Examens corrigés

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Examen 1

Exercice 1. [Inégalité de Tchebychev] Soit $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable à valeurs positives qui est Lebesgue-intégrable. Pour $\alpha > 0$, on pose :

$$E_\alpha := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ f(x) > \alpha\big\}.$$

Montrer que (figure-bonus possible) :

$$m\big(E_\alpha\big) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int f.$$

Exercice 2. En dimension $d \geqslant 1$, soit une fonction mesurable $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ à valeurs positives finies.

(a) Rappeler la définition initiale de la mesurabilité d'une fonction, puis des caractérisations équivalentes.

(b) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, les sous-ensembles :

$$E_k := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ 2^{k-1} < f(x) \leqslant 2^k\big\}$$

sont mesurables dans $\mathbb{R}^d$.

(c) Montrer que l'on a la réunion disjointe (figure-bonus possible) :

$$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} E_k = \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ f(x) > 0\big\}.$$

(d) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction étagée :

$$F_n := \sum_{k=-n}^{k=+n} 2^k\, \mathbf{1}_{E_k},$$

ainsi que $F := \lim_{n\to\infty} F_n$. Montrer que l'on a en tout point :

$$\tfrac{1}{2}\, F \leqslant f \leqslant F.$$

(e) Montrer que la fonction d'origine f est Lebesgue-intégrable si et seulement si $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\, m(E_k) < \infty$.

(f) Avec $a, b \in \mathbb{R}$, on introduit les deux fonctions :

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^a} & \text{pour } 0 < |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^b} & \text{pour } |x| \geqslant 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

En utilisant **(e)**, montrer que f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$ exactement lorsque $a < d$, et aussi, montrer que g est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$ exactement lorsque $b > d$.

Exercice 3. Sur un segment compact $[a, b] \Subset \mathbb{R}$, soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle quelconque, pas forcément bornée. Montrer qu'on peut néanmoins définir sans modification la notion de Riemann-intégrabilité de f, mais montrer alors que si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision Δ de $[a, b]$ telle que la différence entre les sommes de Darboux supérieure et inférieure de f satisfait $\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leqslant \varepsilon$, alors ceci implique en fait que f est nécessairement bornée.

Exercice 4. Soient $E_1, E_2, E_3, \ldots \subset \mathbb{R}^d$ une infinité dénombrable d'ensembles mesurables emboîtés de manière décroissante les uns dans les autres :

$$E_k \supset E_{k+1} \qquad\qquad {\scriptstyle (k \geqslant 1)}.$$

On suppose que pour un certain entier $k_0 \geqslant 1$, on a :

$$m\big(E_{k_0}\big) < \infty.$$

En utilisant un théorème fondamental énoncé avec soin concernant les réunions dénombrables disjointes d'ensembles mesurables, montrer que (figure-bonus possible) :

$$m\bigg(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\bigg) = \lim_{K \to \infty} m\big(E_K\big),$$

puis trouver un exemple simple faisant voir que cette conclusion peut être mise en défaut sans l'existence de k_0 tel que $m(E_{k_0}) < \infty$.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de montrer que recouvrir les sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^d$ par un nombre *fini* de cubes ne suffit pas à produire un concept réellement satisfaisant de mesure extérieure $m^*(E)$. On se restreint ici à la dimension $d = 1$. En effet, la *mesure extérieure de Jordan* $m_J^*(E)$ peut être définie par :

$$m_J^*(E) = \inf \sum_{j=1}^{J} \big|I_j\big|,$$

où l'infimum est pris sur les recouvrements *finis :*

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{J} I_j,$$

par des intervalles fermés I_j.

(a) Montrer que $m_J^*(E) = m_J^*\big(\overline{E}\big)$ pour tout sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$.

(b) Trouver un sous-ensemble dénombrable $E \subset [0, 1]$ tel que $m_J^*(E) = 1$, tandis que sa mesure extérieure de Lebesgue vaut $m^*(E) = 0$.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^d$, soit un nombre fini quelconque $n \geqslant 1$ de sous-ensembles mesurables $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^d$ de mesures finies :

$$m(A_1) < \infty, \quad m(A_2) < \infty, \quad \dots\dots, \quad m(A_n) < \infty.$$

Montrer que (figure-bonus possible) :

$$m\Big(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\Big) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} m\Big(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\Big).$$

Exercice 7. Soit m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Construire un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$ tel que $m(\Omega) \leqslant \varepsilon$.

Exercice 8. Soit $f \in \mathscr{C}^0_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ une fonction réelle continue à support compact. Montrer que :

$$0 = \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x-h) - f(x)\big|\, dx.$$

Indication: Si $\mathsf{supp}(f) \subset B(0,R)$ pour un rayon $R \gg 1$ assez grand, se limiter à $h \in \mathbb{R}^d$ avec $|h| < 1$ et se ramener à $\int_{B(0,R+1)}$.

Exercice 9. Trouver une suite de fonctions en escalier $f_n \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisant :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx,$$

mais telle que, en *tout* point $x \in [0,1]$, la suite numérique :

$$\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$$

soit bornée et ne converge vers aucune valeur réelle. Indication: Utiliser la suite double $F_{k,m}(x) := \mathbf{1}_{[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}]}$ pour $1 \leqslant k \leqslant m$, illustrer son comportement pour $m = 1, 2, 3, 4$, décrire en mots les idées qui viennent à l'esprit, et enfin, rédiger en détail une démonstration rigoureuse.

2. Corrigé de l'examen 1

Exercice 1. Comme $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est Lebesgue-intégrable, pour tout réel $\alpha > 0$, l'ensemble de sur-niveau :

$$E_\alpha := \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ f(x) > \alpha\big\}$$

est mesurable dans $\mathbb{R}^d$. De plus, l'inégalité entre fonctions :

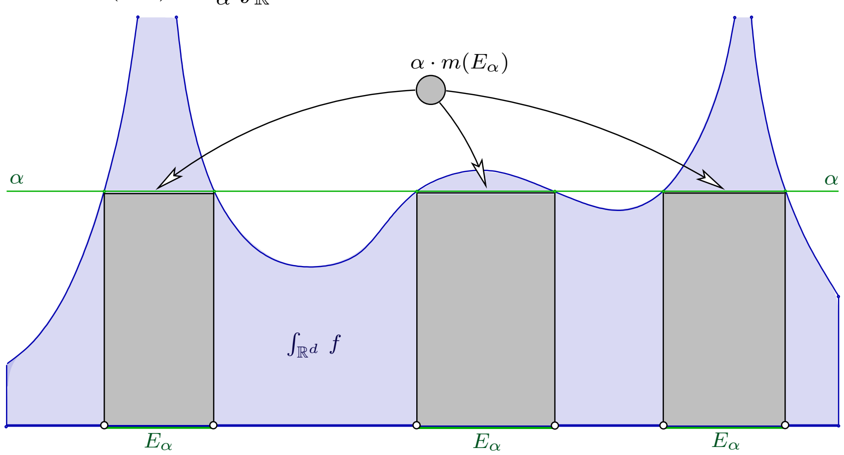
$$f(x) \geqslant \alpha \cdot \mathbf{1}_{E_\alpha}(x) \qquad\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^d),$$

est claire lorsque $x \notin E_\alpha$ car $f(x) \geqslant 0 = \alpha \cdot 0$ par hypothèse, et vraie aussi lorsque $x \in E_\alpha$, car $f(x) > \alpha = \alpha \cdot 1$, donc elle est satisfaite partout.

Par intégration de cette inégalité, nous obtenons instantanément :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \geqslant \alpha \cdot m\big(E_\alpha\big),$$

ce qui donne bien $m(E_\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} f$.



