2\pi}}.
$$

(b) Une astuce indiquée dans l'énoncé du sujet consiste à commencer par *minorer* l'intégrale (paire) de C_n par l'intégrale de la même fonction multipliée par la fonction positive $\sin\theta \leqslant 1$ de façon à faire apparaître une intégrande dont la primitive se voit aisément :

$$
\begin{aligned}
1 = \frac{2\, c_n}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^n d\theta \leqslant \frac{c_n}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^n \sin\theta\, d\theta
&= \frac{c_n}{\pi} \left[-\frac{2}{n+1} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^{n+1} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{c_n}{\pi} \frac{2}{n+1},
\end{aligned}
$$

ce qui donne une *majoration* des constantes qu'on n'a pas eu le courage de calculer :

$$
\boxed{c_n \leqslant \frac{\pi}{2}(n+1).}
$$

Ensuite, puisque $\mathsf{C}_n(\theta)$ décroît sur $[0, \pi]$ (exercice mental), on a pour tout $\theta \in [\delta, \pi]$:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{C}_n(\theta) \leqslant \mathsf{C}_n(\delta) &= c_n \left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^n \\
&\leqslant \underbrace{\frac{\pi}{2}(n+1) \Bigg(\underbrace{\frac{1+\cos\delta}{2}}_{<1}\Bigg)^n}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0},
\end{aligned}
$$

ce qui établit la convergence uniforme vers 0 de C_n sur $[\delta, \pi]$, puis aussi sur $[-\delta, -\pi]$ par parité.

(c) Par commutativité du produit de convolution :

$$
\begin{aligned}
\kappa_n(f)(\theta) &= \mathsf{C}_n * f(\theta) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{C}_n(\theta - t)\, f(t)\, \frac{dt}{2\pi} \\
&= c_n \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{2 + e^{i(\theta-t)} + e^{-i(\theta-t)}}{4}\right)^n f(t)\, \frac{dt}{2\pi}.
\end{aligned}
$$

Ensuite, l'application suggérée de la formule du multinôme conclut :

$$\text{la même chose} = \frac{c_n}{4^n} \underbrace{\sum_{k+l \leqslant n} \frac{n!\; 2^{n-k-l}}{(n-k-l)!\, k!\, l!}\, e^{i(k-l)\,\theta}}_{\text{somme finie de } e^{ih\theta}} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-l)\,t}\, f(t)\, \frac{dt}{2\pi}}_{\text{constante} = \widehat{f}(k-l)}.$$

(d) À partir de maintenant, les raisonnements sont exactement les mêmes que dans le cours polycopié lorsqu'on montrait le même théorème avec les noyaux de Fejér F_n au lieu de ces noyaux C_n. L'inégalité en vue provient de l'insertion de $f(\theta)$ à l'intérieur de l'intégrale — grâce au fait que la masse des noyaux positifs C_n vaut toujours 1 — :

$$\begin{aligned}
\kappa_n(f)(\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(\theta - t) - f(\theta)\big)\, \mathsf{C}_n(t)\, \frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_{|t| \leqslant \delta} \text{même chose} + \int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \text{même chose} \\
&\leqslant \int_{|t| \leqslant \delta} \big|\text{même chose}\big| + \int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \big|\text{même chose}\big|,
\end{aligned}$$

puis d'une décomposition de l'intervalle d'intégration en $[-\delta, \delta]$ et en $[\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$, suivie enfin d'une simple inégalité triangulaire.

(e) En fait, la déduction procède comme dans le cours.

(f) Soit $\varepsilon > 0$. Rappelons que le raisonnement consiste à prendre d'abord δ assez petit pour que le premier terme soit $\leqslant \varepsilon$ grâce à l'uniforme continuité de f sur le compact $\mathbb{T}$, puis à prendre $n \geqslant N(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que le second terme soit lui aussi $\leqslant \varepsilon$, ce qui est possible une fois que δ est fixé grâce à la question **(b)**.

9. Examen 5

Exercice 1. [Majoration uniforme de $\sum_{1\leqslant |k|\leqslant n} \frac{e^{ik\theta}}{k}$]
(a) La famille des noyaux de Dirichlet sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est définie par $\mathsf{D}_n(t) := \sum_{|k|\leqslant n} e^{ikt}$. Montrer que :

$$\mathsf{D}_n(t) = \frac{\sin\big(n+\frac{1}{2}\big)\,t}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)}.$$

(b) Que valent les intégrales :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{D}_n(t)\,dt\,?$$

(c) Montrer que la fonction :

$$q\colon\quad t \longmapsto \frac{1}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)} - \frac{1}{\frac{t}{2}}$$

se prolonge continûment à $[-\pi, \pi]$.
(d) En déduire l'existence d'une constante $Q > 0$ telle que :

$$\bigg|\int_0^\theta q(t)\sin\big(n\,t + \tfrac{t}{2}\big)\,dt\bigg| \leqslant Q,$$

pour tout $|\theta| \leqslant \pi$.
(e) On rappelle que le lemme de Riemann-Lebesgue stipule que pour toute fonction continue $g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\sin(n\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi} = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\cos(n\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Déterminer alors :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} q(t)\sin\big(n\,t + \tfrac{t}{2}\big)\,dt.$$

(f) En admettant que $\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\sin u}{u}\,du$ existe, utiliser **(b)**, **(c)** et **(e)** pour établir que :

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}.$$

(g) En déduire qu'il existe une constante $R > 0$ telle que $\big|\int_0^b \frac{\sin(ct)}{t}\,dt\big| \leqslant R$ pour tous $b, c \in \mathbb{R}_+^*$.
(h) Montrer que $\big|\int_0^\theta \frac{\sin(n\,t+t/2)}{\sin(t/2)}\,dt\big| \leqslant Q + 2\,R$ pour tout $|\theta| \leqslant \pi$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
(i) Montrer que :

$$\frac{1}{2i} \sum_{1\leqslant |k|\leqslant n} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{1}{2}\int_0^\theta \big(\mathsf{D}_n(t) - 1\big)dt.$$

(j) Donner une preuve alternative du fait signalé et utilisé en cours que les sommes :

$$\bigg| \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant n} \frac{e^{ik\theta}}{k} \bigg|$$

sont uniformément bornées en n et en θ.

Exercice 2. [Théorème de James] Soit $\big(E, \| \cdot \|\big)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé complet. La *norme* d'une fonctionnelle linéaire $L\colon E \to \mathbb{R}$:

$$|\!|\!| L |\!|\!| := \sup_{u \in E \backslash \{0\}} \frac{\big|L(u)\big|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1} \big|L(u)\big|$$

est finie $|\!|\!| L |\!|\!| < \infty$ si et seulement si L est continue, d'après un théorème connu.

L'espace $\big(E, \| \cdot \|\big)$ est dit *uniformément convexe* lorsque, pour tout $0 < \delta < 1$, la quantité :

$$\varepsilon(\delta) := \inf \Big\{ 1 - \big\| \tfrac{u+v}{2} \big\| \colon \ \|u\| = \|v\| = 1, \ \ \|u - v\| \geqslant \delta \Big\} \, > \, 0$$

est strictement positive.

(a) Illustrer cette propriété par un diagramme parlant et esthétique.

(b) On considère maintenant une fonctionnelle linéaire continue non nulle $L\colon \big(E, \|\cdot\|\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}, |\cdot|\big)$. Montrer qu'il existe une suite $\big(u_n\big)_{n \geqslant 1}$ d'éléments $u_n \in E$ de norme $\|u_n\| = 1$ telle que $L(u_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} |\!|\!| L |\!|\!|$.

(c) Étant donné $\varepsilon > 0$ arbitraire, montrer qu'il existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_1, n_2 \geqslant N$ entraîne :

$$|\!|\!| L |\!|\!| \big(1 - \varepsilon\big) \, < \, \frac{L(u_{n_1}) + L(u_{n_2})}{2}.$$

(d) Toujours pour $n_1, n_2 \geqslant N(\varepsilon)$, en déduire :

$$\big(1 - \varepsilon\big) \, < \, \bigg\| \frac{u_{n_1} + u_{n_2}}{2} \bigg\|.$$

(e) En utilisant l'uniforme convexité de $\big(E, \| \cdot \|\big)$, montrer que la suite $\big(u_n\big)_{n \geqslant 1}$ est de Cauchy.

(f) Justifier l'existence de $u_\infty = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$ et montrer que $L(u_\infty) = |\!|\!| L |\!|\!|$.

(g) Montrer l'unicité d'un élément v_∞ de norme $\|v_\infty\| = 1$ satisfaisant $L(v_\infty) = |\!|\!| L |\!|\!|$. Indication: Entrelacer $\big(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n, \dots\big)$ et appliquer **(b)**.

(h) En notant donc maintenant $u_L \in E$ cet unique élément de norme $\|u_L\| = 1$ satisfaisant $L\big(u_L\big) = |\!|\!| L |\!|\!|$, montrer que pour tout $v \in E$, la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto |\!|\!| L |\!|\!| \cdot \big\| u_L + tv \big\| - L\big(u_L + t\, v\big) \end{aligned}$$

admet un minimum global en $t = 0$.

(i) L'espace vectoriel normé complet $\big(E, \|\cdot\|\big)$ est dit *lisse* lorsque, pour tout $u \in E \backslash \{0\}$, l'application :

$$M_u \colon \quad \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \longmapsto \dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big\|u + tv\big\| \end{cases}$$

définit une fonctionnelle linéaire continue sur E. Conclure du point précédent (Théorème de James) que dans un espace vectoriel normé complet uniformément convexe et lisse $\big(E, \|\cdot\|\big)$, à toute fonctionnelle linéaire continue non nulle $L \colon E \to \mathbb{R}$ est associé un unique élément $u_L \in E$ de norme 1 tel que :

$$L(\cdot) = \|L\| \cdot M_{u_L}(\cdot).$$

(j) Montrer qu'un espace de Hilbert $\big(H, \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}\big)$ est uniformément convexe. Indication: Utiliser l'identité du parallélogramme pour minorer, par exemple : $\varepsilon(\delta) \geqslant \frac{\delta^2}{8}$.

(k) Lorsque $\big(E, \|\cdot\|\big) = \big(H, \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}\big)$ est un espace de Hilbert, comparer $M_u(v)$ et $\big\langle \frac{u}{\|u\|}, v \big\rangle$.

(l) Comment s'énonce le Théorème de James dans un espace de Hilbert ?

Exercice 3. [Décroissance höldérienne des coefficients de Fourier] Soit f une fonction 2π-périodique intégrable sur $[-\pi, \pi]$ au sens de Riemann.

(a) Rappeler la définition des k-èmes coefficients de Fourier $\widehat{f}(k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Montrer que :

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(\theta) - f\left(\theta + \frac{\pi}{k}\right) \right] e^{-ik\theta} \, \frac{d\theta}{2\pi}.$$

(c) Lorsque, pour un certain exposant réel $0 < \alpha \leqslant 1$, la fonction f est α-höldérienne :

$$\big| f(\theta + t) - f(\theta) \big| \leqslant \mathsf{constante} \cdot |t|^\alpha,$$

montrer que :

$$\widehat{f}(k) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|k|^\alpha} \right).$$

Il s'agit ensuite de faire voir qu'une telle décroissance ne peut pas être améliorée en général.

(d) Pour $0 < \alpha < 1$, montrer que la fonction :

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} \, e^{i\,2^n\,\theta}.$$

est α-höldérienne. Indication: Découper la somme :

$$f(\theta + t) - f(\theta) = \sum_{2^n \leqslant \frac{1}{|h|}} (\,\cdot\,) + \sum_{2^n > \frac{1}{|h|}} (\,\cdot\,).$$

Pour estimer la première somme, utiliser après l'avoir justifié le fait que $\big|1 - e^{i\theta}\big| \leqslant |\theta|$ pour $|\theta| \leqslant \pi$. Pour estimer la seconde somme, utiliser l'inégalité $\big|e^{it_2} - e^{it_1}\big| \leqslant 2$.

10. Corrigé de l'examen 5

Exercice 1. (a) Par définition :

$$\mathsf{D}_n(t) = e^{-in\,t} + \cdots + e^{-it} + 1 + e^{it} + \cdots + e^{int}.$$

Dans le cours, en utilisant $1 + q + \cdots + q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$, on montre que :

$$\mathsf{D}_n(t) = \frac{\sin\big(n+\frac{1}{2}\big)t}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)}.$$

(b) Puisque pour tout entier $k \in \mathbb{Z}^*$ non nul :

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,dt,$$

il vient :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{D}_n(t)\,dt &= 0 + \cdots + 0 + \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt + 0 + \cdots + 0 \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

(c) Sur $[-\pi, 0[\, \cup\,]0, \pi]$, cette fonction :

$$q(t) = \frac{1}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)} - \frac{1}{\frac{t}{2}}$$

est $\mathscr{C}^\infty$, puisque ni $\sin\big(\frac{t}{2}\big)$, ni t n'y ont de zéros. Mais au voisinage de $t = 0$, un développement limité utilisant $\frac{1}{1-\mathsf{x}} = 1 + \mathsf{x} + \mathrm{O}(\mathsf{x}^2)$ donne :

$$\begin{aligned}q(t) &= \frac{1}{\frac{t}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{t}{2}\right)^3 + \mathrm{O}\big(t^5\big)} - \frac{1}{\frac{t}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{t}{2}}\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{6}\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \mathrm{O}\big(t^4\big)} - 1\right] \\ &= \frac{2}{t}\Big[1 + \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{t}{2}\right)^2 + \mathrm{O}\big(t^4\big) - 1\Big] \\ &= \mathrm{O}(t),\end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction $q(t)$ se prolonge par continuité en $t = 0$ par la valeur nulle :

$$q(0) := 0.$$

(d) Bien entendu, on peut alors majorer :

$$\begin{aligned}\bigg|\int_0^\theta q(t)\,\mathsf{sin}\big(n\,t+t/2\big)\,dt\bigg| &\leqslant |\theta|\cdot\big(\max_{[0,\theta]} q\big)\cdot 1\\ &\leqslant \underbrace{\pi\cdot\|q\|_{\mathscr{C}^0([-\pi,\pi])}}_{=:\,Q}\\ &<\infty.\end{aligned}$$

(e) Une formule trigonométrique connue stipule que :

$$\mathsf{sin}\big(n\,t+t/2\big)=\mathsf{cos}(t/2)\,\mathsf{sin}(n\,t)+\mathsf{sin}(t/2)\,\mathsf{cos}(n\,t).$$

Alors une application directe du lemme de Riemann-Lebesgue donne la réponse :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} q(t)\,\mathsf{sin}\big(n\,t+t/2\big)\,dt &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{q(t)\,\mathsf{cos}(t/2)}_{\in\,\mathscr{C}^0}\,\mathsf{sin}(n\,t)\,dt+\\ &\quad+\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{q(t)\,\mathsf{sin}(t/2)}_{\in\,\mathscr{C}^0}\,\mathsf{cos}(n\,t)\,dt = 0+0.\end{aligned}$$

(f) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on sait que :

$$2\pi=\int_{-\pi}^{\pi}\mathsf{D}_n(t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathsf{sin}\big(n+\frac{1}{2}\big)t}{\mathsf{sin}\big(\frac{t}{2}\big)}.$$

Alors ce qui vient d'être vu permet de poursuivre :

$$\begin{aligned}0&=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} q(t)\,\mathsf{sin}\big(n\,t+t/2\big)\,dt\\ &=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\Bigg(\frac{\mathsf{sin}\big(n+\frac{1}{2}\big)t}{\mathsf{sin}\big(\frac{t}{2}\big)}-\underbrace{\frac{\mathsf{sin}\big(n+\frac{1}{2}\big)t}{\frac{t}{2}}}_{\text{fonction paire}}\Bigg)dt\\ &=\lim_{n\to\infty}\Bigg(2\pi-2\int_0^{\pi}\frac{\mathsf{sin}\big(n+\frac{1}{2}\big)t}{\frac{t}{2}}\,dt\Bigg)\\ &=2\pi-4\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\mathsf{sin}\big(n+\frac{1}{2}\big)t}{t}\,dt,\end{aligned}$$

puis le changement de variable :

$$\bigg(n+\frac{1}{2}\bigg)\,t=:u,\qquad\qquad \text{d'où :}\quad \frac{dt}{t}=\frac{du}{u},$$

donne :

$$2\pi=4\lim_{n\to\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\mathsf{sin}\,u}{u}\,du,$$

d'où en admettant que $\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b\frac{\mathsf{sin}\,u}{u}\,du$ existe :

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^{\infty}\frac{\mathsf{sin}\,u}{u}\,du.$$

(g) Le changement de variable similaire :

$$ct =: u, \qquad\qquad \text{d'où :} \quad \frac{dt}{t} = \frac{du}{u},$$

transforme :

$$\int_0^b \frac{\sin(ct)}{t}\,dt = \int_0^{bc} \frac{\sin u}{u}\,du.$$

Comme $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$ existe et comme $bc > 0$, ces quantités sont uniformément bornées en valeur absolue :

$$\bigg|\int_0^b \frac{\sin ct}{t}\,dt\bigg| \leqslant R,$$

par, disons, une constante notée R.

(h) Maintenant, en faisant apparaître $q(t)$ dans une inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\bigg|\int_0^\theta \frac{\sin\big(n+\frac{1}{2}\big)\,t}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)}\,dt\bigg| &\leqslant \bigg|\int_0^\theta \sin\big(n\,t+t/2\big)\bigg(\underbrace{\frac{1}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)}-\frac{1}{\frac{t}{2}}}_{q(t)}\bigg)\,dt\bigg| + \bigg|\int_0^\theta \frac{\sin\big(n+\frac{1}{2}\big)\,t}{\frac{t}{2}}\,dt\bigg| \\ &\leqslant Q + 2\,R \\ &< \infty,\end{aligned}$$

et ce, pour tout $|\theta| \leqslant \pi$, grâce aux résultats des questions **(d)** et **(g)**.

(i) On a bien :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^\theta \big(\mathsf{D}_n(t)-1\big)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^\theta \bigg(\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n} e^{ikt}\bigg)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\bigg[\frac{e^{ikt}}{ik}\bigg]_0^\theta \\ &= \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\bigg(\frac{e^{ik\theta}}{ik}-\frac{1}{ik}\bigg),\end{aligned}$$

et en observant que $0 = \sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\frac{1}{k}$ par imparité, il reste :

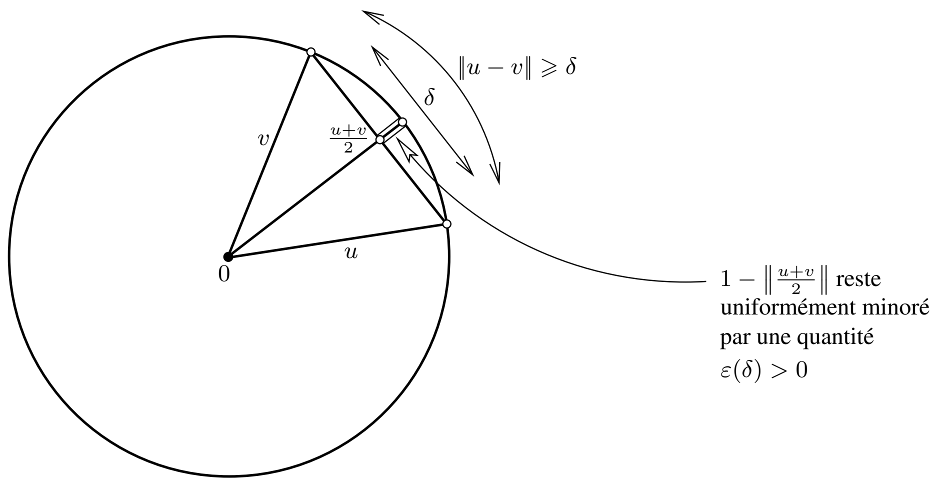
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^\theta \big(\mathsf{D}_n(t)-1\big)\,dt &= \frac{1}{2i}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\frac{e^{ik\theta}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\,\theta)}{k}.\end{aligned}$$

(j) En conclusion, en prenant les modules, et pour tout $|\theta| \leqslant \pi$:

$$\begin{aligned}\bigg|\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\frac{e^{ik\theta}}{k}\bigg| &\leqslant \bigg|\int_0^\theta \big(\mathsf{D}_n(t)-1\big)\,dt\bigg| \\ &\leqslant \bigg|\int_0^\theta \mathsf{D}_n(t)\,dt\bigg| + |\theta| \\ &\leqslant Q + 2\,R + \pi \\ &< \infty,\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve alternative du caractère uniformément borné de ces sommes, fait crucialement utilisé dans le cours magistral afin de construire avec du Bois Reymond une fonction continue dont la série de Fourier diverge en $\theta = 0$.

Exercice 2. **(a)** Voici un diagramme :



(b) Par définition de :

$$\|L\| = \sup_{\|u\|=1} \big|L(u)\big|,$$

il existe une suite $\big(u_n\big)_{n \geqslant 1}$ d'éléments $u_n \in E$ de norme $\|u_n\| = 1$ telle que :

$$\big|L(u_n)\big| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|L\|,$$

et quitte à changer u_n en $-u_n$, seulement lorsque $L(u_n) \in \mathbb{R}_-^*$, on peut supposer que $L(u_n) \geqslant 0$ pour tout n, et ainsi sans valeur absolue :

$$L(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|L\|.$$

(c) Comme la fonctionnelle L est non nulle, $\|L\| > 0$. Étant donné $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe par conséquent $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ assez grand pour que :

$$n \geqslant N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \Big(L(u_n) > \|L\| \big(1 - \varepsilon\big) \Big),$$

et alors par simple addition-moyennisation :

$$n_1,\, n_2 \geqslant N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \bigg(\frac{L(u_{n_1}) + L(u_{n_2})}{2} > \|L\| \big(1 - \varepsilon\big) \bigg).$$

(d) Toujours pour $n_1, n_2 \geqslant N(\varepsilon)$, supposons par l'absurde que :

$$\bigg\| \frac{u_{n_1} + u_{n_2}}{2} \bigg\| \leqslant \big(1 - \varepsilon\big).$$

La propriété caractéristique $\big|L(v)\big| \leqslant \|L\| \cdot \|v\|$ valable pour tout $v \in E$ et directement issue de la définition de la norme d'opérateur $\|L\|$ implique alors :

$$\begin{aligned} \bigg| L\bigg(\frac{u_{n_1} + u_{n_2}}{2} \bigg) \bigg| &\leqslant \|L\| \cdot \bigg\| \frac{u_{n_1} + u_{n_2}}{2} \bigg\| \\ &\leqslant \|L\| \, \big(1 - \varepsilon\big), \end{aligned}$$

d'où en éliminant la valeur absolue à gauche :

$$L\bigg(\frac{u_{n_1}+u_{n_2}}{2}\bigg) \leqslant |\!|\!| L |\!|\!| \,\big(1-\varepsilon\big),$$

inégalité manifestement contradictoire avec **(c)**.

(e) Soit $\delta > 0$ arbitrairement petit et associons-lui la quantité $\varepsilon(\delta)$ — appelée *module de convexité* — qui apparaît dans la définition de l'uniforme convexité. Nous affirmons que :

$$n_1,\, n_2 \geqslant N\big(\varepsilon(\delta)\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\big\| u_{n_1}-u_{n_2}\big\| < \delta\Big),$$

ce qui établira la *Cauchycité* de la suite $\big(u_n\big)_{n\geqslant 1}$.

Sinon, si au contraire on avait :

$$\big\| u_{n_1}-u_{n_2}\big\| \geqslant \delta,$$

alors par uniforme convexité de l'espace $\big(E, \|\cdot\|\big)$, on devrait avoir le contrôle minorant :

$$1-\bigg\|\frac{u_{n_1}+u_{n_2}}{2}\bigg\| \geqslant \varepsilon(\delta),$$

ce qui équivaudrait à :

$$1-\varepsilon(\delta) \geqslant \bigg\|\frac{u_{n_1}+u_{n_2}}{2}\bigg\|,$$

et produirait une contradiction manifeste avec le résultat de la question **(d)** !

(f) La complétude de $\big(E, \|\cdot\|\big)$ assure l'existence de $u_\infty = \lim_{n\to\infty} u_n$. Comme $L(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |\!|\!| L |\!|\!|$, et comme L est continue, $L(u_\infty) = |\!|\!| L |\!|\!|$.

(g) Étant donné une *autre* suite $\big(v_n\big)_{n\geqslant 1}$ quelconque qui satisfait exactement comme $\big(u_n\big)_{n\geqslant 1}$ à la fois $\|v_n\| = 1$ et $L(v_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |\!|\!| L |\!|\!|$, les mêmes raisonnements s'appliquent sans modification et fournissent une limite $v_\infty = \lim_{n\to\infty} v_n$ satisfaisant aussi $L(v_\infty) = |\!|\!| L |\!|\!|$. Or la suite entrelacée :

$$\big(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n, \dots\big),$$

à savoir la suite :

$$w_n = \begin{cases} u_{\frac{n+1}{2}} & \text{lorsque } n \text{ est impair,} \\ v_{\frac{n}{2}} & \text{lorsque } n \text{ est pair,} \end{cases}$$

satisfait elle aussi trivialement $\|w_n\| = 1$ et $L(w_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |\!|\!| L |\!|\!|$, donc les raisonnements qui précèdent s'appliquent aussi à elle, et ils fournissent sans effort une limite $w_\infty = \lim_{n\to\infty} w_n$ qui satisfait encore et aussi $L(w_\infty) = |\!|\!| L |\!|\!|$. Ceci assure sans délai (exercice mental) que :

$$v_\infty = u_\infty,$$

et conclut la démonstration d'unicité. Bien entendu, $\|u_\infty\| = \|v_\infty\| = \|w_\infty\| = 1$.

(h) Avec $u_L \in E$ cet unique élément de norme $\|u_L\| = 1$ satisfaisant $L\big(u_L\big) = |\!|\!| L |\!|\!|$, la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto |\!|\!| L |\!|\!| \cdot \big\| u_L + t\, v\big\| - L\big(u_L + t\, v\big), \end{aligned}$$

est en fait à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, simplement parce que $\big|L(w)\big| \leqslant |\!|\!|L|\!|\!| \cdot \|w\|$ pour $w := u_L + t\,v$, et elle s'annule visiblement en $t = 0$. Son minimum global vaut donc 0, et si elle possédait un *autre* minimum :

$$0 = |\!|\!|L|\!|\!| \cdot \big\|u_L + t_0\,v\big\| - L\big(u_L + t_0\,v\big),$$

pour un certain autre $t_0 \in \mathbb{R}$ avec $t_0 \neq 0$, cela contredirait l'unicité de u_L.

(i) Toute fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ qui admet un extremum (local ou global) en un point doit y avoir sa dérivée nulle. Ici en $t = 0$, on doit donc avoir :

$$0 = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \bigg(|\!|\!|L|\!|\!| \cdot \big\|u_L + t\,v\big\| - L(u_L) - t\,L(v)\bigg),$$

à savoir en termes de la fonctionnelle M_u supposée exister dans $\big(E, \|\cdot\|\big)$ lisse :

$$0 = |\!|\!|L|\!|\!| \cdot M_{u_L}(v) - L(v).$$

Nous avons donc établi le :

Théorème de James. *Dans un espace vectoriel normé complet uniformément convexe et lisse* $\big(E, \|\cdot\|\big)$*, à toute fonctionnelle linéaire continue* $L\colon E \to \mathbb{R}$ *est associé un unique élément* $u_L \in E$ *tel que :*

$$L(\cdot) = |\!|\!|L|\!|\!| \cdot M_{u_L}(\cdot).$$

(j) L'identité du parallélogramme, valable dans tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé dont la norme dérive d'un produit scalaire :

$$\big\|u + v\big\|^2 + \big\|u - v\big\|^2 = 2\,\|u\|^2 + 2\,\|v\|^2,$$

donne ici, en supposant donc que $\|u\| = \|v\| = 1$:

$$\bigg\|\frac{u+v}{2}\bigg\|^2 + \bigg\|\frac{u-v}{2}\bigg\|^2 = 1,$$

et donc, pour tester l'uniforme convexité de notre espace de Hilbert $\big(H, \sqrt{<\cdot,\cdot>}\big)$, si :

$$\|u - v\| \,\geqslant\, \delta,$$

on en déduit la minoration :

$$\frac{\delta^2}{4} \,\leqslant\, \frac{\|u-v\|^2}{4} \,=\, 1 - \bigg\|\frac{u+v}{2}\bigg\|^2,$$

puis en factorisant $1 - \mathsf{x}^2 = (1 - \mathsf{x})\,(1 + \mathsf{x})$:

$$\frac{\delta^2}{4} \,\leqslant\, \bigg(1 - \bigg\|\frac{u+v}{2}\bigg\|\bigg)\,\underbrace{\bigg(1 + \bigg\|\frac{u+v}{2}\bigg\|\bigg)}_{\leqslant 2},$$

et finalement, on conclut l'uniforme convexité :

$$\frac{\delta^2}{4}\,\frac{1}{2} \,\leqslant\, 1 - \bigg\|\frac{u+v}{2}\bigg\|,$$

grâce au minorant-bonus indiqué :

$$\varepsilon(\delta) \,\geqslant\, \frac{\delta^2}{8} \,>\, 0.$$

(k) Rappelons la dérivée de la racine carrée d'une fonction $g(t) > 0$:

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sqrt{g(t)} \;=\; \frac{1}{2\,\sqrt{g(0)}}\,\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \big(g(t)\big).$$

Ici, avec $u \neq 0$ pour assurer que $g(0) > 0$, on calcule :

$$\begin{aligned}
M_u(v) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sqrt{\langle u + t\,v,\ u + t\,v\rangle} \\
&= \frac{1}{2\,\sqrt{\langle u, u\rangle}}\,\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Big(\langle u, u\rangle + 2\,t\,\langle u, v\rangle + t^2\,\langle v, v\rangle \Big) \\
&= \frac{1}{2\,\sqrt{\langle u, u\rangle}}\,2\,\langle u, v\rangle \\
&= \big\langle \tfrac{u}{||u||},\, v\big\rangle,
\end{aligned}$$

donc les deux expressions à comparer sont égales.

(l) Ainsi, tout espace de Hilbert, complet par définition, s'avère-t-il être aussi un espace vectoriel normé complet lisse uniformément convexe auquel le Théorème de James s'applique, montrant que toute fonctionnelle linéaire continue non nulle se représente comme :

$$\begin{aligned}
L(v) &= ||L|| \cdot M_{u_L}(v) \\
&= ||L|| \cdot \big\langle \tfrac{u}{||u||},\, v\big\rangle \\
&= \big\langle ||L||\,\tfrac{u}{||u||},\, v\big\rangle \\
&= \text{produit scalaire de } v \text{ avec un vecteur fixe},
\end{aligned}$$

et l'on retrouve un énoncé central de la théorie, à savoir le Théorème de représentation de Riesz.

