Changement de variables dans les intégrales en théorie de Borel-Lebesgue

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Motivation et énoncé du théorème

En dimension 1, à savoir sur la droite numérique $\mathbb{R}$, la formule de changement de variable dans une intégrale riemannienne s'exprime le plus souvent dans une circonstance différentiable bijective.

Théorème 1.1. *Soit un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, soit $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application $\mathscr{C}^1$ avec $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$, d'où le difféomorphisme :*

$$\varphi\big([a,b]\big) \,=\, \big[\varphi(a),\, \varphi(b)\big],$$

avec $-\infty < \varphi(a) < \varphi(b) < \infty$. Alors pour toute fonction Riemann-intégrable $f\colon [\varphi(a), \varphi(b)] \longrightarrow \mathbb{C}$, la composée $f \circ \varphi$ est aussi Riemann-intégrable et :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt \;=\; \int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\, \varphi'(x)\, dx.$$

Lorsque $\varphi' < 0$, cette formule est tout aussi satisfaite. $\square$

En prenant $f \equiv 1$, on retrouve la formule fondatrice du calcul intégral :

$$\varphi(b) - \varphi(a) \;=\; \int_a^b \varphi'(x)\, dx.$$

Question 1.2. *Comment généraliser cette formule à $\mathbb{R}^d$ en dimension quelconque $d \geqslant 1$, dans le cadre de la théorie de l'intégration de Borel et Lebesgue ?*

Soit donc $d \geqslant 1$, soient deux ouverts $U \subset \mathbb{R}^d$ et $V \subset \mathbb{R}^d$, et soit :

$$\varphi\colon \quad U \xrightarrow{\sim} V$$

un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$. Si $x = (x_1, \dots, x_d)$ sont les coordonnées canoniques sur l'espace-source $\mathbb{R}^d \supset U$, et si $y = (y_1, \dots, y_d)$ sont les coordonnées sur l'espace-but $\mathbb{R}^d \supset V$, un tel difféomorphisme s'écrit :

$$y_1 \,=\, \varphi_1(x_1, \dots, x_d), \;\; \dots\dots\dots, \;\; y_d \,=\, \varphi_d(x_1, \dots, x_d),$$

où les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_d \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, et le fait que $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ est un difféomorphisme s'exprime alors par l'hypothèse que φ est bijectif ainsi que par la non-annulation de son *déterminant jacobien :*

$$\mathsf{Jac}\, \varphi(x) := \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_d} \end{vmatrix} (x),$$

en tout point $x \in U$.

Le Théorème d'inversion locale montre que l'inverse $\varphi^{-1} \colon V \xrightarrow{\sim} U$ est aussi un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$. L'énoncé principal de ce chapitre, qui requérera une démonstration longue et endurante, révèle comment changer les variables dans les intégrables en dimension $d \geqslant 1$.

Théorème 1.3. [Changement de variables] *Soit $\varphi \colon U \xrightarrow{\sim} V$ un difféomorphisme $\mathscr{C}^1$ entre deux ouverts $U \subset \mathbb{R}^d$ et $V \subset \mathbb{R}^d$. Alors pour toute fonction mesurable $f \colon V \longrightarrow \mathbb{C}$, la composée $f \circ \varphi$:*

$$U \overset{\varphi}{\xrightarrow{\sim}} V \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

est aussi mesurable, et si f est de plus Lebesgue-intégrable, $f \circ \varphi$ est aussi Lebesgue-intégrable avec la formule :

$$\int_V f(y)\, dy = \int_U f \circ \varphi(x) \, \big| \mathsf{Jac}\, \varphi(x) \big| \, dx.$$

La présence d'une valeur absolue dans cette formule de changement de variables en dimension quelconque $d \geqslant 1$ provient du fait que les mesures de Lebesgue $dx = dx_1 \cdots dx_d$ sur le $\mathbb{R}^d$-source et $dy = dy_1 \cdots dy_d$ sur le $\mathbb{R}^d$-but ont été *ab initio* définies comme positives (à la physicienne), contrairement au dx riemannien sur $\mathbb{R}$ en dimension 1, lequel possède un signe ; d'ailleurs, même en dimension $d = 1$, la théorie de Lebesgue requiert une valeur absolue :

$$\int_J f = \int_I f \circ \varphi \cdot \big| \varphi' \big|,$$

puisque si la fonction $\varphi \in \mathscr{C}^1$ du Théorème 1.1 a une dérivée négative $\varphi' < 0$, donc décroît, si $I := [a, b]$, si $J := [\varphi(b), \varphi(a)]$ — noter l'inversion —, il faut effectivement voir en théorie de Lebesgue à travers le miroir de la théorie de Riemann que l'on est forcé d'insérer une valeur absolue :

$$\begin{aligned} \int_J f &= \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(t)\, dt \\ &= - \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt \\ \text{[Théorème 1.1]} \qquad &= \int_a^b f \circ \varphi(x) \big[- \varphi'(x) \big] \, dx \\ &= \int_I f \circ \varphi \cdot \big| \varphi' \big|. \end{aligned}$$

Pour pouvoir parler de *mesures de Lebesgue orientées* $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$ qui généraliseraient le dx riemannien orienté sur $\mathbb{R}$ il faudrait entrer dans la théorie des formes différentielles extérieures, ce que nous ne pourrons pas faire dans ce cours.

La formule de changement de variables peut être appliquée de manière « mécanique » en différentiant :

$$y = \varphi(x) \implies dy = \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx,$$

puis en remplaçant :

$$\int_{\varphi(U)} f(y)\,dy = \int_U f\big(\varphi(x)\big)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx.$$

D'ailleurs, en remplaçant à nouveau $x = \varphi^{-1}(y)$, une ré-application du même théorème au difféomorphisme inverse φ^{-1} montre comment on se déplace dans l'autre sens :

$$\begin{aligned}\int_U f \circ \varphi(x)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx &= \int_V f \circ \underbrace{\varphi \circ \varphi^{-1}}_{=\,\mathsf{Id}}(y)\ \underbrace{\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi^{-1}(y)\big|}_{\mathsf{Jac}\,(\varphi\circ\varphi^{-1})\,=\,1}\,dy \\ &= \int_V f(y)\,dy,\end{aligned}$$

pour revenir 'bêtement' au même endroit.

Terminons cette présentation en mentionnant que dans les applications concrètes, la recherche de bons difféomorphismes φ constitue parfois un problème mathématique en soi.

2. Transferts de mesurabilité

La toute première chose à faire est de s'assurer que les difféomorphismes $\mathscr{C}^1$ respectent la mesurabilité. La proposition suivante, appliquée à tout sous-ensemble mesurable $C \subset \mathbb{C}$, d'où $F := f^{-1}(C)$ est mesurable, va alors garantir que $f \circ \varphi$ est mesurable.

Proposition 2.1. *Si $\varphi \colon U \xrightarrow{\sim} V$ est un difféomorphisme $\mathscr{C}^1$ entre deux ouverts $U \subset \mathbb{R}^d$ et $V \subset \mathbb{R}^d$, alors pour tout sous-ensemble $F \subset V$:*

$$\varphi^{-1}(F) \text{ mesurable} \iff F \text{ mesurable}.$$

Démonstration. Comme φ est un difféomorphisme $\mathscr{C}^1$, il revient au même d'établir que pour tout sous-ensemble $E \subset U$:

$$E \text{ mesurable} \implies \varphi(E) \text{ mesurable}.$$

Rappelons qu'un ensemble $E \subset U$ est mesurable si et seulement si il s'écrit $E = G \backslash N$ avec $G = \cap_{n \geqslant 1} \mathscr{O}_n$ intersection dénombrable d'ouverts $\mathscr{O}_n \subset U$, et avec N de mesure $m(N) = 0$. L'image de E par φ est alors :

$$\begin{aligned}\varphi(E) &= \varphi\big(G \backslash N\big) \\ &= \varphi(G) \big\backslash \varphi(N) \\ &= \varphi\bigg(\bigcap_{n \geqslant 1} \mathscr{O}_n\bigg) \bigg\backslash \varphi(N).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Lemme 2.3. *Pour tout sous-ensemble $N \subset U$:*

$$m(N) = 0 \implies m\big(\varphi(N)\big) = 0.$$

Démonstration. On peut supposer $U \neq \emptyset$ et, quitte à effectuer une translation, que $0 \in U$.

Si $|x| = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |x_i|$ est la norme du supremum sur $\mathbb{R}^d$, la distance 'dist' sera calculée par rapport à cette norme.

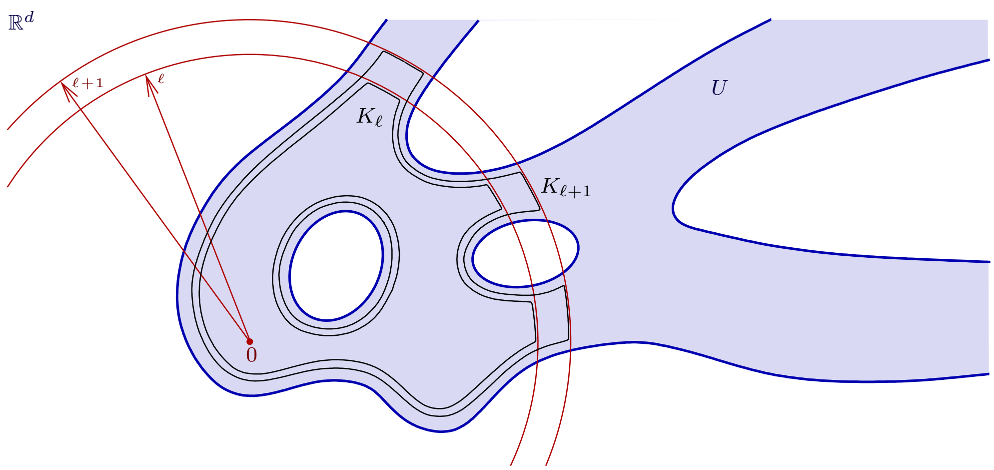
Pour tout $\ell \geqslant 1$, introduisons alors le sous-ensemble suivant $K_\ell \subset U$ qui intersecte tout avec la boule fermée $\{|x| \leqslant \ell\}$ pour demeurer dans un compact, et qui reste à distance $\frac{1}{\ell}$ du complémentaire de U pour ne pas toucher le bord ∂U :

$$K_\ell := \Big\{ x \in U \colon \ |x| \leqslant \ell, \ \mathrm{dist}\big(x, \, \mathbb{R}^d \backslash U\big) \ \geqslant \ \tfrac{1}{\ell} \Big\}.$$

Souvenons-nous en passant que pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$ et tout $x \in U$:

$$\mathrm{dist}\big(x, \, \mathbb{R}^d \backslash U\big) \ = \ \mathrm{dist}\big(x, \, \partial U\big),$$

et si nous n'en avons pas une réminiscence platonicienne, reportons-nous à l'Exercice 1 pour comprendre cela, tout en contemplant les Idées qui se dégagent de la figure.