Géométriquement, l'hypographe de f :

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+\colon\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\},$$

dont la mesure $(d+1)$-dimensionnelle vaut $\int_{\mathbb{R}^d} f$ d'après un théorème du cours, est « coupé » à hauteur $\alpha > 0$, et sur le sous-ensemble $E_\alpha \subset \mathbb{R}^d$ où $f > \alpha$, on ne retient que la valeur-type α, ce qui correspond à restreindre la considération au « *pseudo-rectangle* » de hauteur α et de « base » E_α, lequel est entièrement contenu dans l'hypographe de f au-dessus de E_α :

$$\big\{(x,y)\colon\ x \in E_\alpha,\, 0 \leqslant y \leqslant \alpha\big\} \subset \big\{(x,y)\colon\ x \in E_\alpha,\, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\},$$

et par intégration « visuelle », on trouve bien que l'aire de ce pseudo-rectangle est inférieure à l'aire intégrale totale :

$$\alpha \cdot m\big(E_\alpha\big) \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

Exercice 2. (a) Une fonction $f\colon E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ définie sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ est dite *mesurable* si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, son ensemble de sous-niveau :

$$f^{-1}\big([-\infty,\, a[\big) \;=\; \big\{x \in E\colon\; f(x) < a\big\},$$

est un sous-ensemble *mesurable* de $\mathbb{R}^d$. Dans le cours, on a obtenu les caractérisations équivalentes suivantes :

• pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$\big\{x \in E\colon\; f(x) \leqslant a\big\}$$

est mesurable ;

• pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$\big\{x \in E\colon\; f(x) \geqslant a\big\}$$

est mesurable ;

• pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$\big\{x \in E\colon\; f(x) > a\big\}$$

est mesurable ;

• pour tout couple de nombres réels finis :

$$-\infty \;<\; a \;<\; b \;<\; +\infty,$$

les ensembles-tranches :

$$\big\{a < f < b\big\}$$

sont mesurables ;

• plus généralement, il en va de même en remplaçant $\{a \,<\, f \,<\, b\}$ par l'un des trois ensembles :

$$\big\{a \leqslant f < b\big\}, \qquad\qquad \big\{a < f \leqslant b\big\}, \qquad\qquad \big\{a \leqslant f \leqslant b\big\}.$$

(b) On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les ensembles $E_k := \{x \in \mathbb{R}^d :\quad 2^{k-1} < f(x) \leqslant 2^k\}$ sont mesurables dans $\mathbb{R}^d$.

(c) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $E_k = \{x \in \mathbb{R}^d\colon\; 2^{k-1} < f(x) \leqslant 2^k\}$ est contenu dans l'ensemble :

$$E^* \;:=\; \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\; f(x) > 0\big\},$$

donc :

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} E_k \;\subset\; E^*.$$

Pour l'inclusion opposée, soit $x \in E^*$ quelconque. Comme $f(x) > 0$, et comme la réunion d'intervalles enchaînés :

$$\coprod_{k \in \mathbb{Z}} \big]2^{k-1},\, 2^k\big] \;=]0, \infty[$$

est disjointe, il existe un unique entier $k_x \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$2^{k_x - 1} \;<\; f(x) \;\leqslant\; 2^{k_x},$$

ce qui signifie $x \in E_{k_x}$, et donne bien :

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} E_k \;\supset\; E^*.$$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}^d$ quelconque fixé.

• Si $f(x) = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $x \notin E_k$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$F_n(x) \,=\, \sum_{|k| \leqslant n} 2^k \, \underline{\mathbf{1}_{E_k}(x)} \,=\, 0,$$

puis en faisant $n \longrightarrow \infty$:

$$F(x) \,=\, 0 \,=\, f(x),$$

d'où trivialement $\frac{1}{2}\, F(x) \leqslant f(x) \leqslant F(x)$, car $\frac{1}{2}\, 0 \leqslant 0 \leqslant 0$, c'est très vrai, mon bébé !

• Si maintenant $f(x) > 0$, il existe un unique $k_x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in E_{k_x}$, d'où pour tout $n \geqslant |k_x|$:

$$F_n(x) \,=\, 2^{k_x},$$

puis en faisant $n \longrightarrow \infty$:

$$F(x) \,=\, 2^{k_x}.$$

Comme par définition de k_x on a :

$$\frac{1}{2}\, F(x) \,=\, 2^{k_x - 1} \,<\, f(x) \,\leqslant\, 2^{k_x} \,=\, F(x),$$

en relaxant la « *strictitude* » de l'inégalité à gauche, nous obtenons bien $\frac{1}{2}\, F(x) \leqslant f(x) \leqslant F(x)$.

(e) Comme $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est mesurable à valeurs positives finies, f est Lebesgue-intégrable (par définition !) si et seulement si $\int_{\mathbb{R}^d} f < \infty$. Or une intégration de l'encadrement de f par F obtenu à l'instant dans la question précédente donne :

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} F \,\leqslant\, \int_{\mathbb{R}^d} f \,\leqslant\, \int_{\mathbb{R}^d} F,$$

donc f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$ si et seulement si F l'est.

Maintenant, il est temps d'observer que la suite $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions étagées positives est croissante :

$$F_{n+1}(x) - F_n(x) \,=\, 2^{-(n+1)}\, \mathbf{1}_{E_{-n-1}}(x) + 2^{n+1}\, \mathbf{1}_{E_{n+1}}(x) \,\geqslant\, 0,$$

ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence monotone pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} F \,=\, \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\lim_{n \to \infty} F_n \Big) \,&=\, \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} F_n \\
&=\, \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \bigg(\sum_{|k| \leqslant n} 2^k\, \mathbf{1}_{E_k} \bigg) \\
&=\, \lim_{n \to \infty} \sum_{|k| \leqslant n} 2^k\, m\big(E_k\big) \\
&=\, \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k\, m\big(E_k\big) \\
&\in\, \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},
\end{aligned}$$

et donc on a bien :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \,<\, \infty \;\iff\; \int_{\mathbb{R}^d} F \,<\, \infty \;\iff\; \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k\, m\big(E_k\big).$$

(f) Avec un exposant $a \in \mathbb{R}$, la fonction :

$$f_a(x) := \begin{cases} |x|^{-a} & \text{lorsque } 0 < |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

est mesurable à valeurs $\geqslant 0$.

Puisque dans la boule unité fermée $\{|x| \leqslant 1\}$, on a $|x|^c \leqslant 1$ pour tout exposant réel $c \geqslant 0$, la fonction f_a est toujours intégrable lorsque $a \leqslant 0$.

Supposons donc $a > 0$, et, en application de ce qui précède, regardons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les ensembles :

$$\begin{aligned} E_k &= \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ 2^{k-1} < f_a(x) \leqslant 2^k\big\} \\ &= \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ 0 < |x| \leqslant 1 \text{ et } 2^{k-1} < \tfrac{1}{|x|^a} \leqslant 2^k\big\} \\ &= \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ 0 < |x| \leqslant 1 \text{ et } \tfrac{1}{2^{\frac{k}{a}}} \leqslant |x| < \tfrac{1}{2^{\frac{k-1}{a}}}\big\}, \end{aligned}$$

qui s'avèrent ainsi visuellement être une collection infinie d'anneaux (en dimension $d = 2$), ou de coquilles sphériques (en dimension $d = 3$), emboîtés les uns dans les autres.

Or lorsque $k \leqslant 0$, on voit que $E_k = \emptyset$, et donc seuls les E_k avec $k \geqslant 1$ interviennent.

Maintenant, grâce à la question **(e)**, f est Lebesgue-intégrable si et seulement si :

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k\, m\big(E_k\big) < \infty.$$

Mais chacune de ces coquilles d-dimensionnelles E_k avec $k \geqslant 1$ apparaît manifestement comme étant la dilatée du facteur $\frac{1}{2^{\frac{k}{a}}}$ de la coquille de référence :

$$\mathscr{C}_a := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ 1 \leqslant |x| < \tfrac{1}{2^{-\frac{1}{a}}}\big\},$$

évidemment de mesure strictement positive finie $0 < m(\mathscr{C}_a) < \infty$, et donc d'après la propriété naturelle de dilatation de la mesure de Lebesgue :

$$m\big(\lambda \cdot F\big) = \lambda^d\, m(F) \qquad\qquad (\lambda > 0,\ F \subset \mathbb{R}^d \text{ mesurable}),$$

on obtient ici :

$$m\big(E_k\big) = \left(\frac{1}{2^{\frac{k}{a}}}\right)^d \cdot m\big(\mathscr{C}_a\big),$$

d'où enfin, en reconnaissant une série géométrique sérendipitrice :

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k\, m\big(E_k\big) = m\big(\mathscr{C}_a\big) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-\frac{d}{a})} = \begin{cases} \infty & \text{lorsque } a \geqslant d, \\ m(\mathscr{C}_a)\, \dfrac{2^{(1-\frac{d}{a})}}{1 - 2^{(1-\frac{d}{a})}} & \text{lorsque } 0 < a < d, \end{cases}$$

ce qui montre que f_a est intégrable si et seulement si $a < d$.