11. Examen 6

Exercice 1. **(a)** Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\psi \geqslant 0$ et que $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)\, dy = 1$. Avec $\varepsilon > 0$ réel, on pose $\psi_\varepsilon(y) := \frac{1}{\varepsilon}\, \psi\big(\frac{y}{\varepsilon}\big)$. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, on a en tout point fixé $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f * \psi_\varepsilon(x) = f(x).$$

(b) Si f est de plus uniformément continue sur $\mathbb{R}$, montrer que la convergence est uniforme.
(c) On suppose à présent que $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Rappeler l'expression de la transformée de Fourier de $e^{-\pi\delta x^2}$ avec un paramètre réel $\delta > 0$, et en déduire que :

$$\mathscr{F}\big(e^{-ax^2}\big)(\xi) \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}},$$

où $a > 0$ est réel.
(d) En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\xi(x-y)}\, e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}}\, d\xi \;=\; \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon}\, e^{-\frac{2\pi^2}{\varepsilon^2}(x-y)^2}.$$

(e) En introduisant la fonction définie pour $z \in \mathbb{R}$ par :

$$\varphi_\varepsilon(z) \;:=\; \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon}\, e^{-\frac{2\pi^2 z^2}{\varepsilon^2}},$$

montrer, après avoir justifié l'existence de l'intégrale, que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}}\, d\xi \;=\; f * \varphi_\varepsilon(x).$$

(f) Déduire de ce qui précède la formule de type « inversion », valable pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$:

$$f(x) \;=\; \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}}\, d\xi \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Exercice 2. **[Non-surjectivité de la transformée de Fourier]** On a démontré en cours que la transformation de Fourier :

$$\mathscr{F}\colon \quad \Big(L^1(\mathbb{R}^d),\ \|\cdot\|_{L^1}\Big) \;\longrightarrow\; \Big(\mathscr{C}^0_{\underset{|\cdot| \longrightarrow \infty}{\longrightarrow 0}}(\mathbb{R}^d),\ \|\cdot\|_{\mathscr{C}^0}\Big),$$

de l'espace des fonctions Lebesgue-intégrables à valeurs dans l'espace des fonctions continues qui tendent vers zéro à l'infini, est une application linéaire continue *injective*.

L'objectif de cet exercice est de démontrer qu'elle n'est *pas* surjective.

On travaille ici en dimension $d = 1$, avec des fonctions à valeurs réelles.

(a) Trouver un exemple de fonction continue impaire positive $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ avec :

$$\lim_{|x| \to \infty} g(x) \;=\; 0,$$

telle que son intégrale sur $[1, \infty[$ avec poids $\frac{1}{x}$ diverge :

$$\infty = \lim_{\mathrm{R} \to \infty} \int_1^{\mathrm{R}} \frac{g(x)}{x}\, dx.$$

(b) Montrer que l'intégrale de Riemann généralisée :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt := \lim_{\mathrm{M} \to \infty} \int_0^{\mathrm{M}} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

existe (converge) ; on ne demande pas ici de la calculer exactement — elle vaut $\frac{\pi}{2}$ —, mais juste d'en démontrer la convergence.

(c) On suppose maintenant par l'absurde qu'il existe une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que :

$$\widehat{f} = g.$$

Soit la fonction :

$$F(t) := -i \big(f(t) - f(-t) \big).$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(x) = \int_0^{\infty} F(t) \sin \big(2\pi x t \big)\, dt.$$

Indication: Écrire $g(x) = \frac{1}{2} \big(g(x) - g(-x) \big)$.

(d) Montrer que l'on a pour tout $R \geqslant 1$:

$$\int_1^R \frac{g(x)}{x}\, dx = \int_0^{\infty} \bigg(\int_1^R \frac{\sin (2\pi x t)}{x} \bigg) F(t)\, dt.$$

(e) Conclure.

Exercice 3. [Diviseurs de zéro dans l'algèbre de convolution] Soient deux intervalles ouverts $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ d'intersection $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ vide. Toutes les fonctions seront à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(a) Utiliser deux fonctions non nulles $\varphi_1 \in \mathscr{C}_c^{\infty}(I_1)$, $\varphi_2 \in \mathscr{C}_c^{\infty}(I_2)$, pour construire deux fonctions $f_1, f_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ de l'espace de Schwartz satisfaisant $f_1 * f_2 = 0$, puis interpréter cette propriété. Indication: Utiliser la transformée de Fourier d'un produit de convolution.

(b) On introduit l'espace :

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) := \Big\{ f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable telle que } \textstyle\int_J |f| < \infty$$
$$\text{pour tout intervalle borné } J \subset \mathbb{R}, \ \text{ et telle que } f\big|_{]-\infty,\, 0[} \equiv 0 \Big\}.$$

Pour $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, montrer que $f * g(x) = 0$ lorsque $x < 0$, et, pour $x \geqslant 0$, que :

$$f * g(x) = \int_0^x f(y)\, g(x-y)\, dy.$$

(c) Montrer que $f * g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$.

(d) Soit maintenant $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ satisfaisant :

$$f * f = 0.$$

Pour tout réel $A > 0$ et tout entier $n \geqslant 1$, montrer que :

$$\bigg(\int_{-A}^{A} e^{nx}\, f(A-x)\, dx\bigg)^2 = \underbrace{\iint_{\substack{u \geqslant -A \\ v \geqslant -A \\ u+v \leqslant 0}} e^{n(u+v)}\, f(A-u)\, f(A-v)\, du\, dv}_{=:\, J_1} + \underbrace{+ \iint_{\substack{u \leqslant A \\ v \leqslant A \\ u+v \geqslant 0}} e^{n(u+v)}\, f(A-u)\, f(A-v)\, du\, dv.}_{=:\, J_2}$$

(e) Toujours avec $f * f = 0$, en posant $u = A - y$ et $v = A - x + y$, montrer que :

$$J_2 = \int_0^{2\,A} e^{n(2A-x)}\, (f*f)(x)\, dx = 0.$$

(f) Montrer qu'il existe une constante indépendante de n telle que :

$$\bigg|\int_0^A e^{nx}\, f(A-x)\, dx\bigg| \leqslant \mathsf{constante}_{f,A} \qquad (\forall\, n \geqslant 0).$$

(g) On admet maintenant qu'une fonction $g \in L^1([0,B])$, avec $B > 0$, qui satisfait $\big|\int_0^B e^{nt}\, g(t)\, dt\big| \leqslant$ constante pour tout $n \in \mathbb{N}$ est nécessairement nulle : $g = 0$ presque partout. Déduire de ce qui précède que $f = 0$.

(h) Soient maintenant $f, g \in \mathscr{C}^0_+(\mathbb{R}) := \big\{h \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})\colon h\big|_{]-\infty,0[} \equiv 0\big\}$ satisfaisant :

$$f * g = 0.$$

En posant $f_1(x) := x\, f(x)$ et $g_1(x) := x\, g(x)$, montrer que :

$$f * g_1 + f_1 * g = 0.$$

(i) Montrer que $f * g_1 = 0$. Indication: Calculer $(f * g_1) * (f * g_1)$.

(j) Montrer, pour $x \geqslant 0$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, que :

$$0 = \int_0^x f(x-y)\, y^n\, g(y)\, dy.$$

(k) Utiliser un théorème de densité pour montrer que :

$$0 = \int_0^x \big(f(x-y)\, g(y)\big)^2\, dy.$$

(l) Montrer que l'algèbre de convolution $\big(\mathscr{C}^0_+(\mathbb{R}),\, *\big)$ n'a pas de diviseur de zéro.

(m) Montrer que si $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ satisfont $f * g = 0$, alors $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 4. [Lemme de Fejér, sans indication] Soient deux fonctions définies sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, intégrable $f \in L^1(\mathbb{T})$, et essentiellement bornée $g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Montrer que :

$$\widehat{f}(0)\, \widehat{g}(0) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, g\big(n\,\theta\big)\, \frac{d\theta}{2\pi}.$$

12. Corrigé de l'examen 6

Exercice 1. (a) C'est une question de cours. Soit donc $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\psi \geqslant 0$ et que $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)\,dy = 1$, et, avec $\varepsilon > 0$, posons $\psi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}\,\psi\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$. Via le changement de variable $y := \frac{x}{\varepsilon}$, on a encore $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(x)\,dx$.

Étant donné une fonction quelconque $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, on calcule la différence à étudier en tout point fixé $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f * \psi_\varepsilon(x) - f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,\psi_\varepsilon(y)\,dy - f(x)\cdot 1 \\ &= \int_{\infty}^{\infty} \big(f(x-y) - f(x)\big)\,\psi_\varepsilon(y)\,dy. \end{aligned}$$

Maintenant, puisque f est continue en x :

$$\forall\,\delta > 0, \qquad \exists\,\upsilon = \upsilon(\delta) > 0, \qquad \Big(\big|(x-y) - x\big| \leqslant \upsilon \Longrightarrow \big|f(x-y) - f(x)\big| \leqslant \delta\Big).$$

En découpant alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{|y|\leqslant\upsilon} + \int_{|y|>\upsilon}$, on en déduit la majoration :

$$\big|f * \psi_\varepsilon(x) - f(x)\big| \leqslant \delta \underbrace{\int_{|y|\leqslant\upsilon} \psi_\varepsilon(y)\,dy}_{\leqslant \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon = 1} + 2\,\|f\|_{L^\infty} \int_{|y|>\upsilon} \psi_\varepsilon(y)\,dy.$$

Mais dans l'intégrale restante, en revenant à l'expression $\psi_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon}\,\psi\big(\frac{y}{\varepsilon}\big)$, on peut poser $x := \frac{y}{\varepsilon}$ et se ramener au majorant suivant :

$$\big|f * \psi_\varepsilon(x) - f(x)\big| \leqslant \delta + \int_{|x|>\frac{\upsilon}{\varepsilon}} \psi(x)\,dx,$$

dont le deuxième terme à droite tend vers zéro lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, puisque $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ par hypothèse, et puisque $\frac{\upsilon}{\varepsilon} \longrightarrow \infty$.

(b) Si f est de plus uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il est clair que le υ ci-dessus ne dépend pas de x, donc la convergence est uniforme.

(c) Le cours a montré que la transformée de Fourier de $e^{-\pi x^2}$ vaut $e^{-\pi\xi^2}$, et en a déduit par simple renormalisation que :

$$\widehat{e^{-\pi\delta x^2}}(\xi) \;=\; \mathscr{F}\big(e^{-\pi\delta x^2}\big)(\xi) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\delta}}\,e^{-\frac{\pi\xi^2}{\delta}},$$

d'où en posant $\delta := \frac{a}{\pi} > 0$ comme voulu :

$$\mathscr{F}\big(e^{-ax^2}\big)(\xi) \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}.$$

(d) Avec le changement de notation $\xi' := x - y$ et $x' := \xi$, l'intégrale à calculer devient :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2 \xi^2}{2}}\, e^{2i\pi\xi(x-y)}\, d\xi \,&=\, \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2 x'^2}{2}}\, e^{-2i\pi x'\xi'}\, dx' \\
\text{[Reconnaître } \mathscr{F}(\cdot)\text{]} \qquad &=\, \mathscr{F}\big(e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}\, x'^2}\big)(\xi') \\
\text{[Question (c)]} \qquad &=\, \sqrt{\frac{\pi}{\frac{\varepsilon^2}{2}}}\; e^{-\frac{\pi^2 \xi'^2}{\frac{\varepsilon^2}{2}}} \\
&=\, \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon}\, e^{-\frac{2\pi^2}{\varepsilon^2}\,(x-y)^2}.
\end{aligned}$$

(e) L'intégrale en question :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, e^{-\frac{\varepsilon^2 \xi^2}{2}}\, d\xi$$

existe bel et bien, puisque la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de toute fonction $f \in L^1$ est bornée et puisque le facteur exponentiel $e^{-\frac{\varepsilon^2 \xi^2}{2}}$ est à décroissante très rapide lorsque $|\xi| \longrightarrow \infty$, pourvu que $\varepsilon > 0$.

Pour la même raison, sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la fonction produit :

$$(y, \xi) \,\longmapsto\, f(y)\, e^{-\frac{\varepsilon^2 \xi^2}{2}} \,\in\, L^1\big(\mathbb{R} \times \mathbb{R}\big)$$

est intégrable. Ainsi, le théorème de Fubini-Tonelli nous permet d'échanger l'ordre des intégrations :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}\,\xi^2}\, d\xi \,&=\, \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\xi y}\, f(y)\, dy\, e^{2i\pi x\xi}\, e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}\,\xi^2}\, d\xi \\
&=\, \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dy \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}\,\xi^2}\, e^{2i\pi(x-y)\xi}\, d\xi\right) \\
\text{[Question (d)]} \qquad &=\, \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dy\, \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon}\, e^{-\frac{2\pi^2 (x-y)^2}{\varepsilon^2}} \\
&=\, \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, \varphi_\varepsilon(x-y)\, dy \\
&=\, f * \varphi_\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Notons au passage qu'avec la fonction :

$$\varphi(z) \,:=\, \sqrt{2\pi}\, e^{-2\pi^2 z^2},$$

ces fonctions $\varphi_\varepsilon(\cdot)$ avec $\varepsilon > 0$ en sont les renormalisées :

$$\varphi_\varepsilon(x-y) \,=\, \frac{1}{\varepsilon}\, \varphi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big),$$

et en utilisant la valeur $1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\, dx$ vue en cours, on vérifie aisément (exercice) que $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)\, dz$.

(f) Grâce à cette dernière observation, le résultat de la question **(a)** s'applique avec $\psi := \varphi$, et il offre en beauté la formule de type « inversion », valable pour $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap$

$L^1(\mathbb{R})$ en tout point $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \,=\, \lim_{\varepsilon \to 0} f * \varphi_\varepsilon(x) \,=\, \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, e^{-\frac{\varepsilon^2 \xi^2}{2}}\, d\xi.$$

Exercice 2. **(a)** Sur $\mathbb{R}$, on pense à la fonction réelle d'abord définie sur $\mathbb{R}_+$ et positive :

$$g(x) \,:=\, \begin{cases} x & \text{lorsque } \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{\log(e+x)} & \text{lorsque } \ x \geqslant 1, \end{cases}$$

puis prolongée par imparité à $\mathbb{R}_-$:

$$g(x) \,:=\, -\, g(-x) \qquad\qquad (\forall\, x \leqslant 0),$$

qui s'avère être continue sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $\mathrm{R} \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} \int_1^{\mathrm{R}} \frac{g(x)}{x}\, dx \,&=\, \int_1^{\mathrm{R}} \frac{1}{x \log(e+x)}\, dx \\ &\geqslant \int_1^{\mathrm{R}} \frac{1}{(e+x)\log(e+x)}\, dx \\ \text{[Primitive connue !]} \qquad &=\, \Big[\log\big(\log(e+x)\big) \Big]_1^{\mathrm{R}} \\ &=\, \log\big(\log(e+\mathrm{R})\big) - \log\big(\log(e+1)\big) \\ &\underset{\mathrm{R}\to\infty}{\longrightarrow}\, \infty. \end{aligned}$$

(b) Puisque $\frac{\sin t}{t} \sim \frac{t}{t} = 1$ en $t = 0$, ce qui montre la continuité sur $[0, \infty[$, donc la convergence de l'intégrale en 0, il s'agit d'établir la convergence en $+\infty$, donc d'après le critère de Cauchy, de montrer que :

$$0 \overset{?}{=} \lim_{\substack{\mathrm{M}\to\infty \\ \mathrm{N}\geqslant \mathrm{M}}} \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Posons :

$$m \,:=\, \inf\big\{k \in \mathbb{N} \colon\ \mathrm{M} \leqslant k\pi\big\} \qquad \text{et} \qquad n \,:=\, \sup\big\{k \in \mathbb{N} \colon\ k\pi \leqslant \mathrm{N}\big\},$$

d'où :

$$0 \,\leqslant\, m\pi - \mathrm{M} \,\leqslant\, \pi \qquad \text{et} \qquad 0 \,\leqslant\, \mathrm{N} - n\pi \,\leqslant\, \pi,$$

et décomposons :

$$\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \frac{\sin t}{t}\, dt \,=\, \int_{\mathrm{M}}^{m\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt + \int_{m\pi}^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt \,=\, \int_{n\pi}^{\mathrm{N}} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Ici, les intégrales 1 et 3 tendent vers 0 lorsque $\mathrm{N} \geqslant \mathrm{M} \longrightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \bigg| \int_{\mathrm{M}}^{m\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt \bigg| &\leqslant \int_{\mathrm{M}}^{m\pi} \frac{1}{t}\, dt \,\leqslant\, \frac{m\pi - \mathrm{M}}{\mathrm{M}} \,\leqslant\, \frac{\pi}{\mathrm{M}} \underset{\mathrm{M}\to\infty}{\longrightarrow} 0, \\ \bigg| \int_{n\pi}^{\mathrm{N}} \frac{\sin t}{t}\, dt \bigg| &\leqslant \int_{n\pi}^{\mathrm{N}} \frac{1}{t}\, dt \,\leqslant\, \frac{\mathrm{N} - n\pi}{n\pi} \,\leqslant\, \frac{\pi}{(\mathrm{N}-1)\pi} \underset{\mathrm{N}\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Quant à l'intégrale centrale, on peut réaliser qu'il ne faut *pas* passer aux valeurs absolues, car (exercice) :

$$\infty \,=\, \lim_{n\to\infty} \int_{m\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt \qquad\qquad (\forall\, m \in \mathbb{N}),$$

mais heureusement, la série numérique :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\,(k\pi+u)}{k\pi+u}\,du \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{k\pi+u}\,du}_{=:\,a_k}\end{aligned}$$

est *alternée :*

$$0\leqslant a_{k+1}\leqslant a_k, \qquad\qquad a_k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

donc convergente d'après un résultat connu, et enfin, le critère de Cauchy pour les séries numériques convergentes montre qu'on a bien :

$$0 = \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\geqslant m}}\sum_{k=m}^{n-1}(-1)^k\,a_k = \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\geqslant m}}\int_{m\pi}^{n\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

(c) Supposons donc qu'il existe une fonction $f\in L^1(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier $\widehat{f}=g$ est égale à une fonction g satisfaisant comme à la Question **(a)** :

$$\infty = \lim_{\mathrm{R}\to\infty}\int_1^{\mathrm{R}}\frac{g(x)}{x}\,dx,$$

et introduisons la fonction *impaire :*

$$F(t) := i\,\big(f(t)-f(-t)\big),$$

satisfaisant visiblement :

$$\|F\|_{L^1(\mathbb{R})}\leqslant 2\,\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}<\infty.$$

En écrivant comme indiqué $g(x)=\frac{1}{2}\big(g(x)-g(-x)\big)$, ce qui est vrai par imparité de g, il vient :

$$g(x) = \tfrac{1}{2}\,\widehat{f}(x)-\tfrac{1}{2}\,\widehat{f}(-x),$$

puis, en revenant à la définition de la transformée de Fourier, en écrivant $\int_{-\infty}^{\infty}=\int_{-\infty}^{0}+\int_0^{\infty}$, et en effectuant le changement de variable $t\longmapsto -t$ dans les intégrales 1 et 3, on obtient :

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}f(t)\,e^{-2i\pi xt}\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(t)\,e^{-2i\pi xt}\,dt- \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}f(t)\,e^{2i\pi xt}\,dt-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(t)\,e^{2i\pi xt}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(-t)\,e^{2i\pi xt}\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(t)\,e^{-2i\pi xt}\,dt- \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(-t)\,e^{-2i\pi xt}\,dt-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(t)\,e^{2i\pi xt}\,dt \\ \text{[Regrouper 4 et 2, puis 1 et 3]}\qquad &= -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(t)\,\big(e^{2i\pi xt}-e^{-2i\pi xt}\big)\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(-t)\,\big(e^{2i\pi xt}-e^{-2i\pi xt}\big)\,dt \\ &= -i\int_0^{\infty}f(t)\sin\big(2\pi xt\big)\,dt+i\int_0^{\infty}f(-t)\sin\big(2\pi xt\big)\,dt \\ &= \int_0^{\infty}-i\,\big(f(t)-f(-t)\big)\sin\big(2\pi xt\big)\,dt \\ &= \int_0^{\infty}F(t)\sin\big(2\pi xt\big)\,dt.\end{aligned}$$

(d) Pour $\mathrm{R} \geqslant 1$ fixé, la fonction définie sur $[1, R] \times [0, \infty[$ par :

$$(x, t) \longmapsto \frac{\sin(2\pi x t)}{x} F(t)$$

est intégrable, car $\frac{|\sin(2\pi x t)|}{x} \leqslant \frac{1}{1}$ est continue bornée, et car $F \in L^1(\mathbb{R})$ comme nous venons de l'observer, donc le théorème de Fubini-Tonelli permet d'intervertir les intégrations :

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{R}} \frac{g(x)}{x}\, dx &= \int_1^{\mathrm{R}} \left(\int_0^{\infty} F(t) \sin\big(2\pi x t\big)\, dt\right) \frac{dx}{x} \\ &= \int_0^{\infty} \left(\int_1^{\mathrm{R}} \frac{\sin(2\pi x t)}{x}\, dx\right) F(t)\, dt.\end{aligned}$$

(e) Grâce à la Question **(b)**, dont découle l'existence d'une constante $0 < C < \infty$ telle qu'on ait la majoration uniforme :

$$\left|\int_0^{\mathrm{S}} \frac{\sin y}{y}\, dy\right| \leqslant C \qquad\qquad (\forall\, \mathrm{s} \geqslant 0),$$

nous affirmons que l'intégrale intérieure $\int_1^{\mathrm{R}}$ obtenue à la fin de la Question **(d)** ci-dessus est alors bornée quel que soit $\mathrm{R} \geqslant 1$, grâce à la relation de Chasles $\int_1^{\mathrm{R}} = \int_0^{\mathrm{R}} - \int_0^1$ et à des changements de variables élémentaires du type $y = ax$ d'où $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$:

$$\begin{aligned}\left|\int_1^{\mathrm{R}} \frac{\sin(2\pi x t)}{x}\, dx\right| &= \left|\int_0^{\mathrm{R}} \frac{\sin(2\pi x t)}{x}\, dx - \int_0^1 \frac{\sin(2\pi x t)}{x}\, dx\right| \\ &\leqslant \left|\int_0^{2\pi t \mathrm{R}} \frac{\sin y}{y}\, dy\right| + \left|\int_0^{2\pi t} \frac{\sin y}{y}\, dy\right| \\ &\leqslant C + C.\end{aligned}$$

Ainsi en revenant au résultat de la Question **(a)** et en se souvenant que $F \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\infty \underset{\infty \leftarrow \mathrm{R}}{\longleftarrow} \int_1^{\mathrm{R}} \frac{g(x)}{x}\, dx \leqslant 2\,C \int_0^{\infty} \big|F(t)\big|\, dt = 2\,C\, \|F\|_{L^1} = \text{quantité bornée},$$

ce qui est très contradictoire avec une des vérités les plus fondamentales des mathématiques !

Exercice 3. **(a)** Soient deux intervalles ouverts $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ d'intersection $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ vide. Soient deux fonctions non nulles :

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\in \mathscr{C}_c^{\infty}(I_1) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}), \\ \varphi_2 &\in \mathscr{C}_c^{\infty}(I_2) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}),\end{aligned}$$

par exemple deux fonctions-plateaux égales à 1 sur deux intervalles fermés bornés non vides $\overline{J}_1 \subset I_1$ et $\overline{J}_2 \subset I_2$. Alors leurs transformées de Fourier inverses :

$$\begin{aligned}f_1(x) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\xi)\, e^{2i\pi x \xi}\, d\xi = \mathscr{F}^{-1}(\varphi_1)(x), \\ f_2(x) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(\xi)\, e^{2i\pi x \xi}\, d\xi = \mathscr{F}^{-1}(\varphi_2)(x),\end{aligned}$$

appartiennent à l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ et sont encore non nulles, puisque, d'après un théorème du cours, la transformée de Fourier $\mathscr{F}$ établit un *automorphisme* de l'espace de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (isométrique, qui plus est, pour la norme $L^2\big|_{\mathscr{S}(\mathbb{R})}$ induite). Donc inversement :

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \mathscr{F}(f_1) = \widehat{f_1},\\ \varphi_2 &= \mathscr{F}(f_2) = \widehat{f_2},\end{aligned}$$

et alors d'après un autre théorème du cours :

$$\begin{aligned}\widehat{f_1 * f_2} &= \widehat{f_1}\,\widehat{f_2}\\ &= \varphi_1\,\varphi_2\\ &\equiv 0,\end{aligned}$$

donc puisque la tranformée de Fourier est injective :

$$f_1 * f_2 = 0,$$

ce qui fait voir que l'algèbre de convolution $\big(L^1(\mathbb{R}),\,*\big)$ possède des diviseurs de zéro — propriété surprenante et quelque peu gênante qu'il va s'agir maintenant d'éviter en travaillant sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Soit donc l'espace des fonctions nulles sur la demi-droite négative $\mathbb{R}_-^*$ et localement intégrables sur la demi-droite réelle positive $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) := \Big\{ f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable telle que } {\textstyle\int_J} |f| \,<\, \infty \text{ pour tout intervalle borné } J \subset \mathbb{R},\\ \text{et telle que } f\big|_{]-\infty,0[} \equiv 0\Big\}.\end{aligned}$$

La convolée entre deux fonctions $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ est a priori définie comme :

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dx,$$

pourvu que cette intégrale converge en presque tout point $x \in \mathbb{R}$. En tout cas, comme $f(y) = 0$ pour $y < 0$ et comme $g(x-y) = 0$ pour $x - y < 0$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}$ porte en fait sur :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \,=\, 0 + \int_{\substack{y \geqslant 0\\ x-y \geqslant 0}}.$$

Ainsi, lorsque $x < 0$, la deuxième inégalité $x \geqslant y$ avec la première $y \geqslant 0$ donne l'ensemble vide :

$$f * g(x) \,=\, \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy \,=\, 0 + \int_{\emptyset} \,=\, 0,$$

et quand $x \geqslant 0$, il vient bien :

$$f * g(x) \,=\, \int_0^x f(y)\, g(x-y)\, dy,$$

la convergence étant garantie par l'hypothèse que $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, cette formule étant d'ailleurs invariante par le changement de variable $y \longmapsto x - y$ qui donne :

$$f * g(x) \,=\, \int_0^x f(x-y)\, g(y)\, dy \,=\, g * f(x).$$

(c) Il s'agit, pour tout intervalle borné $J \subset \mathbb{R}$, d'établir la finitude :

$$\int_J \big|f * g(x)\big|\, dx \,<\, \infty,$$

et plus généralement, pour tout réel $\mathrm{M} > 0$ (arbitrairement grand), disons avec $J \subset [-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$, d'estimer :

$$\begin{aligned}
\int_{-\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} \big|f * g(x)\big|\, dx \,&=\, \int_{0}^{\mathrm{M}} \big|f * g(x)\big|\, dx \\
&=\, \int_0^{\mathrm{M}} \bigg|\int_0^x f(y)\, g(x-y)\, dy\bigg|\, dx \\
&\leqslant\, \int_0^{\mathrm{M}} \int_0^{\mathrm{M}} |f(y)|\, |g(x-y)|\, dx\, dy \\
&=\, \int_0^{\mathrm{M}} |f(y)|\, dy \int_0^{\mathrm{M}} |g(x-y)|\, dx \\
&\leqslant\, \int_0^{\mathrm{M}} |f(y)|\, dy \int_{-\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} |g(z)|\, dz \\
&=\, \|f\|_{L^1[0,\mathrm{M}]} \cdot \|g\|_{L^1[-\mathrm{M},\mathrm{M}]} \\
&<\, \infty,
\end{aligned}$$

cette dernière finitude provenant du fait que $\int_E |f| < \infty$ et $\int_E |g| < \infty$, pour tout sous-ensemble mesurable *borné* $E \subset \mathbb{R}$.