L'Exercice 2 montre que ces K_ℓ sont compacts, qu'ils sont proprement emboîtés :

$$K_\ell \subset \mathrm{Int}\, K_{\ell+1} \qquad\qquad (\forall\, \ell \geqslant 1),$$

et que leur réunion (croissante !) remplit :

$$U \ = \ \bigcup_{\ell \geqslant 1} K_\ell.$$

Terminologie 2.4. On dit que la famille $(K_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ forme une *exhaustion* de U par des compacts.

Comme toute réunion dénombrable d'ensembles de mesure 0 est encore de mesure 0, eu égard à :

$$\begin{aligned} \varphi(N) \ &= \ \varphi(N \cap U) \\ &= \ \varphi\Big(N \bigcap_{\ell \geqslant 1} K_\ell\Big) \\ &= \ \bigcap_{\ell \geqslant 1} \varphi\big(N \cap K_\ell\big), \end{aligned}$$

il suffit de montrer que :

$$m\big(\varphi(N \cap K_\ell)\big) \ = \ 0 \qquad\qquad (\forall\, \ell \geqslant 1).$$

Fixons donc maintenant un $\ell \geqslant 1$ quelconque.

Puisque $m(N) = 0$, on a aussi $m(N \cap K_\ell) = 0$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une collection dénombrable de cubes fermés $(Q_n)_{n=1}^\infty$ recouvrant :

$$N \cap K_\ell \ \subset \ \bigcup_{n \geqslant 1} Q_n,$$

de mesure totale petite :

$$\sum_{n \geqslant 1} \big|Q_n\big| \ \leqslant \ \varepsilon.$$

Chaque Q_n est centré en un certain point $x_n \in \mathbb{R}^d$:

$$Q_n \ = \ \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon \ |x - x_n| \leqslant a_n\big\} \qquad\qquad (a_n \geqslant 0),$$

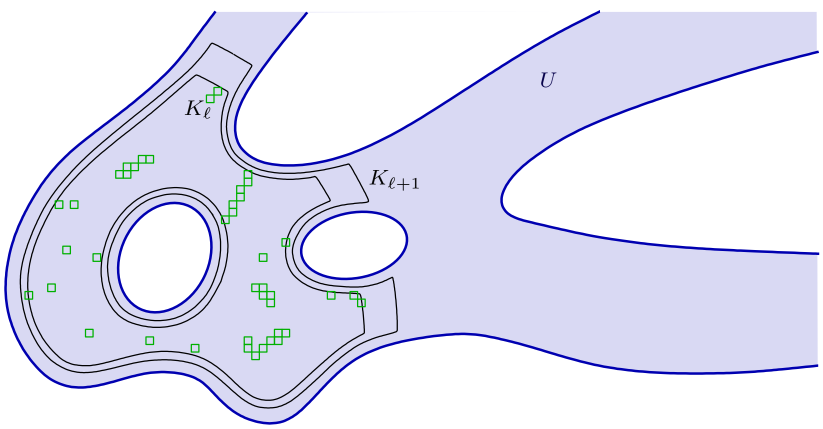
et l'on a donc :

$$\sum_{n \geqslant 1} (2\, a_n)^d \ \leqslant \ \varepsilon.$$

Si nécessaire, subdivisons certains des Q_n — en nombre fini — dont les demi-arêtes a_n sont trop grandes de manière à ce que ces dernières soient toutes :

$$0 \ \leqslant \ a_n \ \leqslant \ \varepsilon \qquad\qquad (\forall\, j \geqslant 1),$$

et supprimons tous les cubes Q_n qui n'intersectent pas $N \cap K_\ell$, ce qui est naturel. Notons encore Q_n ces cubes.



Si nous réduisons au besoin à l'avance :

$$\varepsilon \ \leqslant \ \tfrac{1}{3}\, \mathsf{dist}\, \big(K_\ell,\, U \backslash K_{\ell+1}\big),$$

alors une manipulation de l'inégalité triangulaire convainc (exercice) que pour tout $j \geqslant 1$:

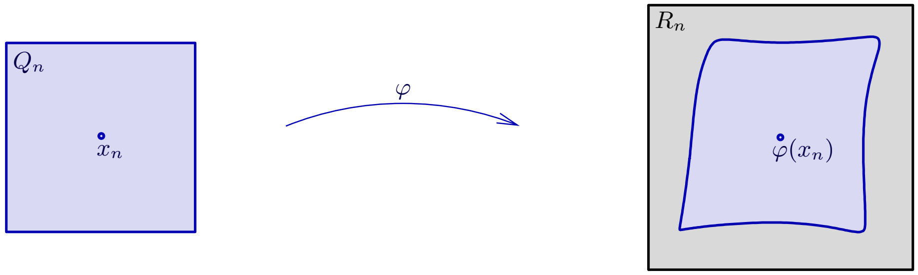
$$\emptyset \neq Q_n \cap K_\ell \ \ \Longrightarrow \ \ Q_n \subset \mathsf{Int}\, K_{\ell+1}.$$

Par conséquent, le Lemme 5.1 appliqué à l'ouvert $U := \mathsf{Int}\, K_{\ell+1}$ montre qu'avec la constante finie commune à tous les cubes Q_n :

$$C_{\ell+1} \ := \ d \max_{1 \leqslant i \leqslant d} \ \max_{1 \leqslant j \leqslant d} \ \max_{x \in K_{\ell+1}} \ \bigg|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x)\bigg| \ < \ \infty,$$

on a l'inégalité localisée d'accroissements finis :

$$\forall\, j \ \geqslant \ 1 \quad \forall\, x',\, x'' \ \in \ Q_n \qquad \big|\varphi(x'') - \varphi(x')\big| \ \leqslant \ C_{\ell+1}\, |x'' - x'|.$$



Si donc nous introduisons pour tout $j \geqslant 1$ les cubes dans l'espace-image d'arêtes dilatées par ce facteur de lipschitzianité :

$$R_n \,:=\, \big\{y \in \mathbb{R}^d \colon\, |y - \varphi(x_n)| \leqslant C_{\ell+1}\, a_n\big\},$$

il vient (exercice simple) :

$$\varphi(Q_n) \,\subset\, R_n,$$

puisque (solution simple) pour tout $x \in Q_n$:

$$\begin{aligned}\big|\varphi(x) - \varphi(x_n)\big| \,&\leqslant\, C_{\ell+1}\, |x - x_n| \\ &\leqslant\, C_{\ell+1}\, a_n.\end{aligned}$$

Observons alors que :

$$m(R_n) \,=\, \big(C_{\ell+1}\, a_n\big)^d.$$

Grâce à toutes ces lunettes optiques que nos préparatifs minutieux ont bien voulu faire luire à nos pupilles, nous pouvons enfin voir que :

$$\begin{aligned}\varphi\big(N \cap K_\ell\big) \,&\subset\, \varphi\big(\bigcup_{n\geqslant 1} Q_n\big) \\ &=\, \bigcup_{n\geqslant 1} \varphi(Q_n) \\ &\subset\, \bigcup_{n\geqslant 1} R_n,\end{aligned}$$

est recouvert par une réunion dénombrable de cubes fermés de mesure totale :

$$\begin{aligned}m\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} R_n\Big) \,&\leqslant\, \sum_{n\geqslant 1} m(R_n) \\ &=\, \sum_{n\geqslant 1} \big(C_{\ell+1}\, a_n\big)^d \\ &=\, C_{\ell+1}^d \sum_{n\geqslant 1} \big(2\, a_n\big)^d \\ &=\, C_{\ell+1}^d\, \varepsilon,\end{aligned}$$

manifestement arbitrairement petite, ce qui établit la nullité de sa mesure. □

Comme φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme, donc en particulier un homéomorphisme, tous les ensembles $\varphi(\mathscr{O}_n)$ sont ouverts, et par conséquent $\varphi(E)$ vient d'être représenté dans (2.2) sous une forme qui montre qu'il est mesurable. □

Un énoncé plus général que le Lemme 2.3, qui sera utile ultérieurement, découle en fait de la méthode de démonstration, et il est valable sans hypothèse de difféomorphie.

Proposition 2.5. *Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et soit $\varphi \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Alors pour tout sous-ensemble compact $K \subset U$, il existe une constante :*

$$C \,=\, C_{\varphi,K} \quad \text{avec} \quad 0 \,\leqslant\, C \,<\, \infty,$$

telle que pour tout sous-ensemble quelconque $E \subset K$, on a l'inégalité entre mesures extérieures :

$$m^*\big(\varphi(E)\big) \,\leqslant\, C \cdot m^*(E).$$

Démonstration. Rappelons que pour tout entier $\ell \geqslant 1$, nous pouvons introduire les sous-ensembles de U :

$$\begin{aligned} \mathscr{O}_\ell \,&:=\, \big\{x \in U \colon\, |x| < \ell,\ \mathsf{dist}(x, \mathbb{R}^d \backslash U) > \tfrac{1}{\ell}\big\}, \\ K_\ell \,&:=\, \big\{x \in U \colon\, |x| \leqslant \ell,\ \mathsf{dist}(x, \mathbb{R}^d \backslash U) \geqslant \tfrac{1}{\ell}\big\}, \end{aligned}$$

ouverts et fermés qui satisfont :

$$\overline{\mathscr{O}}_\ell \,=\, K_\ell \qquad \text{et} \qquad \mathsf{Int}\, K_\ell \,=\, \mathscr{O}_\ell.$$

Puisque $K \subset U$ est compact, *i.e.* $K \cap \partial U = \emptyset$, il existe un entier $\ell \gg 1$ assez grand pour que :

$$E \,\subset\, K \,\subset\, K_\ell \,\subset\, K_{\ell+1}.$$

Par définition de la mesure extérieure, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une collection dénombrable $(Q_n)_{n=1}^\infty$ de cubes fermés recouvrant :

$$E \,\subset\, \bigcup_{n \geqslant 1} Q_n,$$

tels que :

$$m^*(E) \,\leqslant\, \sum_{n \geqslant 1} m(Q_n) \,\leqslant\, m^*(E) + \varepsilon.$$

Comme dans la démonstration du Lemme 2.3, on peut supposer après subdivisions et nettoyage qu'ils sont tous d'arêtes assez petites pour être contenus dans $K_{\ell+1}$.