Passons maintenant au cas — fort similaire ! — de la fonction :

$$g_b(x) := \begin{cases} |x|^{-b} & \text{là où } |x| \geqslant 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Lorsque $b \leqslant 0$, elle est manifestement non-intégrable.

Supposons donc $b > 0$. Dans ce cas :

$$E_k = \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ |x| \geqslant 1 \text{ et } \tfrac{1}{2^{\frac{k}{b}}} \leqslant |x| < \tfrac{1}{2^{\frac{k-1}{b}}}\big\},$$

avec $E_k = \emptyset$ pour $k \geqslant 1$. Toujours avec :

$$\mathscr{C}_b \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\, 1 \leqslant |x| < \tfrac{1}{2^{-\frac{1}{b}}}\big\},$$

on vérifie que :

$$\sum_{k=-\infty}^{0} 2^k\, m\big(E_k\big) \,=\, m\big(\mathscr{C}_b\big) \sum_{k=-\infty}^{0} 2^{k(1-\frac{d}{b})} \,=\, \begin{cases} \infty & \text{lorsque } \ 0 < b \leqslant d, \\ m(\mathscr{C}_b)\, \dfrac{1}{1-2^{\frac{d}{b}-1}} & \text{lorsque } \ b > d, \end{cases}$$

ce qui montre que g_b est intégrable si et seulement si $b > d$.

Exercice 3. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle quelconque, pas forcément bornée. Dans la définition des sommes de Darboux associées à des subdivisions $\Delta \subset [a,b]$, il se peut alors que l'infimum de f sur un intervalle de la subdivision (ou son supremum) soit infini, auquel cas la somme de Darboux correspondante est infinie. Dans tous les cas rien ne nous empêche de vérifier si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision de $[a,b]$:

$$\Delta \,=\, \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\},$$

telle que :

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Supposons cette condition verifiée pour un $\varepsilon > 0$ fixé, et montrons qu'alors f est nécessairement bornée. Raisonnons par l'absurde et supposons f non bornée, par exemple $\mathsf{sup}_{[a,b]} f = +\infty$. Alors il existe un entier $1 \leqslant k \leqslant n$ tel que sur $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, on a $\mathsf{sup}_{I_k} f = +\infty$ et donc $\Sigma^\Delta(f) = +\infty$. Mais alors

$$\Sigma_\Delta(f) \geqslant \Sigma^\Delta(f) - \varepsilon = +\infty.$$

Cela entraîne que sur un certain intervalle $I_l = [x_{l-1}, x_l]$, on a $\mathsf{inf}_{I_l} f = +\infty$, ce qui est impossible, car on considère des fonctions dont toutes les valeurs sont réelles. En conclusion, si une fontion vérifie la définition de Riemann-intégrabilité, elle est nécessairement bornée.

Une autre démonstration possible part d'une caractérisation obtenue dans le cours : une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier encadrant f :

$$f_{1,\varepsilon}^{\mathsf{esc}} \,\leqslant\, f \,\leqslant\, f_{2,\varepsilon}^{\mathsf{esc}},$$

telles que :

$$\big(0 \leqslant\big) \qquad \int_a^b f_{2,\varepsilon}^{\mathsf{esc}} - \int_a^b f_{1,\varepsilon}^{\mathsf{esc}} \,\leqslant\, \varepsilon.$$

La fonction f sera de nouveau implicitement bornée, puisque les fonctions en escalier sont (par nature) bornées.

Exercice 4. Cela apparaît explicitement dans le cours, mais refaisons la démonstration. Quitte à renuméroter la suite, on peut supposer que $k_0 = 1$ après éliminination des ensembles $E_1, \dots, E_{k_0-1}$ qui ne comptent pas dans l'intersection infinie. Posons $E := \bigcap_{k=1}^\infty E_k$, et considérons alors les différences :

$$E_k \big\backslash E_{k+1} \qquad\qquad (k \geqslant 1),$$

de telle sorte qu'on peut représenter sous forme de réunion disjointe :

$$E_1 \;=\; E \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(E_k \backslash E_{k+1}\big).$$

Grâce au théorème d'additivité dénombrable disjointe, on peut alors calculer :

$$\begin{aligned} m\big(E_1\big) \;&=\; m(E) + \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K-1} \Big[m\big(E_k\big) - m\big(E_{k+1}\big)\Big] \\ &=\; m(E) + m\big(E_1\big) - \lim_{K\to\infty} m\big(E_K\big). \end{aligned}$$

Puisque $m\big(E_1\big) < \infty$, à gauche et à droite, on a des nombres réels positifs finis, donc après simplification :

$$m(E) \;=\; \lim_{K\to\infty} m\big(E_K\big).$$

Sans l'hypothèse que $m\big(E_k\big) < \infty$ à partir d'un certain rang $k \geqslant k_0$, l'énoncé est faux, car si on prend par exemple $E_k := [k, \infty[\subset \mathbb{R}$, alors $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \emptyset$ tandis que $m(E_k) = \infty$ pour tout $k \geqslant 1$, ce qui entraîne la non-coïncidence :

$$m\bigg(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\bigg) \;=\; 0 \;\neq\; \infty \;=\; \lim_{K\to\infty} m\big(E_K\big).$$

Exercice 5. (a) Pour prouver l'égalité demandée, on va raisonner par double inégalité.

• Avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, soit $\cup_{j=1}^{J} I_j$ un recouvrement de E par un nombre fini d'intervalles fermés tels que :

$$\sum_{j=1}^{J} |I_j| \;\leqslant\; m_J^*(E) + \varepsilon.$$

Alors en utilisant le fait qu'une réunion *finie* de fermés est fermée, il vient en prenant les adhérences :

$$\overline{E} \;\subset\; \overline{\bigcup_{1\leqslant j\leqslant J} I_j} \;=\; \bigcup_{1\leqslant j\leqslant J} I_j.$$

Donc $\cup_{j=1}^{J} I_j$ est aussi un recouvrement de la fermeture $\overline{E}$ par un nombre fini d'intervalles fermés, ce qui implique par définition de $m_J^*(\overline{E})$:

$$m_J^*\big(\overline{E}\big) \;\leqslant\; \sum_{j=1}^{J} |I_j|.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout recouvrement de E, on peut passer à l'infimum, c'est-à-dire faire $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$, pour obtenir une première inégalité :

$$m_J^*\big(\overline{E}\big) \;\leqslant\; m_J^*(E).$$

• L'inégalité inverse est plus « *naturelle-automatique* », donc plus facile. En effet, si $\cup_{j=1}^{J} I_j$ est un recouvrement de $\overline{E}$ par un nombre fini intervalles fermés, alors l'inclusion :

$$E \;\subset\; \overline{E} \;\subset\; \bigcup_{1\leqslant j\leqslant J} I_j,$$

fait voir que $\cup_{j=1}^J I_j$ est *aussi* un recouvrement de E, ce qui donne $m_J^*(E) \leqslant \sum_{j=1}^J |I_j|$, puis en prenant l'infimum, l'inégalité inverse conclusive :

$$m_J^*(E) \leqslant m_J^*(\overline{E}).$$

Notons qu'en réalité, nous venons simplement de ré-utiliser le fait connu que la mesure extérieure de Jordan est croissante sur toute inclusion telle que $E \subset \overline{E}$.

(b) On cherche ici un ensemble dénombrable de mesure de Borel-Lebesgue nulle dont l'adhérence soit de mesure grande au sens de Jordan. Il vient naturellement à l'esprit de regarder :

$$E := \mathbb{Q} \cap [0,1],$$

qui a pour adhérence $\overline{E} = [0,1]$.

Cet ensemble E est dénombrable car $\mathbb{Q}$ l'est, donc mesurable de mesure de Borel-Lebesgue $m(E) = m^*(E) = 0$.