(d) L'astuce consiste à écrire un carré d'intégrale comme produit d'intégrales dans deux variables distinctes, de manière à faire apparaître une intégrale double sur un domaine bidimensionnel :

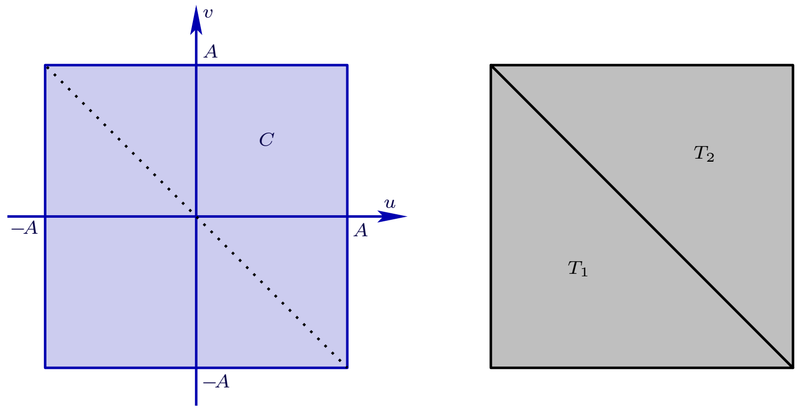
$$\begin{aligned}
\bigg(\int_{-A}^{A} e^{nx}\, f(A-x)\, dx\bigg)^2 \,&=\, \int_{-A}^{A} e^{nu}\, f(A-u)\, du \int_{-A}^{A} e^{nv}\, f(A-v)\, dv \\
&=\, \iint_{\substack{-A\leqslant u\leqslant A \\ -A\leqslant v\leqslant A}} e^{n(u+v)}\, f(A-u)\, f(A-v)\, dudv,
\end{aligned}$$

ici le simple carré :

$$C \,:=\, [-A, A] \times [-A, A] \,=\, T_1 \cup T_2,$$

que l'on décompose en deux triangles fermés presque disjoints :

$$\begin{aligned}
T_1 \,&=\, \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2\colon\; -A \leqslant u,\;\; -A \leqslant v,\;\; u+v \leqslant 0\big\}, \\
T_2 \,&=\, \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2\colon\; u \leqslant A,\;\; v \leqslant A,\;\; u+v \geqslant 0\big\}.
\end{aligned}$$



Ainsi :

$$\iint_C = \iint_{T_1} + \iint_{T_2},$$

ce qui correspond bien à :

$$J_1 \,=\, \iint_{\substack{-A \leqslant u \\ -A \leqslant v \\ u+v \leqslant 0}} e^{n(u+v)}\, f(A-u)\, f(A-v)\, du\, dv,$$

$$J_2 \,=\, \iint_{\substack{u \leqslant A \\ v \leqslant A \\ 0 \leqslant u+v}} e^{n(u+v)}\, f(A-u)\, f(A-v)\, du\, dv.$$

(e) Soit donc $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ satisfaisant $f * f = 0$. Dans cette deuxième intégrale J_2, sur le triangle T_2, on effectue le changement affine de variables :

$$x \,=\, 2\,A - (u+v), \qquad\qquad y \,=\, A-u,$$

d'inverse :

$$u \,=\, A-y, \qquad\qquad v \,=\, A-x+y,$$

lequel établit un difféomorphisme de :

$$T_2 \,=\, \big\{u \leqslant A, \quad v \leqslant A, \quad 0 \leqslant u+v\big\} \quad \text{d'où} \quad u+v \leqslant 2\,A,$$

sur le rectangle :

$$\begin{aligned} R \,&:=\, \big\{A-y \leqslant A, \quad A-x+y \leqslant A, \quad 0 \leqslant 2A-x, \quad 2A-x \leqslant 2A\big\} \\ &=\, \big\{0 \leqslant x \leqslant 2A, \quad 0 \leqslant y \leqslant x\big\}, \end{aligned}$$

et comme la valeur absolue du déterminant jacobien vaut 1 :

$$\mathsf{det}\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \,=\, \mathsf{det}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

la formule de changement de variables donne :

$$\begin{aligned}
J_2 &= \iint_{T_2} e^{n(u+v)}\, f(A-u)\, f(A-v)\, du\, dv \\
&= \iint_{R} e^{n(2A-x)}\, f(y)\, f(x-y)\, dx\, dy \\
&= \int_0^{2A} e^{n(2A-x)} \bigg(\int_0^x f(y)\, f(x-y)\, dy \bigg)\, dx \\
\text{[Question (b)]} \qquad &= \int_0^{2A} e^{n(2A-x)}\, \underline{f * f(x)}\, dx \\
\text{[Hypothèse]} \qquad &= 0.
\end{aligned}$$

(f) Ainsi, $J_2 = 0$ s'annule. Dans J_1, le facteur exponentiel $e^{n(u+v)} \leqslant 1$ est uniformément contrôlé, puisque $u + v \leqslant 0$, et on peut donc majorer de manière élémentaire par une constante indépendante de n :

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leqslant \int_{\substack{-A \leqslant u \\ -A \leqslant v \\ u+v \leqslant 0}} \big|f(A-u)\big| \cdot \big|f(A-v)\big|\, du\, dv \\
&\leqslant \int_{-A}^{A} f(A-u)\, du \int_{-A}^{A} f(A-v)\, dv \\
&= \|f\|_{L^1[0,2A]} \cdot \|f\|_{L^1[0,2A]} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

ce qui donne, en revenant à la Question **(d)** et en prenant une racine carrée :

$$\bigg| \int_{-A}^{A} e^{nx}\, f(A-x)\, dx \bigg| \leqslant \mathsf{constante}^1_{f,A}.$$

Pour terminer, la décomposition $\int_{-A}^{A} = \int_{-A}^{0} + \int_0^A$, en tenant à nouveau compte du fait que $e^{nx} \leqslant 1$ lorsque $x \leqslant 0$, donne :

$$\begin{aligned}
\bigg| \int_{-A}^{0} e^{nx}\, f(A-x)\, dx \bigg| &\leqslant \|f\|_{L^1[A,2A]} \\
&= \mathsf{constante}^2_{f,A},
\end{aligned}$$

d'où le résultat voulu par simple inégalité triangulaire :

$$\bigg| \int_{0}^{A} e^{nx}\, f(A-x)\, dx \bigg| \leqslant \mathsf{constante}^1_{f,A} + \mathsf{constante}^2_{f,A}.$$

(g) Puisqu'on admet que $\big| \int_0^B e^{nt}\, g(t)\, dt \big| \leqslant \mathsf{constante}$ offre $g = 0$, ici avec $g(x) := f(A-x)$ et $B := A$, il vient sans aucun effort $f = 0$.

En conclusion, dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, l'équation $f * f = 0$ n'est satisfaite que par $f = 0$.

(h) On travaille maintenant pour simplifier dans :

$$\mathscr{C}^0_+(\mathbb{R}) := \Big\{ h \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \colon\ h\big|_{]-\infty,0[} \equiv 0 \Big\},$$

au lieu de $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, et on étudie l'équation :

$$f * g = 0,$$

c'est-à-dire pour $f, g \in \mathscr{C}^0_+(\mathbb{R})$:

$$\int_0^x f(y)\, g(x-y)\, dy \,=\, 0 \qquad\qquad (\forall\, x \geqslant 0).$$

Soient donc $f_1(x) := x\, f(x)$ et $g_1(x) := x\, g(x)$. Un calcul (très) simple donne, pour $x \geqslant 0$ (sachant que pour $x < 0$, on a déjà vu que $f_1 * g(x) = 0 = f * g_1(x)$ pour des raisons de support) :

$$\begin{aligned} f_1 * g(x) + f * g_1(x) \,&=\, \int_0^x y\, f(y)\, g(x-y)\, dy + \int_0^x f(y)\, (x-y)\, g(x-y)\, dy \\ &=\, 0 + \int_0^x f(y)\, x\, g(x-y)\, dy \\ &=\, x \cdot f * g(x) \\ &=\, 0. \end{aligned}$$

(i) Comme on vient d'obtenir $f * g_1 = -\, f_1 * g$, on peut remplacer, utiliser le fait que le produit de convolution '$*$' est associatif et commutatif, pour calculer :

$$\begin{aligned} \big(f * g_1\big) * \big(f * g_1\big) \,&=\, -\, f * g_1 * f_1 * g \\ &=\, -\, \underline{f * g} * f_1 * g_1 \\ &=\, 0, \end{aligned}$$

et enfin, appliquer le résultat obtenu à la fin de la Question **(g)** à la fonction continue $h := f * g_1$ appartenant à $\mathscr{C}^0_+(\mathbb{R})$ pour atteindre :

$$f * g_1 \,=\, 0.$$

(j) Pour $n = 1$, comme $g_1(y) = y\, g(y)$, on vient d'obtenir :

$$0 \,=\, f * g_1(y) \,=\, \int_0^x f(x-y)\, y^1\, g(y)\, dy \qquad\qquad (\forall\, x \geqslant 0),$$

sachant que pour $x < 0$, cela est automatique, donc on a :

$$f * g \,=\, 0 \quad\Longrightarrow\quad f * g_1 \,=\, 0,$$

d'où par une récurrence instantanée :

$$\Longrightarrow \quad \cdots \quad \Longrightarrow \quad f * g_n \,=\, 0,$$

pour $g_n(y) := y^n g(y)$, avec $n \geqslant 1$ entier.

(k) D'après le théorème de Weierstrass, sur tout intervalle, les polynômes sont denses dans les fonctions continues pour la norme $\mathscr{C}^0$, donc on peut écrire :

$$f(x-y)\, g(y) \,=\, \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_k\, y^k,$$

la limite étant uniforme sur $[0, x]$, avec des constantes appropriées $a_k \in \mathbb{R}$.

Ensuite par linéarité, la Question **(j)** qui précède donne :

$$0 \,=\, \int_0^x f(x-y)\, \Big(a_0 + \cdots + a_n y^n\Big)\, g(y)\, dy,$$

et enfin en prenant la limite :

$$0 \,=\, \int_0^x \, \big(f(x-y)\,g(y)\big)^2\,dy.$$

(l) Comme f et g sont continues à valeurs dans $\mathbb{R}$, ceci implique, pour tout $0 \leqslant x$ et tout $0 \leqslant y \leqslant x$ que :

$$0 \,=\, f(x-y) \qquad\qquad \text{ou} \qquad\qquad 0 \,=\, g(y).$$

S'il existe $y \geqslant 0$ tel que $g(y) \neq 0$, alors $f(x-y) = 0$ pour tout $x \geqslant y$, c'est-à-dire $f(z) = 0$ pour tout $z \geqslant 0$, d'où $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

S'il existe $y \geqslant 0$ tel que $f(y) \neq 0$, le changement de variable $y \longmapsto x-y$ dans l'intégrale ci-dessus donne :

$$0 \,=\, \int_0^x \, \big(f(y)\,g(x-y)\big)^2\,dy,$$

ce qui implique similairement pour tout $0 \leqslant x$ et tout $0 \leqslant y \leqslant x$ que :

$$0 \,=\, f(y) \qquad\qquad \text{ou} \qquad\qquad 0 \,=\, g(x-y),$$

et le même raisonnement donne $g(z) \geqslant 0$ pour tout $z \geqslant 0$.

En conclusion, $f * g = 0$ pour $f, g \in \mathscr{C}^0_+(\mathbb{R})$ n'est possible que dans les deux cas triviaux où $f \equiv 0$, ou où $g \equiv 0$ — c'est chouette !

(m) Lorsque f et g ne sont qu'intégrables au sens de Lebesgue, la même démonstration fonctionne, à condition de se souvenir que le théorème de Weierstrass est vrai aussi sur tout intervalle pour la norme L^1.

Exercice 4. Commençons par démontrer que, pour tout polynôme trigonométrique $Q \in \mathbb{C}\big[e^{-i\theta}, e^{i\theta}\big]$ et toute fonction $g \in L^\infty(\mathbb{T})$, on a bien :

$$\widehat{Q}(0)\,\widehat{g}(0) \,=\, \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} Q(\theta)\,g(n\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi},$$

avant d'aller plus loin au moyen d'arguments de densité.

Si donc :

$$Q \,=\, \sum_{\text{finie}} a_k\,e^{ik\theta} \qquad\qquad (a_k \in \mathbb{C}),$$

par linéarité, il suffit même de démontrer cela pour une exponentielle individuelle $Q = e^{ik\theta}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Pour $k = 0$, on a $Q = 1$, d'où $\widehat{Q}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} Q(t) e^{-i0t}\,\frac{dt}{2\pi} = 1$, et on teste si :

$$\begin{aligned}
1 \cdot \widehat{g}(0) \,&\overset{?}{=}\, \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot g(n\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi} \\
&=\, \int_{-\pi n}^{n\pi} g(\theta)\,\frac{d\theta}{n\,2\pi} \\
&=\, \frac{1}{n}\left(\int_{-\pi n}^{-\pi n+2\pi} g(\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi} + \cdots + \int_{n\pi-2\pi}^{n\pi} g(\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}\right) \\
&=\, \frac{n}{n}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi} \\
&\underset{\textbf{oui}}{=}\, \widehat{g}(0).
\end{aligned}$$

Lorsque $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, vérifions la relation demandée en supposant d'abord que $g = h \in \mathscr{C}^2(\mathbb{T})$ est deux fois continûment dérivable.

Dans ce cas, puisque d'après un théorème du cours, l'inégalité obtenue en intégrant deux fois par parties :

$$\big|\widehat{h}(\ell)\big| \leqslant \frac{1}{\ell^2} \,\|h''\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{T})} \qquad\qquad (\forall\, \ell \in \mathbb{Z})$$

assure que h est *égale en tout point* à sa série de Fourier :

$$h(\theta) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\ell)\, e^{i\ell\theta} \qquad\qquad (\forall\, \theta \in \mathbb{T}),$$

on peut insérer :

$$h(n\theta) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\ell)\, e^{i\ell n\theta},$$

et intervertir :

$$\begin{aligned}
0 &\overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}\, h(n\theta)\, \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\ell)\, e^{i\ell n\theta} \right) \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\ell) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}\, e^{i\ell n\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi}}_{=0 \text{ quand } |n|\geqslant k+1 \text{ et } |\ell|\geqslant 1} \right] \\
\text{[Donc } \ell = 0\text{]} \qquad &= \lim_{n\to\infty} \left[\widehat{h}(0) \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi} \right] \\
&\underset{\textbf{oui}}{=} 0,
\end{aligned}$$

cette dernière annulation provenant de $k \neq 0$.

Si $g \in L^1(\mathbb{T})$, pour tout $\varepsilon > 0$, par densité de $\mathscr{C}^2(\mathbb{T})$ dans $L^1(\mathbb{T})$, et puisque $L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, il existe $h \in \mathscr{C}^2(\mathbb{T})$ telle que :

$$\|g - h\|_{L^1} \leqslant \varepsilon,$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} \big(g(n\theta) - h(n\theta) \big) \frac{d\theta}{2\pi} \right| &\leqslant \int_{-n\pi}^{n\pi} \big| g(\theta) - h(\theta) \big| \frac{d\theta}{n\, 2\pi} \\
&= \frac{n}{n} \,\|g - h\|_{L^1} \\
&\leqslant 1 \cdot \varepsilon,
\end{aligned}$$

et puisqu'on a aussi :

$$\begin{aligned}
\big| \widehat{g}(0) - \widehat{h}(0) \big| &\leqslant \|g - h\|_{L^1(\mathbb{T})} \\
&\leqslant \varepsilon,
\end{aligned}$$

le résultat montré à l'instant pour h est hérité par g, toujours avec $f = Q = e^{ik\theta}$:

$$\begin{aligned}\bigg|\widehat{e^{ik\cdot}}(0)\,\widehat{g}(0) - \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}\,g(n\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi} - \bigg(\widehat{e^{ik\cdot}}(0)\,\widehat{h}(0) - \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}\,h(n\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}\bigg)\bigg| &\leqslant \\ \leqslant\ \big|\widehat{e^{ik\cdot}}(0)\big|\cdot\big|\widehat{g}(0) - \widehat{h}(0)\big| + \bigg|\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}\,\big(-g(n\theta) + h(n\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}\bigg| & \\ \leqslant\ \varepsilon + \varepsilon, &\end{aligned}$$

donc ensuite par linéarité, pour tout polynôme trigonométrique $f = Q \in \mathbb{C}[e^{-i\theta}, e^{i\theta}]$.

Il reste seulement à faire voir que le résultat qui vient d'être démontré pour des polynômes trigonométriques quelconques se transmet à toutes les fonctions $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Évidemment, on approxime f en norme L^1 sur $\mathbb{T}$ à $\varepsilon > 0$ près par un polynôme trigonométrique $P_\varepsilon \in \mathbb{C}\big[e^{-i\theta}, e^{i\theta}\big]$:

$$\big|\big|f - P_\varepsilon\big|\big|_{L^1(\mathbb{T})} \leqslant \varepsilon,$$

par exemple en utilisant la suite des convolées de f avec le noyau de Fejér.

Si nous appliquons alors ce qui vient d'être démontré au polynôme trigonométrique $Q := P_\varepsilon$, il existe $\mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1$ tel que :

$$n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \implies \bigg|\widehat{P_\varepsilon}(0)\,\widehat{g}(0) - \int_{-\pi}^{\pi} P_\varepsilon(\theta)\,g(n\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}\bigg| \leqslant \varepsilon.$$

Commençons par l'inégalité simple :

$$\begin{aligned}\big|\widehat{g}(0)\big| &= \bigg|\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\,e^{-i0\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi}\bigg| \\ &\leqslant ||g||_{L^\infty(\mathbb{T})}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\frac{d\theta}{2\pi} \\ &= ||g||_{L^\infty(\mathbb{T})},\end{aligned}$$

suivie d'une autre presque aussi simple :

$$\begin{aligned}\big|\widehat{f}(0)\,\widehat{g}(0) - \widehat{P_\varepsilon}(0)\,\widehat{g}(0)\big| &= \Big|\big(\widehat{f}(0) - \widehat{P_\varepsilon}(0)\big)\,\widehat{g}(0)\Big| \\ &\leqslant \big|\big|f - P_\varepsilon\big|\big|_{L^1(\mathbb{T})}\,\big|\widehat{g}(0)\big| \\ &\leqslant \varepsilon\,||g||_{L^\infty(\mathbb{T})},\end{aligned}$$

et estimons enfin en insérant quatre termes de somme nulle, toujours pour $n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}\bigg|\widehat{f}(0)\,\widehat{g}(0) - \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,g(n\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}\bigg| &\leqslant \Big|\widehat{f}(0)\,\widehat{g}(0) - \widehat{P_\varepsilon}(0)\,\widehat{g}(0)\Big| + \bigg|\widehat{P_\varepsilon}(0)\,\widehat{g}(0) - \int_{-\pi}^{\pi} P_\varepsilon(\theta)\,g(n\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}\bigg| + \\ &\quad + \bigg|\int_{-\pi}^{\pi} P_\varepsilon(\theta)\,g(n\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,g(n\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}\bigg| \\ &\leqslant \varepsilon\cdot||g||_{L^\infty(\mathbb{T})} + \varepsilon + \big|\big|P_\varepsilon - f\big|\big|_{L^1(\mathbb{T})}\cdot||g||_{L^\infty(\mathbb{T})} \\ &\leqslant \varepsilon\Big(1 + 2\,||g||_{L^\infty(\mathbb{T})}\Big),\end{aligned}$$

ce qui achève le corrigé de ce bel examen !

13. Examen 7

Exercice 1. [Théorème de Fejér-Lebesgue] Étant donné une fonction $f \in L^1(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ intégrable sur le cercle et à valeurs finies, Lebesgue a démontré — résultat admis ici — que presque tout point $\theta \in \mathbb{T}$ est un *point de Lebesgue*, au sens où :

$$0 = \lim_{\delta \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{2\delta} \underbrace{\int_{|t-\theta| \leqslant \delta} \big| f(t) - f(\theta) \big| \, dt}_{= \int_{|t|\leqslant\delta} |f(\theta-t)-f(\theta)|\, dt} .$$

L'objectif de cet exercice est d'établir qu'en tout point de Lebesgue $\theta \in \mathbb{T}$, les sommes de Fejér convergent vers :

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(\theta) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\mathsf{F}_n * f)(\theta). \end{aligned}$$

On fixe donc un tel $\theta \in \mathbb{T}$, et on introduit :

$$\begin{aligned} \Phi(\delta) &:= \int_{|t-\theta|\leqslant\delta} \big| f(t) - f(\theta) \big| \, dt = \int_{|t|\leqslant\delta} \big| f(\theta - t) - f(\theta) \big| \, dt, \\ \Phi^-(\delta) &:= \int_{\theta}^{\theta+\delta} \big| f(t) - f(\theta) \big| \, dt = \int_{-\delta}^{0} \big| f(\theta - t) - f(\theta) \big| \, dt, \\ \Phi^+(\delta) &:= \int_{\theta-\delta}^{\theta} \big| f(t) - f(\theta) \big| \, dt = \int_{0}^{\delta} \big| f(\theta - t) - f(\theta) \big| \, dt. \end{aligned}$$

(a) Vérifier que $\Phi(\delta) = \mathrm{o}(\delta)$, et montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$0 \leqslant \Phi(\delta),\ \Phi^-(\delta),\ \Phi^+(\delta) \leqslant \varepsilon\,\delta \qquad\qquad (\forall\, 0 \leqslant \delta \leqslant \delta(\varepsilon)).$$

(b) Rappeler l'expression explicite du noyau de Fejér $\mathsf{F}_n(t)$ pour $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$, ainsi que la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{F}_n(t) \, \frac{dt}{2\pi}$.

(c) Sachant que $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n^{1/4}}$ pout tout entier $n \geqslant 2$, on découpe en trois morceaux :

$$\begin{aligned} \big| \mathsf{F}_n * f(\theta) - f(\theta) \big| &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{F}_n(t) \, \big| f(\theta - t) - f(\theta) \big| \, \frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_{0 \leqslant |t| \leqslant \frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n} \leqslant |t| \leqslant \frac{1}{n^{1/4}}} + \int_{\frac{1}{n^{1/4}} \leqslant |t| \leqslant \pi} \\ &=: I_1(n) + I_2(n) + I_3(n). \end{aligned}$$

En s'inspirant de l'indication qui n'apparaît qu'à la page suivante, montrer que :

$$I_3(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Indication: Pour $0 < \eta < \pi$, utiliser l'inégalité vue en cours :

$$\frac{1}{(\sin\frac{t}{2})^2} \leqslant \frac{1}{(\sin\frac{\eta}{2})^2} \qquad (\forall\, \eta \leqslant |t| \leqslant \pi),$$

ainsi que l'inégalité $\left|\sin\frac{t}{2}\right| \geqslant \frac{|t|}{\pi}$, valable pour tout $0 \leqslant |t| \leqslant \pi$.

(d) Montrer que pour tout $0 \leqslant |t| \leqslant \pi$:

$$0 \leqslant \mathsf{F}_n(t) \leqslant \frac{\pi^2}{4}\, n.$$

(e) Montrer que :

$$I_1(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(f) Montrer que :

$$\begin{aligned} I_2(n) &\leqslant \frac{\pi}{2n}\int_{-\frac{1}{n^{1/4}}}^{-\frac{1}{n}} \frac{|f(\theta-t)-f(\theta)|}{t^2}\,dt + \frac{\pi}{2n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^{1/4}}} \frac{|f(\theta-t)-f(\theta)|}{t^2}\,dt \\ &=: I_2^-(n) + I_2^+(n). \end{aligned}$$

(g) Il s'agit d'atteindre $\lim_{n\to\infty} I_2^-(n) = 0 = \lim_{n\to\infty} I_2^+(n)$. Les deux cas étant similaires, traiter seulement $I_2^+(n)$, et conclure. Indication: Effectuer une intégration par parties.

Exercice 2. [Lemme de Kirszbraun] Soit E un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_E = \langle\cdot,\cdot\rangle$ d'où dérive la norme $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|$. On suppose :

$$1 \leqslant \dim E < \infty.$$

En tout point $c \in E$, pour tout rayon $s > 0$, soient les boules ouvertes :

$$B(c,s) := \big\{x \in E\colon\ \|x-c\| < s\big\}.$$

Soit un entier $\mathrm{I} \geqslant 1$, soient des points $a_1,\dots,a_{\mathrm{I}} \in E$, et soient des rayons $r_1,\dots,r_{\mathrm{I}} > 0$. Sous l'hypothèse principale que les boules ouvertes correspondantes sont d'intersection non vide :

$$\emptyset \neq \bigcap_{1\leqslant i\leqslant \mathrm{I}} B(a_i,r_i),$$

l'objectif de cet exercice est d'établir que pour tout autre choix de points $b_1,\dots,b_{\mathrm{I}} \in E$ satisfaisant :

$$\big\|b_{i_1}-b_{i_2}\big\| \leqslant \big\|a_{i_1}-a_{i_2}\big\| \qquad (1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant \mathrm{I}),$$

on a encore la non-vacuité de l'intersection des boules ouvertes :

$$\emptyset \neq \bigcap_{1\leqslant i\leqslant \mathrm{I}} B(b_i,r_i).$$

(a) Montrer qu'il existe (au moins) un point $p \in \bigcap_{1\leqslant i\leqslant \mathrm{I}} B(a_i,r_i)$ tel que :

$$p \neq a_1,\ \dots\dots,\ p \neq a_{\mathrm{I}}.$$

(b) On fixe un point :

$$p \in \bigcap_{1\leqslant i\leqslant \mathrm{I}} B(a_i,r_i)\Big\backslash\big\{a_1,\dots,a_{\mathrm{I}}\big\}$$

dans cette intersection qui est distinct de tous les a_i, et on introduit la fonction :

$$\Phi\colon \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \max\limits_{1\leqslant i\leqslant \mathrm{I}} \dfrac{\|x-b_i\|}{\|p-a_i\|}. \end{array}$$

Montrer qu'il suffit d'établir l'existence d'un point $q \in E$ en lequel :

$$\Phi(q) \leqslant 1.$$

(c) On raisonne alors par l'absurde en supposant que $\Phi(x) > 1$ pour tout $x \in E$. Montrer qu'il existe (au moins) un point $q \in E$ en lequel Φ est minimale :

$$\Phi(q) = \inf_{x\in E} \Phi(x).$$

(d) Puisque le raisonnement par l'absurde se poursuit, on a $\Phi(q) > 1$. Montrer qu'on peut supposer, pour un certain entier $1 \leqslant \mathrm{K} \leqslant \mathrm{I}$, que :

$$\begin{aligned} \big\|q-b_i\big\| &= \Phi(q)\,\big\|p-a_i\big\| && (\forall\, 1\leqslant i\leqslant \mathrm{K}), \\ \big\|q-b_i\big\| &< \Phi(q)\,\big\|p-a_i\big\| && (\forall\, \mathrm{K}{+}1\leqslant i\leqslant \mathrm{I}). \end{aligned}$$

(e) On introduit maintenant l'enveloppe convexe fermée des points $b_1, \dots, b_{\mathrm{K}}$:

$$\mathscr{C} := \big\{c = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_{\mathrm{K}} b_{\mathrm{K}} \in E\colon\; 0 \leqslant \lambda_1, \dots, \lambda_{\mathrm{K}} \leqslant 1,\; \lambda_1 + \cdots + \lambda_{\mathrm{K}} = 1\big\}.$$

Montrer que $q \in \mathscr{C}$. Indication: Introduire le projeté orthogonal $\pi_{\mathscr{C}}(q)$ de q sur $\mathscr{C}$, supposer en raisonnant par contradiction que $q \neq \pi_{\mathscr{C}}(q)$, et analyser le comportement de la fonction Φ en des points de la forme :

$$q_t := q + t\,\big(\pi_{\mathscr{C}}(q) - q\big),$$

pour $0 < t$ petit. Notamment, on pourra établir, pour $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{K}$, la formule utile :

$$\big\|q_t - b_i\big\|^2 = \big\|q-b_i\big\|^2 + 2t\,\Big[-\,\big\|\pi_{\mathscr{C}}(q)-q\big\|^2 + \big\langle \pi_{\mathscr{C}}(q)-b_i,\, \pi_{\mathscr{C}}(q)-q\big\rangle\Big] + t^2\,\big\|\pi_{\mathscr{C}}(q)-q\big\|^2.$$

(f) Pour tout $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{K}$, on pose :

$$e_i := q - b_i \qquad \text{et} \qquad d_i := p - a_i.$$

Montrer que pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant \mathrm{K}$, on a :

$$\langle e_i, e_j\rangle > \langle d_i, d_j\rangle.$$

(g) Si $q \in \mathscr{C}$ s'écrit $q = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_{\mathrm{K}} b_{\mathrm{K}}$ avec certains $0 \leqslant \lambda_1, \dots, \lambda_{\mathrm{K}} \leqslant 1$ de somme $1 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{\mathrm{K}}$, montrer que :

$$\big\|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{\mathrm{K}} e_{\mathrm{K}}\big\|^2 > \big\|\lambda_1 d_1 + \cdots + \lambda_{\mathrm{K}} d_{\mathrm{K}}\big\|^2,$$

et conclure.

Exercice 3. [Transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz] Pour $x \in \mathbb{R}$, le *sinus hyperbolique* et le *cosinus hyperbolique* sont définis par :

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

L'objectif de cet exercice est de calculer explicitement la transformée de Fourier de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{x}{\sinh x},$$

prenant bien entendu la valeur 1 en $x = 0$.

(a) Montrer que :

$$\frac{\sinh x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

(b) Montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{x}{\sinh x}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Pour tout entier $k \geqslant 0$, montrer qu'il existe des polynômes $P_{k,j}(x) \in \mathbb{Q}[x]$ pour $-k \leqslant j \leqslant k$, tels que :

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{x}{\sinh x}\right) = \frac{\sum_{-k \leqslant j \leqslant k} e^{jx}\, P_{k,j}(x)}{(\sinh x)^{k+1}}.$$

(d) Montrer que $x \longmapsto \frac{x}{\sinh x}$ appartient à l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

(e) Montrer, pour tout nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} \lambda < 0$, que :

$$\int_0^\infty x\, e^{\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda^2}.$$

(f) On introduit la suite de fonctions $\big(h_{\rm N}(x)\big)_{\rm N=1}^{\infty}$ définie, avec $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, par :

$$h_{\rm N}(x) := \sum_{n=0}^{\rm N-1} x \cos\big(2\pi\xi\, x\big)\, e^{-(1+2n)x}.$$

Montrer que :

$$\int_0^\infty \Big(\lim_{\rm N \to \infty} h_{\rm N}(x)\Big)\, dx = \lim_{\rm N\to\infty} \int_0^\infty h_{\rm N}(x)\, dx.$$

(g) Montrer que la transformée de Fourier $\widehat{f}(\xi)$ de la fonction $f(x) := \frac{x}{\sinh x}$ vaut :

$$\widehat{f}(\xi) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 - (2\pi\xi)^2}{\big((2n+1)^2 + (2\pi\xi)^2\big)^2}.$$

Exercice 4. [Non-dérivabilité optimale de la fonction de Weierstrass] Soit un réel $b > 1$, et soit une fonction :

$$v \in \mathscr{C}_c^\infty\big(\big]\tfrac{1}{b},\, b\big[,\ \mathbb{R}_+\big),$$

indéfiniment dérivable à support compact dans un intervalle contenant $\{1\}$, avec :

$$v(1) = 1.$$

(a) Montrer qu'il existe une fonction $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ dans l'espace de Schwartz telle que $\widehat{u} = v$, où, pour $\tau \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{u}(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} u(y)\, e^{-2i\pi\tau\, y}\, dy.$$

(b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\big(b^k(x-\xi)\big)\, dx = \frac{\widehat{u}(0)}{b^k}.$$

(c) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, on a :

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\xi)\, u\big(b^k(x-\xi)\big)\, dx.$$

(d) Soit maintenant une fonction continue bornée $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dont on suppose qu'elle est dérivable en un certain point $\xi \in \mathbb{R}$, sans rien supposer d'autre. On considère un développement de Taylor de f à l'ordre 1 en ξ :

$$f(x) \,=\, f(\xi) + f'(\xi)\,(x-\xi) + R(x,\xi),$$

avec un reste $R(x,\xi)$ petit exprimant que f est dérivable en ξ :

$$R(x,\xi) \,=\, \mathrm{o}\big(|x-\xi|\big).$$

Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, que l'on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, u\big(b^k(x-\xi)\big)\, dx \,=\, \int_{-\infty}^{\infty} R(x,\xi)\, u\big(b^k(x-\xi)\big)\, dx.$$

(e) Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$\bigg| \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} R(x,\xi)\, u\big(b^k(x-\xi)\big) \bigg| \,\leqslant\, \frac{\varepsilon}{b^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} |y|\, \big|u(y)\big|\, dy.$$

(f) La norme $\mathscr{C}^0$ étant définie par $\|h\|_{\mathscr{C}^0} := \mathsf{sup}_{y\in\mathbb{R}}\, |h(y)|$, montrer que l'on a :

$$\bigg|\bigg[\int_{-\infty}^{\xi-\delta} + \int_{\xi+\delta}^{\infty}\bigg] R(x,\xi)\, u\big(b^k(x-\xi)\big)\, dx\bigg| \,\leqslant\, \frac{\|y^3\, u(y)\|_{\mathscr{C}^0}}{b^{3k}} \bigg[\int_{-\infty}^{\xi-\delta} + \int_{\xi+\delta}^{\infty}\bigg] \frac{|R(x,\xi)|}{|x-\xi|^3}\, dx.$$

(g) Établir le *Lemme de Freud*, d'après lequel, si f est dérivable en ξ :

$$0 \,=\, \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b^{2k}\, f(x)\, u\big(b^k(x-\xi)\big)\, dx.$$

(h) Soit à présent un autre nombre réel $0 < a < 1$. On suppose que $ab \geqslant 1$, et on introduit la *fonction de Weierstrass :*

$$\begin{aligned} f(x) \,&:=\, 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos\big(2\pi b^n\, x\big) \\ &=\, \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(e^{2i\pi b^n\, x} + e^{-2i\pi b^n\, x}\right). \end{aligned}$$

Si $\xi \in \mathbb{R}$ est un nombre réel quelconque fixé, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, u\big(b^k(x-\xi)\big)\, dx \,=\, \frac{a^k}{b^k}\, e^{-2i\pi b^k\, \xi}.$$

(i) En déduire que f n'est dérivable en *aucun* point $\xi \in \mathbb{R}$.