Posons :

$$C_{\ell+1} \,:=\, d \max_{1 \leqslant i \leqslant d} \max_{1 \leqslant j \leqslant d} \max_{x \in K_{\ell+1}} \bigg| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) \bigg| \,<\, \infty.$$

Comme :

$$\varphi(E) \,\subset\, \bigcup_{n \geqslant 1} \varphi(Q_n) \,\subset\, \bigcup_{n \geqslant 1} R_n,$$

avec les mêmes cubes R_n que dans la démonstration du Lemme 2.3, et comme les volumes de ces derniers valent :

$$m(R_n) \,=\, C_{\ell+1}^d\, m(Q_n),$$

on voit que :

$$\begin{aligned} m^*\big(\varphi(E)\big) \,&\leqslant\, C_{\ell+1}^d \sum_{n \geqslant 1} m(Q_n) \\ &\leqslant\, C_{\ell+1}^d \big(m^*(E) + \varepsilon\big), \end{aligned}$$

d'où le résultat en faisant $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$ avec la constante finie $C_{\varphi,K} := C_{\ell+1}^d$. □

Soit maintenant $L\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application linéaire vue en coordonnées cartésiennes :

$$L(x_1, \dots, x_d) \;=\; \bigg(\sum_{j=1}^d L_{1,j}\, x_j,\; \dots\dots,\; \sum_{j=1}^d L_{d,j}\, x_j\bigg),$$

à coefficients réels $L_{i,j} \in \mathbb{R}$. On définit la *norme* de L par (noter le facteur d) :

$$||L|| \;:=\; d \max_{1\leqslant i\leqslant d}\; \max_{1\leqslant j\leqslant d} |L_{i,j}|,$$

de telle sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on ait (exercice) :

$$\big|L(x)\big| \;\leqslant\; ||L|| \cdot |x|.$$

Corollaire 2.6. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble quelconque :*

$$m^*\big(L(E)\big) \;\leqslant\; \big(||L||\big)^d\, m^*(E).$$

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une collection dénombrable de cubes fermés Q_n recouvrant $E \subset \cup_{n=1}^\infty Q_n$ tels que :

$$m^*(E) \;\leqslant\; \sum_{n=1}^\infty |Q_n| \;\leqslant\; m^*(E) + \varepsilon.$$

Si $Q_n = \{x \in \mathbb{R}^d\colon\; |x - x_n| \leqslant a_n\}$, où x_n est le centre et $a_n \geqslant 0$ la demi-arête, la même estimation que dans le Lemme 2.3 avec $\varphi(x) := L(x)$ en tenant compte de :

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \;=\; \frac{\partial L_i}{\partial x_j}(x) \;=\; L_{i,j},$$

montre que l'image par L de chaque Q_n :

$$L(Q_n) \;\subset\; R_n \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\, n\geqslant 1)},$$

est contenue dans le cube fermé :

$$R_n \;:=\; \big\{y \in \mathbb{R}^d\colon\; |y - L(x_n)| \leqslant ||L|| \cdot a_n\big\}.$$

Ainsi, $L(E)$ est recouvert par la réunion dénombrable de ces cubes R_n dont la mesure totale vaut :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^\infty |R_n| \;&=\; \sum_{n=1}^\infty \big(||L|| \cdot a_n\big)^d \\
&=\; \big(||L||\big)^d \sum_{n=1}^\infty |Q_n| \\
&\leqslant\; \big(||L||\big)^d \big[m^*(E) + \varepsilon\big],
\end{aligned}$$

et ceci démontre bien (exercice mental) l'inégalité annoncée. □

Lemme 2.7. *Pour tout sous-espace affine strict $H \subset \mathbb{R}^d$ de dimension* $\dim H \leqslant d - 1$*, et pour tout sous-ensemble quelconque $E \subset H$:*

$$m(E) \;=\; m(H) \;=\; 0.$$

Démonstration. Il suffit de faire voir que $m(H) = 0$. En s'autorisant l'utilisation du théorème de Fubini, un argument assez direct basé sur une induction dimensionnelle existe (exercice).

Pour répondre à une exigence de n'employer que des moyens élémentaires, une démonstration alternative qui utilise un recouvrement de H par des cubes dont la taille décroît assez vite à l'infini montre (exercice) que $m^*(H) = 0$. □

Un dernier préliminaire mérite attention.

Proposition 2.8. *Si une transformation affine inversible* $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *s'écrit* $x \longmapsto v + L(x)$ *avec un vecteur* $v \in \mathbb{R}^d$ *et avec une application linéaire* inversible L*, alors pour tout sous-ensemble mesurable* $E \subset \mathbb{R}^d$ *:*

$$m\big(v + L(E)\big) \;=\; \big|\mathrm{det}\, L\big| \cdot m(E).$$

En particulier, $m(E) < \infty$ *si et seulement si* $m(v + L(E)) < \infty$.

Démonstration. Rappelons que $E \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable avec $m(E) < \infty$ lorsque et seulement lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini $\mathrm{N} = \mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1$ de cubes fermés $Q_n \subset \mathbb{R}^d$ tels que la différence symétrique entre E et la réunion des Q_n est petite en mesure :

$$m\Big(E \,\Delta \bigcup_{1 \leqslant n \leqslant \mathrm{N}} Q_n\Big) \;\leqslant\; \varepsilon.$$

Le Corollaire 2.6 garantit alors que la mesure — égale à la mesure extérieure sur les ensembles mesurables ! — de l'image par L de cette différence symétrique demeure également négligeable :

$$m\Big(L\Big(E \,\Delta \bigcup_{1 \leqslant n \leqslant \mathrm{N}} Q_n\Big)\Big) \;\leqslant\; ||L||^d\, \varepsilon.$$

Grâce à cette observation, on se convainc en jouant avec des ε (exercice) qu'il suffit d'établir la proposition dans le cas où $E = Q$ est un cube fermé borné d'intérieur non vide.

Qui plus est, comme la mesure de Lebesgue est invariante par translation, et comme elle satisfait pour toute homothétie (dilatation ou contraction) de rapport $\lambda > 0$:

$$m\big(\lambda\, E\big) \;=\; \lambda^d\, m(E),$$

il suffit même de démontrer la proposition dans le cas modèle où $E = Q = [0,1]^d$ est le cube unité.

Nous admettrons le résultat d'algèbre linéaire suivant, dont une démonstration est proposée en Exercice 4.

Lemme 2.9. *Toute matrice inversible* $L \in \mathbb{R}^{d \times d}$ *peut être représentée comme un produit fini :*

$$L \;=\; L_1 \cdots L_{\mathrm{K}},$$

de matrices $L_\bullet$ *qui sont chacune de l'un des trois types suivants.*

□ *Matrice associée à une* permutation $\sigma \colon \{1, \dots, d\} \longrightarrow \{1, \dots, d\}$ *:*

$$L_\bullet \;=\; P_\sigma \;=\; \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \\ \dots & 1 & \dots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \longleftarrow i = \sigma(j), \\ \\ \end{array} \end{array}$$

le 1 *de la* j*-ème colonne pour* $j = 1, \dots, d$ *se trouvant à la* $i = \sigma(j)$*-ème ligne, tous les autres éléments valant* 0*.*

$\square$ *Matrice diagonale associée à un unique nombre réel non nul* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *:*

$$L_\bullet \, = \, D_i^\lambda \, := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \longleftarrow i, \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

λ *se trouvant à la* i*-ème ligne.*

$\square$ *Matrice spéciale :*

$$L_\bullet \, = \, U \, := \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \mathbf{0} & \\ 1 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Grâce à la multiplicativité du déterminant :

$$m\big(L_1 \cdots L_{\mathrm{K}}(E)\big) \; \overset{?}{=} \; \big|\mathsf{det}\, L_1 \cdots L_{\mathrm{K}}\big| \cdot m(E) \; = \; \big|\mathsf{det}\, L_1\big| \cdots \big|\mathsf{det}\, L_{\mathrm{K}}\big| \cdot m(E),$$

nous sommes donc simplement ramenés à vérifier sur $E = [0,1]^d$ que pour toute matrice $L_\bullet$ de l'un de ces trois types :

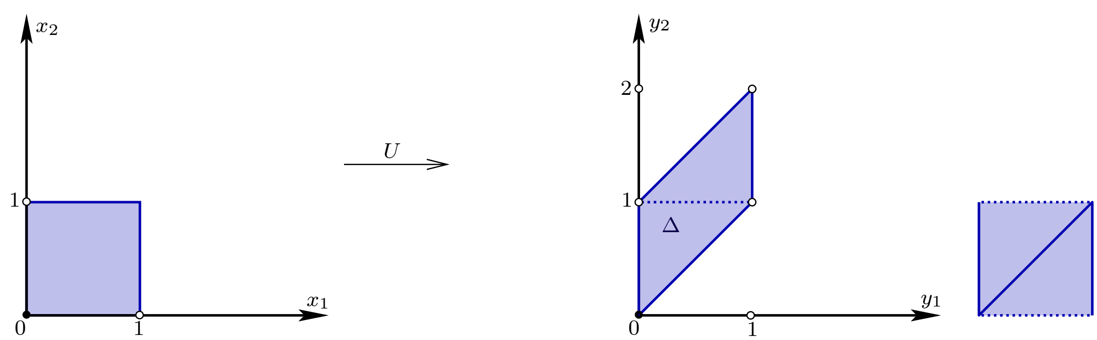
$$m\big(L_\bullet([0,1]^d)\big) \; = \; \big|\mathsf{det}\, L_\bullet\big| \cdot \underbrace{m([0,1]^d)}_{=1\,!}.$$

$\square$ Toute matrice de permutation P_σ laisse invariant le cube unité, et donc on a bien :

$$m\big(P_\sigma([0,1]^d)\big) \; = \; m([0,1]^d) \; = \; 1 \; = \; \big|\mathsf{det}\, P_\sigma\big| \; = \; \big|\mathsf{det}\, P_\sigma\big| \cdot m([0,1]^d).$$

$\square$ Toute matrice D_i^λ dilate (ou contracte) le i-ème axe de coordonnées du facteur $\lambda \in \mathbb{R}^*$, donc on a bien :

$$m\big(D_i^\lambda([0,1]^d)\big) \; = \; 1^{i-1}\,|\lambda|\,1^{d-i} \; = \; |\lambda| \; = \; \big|\mathsf{det}\, D_i^\lambda\big| \cdot m([0,1]^d).$$



$\square$ La matrice spéciale U agit essentiellement en dimension 2 comme :

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_1 + x_2, \end{aligned}$$

donc elle transforme le cube unité en un produit :

$$U\big([0,1]^2 \times [0,1]^{d-2}\big) = \Delta \times [0,1]^{d-2},$$

du cube unité dans $\mathbb{R}^{d-2}$ (qui est invariant par U) avec le triangle :

$$\Delta := \big\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 0 \leqslant y_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant 2\big\},$$

lequel est de mesure égale à 1 dans $\mathbb{R}^2$ par un argument de géométrie du carrelage, et donc on a bien :

$$m\big(U([0,1]^d)\big) = m(\Delta) \cdot 1^{d-2} = 1 \cdot 1^{d-2} = 1 = \big|\mathsf{det}\, U\big| \cdot m([0,1]^d),$$

ce qui conclut les vérifications. $\square$

3. Démonstration du théorème

Démonstration du Théorème 1.3. Soit donc $\varphi \colon U \xrightarrow{\sim} V = \varphi(U)$ un difféomorphisme $\mathscr{C}^1$, et soit $f \colon V \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable Lebesgue-intégrable. Nous savons déjà via la Proposition 2.1 que $f \circ \varphi$ est mesurable.