Mais d'après la question précédente,

$$m_J^*(E) = m_J^*(\overline{E}) = m_J^*([0,1]) = 1,$$

puisque Jordan n'a pas fait la bêtise de ne pas attribuer 1 comme mesure — et comme mesure extérieure ! — à l'intervalle unité $[0,1]$, ce qu'on peut vérifier rapidement comme suit.

Tout recouvrement $\cup_{j=1}^J I_j$ de $[0,1]$ par des intervalles vérifie nécessairement $\sum_{j=1}^J |I_j| \geqslant 1$, et comme on a même égalité en utilisant le recouvrement $I_1 = [0,1]$, nous déduisons bien que $m_J^*([0,1]) = 1$.

Exercice 6. Les complémentaires des sous-ensembles $A_i \subset \mathbb{R}^d$ seront notés de manière abrégée :

$$\mathbb{R}^d \backslash A_i =: A_i^c \qquad (i = 1, 2, 3 \cdots).$$

Pour la formule visée, le cas $n = 1$ est trivial, tandis que le cas $n = 2$ se démontre en partant des trois réunions *disjointes :*

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 &= (A_1 \cap A_2^c) \bigcup (A_1 \cap A_2) \bigcup (A_1^c \cap A_2), \\ A_1 &= (A_1 \cap A_2^c) \bigcup (A_1 \cap A_2), \\ A_2 &= \qquad\qquad\quad (A_1 \cap A_2) \bigcup (A_1^c \cap A_2), \end{aligned}$$

dont on n'hésite pas à prendre les mesures :

$$\begin{aligned} m(A_1 \cup A_2) &= m(A_1 \cap A_2^c) + m(A_1 \cap A_2) + m(A_1^c \cap A_2), \\ m(A_1) &= \underline{m(A_1 \cap A_2^c)} + m(A_1 \cap A_2), \\ m(A_2) &= \qquad\qquad\quad m(A_1 \cap A_2) + \underline{m(A_1^c \cap A_2)}, \end{aligned}$$

et en remplaçant dans la première ligne les valeurs soulignées dans les lignes 2 et 3, on obtient bien après petit toilettage arithmétique :

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2) - m(A_1 \cap A_2).$$

Ce cas $n = 2$ n'a l'air de rien, mais maintenant que nous décidons gaillardement de passer à l'implication de récurrence majeure, en supposant atteint le niveau n, pour démarrer en direction du niveau $n+1$, il s'avère naturel d'utiliser ce qui vient d'être vu :

$$\begin{aligned}
m\bigg(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\bigg) &= m\bigg(\underbrace{\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big)}_{A_1'} \cup \underbrace{A_{n+1}}_{A_2'}\bigg) \\
&= m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) + m\big(A_{n+1}\big) - m\bigg(\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \bigcap A_{n+1}\bigg) \\
&= m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) + m\big(A_{n+1}\big) - m\bigg(\bigcup_{i=1}^{n} \big(A_i \cap A_{n+1}\big)\bigg),
\end{aligned}$$

pour observer qu'au premier et au troisième termes ainsi apparaissants, on peut appliquer en douceur l'hypothèse de récurrence, tout d'abord sans modification et sans effort au premier :

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} \bigg((-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} m\big(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\big)\bigg),$$

puis avec un peu plus d'intentions esthéticiennes au troisième :

$$\begin{aligned}
m\bigg(\bigcup_{i=1}^{n} \big(A_i \cap A_{n+1}\big)\bigg) &= \sum_{k=1}^{n} \bigg((-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} m\Big(\big(A_{i_1}\cap A_{n+1}\big)\bigcap\cdots\bigcap\big(A_{i_k}\cap A_{n+1}\big)\Big)\bigg) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \bigg((-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} m\big(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\cap A_{n+1}\big)\bigg) \\
\text{[Changer } \ell := k+1\text{]} \qquad &= \sum_{\ell=2}^{n+1} \bigg((-1)^{\ell} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{\ell-1}\leqslant n} m\big(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{\ell-1}}\cap A_{n+1}\big)\bigg),
\end{aligned}$$

cette dernière somme multiple pouvant d'ailleurs être interprétée — agréablement pour la suite — avec un ℓ-ème indice i_ℓ égal à $n+1$:

$$\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_{\ell-1}\leqslant n \\ i_\ell = n+1}},$$

car en effet, si nous revenons à ce dont nous étions partis et si nous y insérons les formules que nous venons de façonner — le deuxième terme ne quittant pas sa douillette place —, il vient :

$$\begin{aligned}
m\bigg(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\bigg) &= \sum_{k=1}^{n} \bigg((-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} m\big(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\big)\bigg) + m\big(A_{n+1}\big) - \\
&\quad - \sum_{\ell=2}^{n+1} \bigg((-1)^{\ell} \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_{\ell-1}\leqslant n \\ i_\ell=n+1}} m\big(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{\ell-1}}\cap A_{n+1}\big)\bigg) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n+1} \bigg((-1)^{\ell-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_\ell\leqslant n+1} m\big(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_\ell}\big)\bigg),
\end{aligned}$$

et le résultat n'est autre que la formule désirée au niveau $n+1$, puisque la première somme rassemble exactement toutes les intersections dans lesquelles ne figure pas A_{n+1}, tandis que dans la deuxième somme (troisième terme), on trouve toutes les intersections de plus de deux ensembles A_i parmi lesquels figure A_{n+1}.

Exercice 7. Pour construire un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ dense et de mesure $m(\Omega) \leqslant \varepsilon$ arbitrairement petite, on pense spontanément à l'ensemble $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ des rationnels, et comme $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert, il vient à l'esprit de former des intervalles ouverts de taille ajustée autour de ses points et qui rétrécissent suffisamment vite.

Plus précisément, si $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ est une énumération (bijective) des points (dénombrables) de $\mathbb{Q}$, essayons :

$$\Omega := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left]r_n - \alpha_n,\, r_n + \alpha_n\right[,$$

où $\alpha_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$, de telle sorte que Ω est automatiquement ouvert. De plus Ω sera *de facto* dense dans $\mathbb{R}$, simplement parce qu'il contient :

$$\Omega \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\} = \mathbb{Q}.$$

Majorons maintenant sa mesure :

$$\begin{aligned} m(\Omega) &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m\Big(\left]r_n - \alpha_n,\, r_n + \alpha_n\right[\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\alpha_n. \end{aligned}$$

Il suffit alors pour conclure de choisir $\alpha_n := \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{2^n}$ pour atteindre $m(\Omega) \leqslant \varepsilon$, grâce à Achille $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ qui rejoint la Tortue.

Exercice 8. Puisque f est à support compact dans $\mathbb{R}^d$, il existe $R \gg 1$ assez grand pour que :

$$\mathsf{supp}\, f \subset B(0, R).$$

Soit un vecteur $h \in \mathbb{R}^d$ de norme $|h| < 1$. Nous affirmons que la fonction continue :

$$x \longmapsto \big|f(x-h) - f(x)\big|$$

est à support inclus dans la boule ouverte $B(0, R+1)$. En effet, pour $x \notin B(0, R+1)$ quelconque, *i.e.* avec $|x| \geqslant R+1$, on a par inégalité triangulaire :

$$|x-h| \geqslant |x| - |h| \geqslant R+1-|h| > R+1-1 = 1,$$

ce qui garantit que $f(x-h) = 0$, et comme on a évidemment aussi $f(x) = 0$, ceci prouve notre affirmation.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. La fonction f étant continue, elle est uniformément continue sur le compact (boule fermée) $\overline{B}(0, R{+}2)$, à savoir, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, qu'on peut — et qu'on va ! — supposer $\delta \leqslant 1$, tel que :

$$\forall\,|x| \leqslant R+1 \quad \forall\,|h| \leqslant \delta \qquad \big|f(x-h) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x-h) - f(x)\big|\,dx &= \int_{B(0,R+1)} \big|f(x-h) - f(x)\big| \\ &\leqslant \int_{B(0,R+1)} \varepsilon\,dx \\ &= \varepsilon\, m\big(B(0, R+1)\big), \end{aligned}$$

quantité qui tend vers 0 avec $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$, puisque le volume d-dimensionnel :

$$0 \,<\, m\big(B(0,R+1)\big) \,=\, \big|B(0,R+1)\big| \,<\, \infty$$

de la boule en question est bien entendu fini.