14. Corrigé de l'examen 7

Exercice 1. **(a)** L'hypothèse $0 = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta}\, \Phi(\delta)$ signifie précisément que :

$$\Phi(\delta) \,=\, \mathrm{o}(\delta),$$

et comme :

$$0 \,\leqslant\, \Phi(\delta) \,=\, \Phi^-(\delta) + \Phi^+(\delta),$$

tous trois étant positifs, on a aussi :

$$\Phi^-(\delta) \,=\, \mathrm{o}(\delta) \,=\, \Phi^+(\delta),$$

et ce qui est demandé exprime rigoureusement le « $\mathrm{o}(\delta)$ » en question.

(b) Pour qui n'a pas fait l'impasse sur l'apprentissage de son cours :

$$\mathsf{F}_n(t) \,=\, \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \,\geqslant\, 0 \qquad\qquad (0<|t|\leqslant\pi),$$

avec $\mathsf{F}_n(0) = n$, et on a $1 = \int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{F}_n(t)\, \frac{dt}{2\pi}$.

(c) Avec $\eta := \frac{1}{n^{1/4}}$, pour tout $\frac{1}{n^{1/4}} \leqslant |t| \leqslant \pi$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\sin\frac{t}{2})^2} &\leqslant \frac{1}{(\sin\frac{\eta}{2})^2} \\
&\leqslant \frac{\pi^2}{\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)^2},
\end{aligned}$$

d'où l'estimation-majoration :

$$\begin{aligned}
I_3(n) &= \int_{\frac{1}{n^{1/4}}\leqslant|t|\leqslant\pi} \mathsf{F}_n(t)\, \big|f(\theta-t)-f(\theta)\big|\, \frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_{\frac{1}{n^{1/4}}\leqslant|t|\leqslant\pi} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^2 \frac{1}{(\sin\frac{t}{2})^2}\, \big|f(\theta-t)-f(\theta)\big|\, \frac{dt}{2\pi} \\
&\leqslant \int_{\frac{1}{n^{1/4}}\leqslant|t|\leqslant\pi} \frac{1}{n}\, 1^2\, \pi^2\, n^{1/2}\, \big|f(\theta-t)-f(\theta)\big|\, \frac{dt}{2\pi} \\
&\leqslant \frac{\pi^2}{n^{1/2}}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, \frac{dt}{2\pi} + |f(\theta)| \int_{-\pi}^{\pi} 1\, \frac{dt}{2\pi}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{\sqrt{n}}\, \mathsf{constante} \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

(d) On majore en effet, grâce à $|\mathsf{sin}\, u| \leqslant |u|$ et à $\frac{1}{(\mathsf{sin}\,\frac{t}{2})^2} \leqslant \frac{\pi^2}{t^2}$:

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \mathsf{F}_n(t) &= \frac{1}{n}\,\frac{(\mathsf{sin}\,\frac{nt}{2})^2}{(\mathsf{sin}\,\frac{t}{2})^2} \\
&\leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{nt}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{t^2} \\
&= \frac{\pi^2}{4}\,n.
\end{aligned}
$$

(e) Grâce à la majoration élémentaire obtenue à l'instant pour $\mathsf{F}_n(t)$, et grâce au fait que θ est un point de Lebesgue, on majore en effet :

$$
\begin{aligned}
I_1(n) &= \int_{|t|\leqslant\frac{1}{n}} \mathsf{F}_n(t)\,\big|f(\theta-t)-f(\theta)\big|\,\frac{dt}{2\pi} \\
&\leqslant n\,\frac{\pi^2}{4}\int_{|t|\leqslant\frac{1}{n}} \big|f(\theta-t)-f(\theta)\big|\,\frac{dt}{2\pi} \\
&= \frac{\pi^2}{4}\,n\,\Phi\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

(f) La majoration valable pour $0 < t \leqslant \pi$:

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \mathsf{F}_n(t) &\leqslant \frac{1}{n}\,\frac{1^2}{(\mathsf{sin}\,\frac{t}{2})^2} \\
&\leqslant \frac{1}{n}\,\frac{\pi^2}{t^2}
\end{aligned}
$$

permet en effet d'obtenir :

$$
\begin{aligned}
I_2(n) &= \int_{-\frac{1}{n^{1/4}}}^{-\frac{1}{n}} \mathsf{F}_n(t)\,\big|f(\theta-t)-f(\theta)\big|\,\frac{dt}{2\pi} + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^{1/4}}} \mathsf{F}_n(t)\,\big|f(\theta-t)-f(\theta)\big|\,\frac{dt}{2\pi} \\
&\leqslant \int_{-\frac{1}{n^{1/4}}}^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{n}\,\frac{\pi^2}{t^2}\,\big|f(\theta-t)-f(\theta)\big|\,\frac{dt}{2\pi} + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^{1/4}}} \frac{1}{n}\,\frac{\pi^2}{t^2}\,\big|f(\theta-t)-f(\theta)\big|\,\frac{dt}{2\pi},
\end{aligned}
$$

et après réorganisation visuelle, c'est le résultat demandé.

(g) La fonction $\Phi^+(t)$ étant manifestement une primitive :

$$
0 \leqslant \Phi^+(t) = \int_0^t \big|f(\theta-u)-f(\theta)\big|\,du,
$$

on peut effectivement l'utiliser pour intégrer par parties :

$$\begin{aligned} I_2^+(n) &= \frac{\pi}{2n}\left[\frac{\Phi^+(t)}{t^2}\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^{1/4}}} + \frac{\pi}{2n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^{1/4}}} \Phi^+(t)\,\frac{2}{t^3}\,dt \\ &= \frac{\pi}{2n}\,\frac{\Phi^+\big(\frac{1}{n^{1/4}}\big)}{\big(\frac{1}{n^{1/4}}\big)^2} - \frac{\pi}{2n}\,\frac{\Phi^+\big(\frac{1}{n}\big)}{\big(\frac{1}{n}\big)^2} + \frac{\pi}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^{1/4}}} \frac{\Phi^+(t)}{t^3}\,dt \\ &= \frac{\pi}{2\,n^{3/4}}\,\underbrace{n^{1/4}\,\Phi^+\bigg(\frac{1}{n^{1/4}}\bigg)}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0} - \frac{\pi}{2}\,\underbrace{n\,\Phi^+\bigg(\frac{1}{n}\bigg)}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0} + \frac{\pi}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^{1/4}}} \frac{\Phi^+(t)}{t^3}\,dt, \end{aligned}$$

le premier terme et le deuxième terme ayant 0 pour limite, d'après le résultat $\Phi^+(\delta) = \mathrm{o}(\delta)$ de la question **(a)** qui équivaut à :

$$0 \;=\; \lim_{\delta\to\infty} \frac{1}{\delta}\,\Phi^+(\delta).$$

Quant au troisième et dernier terme, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ de la forme :

$$\delta(\varepsilon) \;=\; \frac{1}{\mathrm{N}(\varepsilon)^{\frac{1}{4}}},$$

avec $\mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1$ entier tel que :

$$0 \;\leqslant\; \Phi^+(t) \;\leqslant\; \varepsilon\, t \qquad\qquad (\forall\, 0 \leqslant t \leqslant \mathrm{N}(\varepsilon)^{-\frac{1}{4}}).$$

Alors pour tout $n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)$, en utilisant :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^{1/4}}} \frac{\Phi^+(t)}{t^3}\,dt &\leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^{1/4}}} \frac{\varepsilon\, t}{t^3}\,dt \\ &= \varepsilon\,\big(n - n^{1/4}\big), \end{aligned}$$

on peut estimer :

$$I_2^+(n) \;\leqslant\; \frac{\pi}{2\,n^{3/4}}\,\underbrace{n^{1/4}\,\Phi^+\bigg(\frac{1}{n^{1/4}}\bigg)}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0} - \frac{\pi}{2}\,\underbrace{n\,\Phi^+\bigg(\frac{1}{n}\bigg)}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0} + \frac{\pi}{n}\,\varepsilon\,\big(n - n^{1/4}\big),$$

le dernier terme étant majoré par $\varepsilon\,\pi$, ce qui termine le travail.

Exercice 2. (a) Puisque l'intersection de ces boules ouvertes est un ouvert non vide de $E \cong \mathbb{R}^{\dim E}$, éviter le nombre fini $\leqslant \mathrm{I}$ des points constituant l'ensemble $\{a_1, \dots, a_{\mathrm{I}}\}$ en restant dans cet ouvert est aisé.

(b) En effet, si l'on disposait d'un tel point q, alors il viendrait :

$$\begin{aligned} \big\|q - b_i\big\| &\leqslant \big\|p - a_i\big\| \\ &< r_i \end{aligned} \qquad\qquad (1 \leqslant i \leqslant \mathrm{I}),$$

donc q serait dans chaque boule ouverte $B(b_i, r_i)$, et ainsi, l'objectif se réaliserait :

$$\emptyset \;\neq\; \{q\} \;\subset\; \bigcap_{1\leqslant i\leqslant \mathrm{I}} B(b_i, r_i).$$

(c) Comme maximum de I fonctions continues, la fonction Φ est continue sur E. Clairement, elle tend vers l'infini lorsque $\|x\| \longrightarrow \infty$. Comme $E \cong \mathbb{R}^{\dim E}$ est de dimension finie, donc localement compact (complet), Φ atteint son infimum en au moins un point.

(d) En effet, par construction :

$$\Phi(q) \,=\, \max_{1 \leqslant i \leqslant \mathrm{I}} \frac{\|q-b_i\|}{\|p-a_i\|},$$

et si ce maximum est atteint pour un certain nombre $\mathrm{K} \geqslant 1$ d'indices i, il suffit de renuméroter l'ensemble pour les placer tous en premier (ce qui ne change rien aux données du problème).

(e) Nous allons faire voir que Φ décroît localement le long du segment $\big[q, \pi_{\mathscr{C}}(q)\big]$, en partant de q :

$$\Phi(q) \,>\, \Phi\big(q_t\big) \qquad\qquad (0 < t \text{ petit}),$$

ce qui contredira le fait que q est un point où Φ atteint son minimum.

En effet, comme pour tout $\mathrm{K}+1 \leqslant i \leqslant \mathrm{I}$, on a :

$$\frac{\|q-b_i\|}{\|p-a_i\|} \,<\, \Phi(q),$$

la continuité de $t \longmapsto q_t$ assure qu'on a encore :

$$\frac{\|q_t-b_i\|}{\|p-a_i\|} \,<\, \Phi(q) \qquad\qquad (\forall\, 0 \leqslant t \text{ petit},\ \mathrm{K}+1 \leqslant i \leqslant \mathrm{I}).$$

Ensuite, pour les autres indices $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{K}$, développons le carré :

$$\begin{aligned} \big\|q_t-b_i\big\|^2 \,&=\, \Big\|(q-b_i) + \big(t\,(\pi_{\mathscr{C}}(q)-q)\big)\Big\|^2 \\ &=\, \big\|q-b_i\big\|^2 + 2t\,\big\langle q-b_i,\, \pi_{\mathscr{C}}(q)-q\big\rangle + t^2\,\big\|\pi_{\mathscr{C}}(q)-q\big\|^2. \end{aligned}$$

Insérons au centre $q-b_i = q - \pi_{\mathscr{C}}(q) + \pi_{\mathscr{C}}(q) - b_i$:

$$\begin{aligned} \big\|q_t-b_i\big\|^2 \,&=\, \big\|q-b_i\big\|^2 + 2t\,\big\langle q-\pi_{\mathscr{C}}(q)+\pi_{\mathscr{C}}(q)-b_i,\ \pi_{\mathscr{C}}(q)-q\big\rangle + t^2\,\big\|\pi_{\mathscr{C}}(q)-q\big\|^2 \\ &=\, \big\|q-b_i\big\|^2 + 2t\,\Big[\underbrace{-\big\|\pi_{\mathscr{C}}(q)-q\big\|^2}_{<\,0} + \underbrace{\big\langle \pi_{\mathscr{C}}(q)-b_i,\, \pi_{\mathscr{C}}(q)-q\big\rangle}_{\leqslant\,0}\Big] + t^2\,\big\|\pi_{\mathscr{C}}(q)-q\big\|^2. \end{aligned}$$

Or, rappelons-nous que le projeté orthogonal d'un point sur un convexe fermé satisfait :

$$\big\langle \pi_{\mathscr{C}}(q)-c,\, \pi_{\mathscr{C}}(q)-q\big\rangle \,\leqslant\, 0 \qquad\qquad (\forall\, c \in \mathscr{C}).$$

Comme $\alpha + 2t\,\beta + \gamma\, t^2 \sim \alpha + 2t\,\beta < \alpha$ lorsque $\beta < 0$ pour $0 < t$ assez petit, il vient :

$$\big\|q_t-b_i\big\| \,<\, \big\|q-b_i\big\| \qquad\qquad (0 < t \text{ petit},\ 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{K}),$$

et donc, en tenant compte d'une inégalité valable pour $\mathrm{K}+1 \leqslant i \leqslant \mathrm{I}$ vue il y a un instant, toujours pour $t > 0$ petit, on aboutit à une inégalité :

$$\Phi\big(q_t\big) \,=\, \max_{1 \leqslant i \leqslant \mathrm{I}} \frac{\|q_t-b_i\|}{\|p-a_i\|} \,<\, \max_{1 \leqslant i \leqslant \mathrm{I}} \frac{\|q-b_i\|}{\|p-a_i\|} \,=\, \Phi(q),$$

qui contredit avec effronterie le choix de q !

(f) Tout d'abord, on a par hypothèse pour $1 \leqslant i, j \leqslant \mathrm{K}$:

$$\big\|e_i-e_j\big\| \,=\, \big\|-b_i+b_j\big\| \,\leqslant\, \big\|-a_i+a_j\big\| \,=\, \big\|d_i-d_j\big\|,$$

et par construction :

$$\|e_i\| \;=\; \big\|q-b_i\big\| \;=\; \Phi(q)\,\big\|p-a_i\big\| \;=\; \Phi(q)\,\|d_i\|,$$

d'où à cause de l'hypothèse que $\Phi(q)>1$ visant à atteindre une absurdité :

$$\|e_i\| \;>\; \|d_i\| \;>\; 0,$$

la dernière minoration provenant du fait que $p\neq a_i$ pour tout $1\leqslant i\leqslant \mathrm{I}$.

Développons alors les carrés dans l'inégalité $\|e_i-e_j\|^2\leqslant\|d_i-d_j\|^2$, ce qui donne :

$$\|e_i\|^2+\|e_j\|^2-2\,\langle e_i,e_j\rangle \;\leqslant\; \|d_i\|^2+\|d_j\|^2-2\,\langle d_i,d_j\rangle,$$

c'est-à-dire en inversant le signe :

$$\begin{aligned}\langle e_i,e_j\rangle \;&\geqslant\; \langle d_i,d_j\rangle+\underbrace{\frac{\|e_i\|^2-\|d_i\|^2}{2}+\frac{\|e_j\|^2-\|d_j\|^2}{2}}_{>0}\\ &>\; \langle d_i,d_j\rangle.\end{aligned}$$

(g) Observons pour commencer que :

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{K}}\lambda_i\,e_i \;=\; \sum_{i=1}^{\mathrm{K}}\lambda_i\,(q-b_i) \;=\; \big(\lambda_1+\cdots+\lambda_{\mathrm{K}}\big)\,q-\sum_{i=1}^{\mathrm{K}}\lambda_ib_i \;=\; 0.$$

Ensuite, développons le carré :

$$\begin{aligned}0 \;=\; \bigg\|\sum_{i=1}^{\mathrm{K}}\lambda_i\,e_i\bigg\|^2 \;&=\; \sum_{i=1}^{\mathrm{K}}\lambda_i^2\,\|e_i\|^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant\mathrm{K}}\lambda_i\lambda_j\,\langle e_i,e_j\rangle\\ &>\; \sum_{i=1}^{\mathrm{K}}\lambda_i^2\,\|d_i\|^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant\mathrm{K}}\lambda_i\lambda_j\,\langle d_i,d_j\rangle\\ &=\; \bigg\|\sum_{i=1}^{\mathrm{K}}\lambda_id_i\bigg\|^2,\end{aligned}$$

et « $0>$ un nombre positif » est une contradiction vraiment fatale !

Exercice 3. **(a)** Comme $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, et comme $e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^n}{n!}$, avec rayon de convergence infini, il est connu/clair que :

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

d'où après division par x :

$$\frac{\sinh x}{x} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

(b) La fonction $x\longmapsto\frac{\sinh x}{x}$ est paire, $\mathscr{C}^\infty$, et, grâce au développement en série entière qui précède, minorée par :

$$\frac{\sinh x}{x} \;\geqslant\; 1 \qquad\qquad (\forall\,x\in\mathbb{R}),$$

donc son inverse $x\longmapsto\frac{x}{\sinh x}$ est bien $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Pour $k=0$, cela est vrai avec $P_{0,0}:=x$.

Pour $k = 1$, on calcule, en rappelant $\mathsf{sinh}' = \mathsf{cosh}$ et $\mathsf{cosh}' = \mathsf{sinh}$:

$$\left(\frac{x}{\mathsf{sinh}\,x}\right)' = \frac{\mathsf{sinh}\,x - x\,\mathsf{cosh}\,x}{(\mathsf{sinh}\,x)^2} = \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2} - x\,\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{(\mathsf{sinh}\,x)^2},$$

donc $P_{1,-1}$, $P_{1,0}$, $P_{1,1}$ se voient à l'œil nu.

Si, au niveau k, la formule est satisfaite :

$$\left(\frac{x}{\mathsf{sinh}\,x}\right)^{(k)} = \frac{\sum_{-k\leqslant j\leqslant k} e^{jx}\,P_{k,j}(x)}{(\mathsf{sinh}\,x)^{k+1}}$$

une dérivation supplémentaire :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{\mathsf{sinh}\,x}\right)^{(k+1)} &= \left(\left(\frac{x}{\mathsf{sinh}\,x}\right)^{(k)}\right)' \\
&= \frac{\left[\sum_{|j|\leqslant k} j\,e^{jx}\,P_{k,j}(x) + e^{jx}\,P_{k,j}'(x)\right]\mathsf{sinh}\,x - (k+1)\,\mathsf{cosh}\,x\left[\sum_{|j|\leqslant k} e^{jx}\,P_{k,j}(x)\right]}{(\mathsf{sinh}\,x)^{k+2}} \\
&= \frac{\sum_{|j|\leqslant k} j\,e^{jx}\,(\frac{e^x-e^{-x}}{2})\,P_{k,j}(x) + \sum_{|j|\leqslant k} e^{jx}\,(\frac{e^x-e^{-x}}{2})\,P_{k,j}'(x) - (k+1)\sum_{|j|\leqslant k} e^{jx}\,(\frac{e^x+e^{-x}}{2})\,P_{k,j}(x)}{(\mathsf{sinh}\,x)^{k+2}} \\
&=: \frac{\sum_{|j|\leqslant k+1} e^{jx}\,P_{k+1,j}(x)}{(\mathsf{sinh}\,x)^{k+2}}
\end{aligned}$$

montre, après une réorganisation des termes qui n'a pas besoin d'être soigneusement explicitée, que cette formule générale est aussi satisfaite au niveau $k+1$.

(d) Afin d'obtenir $\frac{x}{\mathsf{sinh}\,x} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, il s'agit de faire voir, pour deux entiers quelconques $k \geqslant 0$ et $\ell \geqslant 0$, que :

$$0 = \lim_{|x|\to\infty} x^\ell \left(\frac{x}{\mathsf{sinh}\,x}\right)^{(k)}.$$

Puisque cette fonction $\frac{x}{\mathsf{sinh}\,x}$ est paire, il suffit de regarder $\mathsf{lim}_{x\to\infty}$.

Or grâce à la formule de la question **(c)** qui précède, en posant :

$$d_{k,j} := \mathsf{deg}\,P_{k,j},$$

d'où pour certaines constantes $0 < C_{k,j} < \infty$:

$$\big|P_{k,j}(x)\big| \leqslant C_{k,j}\,x^{d_{k,j}} \qquad\qquad (\forall\,x\in\mathbb{R},\,|j|\leqslant k),$$

il vient :

$$0 \leqslant \left|x^\ell\left(\frac{x}{\mathsf{sinh}\,x}\right)^{(k)}\right| \leqslant x^\ell\,\frac{\sum_{|j|\leqslant k} C_{k,j}\,x^{d_{k,j}}\,e^{jx}}{(\frac{e^x-e^{-x}}{2})^{k+1}},$$

et sachant qu'au dénominateur, le terme $(e^x)^{k+1}$ domine tous ceux du numérateur, la limite lorsque $x \longrightarrow \infty$ du majorant de droite vaut 0, ce qui conclut.

(e) Deux intégrations par parties, et une utilisation de $0 = \mathsf{lim}_{x\to\infty}\,e^{\lambda x} = \mathsf{lim}_{x\to\infty}\,x\,e^{\lambda x}$, fournissent le résultat :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x\,e^{\lambda x}\,dx &= \left[x\,\frac{1}{\lambda}\,e^{\lambda x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty 1\,\frac{1}{\lambda}\,e^{\lambda x}\,dx \\
&= 0 - 0 - \left[\frac{1}{\lambda^2}\,e^{\lambda x}\right]_0^\infty + 0 \\
&= \frac{1}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

(f) On majore, pour $x \in [0, \infty[$:

$$
\begin{aligned}
\big|h_{\mathrm{N}}(x)\big| &\leqslant x \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} e^{-(1+2n)x} \\
&= x\, e^{-x} \left[1 + e^{-2x} + \cdots + e^{-2(\mathrm{N}-1)x}\right] \\
&= x\, e^{-x}\, \frac{1 - e^{-2\mathrm{N}x}}{1 - e^{-2x}} \\
&\leqslant x\, e^{-x}\, \frac{1}{1 - e^{-2x}}.
\end{aligned}
$$

La fonction-dominante ainsi obtenue, continue sur $]0, \infty[$, est aussi continue en 0, puisque $\frac{x}{1-e^{-2x}} \sim \frac{x}{2x} \sim \frac{1}{2}$ lorsque $x \sim 0$, et elle est de sucroît intégrable à l'infini, grâce au facteur e^{-x}. Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue s'applique donc pour donner le résultat.

(g) Calculons en effet :

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\xi\, x}\, f(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\xi\, x}\, \frac{x}{\sinh x}\, dx \\
&= \int_{0}^{\infty} \left(e^{-2i\pi\xi\, x} + e^{2i\pi\xi\, x}\right) \frac{2x\, e^{-x}}{1 - e^{-2x}}\, dx \\
&= 4 \int_{-\infty}^{\infty} \cos\big(2\pi\xi\, x\big)\, x\, \frac{e^{-x}}{1 - e^{-2x}}\, dx \\
&= 4 \int_{0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \cos\big(2\pi\xi\, x\big)\, x\, e^{-(1+2n)x}\right) dx \\
\text{[Question (f)]} \qquad &= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} x \cos\big(2\pi\xi\, x\big)\, e^{-(1+2n)x}\, dx \\
&= 4\, \mathrm{Re} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} x\, e^{(i2\pi\xi - 1 - 2n)\, x}\, dx\right) \\
\text{[Question (e)]} \qquad &= 4\, \mathrm{Re} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1-i2\pi\xi)^2}\right) \\
&= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1-i2\pi\xi)^2} + \frac{1}{(2n+1+i2\pi\xi)^2}\right) \\
&= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 - (2\pi\xi)^2}{\big((2n+1)^2 + (2\pi\xi)^2\big)^2}.
\end{aligned}
$$

Exercice 4. **(a)** En effet, d'après un théorème du cours, la transormée de Fourier établit un isomorphisme — isométrique pour la norme L^2 d'ailleurs ! — de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même, d'inverse donné par la même formule qui change seulement le signe dans l'exponentielle :

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi)\, e^{+2i\pi x\,\xi}\, d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi)\, e^{2i\pi x\,\xi}\, d\xi,
\end{aligned}$$

et comme $v \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a bien $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

(b) Le changement de variable :

$$y := b^k(x-\xi) \qquad \text{d'où} \qquad dx = \frac{dy}{b^k},$$

permet de calculer :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} u\big(b^k(x-\xi)\big)\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} u(y)\, \frac{dy}{b^k} \\
&= \frac{1}{b^k} \int_{-\infty}^{\infty} u(y)\, e^{-2i\pi 0\, y}\, dy \\
&= \frac{\widehat{u}(0)}{b^k} \\
&= \frac{v(0)}{b^k} = 0\,!
\end{aligned}$$

(c) Le même changement de variable — attention à l'exposant de b ! — donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\xi)\, u\big(b^k(x-\xi)\big)\, dx = \frac{1}{b^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} y\, u(y)\, dy.$$

Mais comme une différentiation par rapport à τ — justifiée, car l'intégrande appartient à l'espace de Schwartz, donc décroît très vite à l'infini — de $\widehat{u}(\tau)$ ci-dessus donne :

$$\widehat{u}'(\tau) = -2i\pi \int_{-\infty}^{\infty} y\, u(y)\, e^{-2i\pi\tau\, y}\, dy,$$

en posant $\tau = 0$, il vient :

$$\frac{-1}{2i\pi}\, \widehat{u}'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, u(y)\, dy,$$

donc au final :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (x-\xi)\, u\big(b^k(x-\xi)\big)\, dx &= \frac{1}{b^{2k}}\, \frac{-1}{2i\pi}\, \widehat{u}'(0) \\
&= \frac{1}{b^{2k}}\, \frac{-1}{2i\pi}\, v'(0) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

car $v \equiv 0$ dans un voisinage de l'origine.

(d) Il suffit de remplacer $f(x)$ par les trois termes en lesquels elle se fragmente, et d'observer que les deux premières intégrales ainsi obtenues s'annulent en vertu des deux Questions **(b)** et **(c)** qui précèdent.

(e) En effet, comme $R(x,\xi) = \mathrm{o}(|x-\xi|)$, on a $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tel que :

$$|x-\xi| \leqslant \delta \implies \big|R(x,\xi)\big| \leqslant \varepsilon\, |x-\xi|,$$

ce qui permet de majorer :

$$\begin{aligned}
\bigg|\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} R(x,\xi)\,u\big(b^k(x-\xi)\big)\,dx\bigg| &\leqslant \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \big|R(x,\xi)\big|\cdot\big|u\big(b^k(x-\xi)\big)\big|\,dx \\
&\leqslant \varepsilon \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} |x-\xi|\cdot\big|u\big(b^k(x-\xi)\big)\big|\,dx \\
&\leqslant \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |x-\xi|\cdot\big|u\big(b^k(x-\xi)\big)\big|\,dx \\
\text{[Poser } y := b^k x - b^k \xi\text{]} \qquad &= \frac{\varepsilon}{b^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} |y|\cdot\big|u(y)\big|\,dy.
\end{aligned}$$

(f) Observons tout d'abord que la fonction $x \longmapsto (x-\xi)^3\,u\big(b^k(x-\xi)\big)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, puisque la fonction $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ appartient à l'espace de Schwartz :

$$\max_{y\in\mathbb{R}} \big|y^3 u(y)\big| \;<\; \infty.$$

En insérant quelque peu artificiellement (et astucieusement) le nombre neutre :

$$1 \;=\; \frac{(x-\xi)^3}{(x-\xi)^3}$$

dans l'intégrale à estimer, nous pouvons majorer :

$$\begin{aligned}
\bigg|\int_{|x-\xi|>\delta} R(x,\xi)\,u\big(b^k(x-\xi)\big)\,dx\bigg| &= \bigg|\int_{|x-\xi|>\delta} \frac{R(x,\xi)}{(x-\xi)^3}\,(x-\xi)^3\,u\big(b^k(x-\xi)\big)\,dx\bigg| \\
\text{[Insérer } b^k\text{]} \qquad &= \frac{1}{b^{3k}}\bigg|\int_{|x-\xi|>\delta} \frac{R(x,\xi)}{(x-\xi)^3}\,\big(b^k(x-\xi)\big)^3\,u\big(b^k(x-\xi)\big)\,dx\bigg| \\
&\leqslant \frac{1}{b^{3k}} \sup_{|x-\xi|>\delta} \Big\{\big(b^k(x-\xi)\big)^3\,u\big(b^k(x-\xi)\big)\Big\} \int_{|x-\xi|>\delta} \frac{|R(x,\xi)|}{|x-\xi|^3} \\
&\leqslant \frac{1}{b^{3k}} \max_{y\in\mathbb{R}} \big|y^3 u(y)\big|\cdot \int_{|x-\xi|>\delta} \frac{|R(x,\xi)|}{|x-\xi|^3}\,dx
\end{aligned}$$

(g) Commençons par observer que la fonction-reste $x \longmapsto R(x,\xi)$ croît de manière au plus affine à l'infini, puisque f est supposée bornée :

$$\begin{aligned}
\big|R(x,\xi)\big| &= \big|f(x)-f(\xi)+f'(\xi)\,(x-\xi)\big| \\
&\leqslant |f(x)| + \mathsf{constante} + \mathsf{constante}\,|x-\xi| \\
&\leqslant \mathsf{constante} + \mathsf{constante}\,|x-\xi|,
\end{aligned}$$

et comme :

$$\int_{|x-\xi|>\delta} \bigg(\frac{1}{|x-\xi|^3} + \frac{|x-\xi|}{|x-\xi|^3}\bigg)\,dx \;<\; \infty,$$

nous obtenons, en revenant à la question **(d)**, que :

$$
\begin{aligned}
\bigg| b^{2k} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, u\big(b^k(x-\xi)\big)\, dx \bigg| &= \bigg| b^{2k} \int_{-\infty}^{\infty} R(x,\xi)\, u\big(b^k(x-\xi)\big)\, dx \bigg| \\
\text{[Découper]} \qquad &= \bigg| b^{2k} \bigg[\int_{|x-\xi|\leqslant\delta} + \int_{|x-\xi|>\delta} \bigg] \bigg| \\
\text{[Questions (e) et (f)]} \qquad &\leqslant \underbrace{\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |y|\, \big|u(y)\big|\, dy}_{0\leqslant \mathsf{constante} < \infty} + \frac{b^{2k}}{b^{3k}} \underbrace{\big\| y^3 u(y) \big\|_{\mathscr{C}^0} \cdot \int_{|x-\xi|>\delta} \frac{|R(x,\xi)|}{|x-\xi|^3}\, dx}_{0\leqslant \mathsf{constante}(\delta) < \infty} \\
&= \varepsilon\, \mathsf{constante} + \frac{1}{b^k}\, \mathsf{constante}(\delta),
\end{aligned}
$$

et donc, si $k \geqslant \mathrm{K}(\varepsilon) \gg 1$ est assez grand, le majorant de droite peut être rendu arbitrairement petit.