En un point $x_0 \in U$, pour tout nombre réel :

$$0 \leqslant a < \mathsf{dist}\big(x_0, \mathbb{R}^d \backslash U\big),$$

soit le cube fermé de centre x_0 et de demi-arête a :

$$Q_a(x_0) = \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ |x - x_0| \leqslant a\big\} \subset U,$$

qui est contenu dans l'ouvert. Puisque l'application tangente à φ au point central x_0 de ce cube (qui approxime φ à l'ordre 1 dans un voisinage de x_0) est linéaire :

$$T_{x_0}\varphi \colon \quad (x_1, \dots, x_d) \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_d}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_d}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix},$$

la Proposition 2.8 montre, pour tout cube Q, que :

$$\begin{aligned} m\big(T_{x_0}\varphi(Q)\big) &= \big|\mathsf{det}\, T_{x_0}\varphi\big| \cdot m(Q) \\ &= \big|\mathsf{Jac}\, \varphi(x_0)\big| \cdot m(Q). \end{aligned}$$

Lorsqu'un tel cube Q est assez petit et est centré en x_0, son image $\varphi(Q)$ aura une mesure qui sera assez bien approximée par celle de $T_{x_0}\varphi(Q)$, comme l'énonce le lemme suivant. Il requiert hypothèse importante de restreindre les considérations à un sous-ensemble de points x_0 qui restent à une certaine distance de sécurité du complémentaire $\mathbb{R}^d \backslash U$.

Proposition 3.1. [Approximation linéaire] *Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et soit $\mathscr{O} \subset U$ un sous-ouvert relativement compact,* i.e. *dont l'adhérence $\overline{\mathscr{O}}$ dans $\mathbb{R}^d$ reste dans l'ouvert :*

$$\overline{\mathscr{O}} \subset U.$$

Alors :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, 0 \leqslant a \leqslant \delta \quad \forall\, x_0 \in \overline{\mathscr{O}}$$

le cube fermé :

$$Q \;:=\; Q_a(x_0) \;:=\; \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\; |x - x_0| \leqslant a\big\}$$

satisfait :

$$(1-\varepsilon)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_0)\big|\cdot m(Q) \;\leqslant\; m\big(\varphi(Q)\big) \;\leqslant\; (1+\varepsilon)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_0)\big|\cdot m(Q).$$

Démonstration. Implicitement, donc, le $\delta > 0$ dont ce lemme affirme l'existence devra au moins satisfaire :

$$0 \;<\; \delta \;\leqslant\; \mathsf{dist}\big(\overline{\mathscr{O}},\, \mathbb{R}^d\backslash U\big),$$

afin d'assurer que tous les cubes considérés demeurent contenus dans l'ouvert :

$$Q_a(x_0) \;\subset\; U \qquad\qquad (\forall\, x_0 \in \overline{\mathscr{O}},\ \forall\, 0 \leqslant a \leqslant \delta).$$

L'énoncé suivant — un classique du cours de Calcul Différentiel — dit que φ est bien approximée par son développement de Taylor à l'ordre 1.

Lemme 3.2. *Soit comme précédemment $U \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et soit un sous-ouvert $\mathscr{O} \subset U$ avec $\overline{\mathscr{O}} \subset U$. Alors :*

$$\forall\, \varepsilon' \;>\; 0 \quad \exists\, \delta \;>\; 0 \quad \forall\, 0 \leqslant a \leqslant \delta \quad \forall\, x_0 \in \overline{\mathscr{O}} \quad \forall\, x \;\in\; Q_a(x_0)$$

on a :

$$\big|\varphi(x) - \varphi(x_0) - T_{x_0}\varphi(x - x_0)\big| \;\leqslant\; \varepsilon'|x - x_0|.$$

Démonstration. Choisissons :

$$0 \;<\; \delta \;<\; \mathsf{dist}\,\big(\overline{\mathscr{O}},\, \mathbb{R}^d\backslash U\big),$$

que nous rapetisserons ultérieurement encore, regardons l'ensemble fermé borné, donc compact :

$$K_\delta \;:=\; \big\{(x_0, x) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d\colon\; x_0 \in \overline{\mathscr{O}},\; |x - x_0| \leqslant \delta\big\},$$

et introduisons l'application :

$$\Psi_{x_0}(x) \;:=\; \varphi(x) - \varphi(x_0) - T_{x_0}\varphi(x - x_0),$$

définie pour $x_0 \in \overline{\mathscr{O}}$ et pour $|x - x_0| \leqslant \delta$. Visiblement :

$$\Psi_{x_0}(x_0) \;=\; 0.$$

Pour x_0 fixé, puisque cette application $x \longmapsto \Psi_{x_0}(x)$ est $\mathscr{C}^1$, nous pouvons prendre sa différentielle :

$$T_x\Psi_{x_0} \;=\; T_x\varphi - T_{x_0}\varphi,$$

à savoir plus précisément :

$$\frac{\partial \Psi_{x_0,j}}{\partial x_i}(x) \;=\; \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x_0) \qquad\qquad (1 \leqslant i, j \leqslant d).$$

Visiblement aussi :

$$\frac{\partial \Psi_{x_0,j}}{\partial x_i}(x_0) \;=\; 0 \qquad\qquad (1 \leqslant i, j \leqslant d).$$

Or ces $d \times d$ dérivées partielles sont continues sur le compact K_δ définit plus haut, donc uniformément continues grâce au théorème de Heine-Borel :

$$\forall\, \tfrac{\varepsilon'}{d} \;>\; 0 \quad \exists\, \delta \;>\; 0 \quad \Big(x_0 \in \overline{\mathscr{O}} \quad |x - x_0| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad \bigg|\frac{\partial \Psi_{x_0,j}}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial \Psi_{x_0,j}}{\partial x_i}(x_0)\bigg| \;\leqslant\; \frac{\varepsilon'}{d} \quad \forall\, i, j\Big),$$

c'est-à-dire :

$$\max_{1\leqslant i\leqslant d}\ \max_{1\leqslant j\leqslant d}\ \max_{x_0\in\overline{\mathscr{O}}}\ \max_{|x-x_0|\leqslant\delta}\left|\frac{\partial\Psi_{x_0,j}}{\partial x_i}(x)\right| \ \leqslant\ \frac{\varepsilon'}{d}.$$

Pour terminer, le Lemme 5.1, envisagé avec le paramètre continu $x_0 \in \overline{\mathscr{O}}$, donne l'inégalité locale d'accroissements finis :

$$\big|\Psi_{x_0}(x) - \underline{\Psi_{x_0}(x_0)}\big| \ \leqslant\ d\,\tfrac{\varepsilon'}{d}\,|x-x_0|,$$

à savoir :

$$\big|\varphi(x) - \varphi(x_0) - T_{x_0}\varphi(x-x_0)\big| \ \leqslant\ \varepsilon'\,|x-x_0|,$$

ce qui est la conclusion. □

Grâce à ce lemme, pour tout $x_0 \in \overline{\mathscr{O}}$ et pour tout $|x-x_0| \leqslant a \leqslant \delta$, *i.e.* pour tout $x \in Q_a(x_0)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\big|\varphi(x) - \varphi(x_0) - T_{x_0}\varphi(x-x_0)\big| &\leqslant \varepsilon'\,|x-x_0| \\ &\leqslant \varepsilon' a.\end{aligned}$$

Posons :

$$y \ :=\ \varphi(x) - \varphi(x_0) - T_{x_0}\varphi(x-x_0),$$

d'où $|y| \leqslant \varepsilon' a$.

L'Assertion suivante provient de la continuité de $x_0 \longmapsto (T_{x_0}\varphi)^{-1}$ et de connaissances acquises en cours de Calcul Différentiel.

Assertion 3.3. *Pour tout $x_0 \in \overline{\mathscr{O}}$, l'application linéaire tangente $T_{x_0}\varphi$ est continue inversible et il existe une constante $0 < C < \infty$ telle que :*

$$\big\|(T_{x_0}\varphi)^{-1}\big\| \ =\ \big\|T_{\varphi(x_0)}\varphi^{-1}\big\| \ \leqslant\ C \qquad (\forall\, x_0 \in \overline{\mathscr{O}}).$$

De plus :

$$\big\|\mathsf{det}\,(T_{x_0}\varphi)^{-1}\big\| \ =\ \big\|\mathsf{det}\,T_{\varphi(x_0)}\varphi^{-1}\big\| \ =\ \frac{1}{|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_0)|}.$$ □

En utilisant :

$$\big|(T_{x_0}\varphi)^{-1}(y)\big| \ \leqslant\ \big\|(T_{x_0}\varphi)^{-1}\big\|\cdot|y|,$$

nous pouvons majorer pour tout $|x-x_0| \leqslant a$:

$$\begin{aligned}\Big|(T_{x_0}\varphi)^{-1}\big(\varphi(x)-\varphi(x_0)\big) - (x-x_0)\Big| &= \big|(T_{x_0}\varphi)^{-1}(y)\big| \\ &\leqslant \big\|(T_{x_0}\varphi)^{-1}\big\|\cdot|y| \\ &\leqslant C\,\varepsilon'\,a.\end{aligned}$$

Ensuite, une inégalité triangulaire donne une inégalité :

$$\begin{aligned}\Big|(T_{x_0}\varphi)^{-1}\big(\varphi(x)-\varphi(x_0)\big)\Big| &\leqslant |x-x_0| + \varepsilon'\,a\,C \\ &\leqslant a + \varepsilon'\,a\,C,\end{aligned}$$

qui signifie :

$$(T_{x_0}\varphi)^{-1}\Big(\varphi\big(Q_a(x_0)\big)\Big) \ \subset\ Q_{a+\varepsilon' aC}(x_0),$$

d'où découle :

$$\begin{aligned} m\Big((T_{x_0}\varphi)^{-1}\big(\varphi\big(Q_a(x_0)\big)\big)\Big) \ &\leqslant\ (1+\varepsilon' C)^d\,a^d \\ &\leqslant\ (1+\varepsilon)\,m\big(B_a(x_0)\big), \end{aligned}$$

si nous choisissons $\varepsilon' > 0$ assez petit à l'avance pour que :

$$(1+\varepsilon' C)^d \ \leqslant\ 1+\varepsilon.$$

Enfin, une application de la Proposition 2.8 à l'application linéaire $L := (T_{x_0}\varphi)^{-1}$ donne :

$$\frac{1}{|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_0)|}\,m\big(\varphi\big(Q_a(x_0)\big)\big)\ \leqslant\ (1+\varepsilon)\,m\big(B_a(x_0)\big),$$

c'est-à-dire que nous venons d'achever la démonstration de l'inégalité droite de la proposition en cours.