Remarquons qu'on peut démontrer avec des moyens plus sophistiqués que le volume d-dimensionnel d'une boule (ouverte ou fermée) de rayon $R>0$ dans $\mathbb{R}^d$ vaut :

$$\big|B(0,R)\big| \,=\, \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\,R^d,$$

où Γ est la *fonction Gamma* d'Euler, définie pour $x>0$ par :

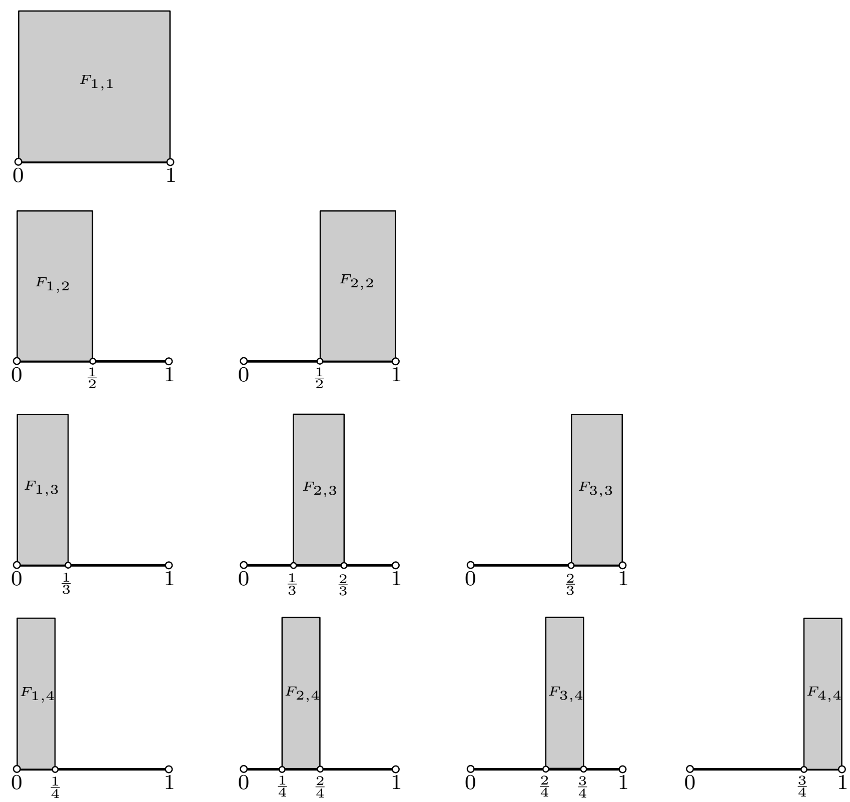
$$\Gamma(x) \,:=\, \int_0^\infty t^{x-1}\,e^{-t}\,dt,$$

et qui peut être considérée comme un prolongement de la factorielle aux nombres réels, sachant que $\Gamma(n+1)=n!$ (exercice !) pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 9. Un simple dessin convainc que la suite $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{array}{llll}
f_1 := F_{1,1}, & & & \\
f_2 := F_{1,2}, & f_3 := F_{2,2}, & & \\
f_4 := F_{1,3}, & f_5 := F_{2,3}, & f_6 := F_{3,3}, & \\
f_7 := F_{1,4}, & f_8 := F_{2,4}, & f_9 := F_{3,4}, & f_{10} := F_{4,4}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}$$

prend une infinité de fois les deux valeurs 0 et 1 en tout point $x\in[0,1]$ fixé, tandis que $\int_0^1 f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, car la largeur des gratte-ciels de hauteur constamment égale à 1 qui glissent de la gauche vers la droite tend à rétrécir indéfiniment. Le voici, ce dessin !



Ainsi, il faut renuméroter tout cela. Comme la suite :

$$\bigg(\frac{m(m+1)}{2}\bigg)_{m=1}^{\infty} = \big\{1,\,3,\,6,\,10,\,15,\,21,\,28,\,35,\,\dots\big\}$$

est strictement croissante, à tout $n \geqslant 1$ est associé un unique entier $m = m_n \geqslant 1$ encadrant :

$$\frac{m_n(m_n+1)}{2}+1 \leqslant n \leqslant \frac{(m_n+1)(m_n+2)}{2},$$

l'écart entre ces deux extrémités valant :

$$\frac{(m_n+1)(m_n+2)}{2} - \frac{m_n(m_n+1)}{2} = m_n,$$

et donc, à tout $n \geqslant 1$ est associé un unique couple (m_n, k_n) avec $1 \leqslant k_n \leqslant m_m$ le représentant sous la forme :

$$n = \frac{m_n(m_n+1)}{2} + k_n.$$

Clairement :

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \infty,$$

car une des inégalités ci-dessus donne $\sqrt{2n} \leqslant m_n + 2$.

Ainsi, grâce à la renumérotation offerte par ces couples (k_n, m_n), on a généralement :

$$f_n(x) := F_{k_n,m_n}(x),$$

et donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 F_{k_n,m_n}(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \mathbf{1}_{[\frac{k_n-1}{m_n},\frac{k_n}{m_n}]}(x)\,dx \\ &= \frac{1}{m_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Pour démontrer que la suite $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ des valeurs des f_n en tout point fixé $x \in [0,1]$ n'est *pas* convergente, il suffit d'expliquer l'assertion suivante :

En tout $x \in [0,1]$, la suite des valeurs $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ prend une infinité de fois la valeur 0, et aussi une infinité de fois la valeur 1.

En effet, puisque $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ n'est qu'une renumérotation, il suffit de montrer que la suite double :

$$\big(F_{k,m}\big)_{1\leqslant k\leqslant m}^{1\leqslant m<\infty}$$

fait ce qui est affirmé.

Visuellement, il est transparent que la valeur 0 est prise très souvent, sûrement une infinité de fois ! Pour s'en convaincre rigoureusement, fixons $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, le cas $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ se traitant de manière similaire. Or dès que $m \geqslant 3$, on a $\frac{1}{2} \leqslant \frac{m-1}{m}$, et donc :

$$F_{m-1,m}(x) = \mathbf{1}_{[\frac{m-1}{m},m]}(x) = 0,$$

donc la valeur 0 est prise par toutes ces $\big(F_{m-1,m}\big)_{m=1}^{\infty}$ — et beaucoup d'autres ! —, en nombre infini.

Quant à la valeur 1, c'est presque aussi simple, car en $x \in [0,1]$ fixé, pour tout $m \geqslant 1$, comme :

$$\bigcup_{k=1}^{m} \big[\tfrac{k-1}{m},\, \tfrac{k}{m}\big] = [0,1],$$

il existe au moins un entier $k_{x,m}$ avec $1 \leqslant k_{x,m} \leqslant m$ tel que :

$$1 = \mathbf{1}_{[\frac{k_{x,m}-1}{m},\frac{k_{x,m}}{m}]}(x) = F_{k_{x,m},m}(x),$$

et ces $\big(F_{k_{x,m},m}\big)_{m=1}^{\infty}$ sont manifestement infiniment nombreuses.

3. Examen 2

Exercice 1. **(a)** Montrer que ni l'inclusion $L^1(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$, ni celle $L^2(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ ne sont vraies. Indication : supposer $d = 1$ et penser à $\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \mathbf{1}_{]0,1[}$ ainsi qu'à $\frac{1}{x} \cdot \mathbf{1}_{[1,\infty[}$.

(b) Montrer que si une fonction $f\colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ est définie sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$, alors $f \in L^2(E, \mathbb{C})$ implique $f \in L^1$ avec :

$$\|f\|_{L^1} \leqslant \sqrt{m(E)}\, \|f\|_{L^2}.$$

(c) Montrer que si f est bornée, *i.e.* si $|f(x)| \leqslant C < \infty$, et si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ avec :

$$\|f\|_{L^2} \leqslant \sqrt{C}\, \sqrt{\|f\|_{L^1}}.$$

Exercice 2. **(a)** Établir l'existence de la limite suivante, et déterminer sa valeur :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{4\,t^3 + 12}{12\,t^6 + 3\,n\,t + 2}\, dt.$$

Indication: Utiliser le théorème de convergence dominée.