(h) Comme $0 < a < 1$ et comme $|\mathsf{cos}| \leqslant 1$, la série converge normalement, donc uniformément, ce qui justifie l'interversion de l'intégration et de la sommation infinie :

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, u\big(b^k(x-\xi)\big)\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \bigg(\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(e^{2i\pi b^n x} + e^{-2i\pi b^n x} \right) \bigg)\, u\big(b^k(x-\xi)\big)\, dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a^n \bigg[\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi b^n x}\, u\big(b^k(x-\xi)\big)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi b^n x}\, u\big(b^k(x-\xi)\big)\, dx \bigg],
\end{aligned}
$$

et il s'agit de calculer les intégrales, pour $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ (noter le $\pm$) :

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} u\big(b^k(x-\xi)\big)\, e^{\pm 2i\pi b^n x}\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} u(y)\, e^{\pm 2i\pi b^n \left(\frac{y}{b^k}+\xi\right)}\, \frac{dy}{b^k} \\
\text{[Poser } y = b^k x - b^k \xi \text{]} \qquad &= \frac{e^{\pm 2i\pi b^n \xi}}{b^k} \int_{-\infty}^{\infty} u(y)\, e^{\pm 2i\pi \frac{b^n}{b^k} y}\, dy \\
&= \frac{e^{\pm 2i\pi b^n \xi}}{b^k}\, \widehat{u}\bigg(\mp \frac{b^n}{b^k} \bigg) \\
&= \frac{e^{\pm 2i\pi b^n \xi}}{b^k}\, v\bigg(\mp \frac{b^n}{b^k} \bigg),
\end{aligned}
$$

et puisque $\mathsf{supp}\, v \subset \,]\frac{1}{b}, b[$, le résultat vaut toujours 0, excepté dans l'unique cas où c'était le signe '$-$' dans l'exponentielle (deuxième somme) et où $k = n$, donc :

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, u\big(b^k(x-\xi)\big)\, dx &= a^k\, \frac{e^{-2i\pi b^k \xi}}{b^k}\, v(1) \\
&= a^k\, \frac{e^{-2i\pi b^k \xi}}{b^k}.
\end{aligned}
$$

(i) En effet, si f était dérivable en ξ, la Question **(g)** forcerait :

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{k\to\infty} b^{2k} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, u\big(b^k(x-\xi)\big)\, dx \\
&= \lim_{k\to\infty} b^{2k}\, \frac{a^k}{b^k}\, e^{-2i\pi b^k\,\xi} \\
&= \lim_{k\to\infty} (ab)^k\, e^{-2i\pi b^k\,\xi} \\
&= \lim_{k\to\infty} \Big(\text{quantité}(k) \text{ de module } \geqslant 1\Big) \\
&= \textbf{très impossible!}
\end{aligned}$$

15. Examen 8

Exercice 1. On travaille sur $\mathbb{R}_+^* =]0, \infty[$. Soit un exposant p avec $1 < \mathsf{p} < \infty$, et soit l'exposant conjugué q défini par $\frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{q}} = 1$. Soit $f \colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On suppose qu'il existe une constante $\mathrm{M} < \infty$ telle que :

$$\left| \int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx \right| \leqslant \mathrm{M},$$

pour toute fonction $g \in L^{\mathsf{q}}(\mathbb{R}_+^*)$ avec $\|g\|_{L^{\mathsf{q}}} \leqslant 1$.

L'objectif est d'établir que $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}_+^*)$ et que $\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \mathrm{M}$.

(a) Que dire lorsque $f \equiv 0$ presque partout ? On suppose dans la suite que $f \not\equiv 0$, presque partout.

Pour $n \geqslant 1$ entier, on introduit :

$$h_n(x) := \begin{cases} \dfrac{|f(x)|^{\mathsf{p}}}{f(x)} & \text{si } 0 < x \leqslant n \text{ et } 0 < |f(x)| \leqslant n; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que :

$$\Big(\big\| h_n \big\|_{L^{\mathsf{q}}} \Big)^{\mathsf{q}} = \int_{]0,n] \cap \{|f| \leqslant n\}} \big| f(x) \big|^{\mathsf{p}}\, dx \leqslant n^{\mathsf{p}+1}.$$

(b) Montrer qu'il existe $n_1 \geqslant 1$ tel que :

$$0 \neq \big\| h_n \big\|_{L^{\mathsf{q}}} \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant n_1).$$

(c) Pour $n \geqslant n_1$, on pose :

$$g_n := \frac{h_n}{\|h_n\|_{L^{\mathsf{q}}}}.$$

Montrer que :

$$\bigg(\int_{]0,n] \cap \{|f| \leqslant n\}} \big| f(x) \big|^{\mathsf{p}}\, dx \bigg)^{1/\mathsf{p}} \leqslant \mathrm{M}.$$

(d) Montrer que $\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \mathrm{M}$.

Exercice 2. On dit qu'une fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ est à *croissance lente* s'il existe une constante $c > 0$ et un entier naturel N tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f(x)| \leqslant c\, \big(1 + x^2\big)^N.$$

(a) Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées f', f'', f''', ..., et soit $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ dans l'espace de Schwartz, c'est-à-dire $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ satisfait :

$$\lim_{|x| \to \infty} \big| x^p\, g^{(q)}(x) \big| = 0 \qquad\qquad (\forall\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, q \in \mathbb{N}).$$

Montrer que le produit $f\, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ appartient encore à l'espace de Schwartz.

(b) Soit une constante fixée $a \in \,]0, \infty[$ et soit une fonction $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\psi(\xi) \,:=\, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{a - 2i\pi x}\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx \quad (\star).$$

Montrer que $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Indication: Observer que la fonction lisse $x \longmapsto \frac{1}{(a-2i\pi x)}$, ainsi que toutes ses dérivées, sont bornées sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que ψ satisfait l'équation différentielle ordinaire $y' + a\,y = \widehat{\phi}$.

(d) En déduire que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$\psi(\xi) \,=\, e^{-a\xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{as}\, \widehat{\phi}(s)\, ds.$$

(e) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\overline{\mathscr{F}}\Big(e^{-a\xi}\, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(\xi)\Big)(x) \,=\, \frac{1}{a - 2i\pi x}.$$

Dans l'espace de Shwartz, on rappelle les définitions de la transformation de Fourier et de la transformation de Fourier inverse = conjuguée :

$$\mathscr{F}(f)(\xi) \,:=\, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx. \quad \text{et} \quad \mathscr{F}^{-1}(g)(x) \,=\, \overline{\mathscr{F}}(g)(x) \,:=\, \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, e^{2i\pi\xi x}\, d\xi.$$

(f) Retrouver alors le résultat de la Question **(d)**.

(g) On suppose maintenant que $\phi \in L^2(\mathbb{R})$. Vérifier que l'intégrale $(\star)$ est bien définie, puis, montrer que l'égalité de la Question **(d)** reste vraie dans ce cas.

Exercice 3. Soit un exposant réel $1 < \mathsf{p} < \infty$. Soit une fonction mesurable positive :

$$\begin{aligned} K\colon \quad \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \\ (x, y) &\longmapsto K(x, y), \end{aligned}$$

qui est *homogène de degré* -1, c'est-à-dire vérifie :

$$K\big(\alpha\, x,\ \alpha\, y\big) \,=\, \tfrac{1}{\alpha}\, K(x, y),$$

pour tous $x, y > 0$, quelque soit $\alpha > 0$.

On suppose de plus que :

$$C \,:=\, \int_0^{\infty} K(x, 1)\, x^{-\frac{1}{\mathsf{p}}}\, dx \,<\, \infty.$$

(a) Avec l'exposant conjugué q de p, défini par $\frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{q}} = 1$, montrer que :

$$\int_0^{\infty} K(1, y)\, y^{-\frac{1}{\mathsf{q}}}\, dy \,<\, \infty.$$

(b) Soit une fonction mesurable positive $f\colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} K(x, y)\, \big(\tfrac{x}{y}\big)^{\frac{1}{\mathsf{q}}}\, f(x)^{\mathsf{p}}\, dx dy \,=\, C\,\Big(\big\|f\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}}.$$

(c) Pour tout couple de fonctions mesurables positives $f, g \colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, avec $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}_+^*)$ et $g \in L^{\mathsf{q}}(\mathbb{R}_+^*)$, montrer que :

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} K(x,y)\, f(x)\, g(y)\, dxdy \;\leqslant\; C\, \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\, \|g\|_{L^{\mathsf{q}}}$$
$$< \;\infty.$$

Indication: On pourra écrire :

$$K(x,y) \;=\; \big[K(x,y)\big]^{\frac{1}{\mathsf{p}}}\, \big[K(x,y)\big]^{\frac{1}{\mathsf{q}}}\, \big(\tfrac{x}{y}\big)^{\frac{1}{\mathsf{pq}}}\, \big(\tfrac{y}{x}\big)^{\frac{1}{\mathsf{qp}}}.$$

(d) On suppose dorénavant que les fonctions f, g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ sont à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, *i.e.* ne sont plus forcément positives.

Montrer que l'application $G \colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$G(y) \;:=\; g(y) \int_0^\infty K(x,y)\, f(x)\, dx,$$

est définie pour presque tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, et est mesurable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(e) Montrer que la fonction :

$$y \;\longmapsto\; Tf(y) \;:=\; \int_0^\infty K(x,y)\, f(x)\, dx,$$

est mesurable.

(f) Montrer que pour toute fonction $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}_+^*)$ et pour toute fonction $g \in L^{\mathsf{q}}(\mathbb{R}_+^*)$ avec $\|g\|_{L^{\mathsf{q}}} \leqslant 1$, on a :

$$\int_0^\infty \big|Tf(y)\big|\, |g(y)|\, dy \;\leqslant\; C\, \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

(g) Montrer que $\big\|Tf\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant C\, \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}$. Indication: Utiliser un exercice qui précède.

(h) Montrer que si $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$, alors :

$$Tf(y) \;:=\; \int_0^\infty \frac{f(x)}{x+y}\, dx,$$

est défini pour presque tout $y > 0$, et que :

$$\big\|Tf\big\|_{L^2} \;\leqslant\; \pi\, \|f\|_{L^2}.$$

(i) Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$. Montrer que l'on peut définir, pour tout $s > 0$:

$$F(s) \;:=\; \int_0^\infty e^{-su}\, f(u)\, du.$$

(j) Montrer que $s \longmapsto F(s)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(k) Établir que :

$$\int_0^\infty \big|F(s)\big|^2\, ds \;\leqslant\; \pi \int_0^\infty |f(u)|^2\, du.$$

Indication: Commencer par écrire l'intégrale $\int_0^\infty |F(s)|^2\, ds$ sous forme d'une intégrale triple, puis, appliquer ce qui précède.

16. Corrigé de l'examen 8

Exercice 1. **(a)** Lorsque $f \equiv 0$ presque partout, tout est vrai gratuitement, car $\int f\, g = 0 = \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}$.

Avec $f \not\equiv 0$ presque partout, si $0 < x \leqslant n$ et si $0 < |f(x)| \leqslant n$, on a :

$$\big|h_n(x)\big|^{\mathsf{q}} = \frac{|f(x)|^{\mathsf{pq}}}{|f(x)|^{\mathsf{q}}} = \big|f(x)\big|^{(\mathsf{p}-1)\,\mathsf{q}} = \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}},$$

et autrement, on a $h_n(x) = 0$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\Big(\big\|h_n\big\|_{L^{\mathsf{q}}}\Big)^{\mathsf{q}} &= \int_0^\infty \big|h_n(x)\big|^{\mathsf{q}}\,dx \\ &= \int_{]0,n]\cap\{|f|\leqslant n\}} \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx \\ &\leqslant n^{\mathsf{p}}\cdot n.\end{aligned}$$

(b) Comme f n'est pas identiquement nulle presque partout, il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que f n'est pas identiquement nulle presque partout sur $]0, n_0]$. Ensuite, il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que la troncature de $|f|$ à hauteur n_1 n'est pas identiquement nulle sur $]0, n_0] \subset\,]0, n_1]$.

Donc nous déduisons que $h_{n_1} \not\equiv 0$ presque partout sur $]0, n_1]$, et enfin nous avons bien $h_n \not\equiv 0$ presque partout sur $]0, n]$, quel que soit $n \geqslant n_1$.

(c) Visiblement, $\|g_n\|_{L^{\mathsf{q}}} = 1$, donc pour $n \geqslant n_1$, l'hypothèse principale s'applique :

$$\begin{aligned}\mathrm{M} &\geqslant \left|\int_0^\infty f(x)\,g_n(x)\,dx\right| \\ &= \left|\int_0^\infty f(x)\,\frac{h_n(x)}{\|h_n\|_{L^{\mathsf{q}}}}\,dx\right| \\ &= \frac{\left|\int_{]0,n]\cap\{|f|\leqslant n\}} f(x)\,\frac{|f(x)|^{\mathsf{p}}}{f(x)}\,dx\right|}{\|h_n\|_{L^{\mathsf{q}}}} \\ \text{[Question (a)]}\qquad &= \frac{\int_{]0,n]\cap\{|f|\leqslant n\}} \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx}{\big(\int_{]0,n]\cap\{|f|\leqslant n\}} |f(x)|^{\mathsf{p}}\,dx\big)^{1/\mathsf{q}}} \\ [1-\tfrac{1}{\mathsf{q}}=\tfrac{1}{\mathsf{p}}]\qquad &= \left(\int_{]0,n]\cap\{|f|\leqslant n\}} \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx\right)^{1/\mathsf{p}}\end{aligned}$$

(d) Comme pour $n \geqslant n_1$, la suite d'ensembles mesurables :

$$]0,n]\cap\big\{|f|\leqslant n\big\} =: E_n,$$

est croissante, de réunion :

$$]0,\infty[\, = \bigcup_{n\geqslant n_1} E_n,$$

le théorème de convergence monotone, appliqué à la suite de fonctions $\mathbf{1}_{E_n} \cdot |f|^{\mathsf{p}}$, donne :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{\mathsf{p}}} &= \bigg(\int_{]0,\infty[} \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{1/\mathsf{p}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \bigg(\int_{]0,n]\cap\{|f|\leqslant n\}} \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{1/\mathsf{p}} \\ \text{[Question (c)]} \qquad &\leqslant \mathrm{M}. \end{aligned}$$

Exercice 2. **(a)** Puisque f et toutes ses dérivées sont à croissance lente, pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $c_j > 0$ et $N_j \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\big|f^{(j)}(x)\big| \leqslant c_j\big(1+x^2\big)^{N_j}.$$

Comme le produit $f\,g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ est 'gratuitement' lisse, il s'agit de démontrer que pour tous $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$\lim_{|x|\to\infty} \big|x^p(fg)^{(q)}(x)\big| = 0.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculons :

$$\begin{aligned} \big|x^p(fg)^{(q)}(x)\big| &\leqslant \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} \big|f^{(j)}(x)\,x^p\,g^{(q-j)}(x)\big| \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j}\, c_j\, \big(1+x^2\big)^{N_j} \big|x^p\,g^{(q-j)}(x)\big| \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{q}\sum_{l=0}^{N_j} \binom{q}{j}\, c_j\, \binom{N_j}{l} \big|x^{2l+p}\,g^{(q-j)}(x)\big|. \end{aligned}$$

Mais comme $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a par définition :

$$\lim_{|x|\to\infty} \big|x^{2l+p} g^{(q-j)}(x)\big| = 0.$$

De l'inégalité ci-dessus, nous déduisons enfin :

$$\lim_{|x|\to\infty} \big|x^p(fg)^{(q)}(x)\big| = 0.$$

(b) La fonction rationnelle g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) := \frac{1}{a-2i\pi x}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et à croissance lente car *bornée* sur $\mathbb{R}$ ainsi que toutes ses dérivées d'ordre quelconque $q \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} \big|g^{(q)}(x)\big| = \bigg|q!\,\frac{(2i\pi)^q}{\big(a-2i\pi\,x\big)^q}\bigg| &= q!\,\frac{2^q\,\pi^q}{\big(a^2+4\,\pi^2\,x^2\big)^{\frac{q}{2}}} \\ &\leqslant q!\,\frac{2^q\,\pi^q}{a^q}. \end{aligned}$$

Grâce à la question précédente, la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) := \phi(x)\,g(x)$, appartient à $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

En outre, la transformation de Fourier $\mathscr{F}$ est un automorphisme de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, donc $\psi = \widehat{f}$ appartient à $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

(c) Pour $x \in \mathbb{R}$ et pour $\xi \in \mathbb{R}$, posons :

$$f(x, \xi) \;:=\; \frac{\phi(x)}{a - 2i\pi x}\, e^{-2i\pi\xi x}.$$

• Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $x \longmapsto f(x, \xi)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, car ϕ qui appartient à l'espace de Schwartz est trivialement intégrable, et car la fonction $x \longmapsto \frac{1}{a-2i\pi x}\, e^{-2i\pi\xi x}$ est bornée.

• Pour (presque) tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \longmapsto f(x, \xi)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ (en fait $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$.

• Enfin, comme $x \longmapsto \frac{-2i\pi x}{a-2i\pi x}\, e^{-2i\pi\xi x}$ est bornée, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et pour (presque) tout $x \in \mathbb{R}$, on a la majoration par une fonction-dominatrice intégrable indépendante du paramètre ξ :

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial f}{\partial \xi}(x, \xi)\Big| \;&=\; \Big|\frac{-2i\pi x}{a - 2i\pi x}\, e^{-2i\pi\xi x}\, \phi(x)\Big| \\ &\leqslant\; C\,\big|\phi(x)\big|.\end{aligned}$$

D'après le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre, nous en déduisons que ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et de dérivée :

$$\psi'(\xi) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-2i\pi x}{a - 2i\pi x}\, \phi(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx.$$

Enfin, presque sans calcul, il est rapidement visible que :

$$\begin{aligned}\psi'(\xi) + a\,\psi(\xi) \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-2i\pi x}{a - 2i\pi x}\, \phi(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a - 2i\pi x}\, \phi(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx \\ &=\; \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx \\ &=\; \widehat{\phi}(\xi).\end{aligned}$$

(d) La solution générale de l'équation différentielle $y'(\xi) + a\,y(\xi) = \widehat{\phi}(\xi)$ est :

$$y(\xi) \;=\; e^{-a\xi}\left(A + \int_0^{\xi} e^{as}\,\widehat{\phi}(s)\, ds\right) \quad (\star\star),$$

où A est une constante complexe, que nous devons déterminer.

Comme $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, nécessairement :

$$A \;=\; \int_{-\infty}^{0} e^{as}\,\widehat{\phi}(s)\, ds,$$

sinon en faisant tendre $\xi \longrightarrow -\infty$ dans $(\star\star)$ ci-dessus, nous aurions :

$$\lim_{\xi \to -\infty} \big|\psi(\xi)\big| \;=\; \infty,$$

ce qui serait absurde, puisque $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Ainsi, nous concluons bien que :

$$\psi(\xi) \,=\, e^{-a\xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{as}\,\widehat{\phi}(s)\,ds.$$

(e) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on calcule sans peine :

$$\begin{aligned}\overline{\mathscr{F}}\Big(e^{-a\xi}\,\mathbf{1}_{]0,\infty[}(\xi)\Big)(x) \,&=\, \int_0^\infty e^{-a\xi}\,e^{2i\pi\xi x}\,d\xi \\ &=\, \left[\frac{1}{-a+2i\pi x}\,e^{-a\xi}\,e^{2i\pi\xi x}\right]_{\xi=0}^{\xi=\infty} \\ &=\, \frac{1}{a-2i\pi x}.\end{aligned}$$

(f) Comme la fonction :

$$g(x) \,=\, \frac{1}{a-2i\pi x}$$

appartient à $L^2(\mathbb{R})$, et comme $\mathscr{F}\circ\overline{\mathscr{F}} = \mathsf{Id}$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, nous obtenons :

$$\mathscr{F}(g)(\xi) \,=\, e^{-a\xi}\,\mathbf{1}_{]0,\infty[}(\xi),$$

presque partout en $\xi \in \mathbb{R}$.

D'autre part, puisque $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, la fonction ϕ appartient trivialement à $L^2(\mathbb{R})$.

En remarquant alors que :

$$\psi \,=\, \widehat{\phi\, g} \,=\, \widehat{\phi} * \widehat{g},$$

nous en déduisons donc, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, que :

$$\begin{aligned}\psi(\xi) \,&=\, \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(s)\,e^{-a(\xi-s)}\,\mathbf{1}_{\,]0,\infty[}(\xi-s)\,ds \\ &=\, e^{-a\xi}\int_{-\infty}^{\xi} e^{as}\,\widehat{\phi}(s)\,ds.\end{aligned}$$

(g) Si $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, alors $g\,\phi \in L^1(\mathbb{R})$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\big\|g\,\phi\big\|_{L^1(\mathbb{R})} \,&\leqslant\, \big\|\phi\big\|_{L^2(\mathbb{R})}\,\big\|g\big\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &<\, \infty,\end{aligned}$$

car :

$$\big|g(x)\big|^2 \,\leqslant\, \frac{1}{a^2+4\,\pi^2\,x^2},$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction ψ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et appartient à $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.

En outre, en appliquant de nouveau la transformée de Fourier de la convolée, nous obtenons l'égalité de la Question **(d)**.

Exercice 3. **(a)** En posant $x := \frac{1}{y}$, nous obtenons :

$$\int_0^\infty K(1,y)\,y^{-\frac{1}{q}}\,dy \,=\, \int_0^\infty K\big(1,\,\tfrac{1}{x}\big)\,x^{\frac{1}{q}}\,\frac{dx}{x^2}.$$

Comme $K\big(1, \frac{1}{x}\big) = K\big(\frac{1}{x}\,x,\ \frac{1}{x}\,1\big) = x\,K(x,1)$, il vient :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty K(1,y)\,y^{-\frac{1}{\mathsf{q}}}\,dy &= \int_0^\infty x\,K(x,1)\,x^{\frac{1}{\mathsf{q}}}\,\frac{dx}{x^2}\\ &= \int_0^\infty K(x,1)\,x^{\frac{1}{\mathsf{q}}-1}\,dx\\ &= \int_0^\infty K(x,1)\,x^{-\frac{1}{\mathsf{p}}}\,dx\\ &= C\ <\ \infty.\end{aligned}$$

(b) Puisque K et f sont à valeurs positives, le théorème de Tonelli permet d'évaluer cette intégrale à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ sur l'espace produit $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ comme *itération* d'intégrales sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*} K(x,y)\,\big(\tfrac{x}{y}\big)^{\frac{1}{\mathsf{q}}}\,f(x)^{\mathsf{p}}\,dxdy &= \int_0^\infty \bigg(\int_0^\infty K(x,y)\,\big(\tfrac{x}{y}\big)^{\frac{1}{\mathsf{q}}}\,dy\bigg)\,f(x)^{\mathsf{p}}\,dx\\ [t := \tfrac{y}{x}]\qquad &= \int_0^\infty \bigg(\int_0^\infty K\big(x,\ t\,x\big)\,t^{-\frac{1}{\mathsf{q}}}\,x\,dt\bigg)\,f(x)^{\mathsf{p}}\,dx\\ [\text{Homogénéité}]\qquad &= \int_0^\infty \bigg(\int_0^\infty \tfrac{1}{x}\,K\big(1,\ t\big)\,t^{-\frac{1}{\mathsf{q}}}\,x\,dt\bigg)\,f(x)^{\mathsf{p}}\,dx\\ &= \int_0^\infty \bigg(\underbrace{\int_0^\infty K\big(1,\ t\big)\,t^{-\frac{1}{\mathsf{q}}}\,dt}_{=\,C\,<\,\infty}\bigg)\,f(x)^{\mathsf{p}}\,dx\\ &= C\,\Big(\big\|f\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}}\end{aligned}$$

(c) Grâce à l'indication, nous pouvons faire appel à l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} K(x,y)\,f(x)\,g(y)\,dxdy &= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} K(x,y)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}\,\big(\tfrac{x}{y}\big)^{\frac{1}{\mathsf{pq}}}\,f(x)\,K(x,y)^{\frac{1}{\mathsf{q}}}\,\big(\tfrac{y}{x}\big)^{\frac{1}{\mathsf{qp}}}\,g(y)\,dxdy\\ &\leqslant \bigg(\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} K(x,y)\,\big(\tfrac{x}{y}\big)^{\frac{1}{\mathsf{q}}}\,f(x)^{\mathsf{p}}\,dxdy\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}\bigg(\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} K(x,y)\,\big(\tfrac{y}{x}\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}\,g(y)^{\mathsf{q}}\,dxdy\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{q}}}\\ [\text{Question } \mathbf{(b)}]\qquad &\leqslant C^{\frac{1}{\mathsf{p}}}\,\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\,\bigg(\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} K(x,y)\,\big(\tfrac{y}{x}\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}\,g(y)^{\mathsf{q}}\,dxdy\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{q}}}\\ [\text{Analogue !}]\qquad &\leqslant C^{\frac{1}{\mathsf{p}}}\,\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\,C^{\frac{1}{\mathsf{q}}}\,\|g\|_{L^{\mathsf{q}}}\\ &= C\,\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\,\|g\|_{L^{\mathsf{q}}}\\ &<\ \infty.\end{aligned}$$

(d) Le théorème de Tonelli appliqué à $|f|$ et à $|g|$ donne, d'après la Question **(c)** :

$$\begin{aligned}\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} K(x,y)\,\big|f(x)\big|\,\big|g(y)\big|\,dxdy\ &\leqslant\ C\,\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\,\|g\|_{L^{\mathsf{q}}}\\ &<\ \infty.\end{aligned}$$

Le théorème de Fubini, appliqué à la fonction de deux variables :

$$F(x,y)\ :=\ K(x,y)\,f(x)\,g(y),$$

intégrable sur le produit $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, énonce alors que la fonction-tranche :

$$\begin{aligned} y \longmapsto & \int_{\mathbb{R}_+^*} K(x,y)\, f(x)\, g(y)\, dx \\ & = G(y), \end{aligned}$$

est définie pour presque tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, et là où elle n'est pas définie, nous pouvons tout simplement la prolonger par 0, et obtenir ainsi une fonction mesurable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(e) Nous venons de dire que $g(y)\, Tf(y)$ est mesurable pour toute fonction $g \in L^{\mathsf{q}}(\mathbb{R}_+^*)$. Il suffit alors de prendre une telle fonction qui n'est *jamais* égale à 0, par exemple :

$$g_0(y) := \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \frac{1}{y} & \text{pour } 1 \leqslant y, \end{cases}$$

qui appartient bien à $L^{\mathsf{q}}(\mathbb{R}_+^*)$, d'après le critère de Riemann $\int_1^\infty \frac{1}{y^{\mathsf{q}}}\, dy < \infty$, puisque $1 < \mathsf{q}$.

Ainsi :

$$y \longmapsto g_0(y)\, Tf(y),$$

est mesurable, et comme $\frac{1}{g_0(y)}$ est aussi mesurable, comme le produit de deux fonctions mesurables et encore mesurable, nous concluons bien que :

$$Tf(y) = \tfrac{1}{g_0(y)}\, g_0(y)\, Tf(y),$$

est mesurable.

(f) Maintenant que nous savons de Marseille que $Tf(y)$ existe et est mesurable, nous pouvons de Toulon reprendre le même calcul de Fubini-Tonelli pour voir que :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \big|Tf(y)\big|\, |g(y)|\, dy &= \int_0^\infty \bigg| \int_0^\infty K(x,y)\, f(x)\, dx \bigg|\, |g(y)|\, dy \\ &\leqslant \int_0^\infty \bigg(\int_0^\infty K(x,y)\, |f(x)|\, dx \bigg)\, |g(y)|\, dy \\ &= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} K(x,y)\, |f(x)|\, |g(y)|\, dy \\ \text{[Question (c)]} \qquad &\leqslant C\, \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\, \|g\|_{L^{\mathsf{q}}} \\ &\leqslant C\, \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}. \end{aligned}$$

(g) L'Exercice 1 **(d)** a démontré que l'inégalité obtenue à l'instant établit que $Tf \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}_+^*)$, avec en bonus l'inégalité :

$$\big\|Tf\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant C\, \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

Ainsi, $T \colon L^{\mathsf{p}} \longrightarrow L^{\mathsf{p}}$ est un opérateur linéaire *borné*, c'est-à-dire *continu*.

(h) Ici, $\mathsf{p} = 2 = \mathsf{q}$, et la fonction :

$$K(x,y) := \frac{1}{x+y},$$

est bien homogène de degré -1 :

$$K\big(\alpha\, x,\ \alpha\, y\big) = \frac{1}{\alpha\, x + \alpha\, y} = \frac{1}{\alpha}\, \frac{1}{x+y} = \frac{1}{\alpha}\, K(x,y).$$

De plus :

$$
\begin{aligned}
C \;&=\; \int_0^\infty K(x,1)\, x^{-\frac{1}{2}}\, dx \\
&=\; \int_0^\infty \frac{1}{x+1}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} \\
[t := \sqrt{x}] \qquad &=\; \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}\, 2\, dt \\
&=\; \Big[2 \arctan t\Big]_0^\infty \\
&=\; \pi.
\end{aligned}
$$

Grâce aux questions qui précèdent, pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$, nous pouvons définir :

$$
Tf(y) \;:=\; \int_0^\infty \frac{f(x)}{x+y}\, dx,
$$

pour presque tout $y > 0$, et Tf, prolongée par 0 là où elle n'est pas définie, appartient à $L^2(\mathbb{R}_+^*)$.