La démonstration de l'inégalité gauche, qui requiert d'avoir simultanément $\varepsilon' > 0$ assez petit pour que :

$$(1-\varepsilon)\ \leqslant\ (1-\varepsilon' C)^d,$$

s'effectue d'une manière essentiellement similaire, et sera éludée. □

La première proposition principale va maintenant montrer que le Théorème 1.3 est vrai en restriction à tout sous-ouvert $\mathscr{O} \subset U$ relativement compact — *i.e.* satisfaisant $\overline{\mathscr{O}} \subset U$ — pour la fonction indicatrice :

$$f\ :=\ \mathbf{1}_{\varphi(\mathscr{O})}.$$

Nous continuerons ensuite à travailler avec des fonctions indicatrices, et ce ne sera qu'à la fin que nous traiterons le cas de fonctions Lebesgue-intégrables quelconques, grâce au fait que ces dernières sont — par définition ! — limites croissantes simples de fonctions étagées, *i.e.* combinaisons linéaires de fonctions indicatrices d'ensembles mesurables.

Proposition 3.4. *Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et soit $\mathscr{O} \subset U$ un sous-ouvert relativement compact,* i.e. *satisfaisant $\overline{\mathscr{O}} \subset U$. Alors :*

$$\int_{\varphi(\mathscr{O})} \mathbf{1}\,dy\ =\ m\big(\varphi(\mathscr{O})\big)\ =\ \int_{\mathscr{O}} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx.$$

Démonstration. Comme φ est $\mathscr{C}^1$ dans U, les $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ sont $\mathscr{C}^0$, donc $\mathsf{Jac}\,\varphi$ est $\mathscr{C}^0$ dans U. Comme $\overline{\mathscr{O}} \subset U$ est compact, la fonction continue :

$$x \longmapsto \mathsf{Jac}\,\varphi(x)$$

est uniformément continue sur $\overline{\mathscr{O}}$ grâce au Théorème de Heine-Borel :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \quad \Big(\forall\,x',\,x'' \in \overline{\mathscr{O}} \quad |x'-x''| \leqslant \delta \ \Longrightarrow\ \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x') - \mathsf{Jac}\,\varphi(x'')\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Fixons donc un tel $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Rappelons que tout sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$ tel que notre $\mathscr{O} \subset U$ peut être représenté comme réunion dénombrable :

$$\mathscr{O}\ =\ \bigcup_{n \geqslant 1} Q_n$$

de cubes fermés $Q_n \subset \mathscr{O}$ presque disjoints deux à deux, c'est-à-dire ne s'intersectant au plus que le long leurs faces $(d-1)$-dimensionnelles.

Si les centres de ces Q_n sont notés x_n, on peut même supposer qu'ils sont tous d'intérieur non vide, à savoir de demi-arêtes $a_n > 0$:

$$Q_n \,=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\, |x - x_n| \leqslant a_n\big\},$$

et quitte à re-subdiviser certains d'entre eux si nécessaire, on peut supposer qu'ils sont tous petits :

$$0 \,<\, a_n \,\leqslant\, \delta,$$

d'où :

$$|x - x_n| \,\leqslant\, a_n \quad\Longrightarrow\quad \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x) - \mathsf{Jac}\,\varphi(x_n)\big| \,\leqslant\, \varepsilon,$$

ce qui revient à dire, pour $|x - x_n| \leqslant a_n$, qu'on a les deux inégalités de contrôle :

(3.5)
$$\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big| - \varepsilon \,\leqslant\, \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_n)\big| \,\leqslant\, \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big| + \varepsilon.$$

En sus, rétrécissons si nécessaire $\delta > 0$ de telle sorte le Lemme 3.1 soit lui aussi satisfait en tous les centres x_n :

(3.6)
$$(1-\varepsilon)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_n)\big| \cdot m(Q_n) \,\leqslant\, m\big(\varphi(Q_n)\big) \,\leqslant\, (1+\varepsilon)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_n)\big| \cdot m(Q_n).$$

Enfin, observons (exercice mental) que :

$$m(\mathscr{O}) \,=\, \sum_{n \geqslant 1} m(Q_n),$$

ainsi que :

$$\int_{\mathscr{O}} \mathsf{Jac}\,\varphi(x)\,dx \,=\, \sum_{n \geqslant 1} \int_{Q_n} \mathsf{Jac}\,\varphi(x)\,dx.$$

Grâce à tous ces préparatifs que nous venons d'inscrire dans notre mémoire immédiate, nous pouvons majorer pas à pas en détaillant toutes les étapes intermédiaires :

$$\begin{aligned}
m\big(\varphi(\mathscr{O})\big) \,&=\, m\Big(\bigcup_{n \geqslant 1} \varphi(Q_n)\Big) \\
&\leqslant\, \sum_{n \geqslant 1} m\big(\varphi(Q_n)\big) \\
\text{[Inégalité 3.6 droite]} \qquad &\leqslant\, \sum_{n \geqslant 1} (1+\varepsilon)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_n)\big| \cdot m(Q_n) \\
&=\, (1+\varepsilon) \sum_{n \geqslant 1} \int_{Q_n} \big|\underbrace{\mathsf{Jac}\,\varphi(x_n)}_{\text{constante}}\big|\,dx \\
\text{[Inégalité 3.5 droite]} \qquad &\leqslant\, (1+\varepsilon) \sum_{n \geqslant 1} \int_{Q_n} \Big(\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big| + \varepsilon\Big)\,dx \\
&=\, (1+\varepsilon) \sum_{n \geqslant 1} \int_{Q_n} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx + (1+\varepsilon)\,\varepsilon \sum_{n \geqslant 1} m(Q_n) \\
&=\, (1+\varepsilon) \int_{\mathscr{O}} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx + (1+\varepsilon)\,\varepsilon\, m(\mathscr{O}),
\end{aligned}$$

d'où en faisant $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$:

$$m\big(\varphi(\mathscr{O})\big) \,\leqslant\, \int_{\mathscr{O}} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx.$$

Il s'agit maintenant d'établir l'inégalité inverse d'une manière essentiellement similaire, bien que non exactement identique.

Tout d'abord, toujours avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit fixé, les cubes Q_n peuvent être rétrécis d'une manière infinitésimale en des sous-cubes :

$$Q_n' := \big\{|x - x_n| \leqslant a_n'\big\},$$

de demi-arêtes inférieures $0 < a_n' < a_n$ — d'où ces $Q_n' \subset \mathsf{Int}\, Q_n$ deviennent rigoureusement disjoints deux à deux — avec les $a_n' \sim a_n$ tous extrêmement proches a_n afin que :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1} m(Q_n') \;&\geqslant\; \sum_{n\geqslant 1} m(Q_n) - \varepsilon \\ &=\; m(\mathscr{O}) - \varepsilon,\end{aligned}$$

et afin, en utilisant la continuité de $\mathsf{Jac}\,\varphi$ sur $\overline{\mathscr{O}}$, que :

$$\sum_{n\geqslant 1} \int_{Q_n'} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \;\geqslant\; \int_{\mathscr{O}} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx - \varepsilon.$$

Bien entendu, le Lemme 3.1 appliqué à $Q = Q_n' \subset Q_n$ donne la version modifiée utile de l'inégalité (3.6) :

(3.7)
$$(1-\varepsilon)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_n)\big| \cdot m(Q_n') \;\leqslant\; m\big(\varphi(Q_n')\big) \;\leqslant\; (1+\varepsilon)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_n)\big| \cdot m(Q_n').$$

Grâce à ces préparatifs, nous pouvons minorer :

$$\begin{aligned}
m\big(\varphi(\mathscr{O})\big) \;&=\; m\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} \varphi(Q_n)\Big) \\
&\geqslant\; m\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} \varphi(Q_n')\Big) \\
&=\; \sum_{n\geqslant 1} m\big(\varphi(Q_n')\big) \\
\text{[Inégalité 3.7 gauche]}\qquad &\geqslant\; \sum_{n\geqslant 1} (1-\varepsilon)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_n)\big|\,m(Q_n') \\
&=\; (1-\varepsilon) \sum_{n\geqslant 1} \int_{Q_n'} \big|\underbrace{\mathsf{Jac}\,\varphi(x_n)}_{\text{constante}}\big|\,dx \\
\text{[Inégalité 3.5 gauche]}\qquad &\geqslant\; (1-\varepsilon) \sum_{n\geqslant 1} \int_{Q_n'} \Big(\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big| - \varepsilon\Big)\,dx \\
&\geqslant\; (1-\varepsilon)\left[\int_{\mathscr{O}} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx - \varepsilon\right] - (1-\varepsilon)\,\varepsilon\,\big[m(\mathscr{O}) - \varepsilon\big],
\end{aligned}$$

d'où en faisant $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$:

$$m\big(\varphi(\mathscr{O})\big) \;\geqslant\; \int_{\mathscr{O}} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx,$$

ce qui est l'inégalité inverse qui achève d'établir l'égalité de la proposition. □

Une fois acquis le cas d'ouverts $\mathscr{O} \subset U$ relativement compacts $\overline{\mathscr{O}} \subset U$, on peut étendre le résultat au moyen d'arguments d'exhaustion.