(b) Faire de même pour :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nx)}{n\,\sin x}\, dx.$$

Indication: Découper l'intégrale en $\int_0^\delta + \int_\delta^{\pi/2}$.

(c) Faire de même pour :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-t/n}}{1 + t^2 + t^4\, n^{-2}}\, dt.$$

Exercice 3. **(a)** Montrer pour $f \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ continue à support compact que l'on a :

$$0 = \lim_{\delta\to 1} \big\| f(x) - f(\delta\, x) \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

(b) Généraliser cela aux fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ Lebesgue-intégrables quelconques.

Exercice 4. **[Inégalité de Hardy dans L^{p}]** Soit un nombre réel $1 < \mathsf{p} < \infty$. L'objectif est d'étudier l'opérateur qui, à une fonction $f \in L^{\mathsf{p}}(]0, \infty[, \mathbb{C})$, associe la fonction :

$$x \longmapsto T(f)(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt \qquad (0 < x < \infty).$$

(a) Rappeler la valeur de l'exposant conjugué de p, dans l'inégalité de Hölder.

(b) Montrer que cette fonction $x \longmapsto T(f)(x)$ est bien définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(c) Montrer que si $g \in \mathscr{C}_c^0(]0, \infty[, \mathbb{C})$, alors g et $T(g)$ sont liées par une équation différentielle, que l'on explicitera.

(d) Montrer que si $g \in \mathscr{C}_c^0(]0,\infty[,\mathbb{C})$ est à support dans $[a,A]$ avec $0 < a \leqslant A < \infty$, alors :

$$\big|T(g)(x)\big| \leqslant \frac{(A-a)^{1-\frac{1}{\mathsf{p}}}\,\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}}{x}.$$

(e) Montrer que $x\big[T(g)(x)\big]^{\mathsf{p}}$ tend vers 0 quand $x \longrightarrow \infty$.

(f) Montrer que $T(g) \in L^{\mathsf{p}}\big(]0,\infty[\big)$.

(g) On suppose temporairement que $g \in \mathscr{C}_c^0(]0,\infty[,\mathbb{R}_+)$ prend des valeurs réelles positives. En exécutant une intégration par parties, et en utilisant ce qui précède, montrer que :

$$\big(\big\|T(g)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}} = -\,\mathsf{p}\int_0^\infty g\,T(g)^{\mathsf{p}-1} + \mathsf{p}\int_0^\infty T(g)^{\mathsf{p}}.$$

(h) Toujours pour $g \in \mathscr{C}_c^0(]0,\infty[,\mathbb{R}_+)$, montrer en utilisant l'inégalité de Hölder que :

$$\big\|T(g)\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\,\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

(i) Montrer que si une suite $(g_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions continues positives $g_n \in \mathscr{C}_c^0\big(]0,\infty[,\mathbb{R}_+\big)$ converge en norme L^{p} vers une fonction-limite (positive) $f \in L^{\mathsf{p}}\big(]0,\infty[,\mathbb{R}_+\big)$, alors :

$$\lim_{n\to\infty} T(g_n)(x) = T(f)(x) \qquad\qquad (\forall\, x > 0).$$

(j) Montrer que l'inégalité précèdente est maintenant vraie pour toute fonction $f \in L^{\mathsf{p}}\big(]0,\infty[,\mathbb{R}_+\big)$:

$$\big\|T(f)\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\,\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

Indication: Utiliser Fatou.

(k) Montrer qu'elle demeure encore vraie pour toute fonction à valeurs complexes $f \in L^{\mathsf{p}}\big(]0,\infty[,\mathbb{C}\big)$.

(l) Trouver un exemple de fonction $f \in L^1(]0,\infty[)$ telle que $T(f) \notin L^1(]0,\infty[)$.

(m) Montrer qu'il n'est pas possible de remplacer la constante $\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}$ par une constante plus petite. Indication: On pourra considérer la suite de fonctions $\big(t \mapsto t^{-\frac{1}{\mathsf{p}}}\cdot\mathbf{1}_{[1,n]}\big)_{n=1}^\infty$.

(n) Examiner le cas $\mathsf{p} = \infty$.

Exercice 5. Soit $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions mesurables $f_n\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-intégrables convergeant presque partout vers une certaine fonction-limite :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad\qquad (\text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d),$$

mesurable et intégrable qui satisfait :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_n.$$

(a) On suppose toutes les $f_n \geqslant 0$ positives, et on introduit la suite auxiliaire $g_n := \min(f_n, f)$. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx.$$

Indication: Penser à Fatou !

(b) Toujours en supposant toutes les $f_n \geqslant 0$ positives, montrer que :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \big|f_n(x) - f(x)\big|\, dx.$$

(c) Montrer que la suite :

$$h_n(x) = n^d\, \mathbf{1}_{]0,\frac{1}{n}[^d}(x) - n^d\, \mathbf{1}_{]-\frac{1}{n},\,0[^d}(x) \qquad (n \geqslant 1)$$

converge ponctuellement vers 0 et que $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \int h_n$.

(d) La suite $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ converge-t-elle vers 0 dans un $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$?

Exercice 6. [Espaces de Sobolev] Ici, toutes les fonctions sont supposées à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{S}$ le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $L^2\big(]0,1[\big)$ constitué des fonctions $f\colon]0,1[\longrightarrow \mathbb{C}$ de carré intégrable pour lesquelles il existe une fonction notée $\Lambda_f \in L^2\big(]0,1[\big)$ vérifiant :

$$\int_0^1 f(x)\, \varphi'(x)\, dx = -\int_0^1 \Lambda_f(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}_c^1\big(]0,1[, \mathbb{C}\big)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ et dont le support :

$$\mathsf{supp}\, \varphi \overset{\mathsf{def}}{:=} \overline{\big\{t \in]0,1[:\ \varphi(t) \neq 0\big\}}$$

est un sous-ensemble *compact* de $]0,1[$.

(a) En admettant la densité de $\mathscr{C}_c^1$ dans $\mathscr{C}_c^0$, montrer que $\mathscr{S}$ est un sous-ensemble dense de $L^2\big(]0,1[\big)$.

(b) Montrer que :

$$\langle f,\, g\rangle_{\mathscr{S}} := \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx + \int_0^1 \Lambda_f(x)\, \Lambda_g(x)\, dx$$

définit un produit scalaire sur $\mathscr{S}$.

(c) Montrer que $\mathscr{S}$, muni de ce produit scalaire, est un espace de Hilbert.

Exercice 7. [Bases produits] Montrer que si $(\varphi_i(x))_{i=1}^{\infty}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^{d_1}, \mathbb{C})$ et si $(\psi_j(y))_{j=1}^{\infty}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^{d_2}, \mathbb{C})$, alors :

$$\big(\varphi_i(x)\, \psi_j(y)\big)_{i,j=1}^{\infty}$$

forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}, \mathbb{C})$.

4. Corrigé de l'examen 2

Exercice 1. **(a)** En dimension $d = 1$, la fonction positive :

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x)$$

appartient à $L^1(\mathbb{R})$:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \,=\, \big[2\sqrt{x}\big]_0^1 \,=\, 2,$$

mais n'appartient pas à $L^2(\mathbb{R})$:

$$\int_0^1 \bigg(\frac{1}{\sqrt{x}}\bigg)^2 dx \,=\, \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \,=\, \log 1 - \log 0 \,=\, \infty,$$

ce qui montre que $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$.

De manière quelque peu similaire bien qu'inversée, la fonction positive :

$$x \longmapsto \frac{1}{x}\,\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)$$

n'appartient *pas* à $L^1(\mathbb{R})$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \,=\, \log\infty - \log 1 \,=\, \infty,$$

mais appartient à $L^2(\mathbb{R})$:

$$\int_1^\infty \bigg(\frac{1}{x}\bigg)^2 dx \,=\, \bigg[-\frac{1}{x}\bigg]_1^\infty \,=\, 1,$$

ce qui montre que $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$.