Enfin, $f \longmapsto Tf$ est un opérateur linéaire borné de $L^2(\mathbb{R}_+^*)$ dans lui-même :

$$
\big|\big|Tf\big|\big|_{L^2} \;\leqslant\; \pi\, ||f||_{L^2}.
$$

(i) L'existence de F résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, car :

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \big|e^{-su}\, f(u)\big|\, du \;&\leqslant\; \bigg(\int_0^\infty e^{-2su}\, du\bigg)^{\frac{1}{2}} \bigg(\int_0^\infty \big|f(u)\big|^2\bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&=\; \tfrac{1}{\sqrt{2s}}\, ||f||_{L^2} \\
&<\; \infty.
\end{aligned}
$$

(j) Prenons $a > 0$ arbitrairement proche de 0. Clairement, l'application $s \longmapsto e^{-su} f(u)$ est continue sur $]a, \infty[$, et elle est dominée par :

$$
\big|e^{-su}\, f(u)\big| \;\leqslant\; \big|e^{-au}\, f(u)\big|.
$$

La même application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, sur $]a, \infty[$:

$$
\begin{aligned}
\int_a^\infty \big|e^{-su}\, f(u)\big|\, du \;&\leqslant\; \int_a^\infty \big|e^{-au}\, f(u)\big|\, du \\
&\leqslant\; \int_0^\infty \big|e^{-au}\, f(u)\big|\, du \\
&\leqslant\; \bigg(\int_0^\infty e^{-2au}\, du\bigg)^{\frac{1}{2}} \bigg(\int_0^\infty \big|f(u)\big|^2\, du\bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&=\; \tfrac{1}{\sqrt{2a}}\, ||f||_{L^2} \\
&<\; \infty,
\end{aligned}
$$

montre que cette fonction-dominatrice est intégrable sur $]a, \infty[$. Le théorème de continuité des intégrales à paramètres, qui repose *in fine* sur le théorème de convergence dominée de Lebesgue, s'applique donc et offre la continuité de $s \longmapsto F(s)$ sur $]a, \infty[$, et enfin sur :

$$
]0, \infty[\;=\; \bigcup_{a>0}\;]a, \infty[.
$$

(k) La fonction F étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle y est donc mesurable, de sorte que l'intégrale $\int_0^\infty |F(s)|^2\,ds$ a un sens, et donne un nombre appartenant à $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Ensuite, calculons :

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty |F(s)|^2\,ds &= \int_0^\infty \big|F(s)\,\overline{F(s)}\big|\,ds \\
&= \int_0^\infty \left(\bigg|\int_0^\infty e^{-su}\,f(u)\,du\bigg|\right)\left(\bigg|\int_0^\infty e^{-sv}\,f(v)\,dv\bigg|\right)ds \\
&\leqslant \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \big|e^{-su}\,f(u)\big|\,du\right)\left(\int_0^\infty \big|e^{-sv}\,f(v)\big|\,dv\right) \\
\text{[Fubini-Tonelli]} \qquad &= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \left(\int_0^\infty e^{-su}\,e^{-sv}\,ds\right)|f(u)|\,|f(v)|\,dudv \\
&= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \frac{1}{u+v}\,|f(u)|\,|f(v)|\,dudv \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{|f(v)|}{u+v}\,dv\right)|f(u)|\,du.
\end{aligned}
$$

En utilisant les notations de la Question **(h)**, nous reconnaissons :

$$
T|f|(u) \,=\, \int_0^\infty \frac{|f(v)|}{u+v}\,dv,
$$

donc nous obtenons :

$$
\int_0^\infty \big|F(s)\big|^2\,ds \,\leqslant\, \int_0^\infty T|f|(u)\,|f(u)|\,du,
$$

d'où en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \big|F(s)\big|^2\,ds &\leqslant \left(\int_0^\infty \big|T|f|(u)\big|^2\,du\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty |f(u)|^2\,du\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \big\|T|f|\big\|_{L^2}\,\|f\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Mais nous avons vu à la Question **(h)** que :

$$
\big\|T|f|\big\|_{L^2} \,\leqslant\, \pi\,\big\||f|\big\|_{L^2} \,=\, \|f\|_{L^2},
$$

donc nous atteignons :

$$
\int_0^\infty \big|F(s)\big|^2\,ds \,\leqslant\, \pi\,\big(\|f\|_{L^2}\big)^2,
$$

ce qui établit que $F \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$, et que $\|F\|_{L^2} \leqslant \sqrt{\pi}\,\|f\|_{L^2}$.

Nous avons ainsi construit une application linéaire $\Lambda\colon L^2(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_+^*)$ définie par $\Lambda(f) := F$, continue car de norme d'opérateur $\|\Lambda\| \leqslant \sqrt{\pi}$ finie, que l'on appelle la *transformation de Laplace dans L^2*.

17. Examen 9

Exercice 1. Soient deux fonctions (Lebesgue-) intégrables sur $]0, \infty[$:

$$f \in L^1(\mathbb{R}_+^*) \qquad \text{et} \qquad g \in L^1(\mathbb{R}_+^*).$$

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$(x, y) \longmapsto F(x, y) := \tfrac{f(y)}{y}\, g\big(\tfrac{x}{y}\big).$$

(a) Montrer que, pour presque tout $x > 0$, la fonction $y \longmapsto \frac{f(y)}{y}\, g\big(\frac{x}{y}\big)$ est intégrable sur $]0, \infty[$, puis, justifier que la fonction $f * g$ définie (presque partout) par :

$$f * g\,(x) := \int_0^\infty f(y)\, g\big(\tfrac{x}{y}\big)\, \tfrac{dy}{y},$$

est intégrable sur $]0, \infty[$.

(b) Montrer que $f * g\,(x) = g * f\,(x)$, pour presque tout $x > 0$.

(c) On suppose dorénavant que g est continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+$, *y compris* (à droite) *en* 0, et qu'elle est identiquement nulle en-dehors de l'intervalle $[0, 1]$. Montrer l'inégalité :

$$\big|F(x, y)\big| \leqslant \|g\|_{\mathscr{C}^0}\, \tfrac{|f(y)|}{y}\, \mathbf{1}_{[x,\infty[}(y) \qquad\qquad (x \in \mathbb{R}_+^*,\ y \in \mathbb{R}_+^*),$$

où $\|g\|_{\mathscr{C}^0} := \max\limits_{x \in \mathbb{R}_+} \big|g(x)\big| < \infty$.

(d) Montrer que $f * g\,(x)$ existe pour *tout* $x > 0$, pas seulement pour presque tout $x > 0$.

(e) Établir que $f * g$ est continûment dérivable sur $]0, \infty[$. Indication: Fixer $a > 0$ arbitrairement proche de 0, et travailler d'abord sur $]a, \infty[$. Imiter la Question **(c)** avec $\big\|g'\big\|_{\mathscr{C}^0} < \infty$.

Exercice 2. L'objectif est de définir un opérateur T par la formule :

$$Tg(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{-x\,y^4}\, g(y)\, dy$$

avec $x \in\,]0, \infty[$, et de déterminer certaines de ses propriétés. Les fonctions g considérées sont à valeurs réelles dans $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(a) Quand g est mesurable à valeurs *positives* :

$$g\colon \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

justifier que $Tg(x)$ existe dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, pour tout $x \in [0, \infty[$.

(b) On suppose $g \in L^1(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}})$ intégrable, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Montrer que $x \longmapsto Tg(x)$ est continue sur $[0, \infty[$.

(c) On suppose que $g \in L^1(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}})$ est intégrable. Montrer que $x \longmapsto Tg(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \infty[$.

(d) On suppose de plus que $g \in L^1\big(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}\big)$ intégrable est à valeurs *positives*. Établir l'équivalence :

$$\Big(y \longmapsto y^4\, g(y) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}\Big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(x \longmapsto Tg(x) \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0, \infty[\Big).$$

Dans cette circonstance, que vaut la dérivée à droite $Tg'(0^+)$? Indication: On pourra appliquer le fait classique suivant de théorie des fonctions — admis ici car conséquence aisée du théorème des accroissements finis. Si une fonction à valeurs réelles ϕ définie sur $[0, \infty[$ satisfait :

- ϕ est continue sur $[0, \infty[$;
- ϕ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \infty[$;
- $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \phi'(x) =: \ell$ existe dans $\mathbb{R}$;

alors ϕ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \infty[$, de dérivée à droite en 0^+ :

$$\phi'(0^+) \;=\; \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0} \;=\; \ell,$$

égale à cette même valeur ℓ.

(e) Avec $g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable, on suppose maintenant l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de :

$$y \longmapsto \tfrac{1}{y^4}\, g(y).$$

Montrer, pour presque tout $x \in \,]0, \infty[$, que la valeur de $Tg(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x\, y^4}\, g(y)\, dy$ est bien définie et finie dans $\mathbb{R}$, puis, montrer que $x \longmapsto Tg(x)$ est intégrable sur $]0, \infty[$. Indication: On pourra commencer par montrer que :

$$\int_{]0,\infty[} \bigg(\int_{\mathbb{R}} e^{-x\, y^4}\, |g(y)|\, dy \bigg)\, dx \;<\; \infty.$$

(f) Soient les deux espaces vectoriels :

$$E \;:=\; \Big\{ g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ mesurables} \colon\; \|g\|_E \;:=\; \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{y^4}\, |g(y)|\, dy \;<\; \infty \Big\},$$

$$F \;:=\; \Big(L^1\big([0, \infty[, \overline{\mathbb{R}}\big),\; \|\cdot\|_{L^1} \Big).$$

Vérifier rapidement que $\|\cdot\|_E$ est une norme, puis, déterminer la norme d'opérateur $\|\!|T|\!\|$ de :

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow F \\ g &\longmapsto Tg. \end{aligned}$$

(g) Soit $g \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R})$, où $1 < \mathsf{p} < \infty$. Montrer que $Tg(x)$ a une valeur bien définie et finie $\in \mathbb{R}$ pour *tout* $x \in \,]0, \infty[$.

(h) Déterminer une constante C explicitement en fonction de x, p, $A := \int_{\mathbb{R}} e^{-z^4}\, dz$ satisfaisant :

$$\big|Tg(x)\big| \;\leqslant\; C\, \|g\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

Exercice 3. Par *convention*, la transformée de Fourier d'une fonction Lebesgue-intégrable $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ sera notée de manière équivalente :

$$\widehat{\phi}(\xi) \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx \qquad\qquad \text{ou} \qquad\qquad \mathscr{F}(\phi),$$

tandis que la transformée de Fourier (généralisée) d'une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ (qui n'appartient pas forcément à $L^1(\mathbb{R})$), sera toujours notée :

$$\mathscr{F}(\psi).$$

(a) On suppose données deux fonctions $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ à valeurs complexes de module au carré intégrables.

Montrer que la transformée de Fourier $\widehat{fg}$ du produit $f\,g$ existe, et est donnée par :

$$\widehat{fg}\,(\xi) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{h_\xi(x)}\,dx,$$

où l'on a posé :

$$h_\xi(x) \;:=\; e^{2i\pi\xi x}\,\overline{g(x)}.$$

(b) Établir que, pour presque tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\mathscr{F}(h_\xi)(y) \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} h_\xi(t)\,e^{-2i\pi yt}\,dt \qquad\qquad (n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}).$$

Indication: On pourra commencer par vérifier que $\mathbf{1}_{[-n,n]} \cdot h_\xi$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que, pour presque tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\mathscr{F}(h_\xi)(y) \;=\; \overline{\mathscr{F}(g)(\xi - y)}.$$

(d) Justifier que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{h_\xi(x)}\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}(f)(y)\,\overline{\mathscr{F}(h_\xi)(y)}\,dy.$$

(e) Établir, pour deux fonctions $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ quelconques, la formule :

$$\mathscr{F}(f\,g)(\xi) \;=\; \mathscr{F}(f) * \mathscr{F}(g)(\xi),$$

pour *tout* $\xi \in \mathbb{R}$.

(f) On suppose maintenant que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et que $g \in L^2(\mathbb{R})$. Établir que :

$$\mathscr{F}(f * g) \;=\; \mathscr{F}(f)\,\mathscr{F}(g).$$

Exercice 4. On travaille sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$, en dimension $d \geqslant 1$. Soient trois réels $\mathsf{p}, \mathsf{q}, \mathsf{r}$ avec $1 \leqslant \mathsf{p}, \mathsf{q}, \mathsf{r} < \infty$ et :

$$\frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{q}} - 1 \;=\; \frac{1}{\mathsf{r}}.$$

Un premier objectif est de démontrer que, pour $f \in L^{\mathsf{p}}(E)$ et $g \in L^{\mathsf{q}}(E)$, on a :

$$\int_E \big|f(y)\big|\,\big|g(y)\big|\,dy \;\leqslant\; \Big(||f||_{L^{\mathsf{p}}(E)}\Big)^{1-\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{r}}} \Big(||g||_{L^{\mathsf{q}}(E)}\Big)^{1-\frac{\mathsf{q}}{\mathsf{r}}} \cdot \bigg(\int_E \big|f(y)\big|^{\mathsf{p}}\,\big|g(y)\big|^{\mathsf{q}}\,dy\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{r}}}.$$

(a) Que dire lorsque $\mathsf{p} = \mathsf{q} = 1$? Ensuite, en supposant $\mathsf{p} = 1$ et $\mathsf{q} > 1$, montrer cette inégalité. Que dire si $\mathsf{p} > 1$ et $\mathsf{q} = 1$?

(b) Lorsque $\mathsf{p} > 1$ *et* $\mathsf{q} > 1$, après avoir vérifié que $\mathsf{r} > \mathsf{p}$ et que $\mathsf{r} > \mathsf{q}$, montrer que :

$$\int |f|\,|g| \;\leqslant\; \bigg(\int |f|^{\frac{\mathsf{r}-\mathsf{p}}{\mathsf{r}-1}}\,|g|^{\frac{\mathsf{r}-\mathsf{q}}{\mathsf{r}-1}}\bigg)^{1-\frac{1}{\mathsf{r}}} \bigg(\int |f|^{\mathsf{p}}\,|g|^{\mathsf{q}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{r}}},$$

où l'on intègre toujours sur E par rapport à dy.

(c) Lorsque $\mathsf{p} > 1$ et $\mathsf{q} > 1$, atteindre le premier objectif, *i.e.* établir l'inégalité énoncée au début de cet exercice.

(d) Soient maintenant p, q réels avec $1 \leqslant \mathsf{p}, \mathsf{q} \leqslant \infty$ tels que $\frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{q}} \geqslant 1$. On travaille dorénavant sur $E := \mathbb{R}^d$. Le deuxième objectif concerne la convolution.

Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on considère :

$$f * g(x) \,:=\, \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

Lorsque $\frac{1}{\mathsf{q}} + \frac{1}{\mathsf{q}} = 1$, justifier que la valeur $f * g(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, et que $f * g \in L^\infty$, avec :

$$\big\| f * g \big\|_{L^\infty} \,\leqslant\, \| f \|_{L^{\mathsf{p}}}\, \| g \|_{L^{\mathsf{q}}}.$$

(e) Toujours sur $E = \mathbb{R}^d$, on suppose dorénavant que $\frac{1}{\mathsf{q}} + \frac{1}{\mathsf{q}} > 1$. Soit le réel $1 \leqslant \mathsf{r} < \infty$ avec $\frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{q}} - 1 = \frac{1}{\mathsf{r}}$, comme dans la Question **(a)**. Vérifier que :

$$\Big(|f| * |g|\,(x) \Big)^{\mathsf{r}} \,\leqslant\, \Big(\| f \|_{L^{\mathsf{p}}} \Big)^{\mathsf{r}-\mathsf{p}} \Big(\| g \|_{L^{\mathsf{q}}} \Big)^{\mathsf{r}-\mathsf{q}} \big(|f|^{\mathsf{p}} * |g|^{\mathsf{q}} \big)(x).$$

(f) Établir que la convolution :

$$f * g(x) \,=\, \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, dy,$$

est définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

(g) Montrer l'inégalité :

$$\big\| f * g \big\|_{L^{\mathsf{r}}} \,\leqslant\, \| f \|_{L^{\mathsf{p}}}\, \| g \|_{L^{\mathsf{q}}}.$$

18. Corrigé de l'examen 9

Exercice 1. (a) Cela résulte du théorème de Fubini-Tonelli appliqué à la fonction F. En effet, vérifions que sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale de sa valeur absolue est finie :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \big|F(x,y)\big|\,dx\,dy &= \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \Big|\tfrac{f(y)}{y}\,g\big(\tfrac{x}{y}\big)\Big|\,dx\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^*} \bigg(\int_{\mathbb{R}_+^*} \Big|g\big(\tfrac{x}{y}\big)\Big|\,dx\bigg)\,\tfrac{|f(y)|}{y}\,dy \\
[u := \tfrac{x}{y}] \qquad &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \bigg(\int_{\mathbb{R}_+^*} \big|g(u)\big|\,y\,du\bigg)\,\tfrac{|f(y)|}{y}\,dy \\
&= \bigg(\int_{\mathbb{R}_+^*} \big|g(u)\big|\,du\bigg)\bigg(\int_{\mathbb{R}_+^*} \big|f(y)\big|\,dy\bigg) \\
&= \|g\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^1} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Cela prouve que la fonction $(x,y) \longmapsto \frac{f(y)}{y}\,g\big(\frac{x}{y}\big)$ est *intégrable* sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Le Théorème de Tonelli garantit alors que, pour presque tout $x > 0$, la fonction-tranche $y \longmapsto \frac{f(y)}{y}\,g\big(\frac{x}{y}\big)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et par conséquent, pour *ces* presque tous $x > 0$, la convolution sur le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$:

$$f * g\,(x) := \int_0^\infty f(y)\,g\big(\tfrac{x}{y}\big)\,\tfrac{dy}{y},$$

est bien définie.

Enfin, à nouveau grâce à Tonelli, en prolongeant la convolée $f * g$ par 0 là où elle n'est pas définie, nous obtenons une fonction qui *est intégrable* par rapport à x sur $\mathbb{R}_+^*$, *cf.* le calcul ci-dessus.

(b) Pour chaque x tel que l'intégrale définissant $f * g\,(x)$ est convergente (donc pour presque tout $x > 0$), au moyen du changement de variable :

$v := \frac{x}{y}$, d'où : $\log v = \log x - \log y$, puis : $\frac{dv}{v} = -\,\frac{dy}{y}$,

nous obtenons la commutativité :

$$\begin{aligned}
f * g\,(x) &= \int_0^\infty f(y)\,g\big(\tfrac{x}{y}\big)\,\tfrac{dy}{y} \\
&= \int_\infty^0 f\big(\tfrac{x}{v}\big)\,g(v)\,\big(-\,\tfrac{dv}{v}\big) \\
&= \int_0^\infty f\big(\tfrac{x}{v}\big)\,g(v)\,\tfrac{dv}{v} \\
&= g * f\,(x).
\end{aligned}$$

(c) Clairement, $g\big(\frac{x}{y}\big) = 0$ sauf si $0 \leqslant x \leqslant y$. De plus, comme g est continue sur $\mathbb{R}_+$, et identiquement nulle sur $[1, \infty[$, elle est bornée sur $\mathbb{R}_+$, et donc $\|g\|_{\mathscr{C}^0} < \infty$. Enfin :

$$\begin{aligned}\big|F(x,y)\big| &= \big|g\big(\tfrac{x}{y}\big)\big| \, \frac{|f(y)|}{y} \\ &\leqslant \|g\|_{\mathscr{C}^0} \, \mathbf{1}_{[x,\infty[}(y) \, \tfrac{|f(y)|}{y}.\end{aligned}$$

(d) Comme pour *tout* $x > 0$ *fixé*, on peut majorer grâce à l'inégalité qui précède :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \big|F(x,y)\big| \, dy &= \int_0^\infty \tfrac{|f(y)|}{y} \, \big|g\big(\tfrac{x}{y}\big)\big| \, dy \\ &\leqslant \|g\|_{\mathscr{C}^0} \int_0^\infty \tfrac{|f(y)|}{y} \, \mathbf{1}_{[x,\infty[}(y) \, dy \\ &= \|g\|_{\mathscr{C}^0} \int_x^\infty \tfrac{|f(y)|}{y} \, dy \\ &\leqslant \|g\|_{\mathscr{C}^0} \, \tfrac{1}{x} \int_x^\infty |f(y)| \, dy \\ &\leqslant \|g\|_{\mathscr{C}^0} \, \tfrac{1}{x} \int_0^\infty |f(y)| \, dy \\ &= \|g\|_{\mathscr{C}^0} \, \tfrac{1}{x} \, \|f\|_{L^1} \\ &< \infty,\end{aligned}$$

l'intégrale qui définit :

$$f * g\,(x) = \int_0^\infty F(x,y) \, dy,$$

est absolument (donc Lebesgue-) convergente.

Ainsi, $f * g\,(x)$ existe bien pour *tout* $x > 0$.

(e) La fonction $F(x,y) = \frac{f(y)}{y} \, g\big(\frac{x}{y}\big)$ est continûment dérivable par rapport à x, avec :

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = \frac{f(y)}{y^2} \, g'\big(\tfrac{x}{y}\big) \qquad\qquad (x > 0, \, y > 0).$$

Fixons donc $a > 0$, arbitrairement proche de 0. Clairement, $g'\big(\frac{x}{y}\big) = 0$, sauf si $0 \leqslant x \leqslant y$, donc :

$$\Big|\frac{\partial}{\partial x} F(x,y)\Big| \leqslant \frac{|f(y)|}{y^2} \, \big\|g'\big\|_{\mathscr{C}^0} \, \mathbf{1}_{[x,\infty[}(y).$$

Ensuite, en restreignant les valeurs $x \in \,]a, \infty[$, comme :

$$[x, \infty[\;\subset\; [a, \infty[\qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad \mathbf{1}_{[x,\infty[}(y) \leqslant \mathbf{1}_{[a,\infty[}(y),$$

nous obtenons une majoration par une certaine fonction-dominatrice :

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial}{\partial x} F(x,y)\Big| &\leqslant \big\|g'\big\|_{\mathscr{C}^0} \, \frac{|f(y)|}{y^2} \, \mathbf{1}_{[a,\infty[}(y) \\ &=: G(y),\end{aligned}$$

cela, pour tout $x > a$ et tout $y > 0$. Or cette fonction-dominatrice positive est intégrable, car :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty G(y)\,dy \;&=\; \big\|g'\big\|_{\mathscr{C}^0} \int_a^\infty \frac{|f(y)|}{y^2}\,dy \\ &\leqslant\; \big\|g'\big\|_{\mathscr{C}^0} \tfrac{1}{a^2} \int_a^\infty \big|f(y)\big|\,dy \\ &\leqslant\; \big\|g'\big\|_{\mathscr{C}^0} \tfrac{1}{a^2} \int_0^\infty \big|f(y)\big|\,dy \\ &\leqslant\; \big\|g'\big\|_{\mathscr{C}^0} \tfrac{1}{a^2}\, \|f\|_{L^1} \\ &<\; \infty.\end{aligned}$$

Le théorème de dérivation sous le signe intégral assure alors que $f * g$ est continûment dérivable sur $]a, \infty[$.

Enfin, comme cela est vrai pour tout $a > 0$, notre convolée $f * g$ est en fait continûment dérivable sur :

$$\bigcup_{a>0}\,]a, \infty[\;=\;]0, \infty[,$$

avec la formule attendue, valable quel que soit $x > 0$:

$$\big(f * g\big)'(x) \;=\; \int_0^\infty \tfrac{f(y)}{y^2}\, g'\big(\tfrac{x}{y}\big)\,dy.$$

Exercice 2. (a) Puisque $y \longmapsto e^{-x\,y^4}$ est continue donc mesurale, $y \longmapsto e^{-x\,y^4}\,g(y)$ est également mesurable positive, donc la théorie de Borel-Lebesgue développée en cours pour intégrer les fonctions mesurables positives garantit que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x\,y^4}\,g(y)\,dy$ existe bel et bien dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, avec une valeur éventuellement infinie.

(b) Comme $\big|e^{-x\,y^4}\big| \leqslant 1$ car $x \in [0, \infty[$, il est clair que la fonction mesurable $y \longmapsto e^{-x\,y^4}\,g(y)$ admet la fonction-dominatrice intégrable indépendante du paramètre x :

$$\big|e^{-x\,y^4}\,g(y)\big| \;\leqslant\; |g(y)|,$$

donc $Tg(x)$ existe pour tout $x \in [0, \infty[$, avec une valeur réelle finie $Tg(x) \in \mathbb{R}$.

De plus, pour presque tout $x \in [0, \infty[$ (pour lequel $g(y) \in \mathbb{R}$ est une valeur finie, non égale à $-\infty$ ou ∞), la fonction $x \longmapsto e^{-x\,y^4}\,g(y)$ est clairement continue.

Par le théorème de continuité des intégrales à paramètre, nous concluons bien que Tg est continue sur $[0, \infty[$.

(c) Fixons $\delta > 0$, arbitrairement proche de 0. Pour presque tout $y \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $x \longmapsto e^{-x\,y^4}\,g(y)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]\delta, \infty[$, de dérivée :

$$x \;\longmapsto\; -\,e^{-x\,y^4}\,y^4\,g(y),$$

Or la fonction :

$$y \;\longmapsto\; \big|e^{-\delta\,y^4}\,y^4\big|,$$

est continue sur $\mathbb{R}$, de limite 0 lorsque $y \longrightarrow \pm\infty$, donc elle est majorée sur $\mathbb{R}$ tout entier :

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \big|e^{-\delta\,y^4}\,y^4\big| \;=:\; M_\delta \;<\; \infty.$$

Ainsi, nous obtenons une fonction-dominatrice de la dérivée partielle de l'intégrande par rapport au paramètre :

$$\begin{aligned}\big|-e^{-x\,y^4}\,y^4\,g(y)\big| &\leqslant \big|e^{-\delta\,y^4}\,y^4\,g(y)\big| \\ &\leqslant M_\delta\,|g(y)|,\end{aligned}$$

qui est indépendante de ce paramètre $x \in \,]\delta,\infty[$.

Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, Tg est $\mathscr{C}^1$ sur $]\delta,\infty[$.

Enfin, le réel $\delta > 0$ pouvant être choisi arbitrairement proche de 0, nous concluons bien que $x \longrightarrow Tg(x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\infty[$, et que sa dérivée est donnée par la formule :

$$Tg'(x) \,=\, -\int_{\mathbb{R}} e^{-x\,y^4}\,y^4\,g(y)\,dy \qquad\qquad {\scriptstyle (x\in\,]0,\infty[)}.$$

(d) Montrons $\Longrightarrow$. Comme pour tout $x \in [0,\infty[$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\big|-e^{-x\,y^4}\,y^4\,g(y)\big| \,\leqslant\, y^4\,g(y),$$

le théorème de convergence dominée, appliqué à des suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $x_n \overset{>}{\longrightarrow} 0$, nous donne :

$$\begin{aligned}\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} Tg'(x) &= \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \int_{\mathbb{R}} -e^{-x\,y^4}\,y^4\,g(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \Big(-e^{-x\,y^4}\,y^4\,g(y)\Big)\,dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}} y^4\,g(y)\,dy \,\in\, \mathbb{R}_-,\end{aligned}$$

cette dernière intégrale étant convergente par hypothèse. Le fait classique (admis) de théorie des fonctions s'applique dans notre situation pour nous aider à conclure sans effort supplémentaire que $x \longmapsto Tg(x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\infty[$, y compris en 0.

Quant à l'implication inverse $\Longleftarrow$, considérons plutôt sa contraposée :

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} y^4\,g(y)\,dy \,=\, \infty\Big) \qquad \overset{?}{\Longrightarrow} \qquad \Big(x \longmapsto Tg(x) \text{ n'est pas } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,\infty[\Big).$$

Nous affirmons qu'alors, la limite quand $x \overset{>}{\longrightarrow} 0$ des dérivées $Tg'(x)$ est égale à $-\infty$, ce qui montrera que Tg n'est *pas* $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\infty[$.

En effet, avec une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $x_n > 0$ qui tendent vers 0, le théorème de Fatou appliqué à la suite de fonctions positives :

$$-\Big(-e^{-x_n\,y^4}\,y^4\,g(y)\Big) \qquad\qquad {\scriptstyle (n\in\mathbb{N}_{\geqslant 1})},$$

nous permet de minorer :

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\, -Tg'(x_n) &= \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-x_n\,y^4}\,y^4\,g(y)\,dy \\ \text{[Fatoute !]} \qquad &\geqslant \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} e^{-x_n\,y^4}\,y^4\,g(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} y^4\,g(y)\,dy \\ &= \infty,\end{aligned}$$

d'où :

$$-\,Tg'(x) \underset{x \overset{>}{\longrightarrow} 0}{\longrightarrow} \infty,$$

c'est-à-dire :

$$Tg'(x) \underset{x \overset{>}{\longrightarrow} 0}{\longrightarrow} -\infty.$$

(e) Il suffit de montrer que :

$$\int_{]0,\infty[} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\,x\,y^4}\,|g(y)|\,dy \right) dx \;<\; \infty,$$

parce que, ainsi, on aura pour presque tout $x \in]0,\infty[$:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\,x\,y^4}\,|g(y)|\,dy \;<\; \infty,$$

et donc par définition, $y \longmapsto e^{-\,x\,y^4}\,g(y)$ sera intégrable pour ces presque tous $x \in\,]0,\infty[$.

Or comme $e^{-\,x\,y^4}\,|g(y)| \geqslant 0$, nous pouvons utiliser le théorème de Tonelli :

$$\begin{aligned}
\int_{]0,\infty[} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\,x\,y^4}\,|g(y)|\,dy \right) dx \;&=\; \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{]0,\infty[} e^{-\,x\,y^4}\,|g(y)|\,dx \right) dy \\
&=\; \int_{\mathbb{R}} \left[-\,\tfrac{1}{y^4}\,e^{-\,x\,y^4} \right]_0^{\infty} |g(y)|\,dy \\
&=\; \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{y^4}\,|g(y)|\,dy \\
&<\; \infty,
\end{aligned}$$

et cette dernière quantité est *finie* par hypothèse. Ainsi, $Tg(x)$ est bien définie avec une valeur finie $\in \mathbb{R}$, pour presque tout $x \in\,]0,\infty[$.

De plus :

$$\begin{aligned}
\big\|Tg\big\|_{L^1} \;&=\; \int_{]0,\infty[} \big|Tg(x)\big|\,dx \\
&=\; \int_{]0,\infty[} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-\,x\,y^4}\,g(y)\,dy \right| dx \\
&\leqslant\; \int_{]0,\infty[} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\,x\,y^4}\,|g(y)|\,dy \right) dx \\
&=\; \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{y^4}\,|g(y)|\,dy \\
&<\; \infty,
\end{aligned}$$

donc Tg est effectivement intégrable, sur son domaine de définition.

(f) Dans E, l'inégalité du triangle est claire, et :

$$0 \;=\; \|g\|_E \;=\; \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{y^4}\,|g(y)|\,dy,$$

implique bien que $g(y) = 0$ presque partout.