Proposition 3.8. *Pour tout sous-ensemble ouvert $\mathscr{O} \subset U$, on a :*

$$\int_{\varphi(\mathscr{O})} \mathbf{1}\, dy \;=\; m\big(\varphi(\mathscr{O})\big) \;=\; \int_{\mathscr{O}} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\, dx.$$

Démonstration. Introduisons les sous-ensembles ouverts de $\mathscr{O}$ paramétrés par un entier $n \geqslant 1$:

$$\mathscr{O}_n \;:=\; \big\{x \in \mathscr{O} \colon\; |x| < n,\; \mathsf{dist}(x,\, \mathbb{R}^d \backslash U) > \tfrac{1}{n}\big\},$$

notons les emboîtements $\mathscr{O}_n \subset \mathscr{O}_{n+1}$, et observons que :

$$\mathscr{O} \;=\; \bigcup_{n \geqslant 1} \mathscr{O}_n.$$

Puisque $\overline{\mathscr{O}}_n \subset U$, nous pouvons estimer :

$$\begin{aligned}
m\big(\varphi(\mathscr{O})\big) \;&=\; m\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} \varphi(\mathscr{O}_n)\Big) \\
&=\; \lim_{n\to\infty} m\big(\varphi(\mathscr{O}_n)\big) \\
\text{[Proposition 3.4]} \qquad &=\; \lim_{n\to\infty} \int_{\mathscr{O}_n} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\, dx \\
&=\; \lim_{n\to\infty} \int_U \mathbf{1}_{\mathscr{O}_n}(x) \, \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\, dx \\
\text{[Convergence monotone]} \qquad &=\; \int_U \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\mathscr{O}_n}(x) \, \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\, dx \\
&=\; \int_{\mathscr{O}} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\, dx,
\end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Proposition 3.9. *Pour tout sous-ensemble fermé $F \subset U$, on a :*

$$\int_{\varphi(F)} \mathbf{1}\, dy \;=\; m\big(\varphi(F)\big) \;=\; \int_F \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\, dx.$$

Démonstration. Il suffit d'observer que F s'écrit comme différence entre deux ouverts :

$$F \;=\; U \big\backslash \big(U \backslash F\big),$$

d'appliquer la proposition qui précède à chacun de ces ouverts :

$$\begin{aligned}
m\big(\varphi(U)\big) \;&=\; \int_U \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\, dx, \\
m\big(\varphi(U\backslash F)\big) \;&=\; \int_{U\backslash F} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\, dx,
\end{aligned}$$

et de soustraire :

$$\begin{aligned}
m\big(\varphi(F)\big) \;&=\; m\big(\varphi(U)\big) - m\big(\varphi(U\backslash F)\big) \\
&=\; \int_U \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\, dx - \int_{U\backslash F} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\, dx \\
&=\; \int_F \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\, dx,
\end{aligned}$$

pour constituer la formule désirée. □

Proposition 3.10. *Pour tout sous-ensemble mesurable $E \subset U$ relativement compact,* i.e. *tel que $\overline{E} \subset U$, on a :*

$$m\big(\varphi(E)\big) \,=\, \int_E \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx.$$

Démonstration. Rappelons que tout sous-ensemble mesurable $E \subset U$, dont la mesure $m(E) \in [0,\infty]$ peut valoir ∞, peut être « *approximé* » par une suite croissante de sous-ensembles fermés :

$$F_k \,\subset\, F_{k+1} \,\subset\, E \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant 1),$$

au sens de la mesure :

$$m(E) \,=\, \lim_{k\to\infty} m(F_k).$$

Autrement dit, pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $\mathrm{K} \gg 1$ un entier assez grand pour que :

$$m\big(E\backslash F_k\big) \,\leqslant\, \varepsilon \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant \mathrm{K}).$$

Assertion 3.11. *Alors on a aussi :*

$$m\big(\varphi(E)\big) \,=\, \lim_{k\to\infty} m\big(\varphi(F_k)\big).$$

Démonstration. Comme $\overline{E} \subset U$, on peut supposer, avec la suite exhaustive croissante de compacts :

$$K_\ell \,=\, \big\{x \in U\colon\, |x| \leqslant \ell,\; \mathsf{dist}(x, \mathbb{R}^d\backslash U) \geqslant \tfrac{1}{\ell}\big\},$$

que pour un entier $\ell \gg 1$ assez grand, on a :

$$E \,\subset\, K_\ell \,\subset\, K_{\ell+1}.$$

Donc la Proposition 2.5 peut maintenant garantir l'existence d'une certaine constante $0 \leqslant C < \infty$ qui ne dépend que de φ et de K_ℓ telle que :

$$\begin{aligned} m\big(\varphi(E\backslash F_k)\big) \,&\leqslant\, C \cdot m(E\backslash F_k) \\ &\leqslant\, C\,\varepsilon \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant \mathrm{K}), \end{aligned}$$

ce qui établit la limite annoncée. □

Ainsi, nous pouvons estimer :

$$\begin{aligned} m\big(\varphi(E)\big) \,&=\, \lim_{k\to\infty} m\big(\varphi(F_k)\big) \\ \text{[Proposition 3.9]} \qquad &=\, \lim_{k\to\infty} \int_{F_k} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\ \text{[Convergence monotone]} \qquad &=\, \int_{\cup_{k\geqslant 1} F_k} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx. \end{aligned}$$

Mais comme :

$$0 \,=\, m\Big(E \Big\backslash \bigcup_{k\geqslant 1} F_k\Big),$$

et comme la fonction continue $|\mathsf{Jac}\,\varphi|$ est bornée sur K_ℓ qui contient E ainsi que tous les F_k, il vient :

$$0 \,=\, \int_{E\backslash \cup_{k\geqslant 1} F_k} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx,$$

d'où en additionnant ce 0 à la formule qui précède :

$$m\big(\varphi(E)\big) \;=\; \int_E \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx,$$

comme voulu. □

Le cas d'un sous-ensemble mesurable quelconque $E \subset U$ qui n'est pas forcément relativement compact s'en déduit par un argument d'exhaustion.

Proposition 3.12. *Pour tout sous-ensemble mesurable $E \subset U$, on a :*

$$m\big(\varphi(E)\big) \;=\; \int_E \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx.$$

Démonstration. Pour tout entier $\ell \geqslant 1$, coupons :

$$\begin{aligned} E_\ell &:= E \cap K_\ell \\ &= E \cap \big\{x \in U \colon\ |x| \leqslant \ell,\ \mathsf{dist}(x, \mathbb{R}^d \backslash U) \geqslant \tfrac{1}{\ell}\big\}. \end{aligned}$$

On a la croissance $E_\ell \subset E_{\ell+1}$, avec $\cup_\ell\, E_\ell = E$, donc un théorème connu de théorie de la mesure donne :

$$m(E_\ell) \underset{\ell \to \infty}{\longrightarrow} m(E).$$

De même, les ensembles mesurables images $\varphi(E_\ell)$ sont croissants dans le $\mathbb{R}^d$-but, donc :

$$m\big(\varphi(E_\ell)\big) \underset{\ell \to \infty}{\longrightarrow} m\big(\varphi(E)\big).$$

L'intérêt de couper E est qu'on peut appliquer la proposition qui précède pour obtenir :

$$m\big(\varphi(E_\ell)\big) \;=\; \int_{E_\ell} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \qquad\qquad (\forall\,\ell \geqslant 1).$$

Grâce à tous ces préparatifs, nous pouvons entreprendre des métamorphoses effectuées en douceur progressive :

$$\begin{aligned} m\big(\varphi(E)\big) &= m\Big(\bigcup_{\ell \geqslant 1} \varphi(E_\ell)\Big) \\ &= \lim_{\ell \to \infty} m\big(\varphi(E_\ell)\big) \\ \text{[Proposition 3.10]} \qquad &= \lim_{\ell \to \infty} \int_{E_\ell} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\ &= \lim_{\ell \to \infty} \int_U \mathbf{1}_{E_\ell}(x) \cdot \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\ \text{[Convergence monotone]} \qquad &= \int_U \lim_{\ell \to \infty} \mathbf{1}_{E_\ell}(x) \cdot \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\ &= \int_U \mathbf{1}_E(x) \cdot \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\ &= \int_E \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx, \end{aligned}$$

pour déployer notre train d'atterrissage à bonne destination. □

Le tout dernier vol sera offert par la compagnie aérienne *BLK*, « *Bonne Lampée de Kérosène* ».

Proposition 3.13. *Pour toute fonction mesurable intégrable $f\colon V \longrightarrow \mathbb{C}$, on a :*

$$\int_V f(y)\,dy \;=\; \int_U f\circ\varphi(x)\cdot\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx.$$

Démonstration. En décomposant $f = \mathsf{Re}\,f + i\,\mathsf{Im}\,f$ en parties réelle et imaginaire, on peut supposer que f est à valeurs réelles, puis, en décomposant $f = f^+ - f^-$, on peut même supposer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Pour $f = \mathbf{1}_E$ fonction indicatrice d'un sous-ensemble mesurable quelconque $E \subset U$, cette formule vient d'être dûment établie. Nous avons aussi vu plus haut que $E \subset U$ est mesurable si et seulement si $\varphi(E) \subset V$ l'est.

Rappelons que les *fonctions étagées* sont celles qui sont combinaisons linéaires finies de telles fonctions indicatrices, et grâce au transfert de mesurabilité à travers φ, elles s'écrivent sous la forme générale :

$$e(y) \;=\; \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} b_k\cdot\mathbf{1}_{\varphi(E_k)}(y),$$

avec des constantes réelles $b_k > 0$ et des sous-ensembles mesurables $E_k \subset \mathbb{R}^d$.