(b) Toutefois, sur tout sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$, l'inclusion :

$$L^2\big(E,\mathbb{C}\big) \,\subset\, L^1\big(E,\mathbb{C}\big),$$

est toujours vraie, grâce à une application astucieuse standard de l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui consiste à faire apparaître un facteur '1' invisible :

$$\begin{aligned}
||f||_{L^1(E)} \,=\, \int_E \big|f(x)\big|\,dx \,=\, \int_E \big|f(x)\big|\cdot 1\,dx \,&\leqslant\, \bigg(\int_E \big|f(x)\big|^2\,dx\bigg)^{\frac{1}{2}} \bigg(\int_E 1^2\,dx\bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&= ||f||_{L^2(E)}\,\sqrt{m(E)} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

ce, pour toute fonction $f \in L^2(E,\mathbb{C})$.

(c) Enfin, sur $E = \mathbb{R}^d$, donc au contraire en mesure infinie, si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est *bornée :*

$$\big|f(x)\big| \,\leqslant\, C \,<\, \infty \qquad \text{(pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d\text{)},$$

alors la norme L^2 de f s'estime « brutalement » par :

$$\bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|^2\,dx\bigg)^{\frac{1}{2}} = \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|^{1+1}\,dx\bigg)^{\frac{1}{2}} \leqslant \bigg(C\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|\,dx\bigg)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{C}\,\sqrt{\|f\|_{L^1}}.$$

Exercice 2. **(a)** La suite de fonctions à intégrer, indexée par un entier $n \geqslant 0$, admet, par exemple, la fonction-dominante indépendante de n suivante :

$$\frac{4\,t^3+12}{12\,t^6+3n\,t+2} \leqslant \frac{4\,t^3+12}{12\,t^6+2} = \frac{2\,t^3+6}{6\,t^6+1},$$

et l'on voit grâce à $\int_1^\infty \frac{1}{t^3}\,dt < \infty$ que :

$$\int_0^\infty \frac{2\,t^3+6}{6\,t^6+1}\,dt < \infty.$$

Ainsi, le théorème de convergence dominée s'applique et donne :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{4\,t^3+12}{12\,t^6+3n\,t+2}\,dt = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \frac{4\,t^3+12}{12\,t^6+3n\,t+12}\,dt = \int_0^\infty 0 = 0.$$

(b) Rappelons pour débuter que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{2}{\pi}\,x \leqslant \sin x \leqslant x,$$

ce qui a été vu en cours. Ainsi :

$$\frac{\sin(nx)}{n\sin x} \leqslant \frac{n\,x}{n\sin x} = \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{\pi}{2},$$

et en découpant $\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^\delta + \int_\delta^{\frac{\pi}{2}}$ avec $\delta > 0$ petit, on majore :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{n\sin x}\,dx \leqslant \delta\,\frac{\pi}{2} + \int_\delta^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{\sin(nx)}{n\sin x}}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}\,dx,$$

ce qui démontre (exercice mental) que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{n\sin x}\,dx = 0.$$

(c) Clairement, pour $t \in [0, \infty[$ et pour $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, on a :

$$\left.\begin{aligned} 0 &\leqslant e^{-t/n} \leqslant 1 \\ 0 &\leqslant \frac{1}{1+t^2+t^4/n^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2} \end{aligned}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \frac{e^{-t/n}}{1+t^2+t^4/n^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2} =: g(t).$$

Or comme :

$$\int_0^\infty g(t)\,dt < \infty,$$

et comme la suite de fonctions continues sur $[0, \infty[$:

$$f_n(t) := \frac{e^{-t/n}}{1+t^2+t^4/n^2} \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

converge vers 0 presque partout sur $[0,\infty[$, partout sur $]0,\infty[$, excepté, donc, en 0, où on a toujours $f_n(0)=1$, le théorème de la convergence dominée donne :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{e^{-t/n}}{1+t^2+t^4/n^2} \,=\, \int_0^\infty 0\,dt \,=\, 0$$

— zéro pointé à cette question « nulle » !

Exercice 3. **(a)** Lorsque $f\in\mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ est continue à support compact, disons $\operatorname{supp} f\subset B(0,R)$, une boule ouverte centrée en l'origine de rayon $R\gg 1$ assez grand, la domination uniforme en le paramètre dilatoire $\frac{1}{2}\leqslant\delta\leqslant 2$:

$$\big|f(x)-f(\delta x)\big| \,\leqslant\, 2\max_{\mathbb{R}^d}|f|\cdot\mathbf{1}_{B(0,2R)},$$

par une fonction appartenant à $L^1(\mathbb{R}^d)$, assure qu'on peut appliquer le théorème de convergence dominée, qui donne effectivement :

$$\lim_{\delta\to 1}\int_{\mathbb{R}^d}\big|f(x)-f(\delta x)\big|\,dx \,=\, \int_{\mathbb{R}^d}\lim_{\delta\to 1}\big|f(x)-f(\delta x)\big|\,dx \,=\, \int_{\mathbb{R}^d} 0 \,=\, 0.$$

(b) Comme prévisible, le même résultat pour toute fonction $f\in L^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ — circonstance plus générale — s'obtient grâce à un raisonnement par densité standard.

En effet, comme $\mathscr{C}_c^0$ est dense dans L^1, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction $g_\varepsilon\in\mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ telle que :

$$\big\|f-g_\varepsilon\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Maintenant, le résultat de la Question **(a)** s'applique à g_ε, et donne un $\delta(\varepsilon)>0$ assez petit pour que :

$$|\delta-1|\leqslant\delta(\varepsilon) \quad\Longrightarrow\quad \big\|g_\varepsilon(x)-g_\varepsilon(\delta x)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Alors par inégalité triangulaire, toujours pour $|\delta-1|\leqslant\delta(\varepsilon)$, on estime :

$$\begin{aligned}
\big\|f(x)-f(\delta x)\big\|_{L^1} &= \Big\|f(x)-g_\varepsilon(x)+g_\varepsilon(x)-g_\varepsilon(\delta x)+g_\varepsilon(\delta x)-f(\delta x)\Big\|_{L^1}\\
&\leqslant \big\|f(x)-g_\varepsilon(x)\big\|_{L^1}+\big\|g_\varepsilon(x)-g_\varepsilon(\delta x)\big\|_{L^1}+\big\|g_\varepsilon(\delta x)-f(\delta x)\big\|_{L^1}\\
&\leqslant \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon \,=\, 3\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Exercice 4. Avec un exposant $1<\mathsf{p}<\infty$, à une fonction $f\in L^{\mathsf{p}}\big(]0,\infty[,\mathbb{C}\big)$, associons donc sa *transformée de Hardy :*

$$x\longmapsto T(f)(x) \,:=\, \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt,$$

définie pour $x>0$.

(a) L'exposant conjugué de p est l'unique nombre réel $1<\mathsf{p}'<\infty$ satisfaisant $1=\frac{1}{\mathsf{p}}+\frac{1}{\mathsf{p}'}$, et il vaut :

$$\mathsf{p}' \,=\, \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}.$$

(b) Pour $x > 0$ quelconque, et $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$ arbitraire, une application avisée de l'inégalité de Hölder permet de majorer :

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \cdot 1 \, dt \\ &\leqslant \frac{1}{x} \left(\int_0^x \big| f(t) \big|^{\mathsf{p}} \, dt \right)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \left(\int_0^x 1^{\mathsf{p}'} \, dt \right)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}} \leqslant \| f \|_{L^{\mathsf{p}}} \cdot x^{\frac{1}{\mathsf{p}'} - 1} = \| f \|_{L^{\mathsf{p}}} \cdot x^{-\frac{1}{\mathsf{p}}} < \infty, \end{aligned}$$

pour constater agréablement que la valeur de $T(f)(x)$ est finie en tout $x > 0$.