Par définition :

$$\|T\| \;:=\; \sup_{g \neq 0} \frac{\|Tg\|_{L^1}}{\|g\|_E},$$

et comme nous venons de voir que :

$$\big\|Tg\big\|_{L^1} \,=\, \int_0^\infty \big|Tg(x)\big|\,dx \;\leqslant\; \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{y^4}\,|g(y)|\,dy \,=\, \|g\|_E,$$

il est clair que $\|T\| \leqslant 1$.

De plus comme, en relisant les calculs de la Question **(e)**, on constate aisément que cette inégalité est une *égalité* lorsque $g \geqslant 0$ est positive, nous concluons que :

$$\|T\| \,=\, 1.$$

(g) Soit $\mathsf{q} := \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}$ l'exposant conjugué de p, avec $1 < \mathsf{q} < \infty$ aussi. Pour $x \in \,]0,\infty[$ fixé, l'inégalite de Hölder donne :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{-x\,y^4}\,|g(y)|\,dy \;&\leqslant\; \bigg(\int_{\mathbb{R}} e^{-x\,y^4\,\mathsf{q}}\,dy\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{q}}}\,\|g\|_{L^{\mathsf{p}}} \\
\text{[}(x\,\mathsf{q})^{\frac{1}{4}}\,y \,=:\, z\text{]} \qquad\qquad &=\; \bigg(\int_{\mathbb{R}} e^{-z^4}\,\frac{1}{(x\,\mathsf{q})^{\frac{1}{4}}}\,dz\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{q}}}\,\|g\|_{L^{\mathsf{p}}} \\
\text{[}A \,:=\, \textstyle\int_{\mathbb{R}} e^{-z^4}\,dz \,<\, \infty\text{]} \qquad\qquad &=:\; \frac{1}{(x\,\mathsf{q})^{\frac{1}{4\mathsf{q}}}}\,A^{\frac{1}{\mathsf{q}}}\,\|g\|_{L^{\mathsf{p}}} \\
&<\; \infty,
\end{aligned}$$

donc $y \longmapsto e^{-x\,y^4}\,g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et $Tg(x)$ est bien définie avec une valeur finie $\in \mathbb{R}$, pour *tout* $x \in \,]0,\infty[$.

(h) Dans la constante qui est apparue au cours de la majoration que nous venons d'effectuer, il suffit de remplacer $\mathsf{q} = \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}$:

$$\begin{aligned}
C \;&=\; \frac{1}{(x\,\mathsf{q})^{\frac{1}{4\mathsf{q}}}}\,A^{\frac{1}{\mathsf{q}}} \\
&=\; \frac{1}{\big(x\,\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\big)^{\frac{1}{4\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}}}}\,A^{\frac{1}{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}}} \\
&=\; \bigg(\frac{\mathsf{p}-1}{x\,\mathsf{p}}\bigg)^{\frac{\mathsf{p}-1}{4\,\mathsf{p}}}\,A^{\frac{\mathsf{p}-1}{\mathsf{p}}},
\end{aligned}$$

sans erreur, Monsieur l'ordinateur !

Exercice 3. **(a)** Tout d'abord, l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\,g(x)\big|\,dx \;&\leqslant\; \bigg(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx\bigg)^{\frac{1}{2}}\,\bigg(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2\,dx\bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&=\; \|f\|_{L^2}\,\|g\|_{L^2} \\
&<\; \infty,
\end{aligned}$$

montrer que le produit $f\,g \in L^1$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc la transformation de Fourier de $f\,g$ s'obtient au moyen de la formule intégrale classique (qui a donc un sens) :

$$\begin{aligned}\widehat{fg}\,(\xi) \;&:=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(x)\,e^{-2i\pi\xi x}\,dx \\ &=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{\overline{g(x)}\,e^{2i\pi\xi x}}\,dx \\ &=:\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{h_\xi(x)}\,dx.\end{aligned}$$

(b) Tout d'abord, la suite de fonctions :

$$\Big\{\mathbf{1}_{[-n,n]}(t)\,h_\xi(t)\Big\}_{n=1}^{\infty},$$

converge vers h_ξ en norme L^2 par application directe du théorème de convergence dominée :

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty}\,\big\|h_\xi - \mathbf{1}_{[-n,n]}\,h_\xi\big\|_{L^2}.$$

Or, pour chaque $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, cette fonction tronquée $\mathbf{1}_{[-n,n]}\,h_\xi$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$, grâce à une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (Hölder dans le cas $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$) :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\mathbf{1}_{[-n,n]}(t)\,h_\xi(t)\Big|\,dt \;&=\; \int_{-n}^{n} 1\cdot\big|h_\xi(x)\big|\,dt \\ &\leqslant\; \bigg(\int_{-n}^{n} 1^2\,dt\bigg)^{\frac{1}{2}}\,\bigg(\int_{-n}^{n}\big|h_\xi(t)\big|^2\,dt\bigg)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant\; \sqrt{2\,n}\cdot\big\|h_\xi\big\|_{L^2} \\ &<\; \infty.\end{aligned}$$

Un théorème fondamental du cours énonce alors que la transformée de Fourier $\mathscr{F}(h)$, *dans* L^2, d'une fonction donnée $h \in L^2(\mathbb{R})$, est uniquement définie au moyen d'une suite quelconque $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $h_n \in L^1 \cap L^2$ qui convergent vers h en norme L^2 :

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty}\,\big\|h - h_n\big\|_{L^2},$$

comme étant la limite, qui existe dans $L^2(\mathbb{R})$ indépendamment du choix de la suite $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, de la suite des transformées de Fourier $\widehat{h}_n(y) = \int_{\mathbb{R}} h(t)\,e^{-2i\pi yt}\,dt$:

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty}\,\big\|\mathscr{F}(h) - \widehat{h}_n\big\|_{L^2},$$

l'argument-clé reposant sur l'identité de Plancherel vue en cours :

$$\big\|\widehat{\phi}\,\big\|_{L^2} \;=\; \|\phi\|_{L^2} \qquad\qquad (\phi \in L^1 \cap L^2),$$

laquelle, appliquée à $\phi := \widehat{h}_{n_1} - \widehat{h}_{n_2}$ pour $n_1, n_2 \longrightarrow \infty$, permet de constater que la suite $\big\{\widehat{h}_n\big\}_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$ *complet*.

Appliqué ici à $h_n := \mathbf{1}_{[-n,n]}\,h_\xi$, ce théorème donne :

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty}\,\Big\|\mathscr{F}(h_\xi) - \mathscr{F}\big(\mathbf{1}_{[-n,n]}\,h_\xi\big)\Big\|_{L^2},$$

où, parce que $\mathbf{1}_{[-n,n]}\, h_\xi \in L^1$, on peut écrire :

$$\mathscr{F}\big(\mathbf{1}_{[-n,n]}\, h_\xi\big)(y) \;=\; \int_{-n}^{n} h_\xi(t)\, e^{-2i\pi yt}\, dt \qquad\qquad (y \in \mathbb{R}).$$

(c) Premièrement :

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\big(\mathbf{1}_{[-n,n]}\, h_\xi\big)(y) \;&=\; \int_{-n}^{n} h_\xi(t)\, e^{-2i\pi yt}\, dt \\
&=\; \int_{-n}^{n} e^{2i\pi\xi t}\, \overline{g(t)}\, e^{-2i\pi yt}\, dt \\
&=\; \int_{-n}^{n} \overline{g(t)}\, e^{2i\pi(\xi-y)t}\, dt \\
&=\; \overline{\int_{-n}^{n} g(t)\, e^{-2i\pi(\xi-y)t}\, dt}.
\end{aligned}$$

Deuxièmement, d'après le théorème fondamental rappelé à la Question **(b)**, comme :

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty} \big\| g - \mathbf{1}_{[-n,n]}\, g \big\|_{L^2},$$

on a la convergence en norme L^2 de :

$$\int_{-n}^{n} g(t)\, e^{-2i\pi(\xi-y)t}\, dt \quad \xrightarrow{\;n\to\infty\;} \quad \mathscr{F}(g)(\xi-y).$$

Donc en faisant $n \longrightarrow \infty$, nous obtenons l'égalité demandée :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}\big(\mathbf{1}_{[-n,n]}\, h_\xi\big)(y) \arrow[d, "L^2"'] & = & \overline{\int_{-n}^{n} g(t)\, e^{-2i\pi(\xi-y)t}\, dt} \arrow[d, "L^2"] \\
\mathscr{F}(h_\xi)(y) & \overset{\text{donc}}{\underset{\text{égaux}}{=}} & \overline{\mathscr{F}(g)(\xi-y)},
\end{tikzcd}$$

ce, pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, puisque l'égalité en norme L^2 entre deux fonctions données ne garantit l'égalité de leurs valeurs *que* en presque tout point.

(d) Il s'agit tout simplement de l'identité de Parseval :

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2} \;=\; \langle \mathscr{F}(\varphi),\, \mathscr{F}(\psi) \rangle_{L^2} \qquad\qquad (\varphi, \psi \in L^2),$$

qui donne ici :

$$\langle f,\, h_\xi \rangle_{L^2} \;=\; \langle \mathscr{F}(f),\, \mathscr{F}(h_\xi) \rangle_{L^2}.$$

(e) En synthétisant ce qui précède, on obtient l'égalité :

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f\,g)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{h_\xi(x)}\,dx \\
\text{[Question (d)]} \qquad &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}(f)(y)\,\overline{\mathscr{F}(h_\xi)(y)}\,dy \\
\text{[Question (c)]} \qquad &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}(f)(y)\,\overline{\overline{\mathscr{F}(g)(\xi-y)}}\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}(f)(y)\,\mathscr{F}(g)(\xi-y)\,dy \\
\text{[Reconnaître $*$]} \qquad &= \mathscr{F}(f)*\mathscr{F}(g)(\xi),
\end{aligned}$$

ce, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, à cause du fait que la convolution $*$ n'est en général définie que presque partout.

Mais nous savons que $\xi \longmapsto \mathscr{F}(f\,g)$ est continue et définie partout car $f\,g \in L^1$, et de plus, nous savons que $\mathscr{F}(f)*\mathscr{F}(g)$ appartient à :

$$L^2 * L^2 \subset \mathscr{C}_0,$$

d'après un théorème du cours, car $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ sont exposants conjugués.

En conclusion, cette égalité entre deux fonctions continues valable presque partout est en fait valable *partout*, par continuité.

(f) Comme $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, il existe une suite $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $g_n \in L^1 \cap L^2$ qui convergent en norme L^2 vers $g \in L^2$ donnée.

D'après un théorème du cours, puisque $f \in L^1$ et $g_n \in L^1$, on a :

$$\mathscr{F}(f*g_n) = \mathscr{F}(f)\,\mathscr{F}(g_n), \qquad \text{ou :} \qquad \widehat{f*g_n} = \widehat{f}\,\widehat{g_n}.$$

Or la transformation de Fourier $\mathscr{F}(\bullet)$ est continue $L^2 \longrightarrow L^2$, de norme d'opérateur $|\!|\!|\mathscr{F}|\!|\!| = 1$, en vertu de l'égalité de Plancherel :

$$\big\|\mathscr{F}(\phi)\big\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \qquad (\forall\,\phi \in L^2(\mathbb{R})).$$

Par conséquent :

$$\big\|\mathscr{F}(g_n)-\mathscr{F}(g)\big\|_{L^2} = \big\|g_n-g\big\|_{L^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

donc la suite $\big\{\mathscr{F}(g_n)\big\}_{n=1}^{\infty}$ converge en norme L^2 vers $\mathscr{F}(g)$.

De plus, comme $f \in L^1$ a une transformée de Fourier $\widehat{f} = \mathscr{F}(f)$ continue et bornée sur $\mathbb{R}$ d'après l'inégalité élémentaire vue en cours :

$$\big\|\widehat{f}\big\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty,$$

la suite $\big\{\widehat{f}\,\widehat{g_n}\big\}_{n=1}^{\infty}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers $\widehat{f}\,\mathscr{F}(g)$:

$$\Big\|\widehat{f}\,\widehat{g_n}-\widehat{f}\,\mathscr{F}(g)\Big\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \big\|\widehat{f}\big\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})}\cdot\big\|\widehat{g_n}-\mathscr{F}(g)\big\|_{L^2(\mathbb{R})} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Par ailleurs, l'application linéaire :

$$\begin{aligned}
\Phi_f\colon\quad L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\
h &\longmapsto f*h,
\end{aligned}$$

est continue en vertu d'un théorème du cours dans le cas $\mathsf{p} = 2$:

$$\big\|f * h\big\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \, \|h\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Donc en faisant tendre $n \longrightarrow \infty$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{F}\big(f * g_n\big) & = & \widehat{f}\,\widehat{g_n} \\
{\scriptstyle L^2}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle L^2} \\
\mathscr{F}\big(f * g\big) & \underset{\text{égaux}}{\overset{\text{donc}}{=}} & \widehat{f}\,\mathscr{F}(g)
\end{array}$$

nous atteignons le résultat visé :

$$\mathscr{F}(f * g) = \mathscr{F}(f)\,\mathscr{F}(g).$$

Exercice 4. (a) Lorsque $\mathsf{p} = \mathsf{q} = 1$, comme on a nécessairement $\mathsf{r} = 1$ aussi, l'inégalité visée se réduit à une évidence :

$$\int |f|\,|g| \leqslant 1 \cdot 1 \cdot \bigg(\int |f|^1\,|g|^1\bigg)^{\frac{1}{1}} \qquad\qquad (= \text{en fait !}).$$

Ensuite, lorsque $\mathsf{p} = 1$ et $\mathsf{q} > 1$, comme on a nécessairement $\mathsf{r} = \mathsf{q}$, l'inégalité à démontrer :

$$\int_E \big|f(y)\big|\,\big|g(y)\big|\,dy \overset{?}{\leqslant} \Big(\|f\|_{L^1}\Big)^{1-\frac{1}{\mathsf{q}}} \cdot 1 \cdot \bigg(\int_E \big|f(y)\big|\,\big|g(y)\big|^{\mathsf{q}}\,dy\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{q}}},$$

c'est-à-dire :

$$\int_E \big|f(y)\big|\,\big|g(y)\big|\,dy \overset{?}{\leqslant} \bigg(\int_E \big|f(y)\big|^1\,dy\bigg)^{1-\frac{1}{\mathsf{q}}} \bigg(\int_E \big|f(y)\big|\,\big|g(y)\big|^{\mathsf{q}}\,dy\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{q}}},$$

s'obtient grâce à une simple application de l'inégalité de Hölder au produit *réorganisé astucieusement* des deux fonctions :

$$|f| \cdot |g| = |f|^{1-\frac{1}{\mathsf{q}}} \cdot |f|^{\frac{1}{\mathsf{q}}}\,|g|,$$

avec l'exposant conjugué $\mathsf{q}' \in \,]1, \infty[$ de q défini par $\frac{1}{\mathsf{q}} + \frac{1}{\mathsf{q}'} = 1$, ce qui donne effectivement :

$$\begin{aligned}
\int |f| \cdot |g| &= \int |f|^{1-\frac{1}{\mathsf{q}}} \cdot |f|^{\frac{1}{\mathsf{q}}}\,|g| \\
&\leqslant \bigg(\int \Big(|f|^{1-\frac{1}{\mathsf{q}}}\Big)^{\mathsf{q}'}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{q}'}} \bigg(\int \Big(|f|^{\frac{1}{\mathsf{q}}}\,|g|\Big)^{\mathsf{q}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{q}}} \\
&= \Big(\|f\|_{L^1}\Big)^{1-\frac{1}{\mathsf{q}}} \bigg(\int |f|\,|g|^{\mathsf{q}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{q}}}.
\end{aligned}$$

Lorsque $\mathsf{p} > 1$ et $\mathsf{q} = 1$, c'est la même chose, puisque tout est symétrique à travers $f \longleftrightarrow g$ et $\mathsf{p} \longleftrightarrow \mathsf{q}$.

(b) Effectivement, $\mathsf{p} > 1$ implique :

$$0 > \frac{1}{\mathsf{p}} - 1 = \frac{1}{\mathsf{r}} - \frac{1}{\mathsf{q}}, \qquad\qquad \text{d'où :} \qquad \mathsf{r} > \mathsf{q},$$

et $\mathsf{q} > 1$ implique de manière similaire-symétrique $\mathsf{r} > \mathsf{p}$.

Ensuite, en écrivant :

$$|f|\cdot|g| = |f|^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{r}}}\,|g|^{\frac{\mathsf{q}}{\mathsf{r}}}\cdot|f|^{1-\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{r}}}\,|g|^{1-\frac{\mathsf{q}}{\mathsf{r}}},$$

et en appliquant (encore !) l'inégalité de Hölder avec l'exposant r et son conjugué $\mathsf{r}' = \frac{\mathsf{r}}{\mathsf{r}-1}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int |f|\cdot|g| &= \int |f|^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{r}}}\,|g|^{\frac{\mathsf{q}}{\mathsf{r}}}\cdot|f|^{1-\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{r}}}\,|g|^{1-\frac{\mathsf{q}}{\mathsf{r}}}\\ &\leqslant \left(\int \left(|f|^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{r}}}\,|g|^{\frac{\mathsf{q}}{\mathsf{r}}}\right)^{\mathsf{r}}\right)^{\frac{1}{\mathsf{r}}}\left(\int \left(|f|^{1-\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{r}}}\,|g|^{1-\frac{\mathsf{q}}{\mathsf{r}}}\right)^{\frac{\mathsf{r}}{\mathsf{r}-1}}\right)^{\frac{\mathsf{r}-1}{\mathsf{r}}}\\ &= \left(\int |f|^{\mathsf{p}}\,|g|^{\mathsf{q}}\right)^{\frac{1}{\mathsf{r}}}\left(\int |f|^{\frac{\mathsf{r}-\mathsf{p}}{\mathsf{r}-1}}\,|g|^{\frac{\mathsf{r}-\mathsf{q}}{\mathsf{r}-1}}\right)^{1-\frac{1}{\mathsf{r}}}.\end{aligned}$$

(c) Comme l'intégrale $\left(\int |f|^{\mathsf{p}}|g|^{\mathsf{q}}\right)^{\frac{1}{\mathsf{r}}}$ est bien celle du premier objectif, il reste encore à appliquer l'inégalité de Hölder à l'intégrale restante afin de faire apparaître $\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}$ et $\|g\|_{L^{\mathsf{q}}}$.

Après réflexion, on trouve qu'avec les exposants (conjugués ?) :

$$\mathsf{s} := \frac{\mathsf{p}\,(\mathsf{r}-1)}{\mathsf{r}-\mathsf{p}} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{s}' := \frac{\mathsf{q}\,(\mathsf{r}-1)}{\mathsf{r}-\mathsf{q}},$$

qui sont — oui ! — miraculeusement conjugués parce que :

$$\begin{aligned}1 &\overset{?}{=} \frac{1}{\mathsf{s}}+\frac{1}{\mathsf{s}'}\\ &= \frac{\mathsf{r}-\mathsf{p}}{\mathsf{p}\,(\mathsf{r}-1)}+\frac{\mathsf{r}-\mathsf{q}}{\mathsf{q}\,(\mathsf{r}-1)} &&\Longleftrightarrow\quad \mathsf{r}-1 \overset{?}{=} \frac{\mathsf{r}}{\mathsf{p}}-1+\frac{\mathsf{r}}{\mathsf{q}}-1\\ & &&\Longleftrightarrow\quad 1 = \frac{1}{\mathsf{p}}+\frac{1}{\mathsf{q}}-\frac{1}{\mathsf{r}} \qquad \text{OUI !},\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}\int |f|^{\frac{\mathsf{r}-\mathsf{p}}{\mathsf{r}-1}}\cdot|g|^{\frac{\mathsf{r}-\mathsf{q}}{\mathsf{r}-1}} &\leqslant \left(\int \left(|f|^{\frac{\mathsf{r}-\mathsf{p}}{\mathsf{r}-1}}\right)^{\frac{\mathsf{p}\,(\mathsf{r}-1)}{\mathsf{r}-\mathsf{p}}}\right)^{\frac{1}{\frac{\mathsf{p}\,(\mathsf{r}-1)}{\mathsf{r}-\mathsf{p}}}}\left(\int \left(|g|^{\frac{\mathsf{r}-\mathsf{q}}{\mathsf{r}-1}}\right)^{\frac{\mathsf{q}\,(\mathsf{r}-1)}{\mathsf{r}-\mathsf{q}}}\right)^{\frac{1}{\frac{\mathsf{q}\,(\mathsf{r}-1)}{\mathsf{r}-\mathsf{q}}}}\\ &\leqslant \left(\int |f|^{\mathsf{p}}\right)^{\frac{\mathsf{r}-\mathsf{p}}{\mathsf{p}\,(\mathsf{r}-1)}}\left(\int |g|^{\mathsf{q}}\right)^{\frac{\mathsf{r}-\mathsf{q}}{\mathsf{q}\,(\mathsf{r}-1)}},\end{aligned}$$

d'où en revenant à l'inégalité de la Question **(b)** :

$$\begin{aligned}\int |f|\cdot|g| &\leqslant \left(\int |f|^{\frac{\mathsf{r}-\mathsf{p}}{\mathsf{r}-1}}\,|g|^{\frac{\mathsf{r}-\mathsf{q}}{\mathsf{r}-1}}\right)^{\frac{\mathsf{r}-1}{\mathsf{r}}}\left(\int |f|^{\mathsf{p}}\,|g|^{\mathsf{q}}\right)^{\frac{1}{\mathsf{r}}}\\ &\leqslant \left(\int |f|^{\mathsf{p}}\right)^{\frac{\mathsf{r}-\mathsf{p}}{\mathsf{p}\,(\mathsf{r}-1)}\,\frac{\mathsf{r}-1}{\mathsf{r}}}\left(\int |g|^{\mathsf{q}}\right)^{\frac{\mathsf{r}-\mathsf{q}}{\mathsf{q}\,(\mathsf{r}-1)}\,\frac{\mathsf{r}-1}{\mathsf{r}}}\left(\int |f|^{\mathsf{p}}\,|g|^{\mathsf{q}}\right)^{\frac{1}{\mathsf{r}}}\\ &= \left(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\right)^{\frac{\mathsf{r}-\mathsf{p}}{\mathsf{r}}}\left(\|g\|_{L^{\mathsf{q}}}\right)^{\frac{\mathsf{r}-\mathsf{q}}{\mathsf{r}}}\left(\int |f|^{\mathsf{p}}\,|g|^{\mathsf{q}}\right)^{\frac{1}{\mathsf{r}}}.\end{aligned}$$

(d) Ces faits sont conséquences directes, vues en cours, de l'inégalité de Hölder pour les exposants p et q conjugués l'un de l'autre, inégalité valable y compris quand $\mathsf{p}=\infty$, $\mathsf{q}=1$, et quand $\mathsf{p}=1$, $\mathsf{q}=\infty$.

(e) Il suffit d'appliquer l'inégalité de la Question **(a)** établie à la Question **(c)**, aux deux fonctions $y \longmapsto |f(x-y)|$ (au lieu de $y \longmapsto f(y)$ et de $y \longmapsto |g(y)|$), en notant que l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue donne :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x-y)\big|^{\mathsf{p}}\, dy \;=\; \Big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}}.$$

(f) Comme $|f|^{\mathsf{p}} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et comme $|g|^{\mathsf{q}} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, grâce à un théorème vu en cours d'après lequel $L^1 * L^1 \subset L^1$, nous déduisons de l'inégalité :

$$\bigg(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy\bigg)^{\mathsf{r}} \;=\; \Big(|f| * |g|(x)\Big)^{\mathsf{r}} \;\leqslant\; \underbrace{\big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{r-p}}\,\big(\|g\|_{L^{\mathsf{q}}}\big)^{\mathsf{r-q}}}_{\text{Constante} < \infty}\; |f|^{\mathsf{p}} * |g|^{\mathsf{q}}(x)$$
$$\in\; L^1 * L^1 \;\subset\; L^1,$$

que $\big(|f| * \big|g\big|\,(x)\big)^{\mathsf{r}} \in L^1$ est *intégrable*, c'est-à-dire plus précisément que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x-y)\big|\, |g(y)|\, dy\bigg)\, dx \;<\; \infty.$$

Cette dernière inégalité fait alors clairement voir que la fonction $y \longmapsto f(x-y)\, g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, c'est-à-dire que la convolée $f * g(x)$ est définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

(g) Grâce à ce qui précède et au savoureux risotto de la marque Tonelli :

$$\begin{aligned}
\Big(\big\|f * g\big\|_{L^{\mathsf{r}}}\Big)^{\mathsf{r}} &= \int_{\mathbb{R}^d} \bigg|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, dy\bigg|^{\mathsf{r}} dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x-y)\big|\, \big|g(y)\big|\bigg)^{\mathsf{r}} dx \\
\text{[Questions (a,b,c)]} \qquad &\leqslant \Big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{r-p}} \Big(\|g\|_{L^{\mathsf{q}}}\Big)^{\mathsf{r-q}} \int_{\mathbb{R}^d} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x-y)\big|^{\mathsf{p}}\, \big|g(y)\big|^{\mathsf{q}}\, dy\bigg)\, dx \\
\text{[Riso Tonelli Tino !]} \qquad &= \Big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{r-p}} \Big(\|g\|_{L^{\mathsf{q}}}\Big)^{\mathsf{r-q}} \int_{\mathbb{R}^d} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x-y)\big|^{\mathsf{p}}\, dx\bigg)\, \big|g(y)\big|^{\mathsf{q}}\, dy \\
[x-y =: x] \qquad &= \Big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{r-p}} \Big(\|g\|_{L^{\mathsf{q}}}\Big)^{\mathsf{r-q}} \Big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} \Big(\|g\|_{L^{\mathsf{q}}}\Big)^{\mathsf{q}} \\
&= \Big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{r}} \Big(\|g\|_{L^{\mathsf{q}}}\Big)^{\mathsf{r}}.
\end{aligned}$$

19. Examen 10

Exercice 1. On dit qu'une fonction mesurable $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ est *localement intégrable* si, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$, on a $\int_K |f| < \infty$. On écrit $f \in L^1_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

(a) Soit une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$, lisse à support compact. Montrer que $f * \varphi(x)$ est bien définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

(b) Montrer que $x \longmapsto f * \varphi(x)$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$. Indication: Pour se ramener au théorème vu en cours d'après lequel $L^1 * \mathscr{C}^\infty_c \subset \mathscr{C}^\infty$, en fixant un point $x_0 \in \mathbb{R}^d$ quelconque ainsi qu'un rayon arbitraire $r > 0$, on pourra montrer qu'il existe un compact L (dépendant de x_0 et de r) tel que, pour tout x dans la boule ouverte $\{|x - x_0| < r\}$, on a :

$$f * \varphi(x) \,=\, \big(f\,\mathbf{1}_L\big) * \varphi.$$

(c) Rappeler la définition d'une *suite régularisante* $\big\{\rho_n\big\}_{n=1}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$.

(d) L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème d'annulation suivant : *Si une fonction $f \in L^1_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}^d)$ satisfait :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,\varphi(y)\,dy \,=\, 0 \qquad \text{pour toute fonction } \varphi \,\in\, \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d),$$

alors $f(y) \,\equiv\, 0$ est identiquement nulle (la réciproque étant triviale). On se donne donc $f \in L^1_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant $0 = \int f\,\varphi$ pour toute $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$.

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, la fonction convolée $f * \rho_n = 0$ est nulle.

(e) On fixe un compact $K \subset \mathbb{R}^d$. Avec $r > 0$, on pose :

$$K_r \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\; \mathsf{dist}\,(x, K) \leqslant r\big\}.$$

Montrer que pour tout point $x \in K$ et tout entier $n \geqslant \frac{1}{r}$, on a :

$$f * \rho_n(x) \,=\, \big(f\,\mathbf{1}_{K_r}\big) * \rho_n(x).$$

(f) Pour ces mêmes $n \geqslant \frac{1}{r}$, montrer que :

$$\int_K \big|f(x)\big|\,dx \,\leqslant\, \int_{\mathbb{R}^d} \Big|f(x)\,\mathbf{1}_{K_r}(x) - \big(f\,\mathbf{1}_{K_r}\big) * \rho_n(x)\Big|\,dx.$$

(g) Montrer que $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in K$.

(h) Conclure que $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Exercice 2. Soit :

$$\Lambda \,:=\, \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\; x - y \notin \mathbb{Q}\big\}.$$

L'objectif est d'établir que Λ ne peut contenir aucun produit $E \times F$ de deux sous-ensembles mesurables $E \subset \mathbb{R}_x$ et $F \subset \mathbb{R}_y$ de mesures strictement positives finies $0 < m(E), m(F) < \infty$.

On raisonne par l'absurde en supposant que de tels E, F mesurables vérifient $E \times F \subseteq \Lambda$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose alors :

$$\varphi(x) := \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x+y)\, \mathbf{1}_F(y)\, dy \qquad\qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(a) Montrer que $x \longmapsto \varphi(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = m(E)\, m(F).$$

(c) On note $E - F := \big\{x_1 - y_1 \in \mathbb{R}\colon\ x_1 \in E,\, y_1 \in F\big\}$. Montrer que $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \notin E - F$.

(d) Achever le raisonnement par l'absurde, *i.e.* établir la non-existence de $E \times F \subset \Lambda$.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$:

$$h_n(x) := e^{-\frac{2\pi\,|x|}{n}}.$$

On rappelle que la transformée de Fourier $\widehat{f}$ d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est définie pour $\xi \in \mathbb{R}$ par :

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx \qquad\qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

(a) Montrer que la transformée de Fourier de h_n est :

$$\widehat{h}_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\, \frac{n}{1+n^2\xi^2}.$$

(b) Montrer que $\big\{\widehat{h}_n(\xi)\big\}_{n=1}^{\infty}$ est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R})$.

(c) Soit maintenant une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$. Avec $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, montrer que l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f * \widehat{h}_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, h_n(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi.$$

Indication: On pourra utiliser le fait que h_n est paire, ou le fait que $\widehat{h}_n$ est paire.

(d) On suppose de plus que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, h_n(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi.$$

(e) Montrer qu'il existe une sous-suite $\big\{f * \widehat{h}_{n_k}\big\}_{k=1}^{\infty}$ qui converge (simplement) presque partout vers f.

(f) Toujours avec $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ aussi, montrer la formule d'inversion de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi = f(x) \qquad\qquad (\text{p.p. } x \in \mathbb{R}).$$

(g) Si $f \in L^1$ avec $\widehat{f} \in L^1$ est *continue* en un point donné $x_0 \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x_0\xi}\, d\xi = f(x_0).$$

Exercice 4. Soit un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie :

$$m(E) < \infty.$$

Soit une fonction positive $f \colon E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ mesurable et intégrable, avec, donc, $0 \leqslant \int_E f < \infty$.