Alors pour de telles fonctions, la formule en vue est vraie :

$$\begin{aligned}
\int_V e(y)\,dy \;&=\; \int_V \bigg(\sum_{k=1}^{\mathrm{K}} b_k\,\mathbf{1}_{\varphi(E_k)}(y)\bigg)\,dy \\
&=\; \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} b_k\int_{\varphi(E_k)} 1\cdot dy \\
\text{[Proposition 3.12]}\qquad &=\; \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} b_k\int_U \mathbf{1}_{E_k}(x)\cdot\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\
&=\; \int_U \bigg(\sum_{k=1}^{\mathrm{K}} b_k\,\mathbf{1}_{E_k}(x)\bigg)\cdot\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\
&=\; \int_U e\circ\varphi(x)\cdot\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx.
\end{aligned}$$

Pour terminer, rappelons que toute fonction mesurable $f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est limite ponctuelle en *tout* point d'une suite croissante $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de telles fonctions étagées :

$$0 \;\leqslant\; e_n \;\leqslant\; e_{n+1} \;\leqslant\; f,$$

à savoir :

$$f(y) \;=\; \lim_{n\to\infty} e_n(y) \qquad\qquad (\forall\, y\in U).$$

Il ne reste plus qu'à asséner deux bons coup fatals de convergence monotone à tout ce monde ravissant de belles fonctions étagées intégrables :

$$\begin{aligned}
\int_V f(y)\,dy &= \int_U \lim_{n\to\infty} e_n(y)\,dy \\
\text{[Convergence monotone]} \qquad &= \lim_{n\to\infty} \int_V e_n(y)\,dy \\
\text{[Vient d'être vu !]} \qquad &= \lim_{n\to\infty} \int_U e_n \circ \varphi(x) \cdot \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\
\text{[Convergence monotone]} \qquad &= \int_U \lim_{n\to\infty} e_n \circ \varphi(x) \cdot \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\
&= \int_U f \circ \varphi(x) \cdot \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx,
\end{aligned}$$

pour se libérer *enfin* de cette succession si éprouvante de démonstrations interminablement délicates et détaillées ! □

Ceci achève donc la démonstration du Théorème 1.3 de changement de variables dans les intégrales en théorie de Borel-Lebesgue. *Beautiful, is'nt it ?* □

4. Coordonnées polaires, sphériques, hypersphériques

En utilisant les concepts et résultats du cours de calcul différentiel, on vérifie que l'application :

$$\begin{aligned}
\varphi\colon \quad \mathbb{R}_+^* \times \,]-\pi,\pi[\quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \big\backslash \big(\mathbb{R}_- \times \{0\}\big) \\
(r,\theta) \quad &\longmapsto \quad \big(r\cos\theta,\, r\sin\theta\big) \;=:\; (x,y)
\end{aligned}$$

est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme, appelé passage aux *coordonnées polaires*, de déterminant jacobien strictement positif (donc jamais nul) :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Jac}\,\varphi(r,\theta) \;=\; \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \;&=\; \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta \\
&= r,
\end{aligned}$$

et donc, puisque la droite horizontale négative $\mathbb{R}_- \times \{0\} = \{(x,0)\colon x \leqslant 0\}$ que l'on soustrait à $\mathbb{R}^2$ est de mesure de Lebesgue 2-dimensionnelle nulle, la formule de changement de variables s'écrit ici, pour toute fonction intégrable $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^\infty f\big(r\cos\theta,\, r\sin\theta\big)\,rdr.$$

Par exemple, l'aire (mesure 2-dimensionnelle) d'un disque ouvert centré à l'origine de rayon $R > 0$:

$$\mathbb{D}_R \;:=\; \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\; x^2 + y^2 < R^2\big\}$$

vaut :

$$m\big(\mathbb{D}_R\big) \;=\; \int_{\mathbb{D}_R} 1 \cdot dxdy \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^R rdr \;=\; 2\pi\,\frac{R^2}{2} \;=\; \pi\,R^2$$

— pas de contradiction avec les mathématiques antiques !

En dimension 3, le passage aux *coordonnées sphériques* est réalisé par le $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme :

$$\begin{aligned}\varphi\colon\quad \mathbb{R}_+^*\times\,]-\pi,\pi[\,\times\,]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\;&\longrightarrow\; \mathbb{R}^3\big\backslash\big(\mathbb{R}_-\times\{0\}\times\mathbb{R}\big)\\ (r,\theta,\eta)\;&\longmapsto\;\big(r\cos\theta\cos\eta,\ r\sin\theta\cos\eta,\ r\sin\eta\big)\\ &=:\ (x,y,z),\end{aligned}$$

de déterminant jacobien strictement positif (donc jamais nul) :

$$\begin{aligned}\mathrm{Jac}\,\varphi(r,\theta,\eta) &= \begin{vmatrix}\cos\theta\cos\eta & -r\sin\theta\cos\eta & -r\cos\theta\sin\eta\\ \sin\theta\cos\eta & r\cos\theta\cos\eta & -r\sin\theta\sin\eta\\ \sin\eta & 0 & r\cos\eta\end{vmatrix}\\ &= r\sin\theta\cos\eta\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\eta & -r\sin\theta\sin\eta\\ \sin\eta & r\cos\eta\end{vmatrix}+r\cos\theta\cos\eta\begin{vmatrix}\cos\theta\cos\eta & -r\cos\theta\sin\eta\\ \sin\eta & r\cos\eta\end{vmatrix}\\ &= r\sin\theta\cos\eta\,\big(r\sin\theta\cos^2\eta+r\sin\theta\sin^2\eta\big)+r\cos\theta\cos\eta\big(r\cos\theta\cos^2\eta+r\cos\theta\sin^2\eta\big)\\ &= r\sin\theta\cos\eta\,r\sin\theta+r\cos\theta\cos\eta\,r\cos\theta\\ &= r^2\cos\eta\ >\ 0,\end{aligned}$$

et donc, puisque le demi-plan $\mathbb{R}_-\times\{0\}\times\mathbb{R}$ que l'on soustrait à $\mathbb{R}^3$ est de mesure de Lebesgue 3-dimensionnelle nulle, la formule de changement de variables s'écrit ici, pour toute fonction intégrable $f\in L^1(\mathbb{R}^3)$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dxdydz \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\eta\,d\eta\int_0^\infty f\big(r\cos\theta\cos\eta,\,r\sin\theta\cos\eta,\,r\sin\eta\big)\,r^2dr.$$

Par exemple, le volume (mesure 3-dimensionnelle) d'une boule ouverte centrée à l'origine de rayon $R>0$:

$$B(0,R)\;:=\;\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon\ x^2+y^2+z^2<R^2\big\}$$

vaut :

$$\begin{aligned}m\big(B(0,R)\big)\;=\;\int_{B(0,R)}1\cdot dxdydz\;&=\;\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\eta\,d\eta\int_0^R r^2\,dr\\ &=\;2\pi\cdot 2\cdot\frac{R^3}{3}\\ &=\;\frac{4\pi\,R^3}{3},\end{aligned}$$

ce qui rassure le vieil Archimède sur les capacités mathématiques du jeune Lebesgue !

Généralement, et en changeant légèrement la représentation par rapport aux dimensions 2 et 3, en dimension $d\geqslant 1$ quelconque, le passage aux *coordonnées hypersphériques* peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}x_1&=r\cos\eta_1,\\ x_2&=r\sin\eta_1\cos\eta_2,\\ x_3&=r\sin\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{d-1}&=r\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3\cdots\sin\eta_{d-2}\cos\theta,\\ x_d&=r\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3\cdots\sin\eta_{d-2}\sin\theta,\end{aligned}$$

avec un rayon $r > 0$ et des angles :

$$0 \,<\, \eta_1, \dots, \eta_{d-2} < \pi, \qquad\qquad 0 \,<\, \theta \,<\, 2\pi.$$

En formant et en calculant le déterminant jacobien de cette transformation, on peut se convaincre (exercice) par récurrence sur d qu'il vaut :

$$\mathsf{Jac}\,\varphi \,=\, r^{d-1}\,\mathsf{sin}^{d-2}\eta_1\,\mathsf{sin}^{d-3}\eta_2\cdots\mathsf{sin}^1\eta_{d-2},$$

et pour calculer le volume d-dimensionnel d'une boule ouverte centrée à l'origine de rayon $R > 0$:

$$B(0,R) \,:=\, \big\{x_1^2+\cdots+x_d^2 < R^2\big\},$$

on peut utiliser les valeurs (classiques !) des *intégrales de Wallis :*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathsf{sin}^{2m} t\,dt \,=\, \frac{(2m)!}{2^{2m}\,(m!)^2}\,\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathsf{sin}^{2m+1} t\,dt \,=\, \frac{2^{2m}\,(m!)^2}{(2m+1)!},$$

pour obtenir au final les volumes de ces hyperboules qui, suivant la parité de la dimension :

$$d \,=\, 2e \qquad \text{et} \qquad d \,=\, 2e+1,$$

valent :

$$\frac{\pi^e}{e!}\,R^{2e} \qquad \text{et} \qquad \frac{2^{2e+1}\,e!\,\pi^e}{(2e+1)!}\,R^{2e+1},$$

ce qui redonne les cas de la dimension $2e = 2$ et $2e+1 = 3$.

Une application plus amusante de la formule de changement de variables va permettre de re-calculer la célèbre valeur de :

$$\zeta(2) \,:=\, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Partons en effet de :

$$\frac{1}{2m+1}\,\frac{1}{2m+1} \,=\, \int_0^1\int_0^1 x^{2m}\,y^{2m}\,dxdy,$$

puis sommons :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \,=\, \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-x^2y^2}\,dxdy.$$

Question : *que vaut cette intégrale double ?*

Réponse : comme l'application $\mathscr{C}^\infty$:

$$\begin{aligned} \varphi\colon\quad \Delta &\longrightarrow \square \\ (u,v) &\longmapsto \bigg(\frac{\mathsf{sin}\,u}{\mathsf{cos}\,v},\,\frac{\mathsf{sin}\,v}{\mathsf{cos}\,u}\bigg) \,=:\, \big(x(u,v),\,y(u,v)\big) \end{aligned}$$

établit un difféomorphisme (exercice) entre :

$$\begin{aligned} \Delta &\,:=\, \big\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\colon\ u>0,\ v>0,\ u+v<\tfrac{\pi}{2}\big\} \\ \text{et} \qquad \square &\,:=\, \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ 0<x<1,\ 0<y<1\big\}, \end{aligned}$$

d'inverse :

$$u(x,y) \,=\, \mathsf{arctan}\bigg(x\,\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}\bigg) \qquad \text{et} \qquad v(x,y) \,=\, \mathsf{arctan}\bigg(\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}\bigg),$$

et comme un calcul de son jacobien :

$$\begin{aligned}\mathsf{Jac}\,\varphi(u,v) \;&=\; \begin{vmatrix} \frac{\cos u}{\cos v} & \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 v} \\ \frac{\sin v \sin u}{\cos^2 u} & \frac{\cos v}{\cos u} \end{vmatrix} \;=\; 1 - \frac{\sin^2 u \sin^2 v}{\cos^2 u \cos^2 v} \\ &=\; 1 - x(u,v)^2\, y(u,v)^2\end{aligned}$$

révèle le phénomène agréable que dans la formule de changement de variables :

$$\int_\Delta \underbrace{\frac{1}{1-x(u,v)^2 y(u,v)^2}\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(u,v)\big|}_{=\,1!}\,dudv \;=\; \int_\square \frac{1}{1-x^2y^2}\,dxdy,$$

une *compensation magique* intervient, et donc calculer cette intégrale se ramène simplement à connaître l'aire d'un triangle rectangle isocèle :

$$\begin{aligned}\int_\square \frac{1}{1-x^2y^2}\,dxdy \;&=\; \int_\Delta 1\cdot dudv \\ &=\; \mathsf{Aire}(\Delta) \\ &=\; \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

ce qui offre sur un plateau :

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{8} \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \;&=\; \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{(2\ell)^2} \\ &=\; \zeta(2) - \frac{1}{2^2}\,\zeta(2),\end{aligned}$$

la statuette fétiche d'Euler $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

5. Appendice : accroissements locaux finis

Dans un espace-source $\mathbb{R}^d$ muni de coordonnées $x = (x_1, \dots, x_d)$, on choisit la norme $|x| := \max_{1\leqslant i\leqslant d} |x_i|$, et dans un espace-but $\mathbb{R}^d$ muni de coordonnées $y = (y_1, \dots, y_d)$, on choisit de même $|y| := \max_{1\leqslant j\leqslant d} |y_j|$.

Lemme 5.1. *Soit $Q \subset \mathbb{R}^d$ un cube fermé, et soit $Q \subset U \subset \mathbb{R}^d$ un voisinage ouvert. Soit $\varphi\colon U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Alors il existe une constante $0 \leqslant C_\varphi < \infty$ telle que pour tous $x', x'' \in Q$:*

$$\big|\varphi(x'') - \varphi(x')\big| \;\leqslant\; C\cdot|x''-x'|,$$

et le choix suivant convient :

$$C \;:=\; d \max_{1\leqslant i\leqslant d}\, \max_{1\leqslant j\leqslant d}\, \max_{x\in Q} \left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(x)\right| \;<\; \infty.$$

Rappelons que la norme de l'application linéaire tangente est définie par :

$$\big\|T_x\varphi\big\| \;=\; d \max_{1\leqslant i\leqslant d}\, \max_{1\leqslant j\leqslant d} \left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(x)\right|,$$

et donc on a simplement ici :

$$C \;=\; \max_{x\in Q} \big\|T_x\varphi\big\|.$$

Démonstration. Par définition de la norme :

$$\big|\varphi(x'') - \varphi(x')\big| \,=\, \max_{1\leqslant j\leqslant d} \big|\varphi_j(x'') - \varphi_j(x')\big|.$$

Fixons j, et regardons droit dans les yeux la fonction d'une unique variable réelle :

$$\psi_j\colon\quad [0,1] \,\ni\, t \,\longmapsto\, \varphi_j\big(x' + t(x''-x')\big) \,\in\, \mathbb{R},$$

qui est bien définie, car le cube Q est convexe, d'où le segment $[x', x''] \subset Q$.

L'inégalité classique des accroissements finis pour cette fonction s'écrit :

$$\big|\psi_j(1) - \psi_j(0)\big| \,\leqslant\, \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \left|\frac{d\psi_j}{dt}(t)\right| \cdot (1-0).$$

Or ici, comme :

$$\psi_j(t) \,=\, \varphi_j\Big(x_1' + t(x_1''-x_1'),\, \ldots\ldots,\, x_d'' + t(x_d''-x_d')\Big),$$

calculons cette dérivée par rapport à t, majorons-la :

$$\begin{aligned}
\big|\varphi_j(x'') - \varphi_j(x')\big| \,&=\, \big|\psi_j(1) - \psi_j(0)\big| \\
&\leqslant\, \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \left|(x_1''-x_1')\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}\big(x'+t(x''-x')\big) + \cdots\cdots + (x_d''-x_d')\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_d}\big(x'+t(x''-x')\big)\right| \\
&\leqslant\, \max_{1\leqslant l\leqslant d} \big|x_l''-x_l'\big| \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \left(\left|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}\big(x'+t(x''-x')\big)\right| + \cdots\cdots + \left|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_d}\big(x'+t(x''-x')\big)\right|\right) \\
&=\, \big|x''-x'\big| \max_{0\leqslant t\leqslant 1} d \max_{1\leqslant i\leqslant d} \left|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\big(x'+t(x''-x')\big)\right| \\
&\leqslant\, \big|x''-x'\big|\; d \max_{1\leqslant i\leqslant d} \max_{x\in Q} \left|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x)\right|,
\end{aligned}$$

et enfin, prenons le maximum sur les indices $1 \leqslant j \leqslant d$, ce qui conclut. □

6. Exercices

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$, soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et soit un point $x \in \Omega$. On rappelle que le *bord* — ou la *frontière* — de Ω est l'ensemble, noté $\partial\Omega$, des points $y \in \mathbb{R}^d$ dont tout voisinage ouvert intersecte à la fois Ω et son complémentaire $\mathbb{R}^d\backslash\Omega$. Intuitivement, $\partial\Omega$ est l'ensemble des points qui '*hésitent*' entre Ω et $\mathbb{R}^d\backslash\Omega$.

On note $\overline{E}$ l'*adhérence* de tout sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$, ensemble de tous les points-limites $x_\infty = \lim_{k\to\infty} x_k \in \mathbb{R}^d$ de suites $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ de points $x_k \in E$ qui sont de Cauchy dans $\mathbb{R}^d$ (pour une, donc n'importe quelle norme, puisque toutes sont équivalentes).

(a) Montrer que :

$$\partial\Omega \,=\, \overline{\Omega}\backslash\Omega.$$

(b) Montrer que :

$$\mathrm{dist}\big(x,\, \mathbb{R}^d\backslash\Omega\big) \,=\, \mathrm{dist}\big(x,\, \partial\Omega\big) \qquad\qquad (\forall\, x\in\Omega).$$

Indication: Comme $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^d\backslash\Omega$, l'inégalité '$\leqslant$' est claire. Pour l'inégalité inverse '$\geqslant$', supposer en raisonnant par l'absurde que :

$$\delta \,:=\, \mathrm{dist}\big(x,\, \partial\Omega\big) - \mathrm{dist}\big(x,\, \mathbb{R}^d\backslash\Omega\big) \,>\, 0,$$

trouver $y \in \mathbb{R}^d\backslash\Omega$ satisfaisant :

$$|y-x| \,\leqslant\, \mathrm{dist}\big(x,\, \mathbb{R}^d\backslash\Omega\big) + \tfrac{\delta}{2},$$

et montrer qu'il existe un point $z \in [y, x[\, \cap\, \partial\Omega$.

Exercice 2. Dans un ouvert $0 \in U \subset \mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$, pour tout entier $\ell \geqslant 1$, on considère les sous-ensembles :

$$K_\ell := \big\{x \in U \colon\ |x| \leqslant \ell,\ \mathsf{dist}\big(x,\, \mathbb{R}^d \backslash U\big) \geqslant \tfrac{1}{\ell}\big\}.$$

(a) Montrer les emboîtements $K_\ell \subset K_{\ell+1}$ pour tout $\ell \geqslant 1$.

(b) Montrer que chaque K_ℓ est compact.

(c) Montrer que ces K_ℓ remplissent :

$$U = \bigcup_{\ell \geqslant 1} K_\ell.$$

(d) Montrer que l'intérieur topologique de chaque K_ℓ est :

$$\mathsf{Int}\, K_\ell = \big\{x \in U \colon\ |x| < \ell,\ \mathsf{dist}\big(x,\, \mathbb{R}^d \backslash U\big) > \tfrac{1}{\ell}\big\}.$$

(e) Montrer que $K_\ell \subset \mathsf{Int}\, K_{\ell+1}$ pour tout $\ell \geqslant 1$.

Exercice 3. Détailler les arguments de l'inégalité gauche :

$$(1-\varepsilon)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_0)\big| \cdot m(Q) \leqslant m\big(\varphi(Q)\big)$$

de la Proposition 3.1.

Exercice 4. L'objectif est de démontrer le Lemme 2.9, dont on conserve les notations.

(a) Soit $A = \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i \leqslant d}^{1 \leqslant j \leqslant d}$ une matrice générale de taille $d \times d$ à coefficients $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, l'indice i étant celui des lignes. Vérifier que :

- $P_\sigma \cdot A$ permute les lignes de A par σ^{-1} ;
- $A \cdot P_\sigma$ permute les colonnes de A par σ.

(b) Pour $i = 1, \dots, d$, soit $e_i \in \mathbb{R}^d$ le vecteur de la base canonique :

$$e_i := {}^{\mathrm{T}}\big(0 \cdots 0\,1\,0 \cdots 0\big),$$

le « 1 » se trouvant à la i-ème place, et « $^{\mathrm{T}}$ » désignant la transposition. Vérifier que pour toute permutation $\sigma \colon \{1, \dots, d\} \longrightarrow \{1, \dots, d\}$, on a :

$$P_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}, \qquad\qquad \big(P_\sigma\big)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}.$$

(c) Vérifier que :

- $A \cdot D_j^\lambda$ multiplie la j-ème colonne de A par λ ;
- $D_i^\lambda \cdot A$ multiplie la i-ème ligne de A par λ.

(d) Montrer que l'inverse :

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ -1 & 1 & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

peut être écrit comme un produit fini de matrices des trois types P_σ, D_i^λ, U.

(e) On note alors G l'ensemble de toutes les matrices de taille $d \times d$ qui s'obtiennent comme produits finis de matrices des trois types P_σ, D_i^λ, U. Pour tous $i, j \in \{1, \dots, d\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice de base ayant 1 à la i-ème ligne, j-ème colonne, et 0 aux $d^2 - 1$ places restantes. Montrer que :

$$\mathsf{Id} + E_{i,j} \in G.$$

(f) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\mathsf{Id} + \alpha\, E_{i,j} \in G,$$

et que :

$$\big(\mathsf{Id} + \alpha\, E_{i,j}\big)^{-1} = \mathsf{Id} - \alpha\, E_{i,j}.$$

(g) Vérifier l'identité-produit :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_2 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ a_3 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_d & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_2 & 1 & & & \\ a_3 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_d & & & & 1 \end{pmatrix},$$

les termes non écrits étant tous des 0.

(h) Soit enfin $L \in \mathbb{R}^{d \times d}$ une matrice inversible quelconque. Vérifier qu'il suffit de réduire L à l'identité en la multipliant à gauche et à droite par un nombre fini de matrices des trois types P_σ, D_i^λ, $\mathsf{Id} + \alpha\, E_{i,j}$.

(i) Montrer qu'on peut supposer que $L_{1,1} = 1$.

(j) En multipliant L à gauche et à droite par des matrices du type $\mathsf{Id} + \alpha\, E_{i,j}$, se ramener à des matrices :

$$\widetilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

(k) Conclure en raisonnant par récurrence sur la dimension $d \geqslant 1$.