(a) Montrer l'implication :

$$m\big(\{f > 0\}\big) < 1 \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad 0 = \lim_{\mathsf{p} \to 0^+} \|f\|_{L^{\mathsf{p}}(E)}.$$

Indication: Écrire $f^{\mathsf{p}} = f^{\mathsf{p}} \cdot \mathbf{1}_{\{f>0\}}$ avec $0 < \mathsf{p} < 1$, et travailler avec $\mathsf{q} := \frac{1}{\mathsf{p}}$.

(b) Montrer que :

$$\lim_{\mathsf{p} \to 0^+} \int_E f^{\mathsf{p}} = m\big(\{f > 0\}\big).$$

(c) Montrer que pour tout $\mathsf{p} \in \,]0,1[$ et pour tout $x \in \,]0,\infty[$, on a la majoration :

$$\frac{|x^{\mathsf{p}} - 1|}{\mathsf{p}} \leqslant x + \big|\log x\big|.$$

Indication: Montrer d'abord pour $x \in \,]0,1[$ que :

$$\frac{|x^{\mathsf{p}} - 1|}{\mathsf{p}} \leqslant \big|\log x\big|.$$

(d) On suppose désormais de plus que $f(x) > 0$ pour *tout* $x \in E$, et que $\log f$ est *aussi* intégrable (sur E).

Montrer alors que :

$$\lim_{\mathsf{p} \to 0^+} \int_E \frac{f^{\mathsf{p}} - 1}{\mathsf{p}} = \int_E \log f.$$

(e) On suppose maintenant de surcroît que :

$$1 = m(E).$$

Montrer que :

$$\lim_{p \to 0^+} \|f\|_{L^{\mathsf{p}}(E)} = \exp\Big(\int_E \log f\Big).$$

20. Corrigé de l'examen 10

Exercice 1. (a) On a $\mathsf{Supp}\,\varphi \subset \{|x| \leqslant R\}$ avec $R \gg 1$ assez grand. Alors dans la définition formelle de la convolution en un point $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} f * \varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,\varphi(x-y)\,dy \\ &= \int_{|y-x|\leqslant R} f(y)\,\varphi(x-y)\,dy, \end{aligned}$$

nous constatons que l'intégration s'effectue en fait sur le compact $\big\{y \in \mathbb{R}^d\colon\ |y-x| \leqslant R\big\}$, et donc, cette intégrale existe bien (au sens de Lebesgue), grâce à l'hypothèse que $f \in L^1_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}^d)$, vu que φ est continue-bornée.

(b) Puisque la différentiabilité à n'importe quel ordre est une propriété *locale*, valable dans des voisinages arbitrairement petits de tout point donné, il suffit de faire voir que $x \longmapsto f * \varphi(x)$ est $\mathscr{C}^\infty$ dans n'importe quelle belle-petite-boule ouverte $\{|x - x_0| < r\}$.

Mais toujours avec :

$$\mathsf{Supp}\,\varphi \subset \big\{z \in \mathbb{R}^d\colon\ |z| \leqslant R\big\},$$

c'est-à-dire avec :

$$y \longmapsto \varphi(x-y) \equiv 0 \qquad \text{lorsque} \qquad |y-x| > R,$$

nous affirmons que :

$$|y-x_0| > r+R \qquad \Longrightarrow \qquad |y-x| > R.$$

En effet, l'inégalité du triangle :

$$\begin{aligned} r+R < |y-x_0| &= \big|y-x+x-x_0\big| \\ &\leqslant |y-x| + |x-x_0|, \end{aligned}$$

donne bien :

$$\begin{aligned} r+R &< |y-x| + |x-x_0| \\ r+R-|x-x_0| &< |y-x|, \\ [-r < -|x-x_0|] \qquad r+R-r &< |y-x|, \\ R &< |y-x|. \end{aligned}$$

Par conséquent, dans l'intégrale de convolution :

$$f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,\varphi(x-y)\,dy,$$

lorsque x est cantonné à varier dans sa belle petite boule locale $\{|x - x_0| < r\}$, et quand la variable y d'intégration est assez loin de x_0 au sens où $|y - x_0| > r + R$, les valeurs de $x - y$ dans l'argument de $\varphi(x - y)$ satisfont toutes $|y - x| > R$, donc sont hors du support de φ, et donc, sont dans la « zone extérieure » où $\varphi \equiv 0$.

Toutes ces considérations nous permettent donc d'écrire que l'intégrale de convolution ne porte que sur le compact :

$$L \,:=\, \big\{y \in \mathbb{R}^d :\ \ |y-x_0| \leqslant r+R\big\},$$

et donc nous pouvons écrire pour $|x-x_0|<r$ coincé dans sa bulle :

$$\begin{aligned} f*\varphi(x) \,&=\, \int_{|y-x_0|\leqslant r+R} f(y)\,\varphi(x-y)\,dy \\ &=: \int_L f(y)\,\varphi(x-y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,1_L(y)\,\varphi(x-y)\,dy \\ &= \big(f\,1_L\big)*\varphi(x). \end{aligned}$$

Enfin, comme $f \in L^1_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}^d)$ par hypothèse, il vient $f\,1_L \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et la conclusion que $x \longmapsto f*\varphi(x)$ est $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^d$ quelconque est offerte par un théorème du cours d'après lequel :

$$L^1 * \mathscr{C}^\infty_c \,\subset\, \mathscr{C}^\infty.$$

(c) En vertu du cours magistral, on appelle *suite régularisante* dans $\mathbb{R}^d$ toute suite :

$$\big\{\rho_n\big\}_{n=1}^\infty$$

de fonctions satisfaisant pour tout $n \geqslant 1$:

(1) $\rho_n \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$;

(2) $\rho_n \geqslant 0$;

(3) $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n = 1$;

(4) $\mathsf{supp}\,\rho_n \subset \big\{|x| \leqslant \frac{1}{n}\big\}$;

le correcteur paresseux n'ayant eu ici qu'à copier-coller le fichier LaTeXde son cours !

(d) Tout d'abord, faisons observer que la convolée $f*\rho_n(x)$ existe bel et bien :

$$f*\rho_n(x) \,=\, \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,\rho_n(y)\,dy \,=\, \int_{|y|\leqslant\frac{1}{n}} f(x-y)\,\rho_n(y)\,dy,$$

puisque cette intégrale se ramène à une intégration, sur le (petit) compact-boule $\big\{|y| \leqslant \frac{1}{n}\big\}$, de la fonction $y \longmapsto f(x-y)\,\rho_n(y)$ qui appartient manifestement à $L^1_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}^d)$, puisque $f \in L^1_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et puisque ρ_n est $\mathscr{C}^\infty$ bornée.

Pour $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ quelconque fixé, la fonction :

$$y \,\longmapsto\, \varphi(y) \,:=\, \rho_n(x-y),$$

appartient à $\mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$, puisque $\rho_n(z) \equiv 0$ pour $|z| > \frac{1}{n}$, d'où $\rho_n(x-y) \equiv 0$ pour $|y-x| > \frac{1}{n}$.

Alors l'hypothèse principale s'applique directement :

$$\begin{aligned} f*\rho_n(x) \,&=\, \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,\underbrace{\rho_n(x-y)}_{=:\,\varphi(y)}\,dy \\ &=\, 0. \end{aligned}$$

(e) Par définition, pour $x \in K$ quelconque :

$$f * \rho_n(x) \,=\, \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, \rho_n(x-y)\, dy.$$

Or dès que $n \geqslant \frac{1}{r}$, c'est-à-dire dès que $\frac{1}{n} \leqslant r$, on a par définition de K_r :

$$\forall\, x \,\in\, K \quad \forall\, y \,\notin\, K_r \quad |y-x| \,>\, r \,\geqslant\, \tfrac{1}{n},$$

ce qui montre que la fonction $y \longmapsto \rho_n(x-y)$ est identiquement nulle pour y hors de K_r, et donc :

$$\begin{aligned}
f * \rho_n(x) \,&=\, \int_{K_r} f(y)\, \rho_n(x-y)\, dy \\
&=\, \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, \mathbf{1}_{K_r}(y)\, \rho_n(x-y)\, dy \\
&=\, \big(f\, \mathbf{1}_{K_r}\big) * \rho_n(x).
\end{aligned}$$

(f) Tout d'abord, la Question **(d)** donne pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$0 \,=\, f * \rho_n(x),$$

et si, en particulier, $x \in K$, la Question **(e)** permet d'écrire :

$$0 \,=\, f * \rho_n(x) \,=\, \big(f\, \mathbf{1}_{K_r}\big) * \rho_n(x).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int_K \big|f(x)\big|\, dx \,&=\, \int_K \Big|f(x)\, \mathbf{1}_{K_r}(x) - 0\Big|\, dx \\
&=\, \int_K \Big|f(x)\, \mathbf{1}_{K_r}(x) - \underline{\big(f\, \mathbf{1}_{K_r}\big) * \rho_n(x)}\Big|\, dx \\
&\leqslant\, \int_{\mathbb{R}^d} \Big|f(x)\, \mathbf{1}_{K_r}(x) - \big(f\, \mathbf{1}_{K_r}\big) * \rho_n(x)\Big|\, dx.
\end{aligned}$$

(g) Si nous réinterprétons l'égalité que nous venons d'obtenir sous la forme

$$\int_K \big|f(x)\big|\, dx \,\leqslant\, \Big\| \underbrace{f\, \mathbf{1}_{K_r}}_{\in\, L^1} - \big(f\, \mathbf{1}_{K_r}\big) * \rho_n(x) \Big\|_{L^1},$$

un théorème du cours nous garantit que le membre de droite temps vers 0 lorsque $n \longrightarrow \infty$.

Donc :

$$\int_K \big|f(x)\big|\, dx \,=\, 0.$$

(h) Tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$ peut être inclus dans un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ qui le contient dans son intérieur, par exemple une grosse boule fermée-bornée.

Et alors le résultat de la Question **(g)** montre que $f(x) \equiv 0$ pour tout x dans un voisinage ouvert de x_0, ce qui conclut.

Exercice 2. **(a)** Pour $h \in \mathbb{R}$ petit, estimons :

$$
\begin{aligned}
\big|\varphi(x+h)-\varphi(x)\big| &= \bigg|\int_{\mathbb{R}} \Big(\mathbf{1}_E(x+h+y)-\mathbf{1}_E(x+y)\Big)\,\mathbf{1}_F(y)\,dy\bigg| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \Big|\mathbf{1}_E(x+y+h)-\mathbf{1}_E(x+y)\Big|\,dy \\
[x+y \;=:\; y] \qquad &= \int_{\mathbb{R}} \big|\mathbf{1}_E(y+h)-\mathbf{1}_E(y)\big|\,dy \\
&= \big\|\tau_{-h}(\mathbf{1}_E)-\mathbf{1}_E\big\|_{L^1} \xrightarrow[h \longrightarrow 0]{} 0,
\end{aligned}
$$

cette norme L^1 d'une différence entre la fonction $\mathbf{1}_E \in L^1$ et sa translatée $\tau_{-h}\big(\mathbf{1}_E\big)$ tendant vers 0 lorsque $h \longrightarrow 0$ grâce à un théorème du cours.

(b) Toutes les fonctions étant $\geqslant 0$, Fubini-Tonelli donne :

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x+y)\,\mathbf{1}_F(y)\,dy\bigg)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x+y)\,dx\bigg)\,\mathbf{1}_F(y)\,dy \\
[x+y \;=:\; x] \qquad &= \int_{\mathbb{R}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x)\,dx\bigg)\,\mathbf{1}_F(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} m(E)\,\mathbf{1}_F(y)\,dy \\
&= m(E)\,M(F).
\end{aligned}
$$

(c) Clairement :

$$
\varphi(x) \;=\; \int_F \mathbf{1}_E(x+y)\,dy.
$$

Par conséquent :

$$
\begin{aligned}
x \;\notin\; E-F \qquad &\Longleftrightarrow \qquad x+y \;\notin\; E, \quad \forall\, y \in F \\
&\Longrightarrow \qquad \mathbf{1}_E(x+y) \;=\; 0, \quad \forall\, y \in F \\
&\Longrightarrow \qquad \varphi(x) \;=\; \int_F \mathbf{1}_E(x+y)\,dy \;=\; \int_F 0\,dy \;=\; 0.
\end{aligned}
$$

(d) Puisque $0 < m(E)\,m(F)$, il vient grâce à la Question **(b)** :

$$
\emptyset \;\neq\; \{\varphi > 0\}.
$$

Par conséquent, comme φ est continue d'après la Question **(a)**, il existe nécessairement un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ *non vide* tel que :

$$
\emptyset \;\neq\; I \;\subset\; \{\varphi > 0\}
$$

d'où grâce à la Question **(c)** :

$$
I \;\subset\; \{\varphi > 0\} \overset{\textbf{(c)}}{\subset} E-F.
$$

Or $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc :

$$
\exists\, z_0 \;\in\; \mathbb{Q} \cap I \;\subset\; \mathbb{Q} \cap \big(E-F\big),
$$

d'où :

$$\exists\, z_0 \,\in\, \mathbb{Q} \cap \big(E - F\big),$$
$$\exists\, z_0 \,\in\, \mathbb{Q}, \qquad z_0 \,=\, x_0 - y_0,\ \exists\, x_0 \,\in\, E,\ \exists\, y_0 \,\in\, F.$$

Mais avec ces deux x_0, y_0 que nous venons de trouver, si nous revenons à la définition de l'ensemble « bizarre » Λ, et à l'hypothèse de raisonnement par l'absurde :

$$(x_0, y_0) \,\in\, E \times F \,\subset\, \Lambda \,=\, \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x - y \notin \mathbb{Q}\big\},$$

nous déduisons une contradiction conclusive :

$$\mathbb{Q} \,\ni\, \underbrace{x_0 - y_0}_{z_0} \,\notin\, \mathbb{Q}.$$

Ainsi, le sandwich-salade Λ ne peut contenir aucun produit carné $E \times F$ d'ensembles mesurables $E \subset \mathbb{R}_x$ et $F \subset \mathbb{R}_y$ de mesures strictement positives finies.

Exercice 3. (a) Calculons :

$$\begin{aligned}
\widehat{h}_n(\xi) \,&=\, \int_{-\infty}^0 e^{\frac{2\pi x}{n}}\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx + \int_0^\infty e^{-\frac{2\pi x}{n}}\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx \\
&=\, \left[\frac{e^{(\frac{2\pi}{n} - 2i\pi\xi)\,x}}{\frac{2\pi}{n} - 2i\pi\xi}\right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{e^{(-\frac{2\pi}{n} - 2i\pi\xi)\,x}}{-\frac{2\pi}{n} - 2i\pi\xi}\right]_0^\infty \\
&=\, \frac{1}{\frac{2\pi}{n} - 2i\pi\xi} + \frac{1}{\frac{2\pi}{n} + 2i\pi\xi} \\
&=\, \frac{2\,\frac{2\pi}{n}}{\frac{4\pi^2}{n^2} + 4\pi^2\xi^2} \\
&=\, \frac{1}{\pi}\,\frac{n}{1 + n^2\xi^2}.
\end{aligned}$$

(b) Trois conditions doivent être vérifiées.

- Les $\widehat{h}_n$ sont à valeurs positives (clair).
- Les $\widehat{h}_n$ satisfont $\widehat{h}_n \in L^1(\mathbb{R})$ et sont constamment d'intégrale égale à 1, parce que :

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\pi}\,\frac{n}{1+n^2\xi^2}\, d\xi \,=\, \frac{1}{\pi}\,\Big[\mathsf{arctan}\,\big(n\,\xi\big)\Big]_{-\infty}^\infty \,=\, \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \big(-\,\frac{\pi}{2}\big)\right) \,=\, 1 \qquad {\scriptstyle (\forall\, n \geqslant 1)}.$$

- Pour tout $\delta > 0$ arbitrairement petit fixé, les $\widehat{h}_n$ satisfont :

$$\begin{aligned}
0 \,&\overset{?}{=}\, \lim_{n\to\infty} \int_{|\xi|>\delta} \frac{1}{\pi}\,\frac{n}{1+n^2\xi^2}\, d\xi \\
&=\, \frac{1}{\pi}\,\lim_{n\to\infty}\left(\Big[\mathsf{arctan}\,\big(n\,\xi\big)\Big]_{-\infty}^{-\delta} + \Big[\mathsf{arctan}\,\big(n\,\xi\big)\Big]_\delta^\infty\right) \\
&=\, \frac{1}{\pi}\,\lim_{n\to\infty}\left(\mathsf{arctan}\,\big(-\,n\,\delta\big) - \big(-\,\frac{\pi}{2}\big) + \frac{\pi}{2} - \mathsf{arctan}\,\big(n\,\delta\big)\right) \\
&=\, \frac{1}{\pi}\left(-\,\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \,=\, 0 \qquad \text{OUI !}
\end{aligned}$$

(c) Par définition :

$$f * \widehat{h}_n(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, \widehat{h}_n(x-y)\, dy.$$

Comme $f \in L^1$, et comme :

$$\big\|\widehat{h}_n\big\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})} \;\leqslant\; \big\|h_n\big\|_{L^1(\mathbb{R})} \;<\; \infty,$$

cette intégrale a un sens, *i.e.* converge au sens de Lebesgue.

Remplaçons-y :

$$\begin{aligned} \widehat{h}_n(x-y) \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\xi)\, e^{-2i\pi(x-y)\xi}\, d\xi \\ [\xi \longmapsto -\xi] \qquad &=\; \int_{\infty}^{-\infty} h_n(-\xi)\, e^{-2i\pi(x-y)(-\xi)}\, d(-\xi) \\ [h_n \text{ est paire}] \qquad &=\; \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\xi)\, e^{2i\pi(x-y)\xi}\, d\xi, \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$f * \widehat{h}_n(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \bigg(\int_{-\infty}^{\infty} h_n(\xi)\, e^{2i\pi(x-y)\xi}\, d\xi \bigg)\, dy.$$

Mais comme :

$$\big|e^{2i\pi(x-y)\xi}\big| \;\leqslant\; 1 \qquad\qquad (\forall\, x, y, \xi \in \mathbb{R}),$$

et comme la fonction des deux variables :

$$(y, \xi) \;\longmapsto\; f(y)\, e^{-\frac{2\pi|\xi|}{n}} \;=\; f(y)\, h_n(\xi),$$

appartient visiblement à $L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ — tandis que x joue le rôle de paramètre-figurant dans cette resucée du cours —, le théorème de Fubini-Tonelli nous autorise à *intervertir* l'ordre des intégrations, ce qui conclut :

$$\begin{aligned} f * \widehat{h}_n(x) \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} \bigg(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-2i\pi y\xi}\, dy \bigg)\, h_n(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi \\ &=\; \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, h_n(\xi)\, e^{2i\pi\xi x}\, d\xi. \end{aligned}$$

(d) Grâce la fonction-dominatrice intégrable indépendante de n qui majore :

$$\Big| \widehat{f}(\xi)\, e^{-\frac{2\pi|\xi|}{n}}\, e^{2i\pi x\xi} \Big| \;\leqslant\; \big|\widehat{f}(\xi)\big|,$$

l'égalité demandée est une conséquence directe du théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, h_n(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi \;&\overset{\text{CD}}{=}\; \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \Big(\widehat{f}(\xi)\, e^{-\frac{2\pi|\xi|}{n}}\, e^{2i\pi x\xi} \Big)\, d\xi \\ &=\; \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\cdot 1 \cdot e^{2i\pi x\xi}\, d\xi. \end{aligned}$$

(e) Tout d'abord, grâce à la Question **(b)** qui nous a demandé de vérifier que la suite $\big\{\widehat{h}_n\big\}_{n=1}^{\infty}$ est une *approximation de l'unité*, un théorème du cours nous offre la convergence en norme L^1 :

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty} \big\| f - f * \widehat{h}_n \big\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Mais alors, un autre théorème du cours que nous avons énoncé après avoir établi que $L^1(\mathbb{R})$ est *complet*, nous garantit qu'après passage éventuel (et souvent incontournable) à une *sous-suite appropriée*, la convergence en norme L^1 implique la convergence ponctuelle simple presque partout :

$$0 = \lim_{k\to\infty} \Big(f(x) - f * \widehat{h}_{n_k}(x)\Big) \qquad \text{(p.p. } x\in\mathbb{R}\text{)}.$$

(f) Il suffit de synthétiser ce que nous avons vu dans ce qui précède, à savoir qu'en presque tout $x \in \mathbb{R}$, il est vrai que :

$$\begin{aligned}
&\text{[Question (e)]} \qquad & f(x) &= \lim_{k\to\infty} f * \widehat{h}_{n_k}(x) \\
&\text{[Question (c)]} \qquad & &= \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, h_{n_k}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi \\
&\text{[Question (d)]} \qquad & &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\cdot 1\cdot e^{2i\pi x\xi}\, d\xi.
\end{aligned}$$

(g) Par l'absurde, supposons que :

$$0 < \Big|\overline{\mathscr{F}}\big(\mathscr{F}(f)\big)(x_0) - f(x_0)\Big|.$$

Or comme $\widehat{f} = \mathscr{F}(f)$ est intégrable, nous savons que sa transformée de Fourier conjuguée :

$$\overline{\mathscr{F}}\colon \quad x \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi,$$

qui est une intégrale à paramètre, avec intégrande dominé uniformément — vis-à-vis du paramètre — par la fonction $|\widehat{f}(\xi)|$, est une fonction *continue* de x, sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Ainsi, si f est continue en x_0, et puisque $\overline{\mathscr{F}}\big(\mathscr{F}(f)\big)$ l'est aussi (en particulier) en x_0, l'inégalité ci-dessus doit rester vraie dans un petit voisinage de x_0 :

$$0 < \Big|\overline{\mathscr{F}}\big(\mathscr{F}(f)\big)(x_0) - f(x_0)\Big| \qquad (|x-x_0|<\delta),$$

avec $\delta > 0$ petit, en contradiction (flagrante !) avec l'égalité établie à la Question **(f)** :

$$0 = \overline{\mathscr{F}}\big(\mathscr{F}(f)\big)(x) - f(x),$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, donc par restriction aussi, pour presque tout :

$$x \in \big]x_0 - \delta,\ x_0 + \delta\big[.$$

Exercice 4. **(a)** Comme on peut supposer $0 < \mathsf{p} < 1$ puisque p tend vers 0^+, l'exposant inverse :

$$\mathsf{q} := \frac{1}{\mathsf{p}},$$

satisfait $1 < \mathsf{q} < \infty$, et donc, nous allons pouvoir appliquer l'inégalité de Hölder à la fonction-produit :

$$f^{\mathsf{p}} \cdot \mathbf{1}_{\{f>0\}}.$$

Observons tout d'abord que l'exposant conjugué q' de q qui satisfait par définition :

$$\frac{1}{\mathsf{q}} + \frac{1}{\mathsf{q}'} = 1,$$

vaut :

$$\mathsf{q}' = \frac{1}{1-\frac{1}{\mathsf{q}}} = \frac{\mathsf{q}}{\mathsf{q}-1} = \frac{\frac{1}{\mathsf{p}}}{\frac{1}{\mathsf{p}}-1} = \frac{1}{1-\mathsf{p}}.$$

Ainsi avec les exposants conjugués :

$$\mathsf{q} = \frac{1}{\mathsf{p}} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{q}' = \frac{1}{1-\mathsf{p}},$$

Hölder donne :

$$\begin{aligned}\int_E f^{\mathsf{p}} &= \int_E f^{\mathsf{p}} \cdot \mathbf{1}_{\{f>0\}} \\ &\leqslant \left(\int_E \big(f^{\mathsf{p}}\big)^{1/\mathsf{p}}\right)^{1/(1/\mathsf{p})} \left(\int_E \big(\mathbf{1}_{\{f>0\}}\big)^{1/(1-\mathsf{p})}\right)^{1/(1/(1-\mathsf{p}))} \\ &= \left(\int_E f\right)^{\mathsf{p}} \left(\int_E \mathbf{1}_{\{f>0\}}\right)^{1-\mathsf{p}}.\end{aligned}$$

Introduisons le réel :

$$\alpha := m\big(\{f>0\}\big),$$

qui satisfait par hypothèse $0 \leqslant \alpha < 1$, d'où :

$$0 = \lim_{\mathsf{p}\to 0^+} \alpha^{\frac{1}{\mathsf{p}}}.$$

Alors en prenant la puissance $\frac{1}{\mathsf{p}}$-ième de l'inégalité obtenue à l'instant, nous déduisons une majoration :

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{\mathsf{p}}(E)} &\leqslant \left(\int_E f\right) \Big(m\big(\{f>0\}\big)\Big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}-1} \\ &= \|f\|_{L^1(E)}\ \frac{1}{\alpha}\ \alpha^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \\ [f \in L^1(E)!] \qquad &= \text{constante}\ \alpha^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \xrightarrow[\mathsf{p}\longrightarrow 0^+]{} 0,\end{aligned}$$

qui est conclusive.

(b) Pour $\mathsf{p} \in \,]0,1[$, on a, suivant que $0 \leqslant f < 1$ ou que $1 \leqslant f$, toujours :

$$\big(0 \leqslant\big) \quad f^{\mathsf{p}} \leqslant f+1,$$

où $f+1$ est intégrable (sur E) puisque f l'est et puisque $m(E) < \infty$ depuis le début.

D'autre part :

$$f^{\mathsf{p}} \xrightarrow[\mathsf{p}\longrightarrow 0^+]{} \mathbf{1}_{\{f>0\}}.$$

Donc le théorème de convergence dominée CD s'applique :

$$\begin{aligned}\lim_{\mathsf{p}\to 0^+} \int_E f^{\mathsf{p}} &\overset{\text{CD}}{=} \int_E \lim_{\mathsf{p}\to 0^+} f^{\mathsf{p}} \\ &= \int_E \mathbf{1}_{\{f>0\}} \\ &= m\big(\{f>0\}\big).\end{aligned}$$

(c) Premièrement, pour $x \in]0,1[$ fixé, avec la fonction $\mathsf{p} \longmapsto e^{\mathsf{p} \log x}$ considérée pour $0 < \mathsf{p} < 1$ dont la dérivée est $\log x \, e^{\mathsf{p} \log x}$, le théorème des accroissement finis fournit un $\theta_{\mathsf{p}} \in]0, \mathsf{p}[$ tel que :

$$\frac{e^{\mathsf{p} \log x} - 1}{\mathsf{p} - 0} = \log x \, e^{\theta_{\mathsf{p}} \log x},$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{|x^{\mathsf{p}} - 1|}{\mathsf{p}} &\leqslant \big|\log x\big| \, \big|e^{\theta_{\mathsf{p}} \log x}\big| \\ {\scriptstyle [\log x \,<\, 0]} \qquad &\leqslant \big|\log x\big| \cdot 1. \end{aligned}$$

Deuxièmement, pour $0 < \mathsf{p} < 1$ fixé, avec la fonction $x \longmapsto x^{\mathsf{p}}$ envisagée sur l'intervalle $[1, \infty[$ et de dérivée $\mathsf{p} \, x^{\mathsf{p}-1}$, le théorème des accroissements finis donne un $\eta_x \in]1, x[$ tel que :

$$\begin{aligned} \frac{x^{\mathsf{p}} - 1}{x - 1} &= \mathsf{p} \, \eta_x^{\mathsf{p}-1} \\ &\leqslant \mathsf{p}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{|x^{\mathsf{p}} - 1|}{\mathsf{p}} \leqslant x - 1 \leqslant x.$$

Enfin, en additionnant ces deux majorants, nous obtenons la majoration annoncée, valable pour tout $x \in]0, \infty[$, y compris pour $x = 1$:

$$\frac{|x^{\mathsf{p}} - 1|}{\mathsf{p}} \leqslant x + \big|\log x\big|.$$

(d) Pour un réel fixé $\beta > 0$, au vu du développement limité en $\mathsf{p} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\beta^{\mathsf{p}} - 1}{\mathsf{p}} = \frac{e^{\mathsf{p} \log \beta} - 1}{\mathsf{p}} &= \frac{1 + \mathsf{p} \log \beta + \mathsf{p}^2 \, (\cdots) - 1}{\mathsf{p}} \\ &= \log \beta + \mathrm{O}(\mathsf{p}), \end{aligned}$$

il est clair que la famille de fonctions paramétrées par $0 < \mathsf{p} < 1$:

$$x \longmapsto \frac{f(x)^{\mathsf{p}} - 1}{\mathsf{p}},$$

tend simplement lorsque $\mathsf{p} \longrightarrow 0^+$ vers :

$$x \longmapsto \log f(x),$$

D'autre part, comme la Question **(c)** qui précède nous a offert la majoration :

$$\frac{|f^{\mathsf{p}} - 1|}{\mathsf{p}} \leqslant f + \big|\log f\big|,$$

par la fonction-dominatrice positive $f + |\log f|$ qui est intégrable sur E d'après les hypothèses qui ont été faites, une simple application du théorème de convergence dominée CD conclut :

$$\begin{aligned} \lim_{\mathsf{p} \to 0^+} \int_E \frac{f^{\mathsf{p}} - 1}{\mathsf{p}} &\overset{\text{CD}}{=} \int_E \lim_{\mathsf{p} \to 0^+} \frac{f^{\mathsf{p}} - 1}{\mathsf{p}} \\ &= \int_E \log f. \end{aligned}$$

(e) Comme $\{f > 0\} = E$ depuis la Question **(d)**, et comme maintenant $1 = m(E)$, il appert que le résultat de la Question **(b)** devient :

$$1 = m(E) = m\big(\{f > 0\}\big) \overset{\textbf{(b)}}{=} \lim_{\mathsf{p} \to 0^+} \int_E f^{\mathsf{p}}.$$

Ensuite, puisque pour tout $0 < \mathsf{p} < 1$:

$$\|f\|_{L^{\mathsf{p}}(E)} = \exp\bigg(\frac{1}{\mathsf{p}} \log \underbrace{\int_E f^{\mathsf{p}}}_{=:\,\gamma}\bigg),$$

et puisque $\log \gamma \sim \gamma - 1$ quand $\gamma \longrightarrow 1$, on a, quand $\mathsf{p} \longrightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathsf{p}} \log \int_E f^{\mathsf{p}} &\sim \frac{1}{\mathsf{p}}\bigg(\int_E f^{\mathsf{p}} - 1\bigg) \\ &= \int_E \frac{f^{\mathsf{p}} - 1}{\mathsf{p}} \\ \text{[Question } \textbf{(d)}\text{]} \qquad &\xrightarrow[\mathsf{p} \longrightarrow 0^+]{} \int_E \log f, \end{aligned}$$

la continuité évidente de la fonction exponentielle permet d'atteindre la conclusion libératrice :

$$\lim_{\mathsf{p} \to 0^+} \|f\|_{L^{\mathsf{p}}(E)} = \exp\bigg(\int_E \log f\bigg).$$