(c) En effet, une différentiation par rapport à x de la définition $T(g)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x g(t) \, dt$ — justifiée car avec $g \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$, le cours a montré que $x \longmapsto \int_0^x g(t) \, dt$ est $\mathscr{C}^1$ — donne :

$$\begin{aligned} T(g)'(x) &= -\frac{1}{x^2} \int_0^x g(t) \, dt + \frac{1}{x} \, g(x) \\ &= -\frac{1}{x} \, T(g)(x) + \frac{1}{x} \, g(x), \end{aligned}$$

ce qu'on peut ré-écrire :

$$\big(x \, T(g)(x) \big)' = g(x),$$

ou encore :

$$0 = -x \, T(g)'(x) - T(g)(x) + g(x).$$

(d) Comme $g \in \mathscr{C}_c^0\big(]0, \infty[, \mathbb{C}\big)$ est supposée à support dans $[a, A]$ avec $0 < a \leqslant A < \infty$, on a clairement :

$$\forall \, 0 < x < a \qquad T(g)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x 0 = 0,$$

puis, pour $a \leqslant x$, toujours grâce à Hölder :

$$\begin{aligned} \big| T(g)(x) \big| &= \frac{1}{x} \left| \int_a^x g(t) \, \mathbf{1}_{[a,A]}(t) \, dt \right| \\ &\leqslant \frac{1}{x} \left(\int_a^x \big| g(t) \big|^{\mathsf{p}} \, dt \right)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \left(\int_a^x \big(1_{[a,A]}(t) \big)^{\mathsf{p}'} \, dt \right)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}} \\ &\leqslant \frac{1}{x} \left(\int_a^A \big| g(t) \big|^{\mathsf{p}} \, dt \right)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \left(\int_a^A 1 \, dt \right)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}} \\ &= \frac{1}{x} \, \| g \|_{L^{\mathsf{p}}} \cdot \big(A - a \big)^{1 - \frac{1}{\mathsf{p}}}. \end{aligned}$$

(e) Toujours avec $\operatorname{supp} g \subset [a, A]$, grâce à cette inégalité :

$$\big| T(g)(x) \big| \leqslant \frac{C}{x} \qquad\qquad (C \geqslant 0)$$

il est clair qu'en se souvenant de l'hypothèse $\mathsf{p} > 1$, on a un majorant qui tend vers zéro :

$$\begin{aligned} x \, \big| T(g)(x) \big|^{\mathsf{p}} &\leqslant x \, \frac{C^{\mathsf{p}}}{x^{\mathsf{p}}} \\ &= \frac{C^{\mathsf{p}}}{x^{\mathsf{p}-1}} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

ce qui livre le résultat.

(f)

Grâce à la Question **(d)**, nous savons que :

$$\big|T(g)(x)\big| \leqslant \frac{C}{x}\,\mathbf{1}_{[a,\infty[},$$

d'où :

$$\int_0^\infty \big|T(g)(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx \leqslant C^{\mathsf{p}}\int_a^\infty \frac{dx}{x^{\mathsf{p}}} = C^{\mathsf{p}}\,\frac{1}{\mathsf{p}-1}\,\frac{1}{a^{\mathsf{p}-1}} < \infty,$$

car $\mathsf{p}-1>0$ depuis le début.

(g) Soit donc $g\in\mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}_+)$ à valeurs positives, ce qui entraîne que $T(g)(x)\geqslant 0$ aussi. Pour estimer :

$$\begin{aligned}\Big(\big\|T(g)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} &= \int_0^\infty \big|T(g)(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx\\ &= \int_0^\infty 1\cdot\big(T(g)(x)\big)^{\mathsf{p}}\,dx,\end{aligned}$$

on effectue effectivement une intégration par parties en prenant la primitive du facteur artificiel 1 :

$$\begin{aligned}\Big(\big\|T(g)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} &= \Big[x\,\big(T(g)(x)\big)^{\mathsf{p}}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty x\,\mathsf{p}\,T(g)'(x)\,\big(T(g)(x)\big)^{\mathsf{p}-1}\,dx\\ \text{[Question (e)]}\qquad &= \underline{\lim_{x\to\infty} x\,\big(T(g)(x)\big)^{\mathsf{p}}}_{\circ} - \underline{0\,\big(T(g)(0)\big)^{\mathsf{p}}}_{\circ} - \text{même chose}\\ \text{[Question (c)]}\qquad &= 0-\int_0^\infty \mathsf{p}\,\Big[g(x)-T(g)(x)\Big]\,\big(T(g)(x)\big)^{\mathsf{p}-1}\,dx\\ &= -\,\mathsf{p}\int_0^\infty g\,T(g)^{\mathsf{p}-1}+\mathsf{p}\int_0^\infty T(g)^{\mathsf{p}}.\end{aligned}$$

(h) Une réorganisation de l'identité qui précède permet de la ré-écrire sous une forme où il devient avisé d'appliquer — encore elle ! — l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}(\mathsf{p}-1)\,\Big(\big\|T(g)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} &= \mathsf{p}\int_0^\infty g\,T(g)^{\mathsf{p}-1}\\ &\leqslant \mathsf{p}\,\bigg(\int_0^\infty g^{\mathsf{p}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}\bigg(\int_0^\infty T(g)^{(\mathsf{p}-1)\mathsf{p}'}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}\\ \text{[}(\mathsf{p}-1)\mathsf{p}'=\mathsf{p}\text{]}\qquad &= \mathsf{p}\,\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\bigg(\Big(\big\|T(g)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}\\ &= \mathsf{p}\,\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\,\big(\|T(g)\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}-1},\end{aligned}$$

ce qui conduit bien à :

$$\big\|T(g)\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\,\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

(i) Soit donc $(g_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions positives $g_n\in\mathscr{C}_c^0\big(]0,\infty[,\mathbb{R}_+\big)$ satisfaisant $\|g_n-f\|_{L^{\mathsf{p}}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, pour une certaine fonction $f\in L^{\mathsf{p}}\big(]0,\infty[,\mathbb{R}_+\big)$. Alors pour tout $x>0$

fixé, l'inégalité de Hölder va encore abuser de ses charmes :

$$\begin{aligned}\big|T(g_n)(x)-T(f)(x)\big| \,=\, \big|T(g_n-f)(x)\big| \,&=\, \bigg|\frac{1}{x}\int_0^x \big(g_n(t)-f(t)\big)\cdot 1\,dt\bigg|\\ &\leqslant\, \frac{1}{x}\bigg(\int_0^x \big|g_n(t)-f(t)\big|^{\mathsf{p}}\,dt\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}\bigg(\int_0^x 1^{\mathsf{p}'}\,dt\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}\\ &=\, \frac{1}{x}\,\big\|g_n-f\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\,x^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}\\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\, 0.\end{aligned}$$

(j) Par densité de $\mathscr{C}_c^0\big(]0,\infty[,\mathbb{R}_+\big)$ dans $L^{\mathsf{p}}\big(]0,\infty[,\mathbb{R}_+\big)$, si $f\in L^{\mathsf{p}}\big(]0,\infty[,\mathbb{R}_+\big)$ est donnée, il existe une suite $(g_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions $g_n\in\mathscr{C}_c^0\big(]0,\infty[,\mathbb{R}_+\big)$ telle que :

$$0 \,=\, \lim_{n\to\infty}\big\|f-g_n\big\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

En utilisant le résultat de la question qui précède sous la forme :

$$\liminf_{n\to\infty} T(g_n)(x) \,=\, \lim_{n\to\infty} T(g_n)(x) \,=\, T(f)(x) \qquad\qquad (\forall\,x>0),$$

on peut majorer patiemment :

$$\begin{aligned}\Big(\big\|T(f)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} \,&=\, \int_0^\infty \big|T(f)(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx\\ &=\, \int_0^\infty \liminf_{n\to\infty}\big|T(g_n)(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx\\ \text{[Fatou]}\qquad &\leqslant\, \liminf_{n\to\infty}\int_0^\infty \big|T(g_n)(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx\\ &\leqslant\, \liminf_{n\to\infty}\Big(\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\Big)^{\mathsf{p}}\big(\|g_n\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}}\\ \text{[Convergence des normes]}\qquad &\leqslant\, \Big(\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\Big)^{\mathsf{p}}\big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}},\end{aligned}$$

puisque la convergence supposée $\|g_n-f\|_{L^{\mathsf{p}}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ en norme L^{p} implique la convergence dans $\mathbb{R}_+$ des normes L^{p} :

$$\|g_n\|_{L^{\mathsf{p}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_{L^{\mathsf{p}}},$$

énoncé vrai dans n'importe quel espace vectoriel normée $\big(E,\|\cdot\|_E\big)$:

$$\Big(\|y_n-x\|_E \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\Big) \;\Longrightarrow\; \Big(\|y_n\|_E \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|x\|_E\Big),$$

ce dont on se convainc grâce à la majoration élémentaire :

$$\big|\|y_n\|_E-\|x\|_E\big| \,\leqslant\, \|y_n-x\|_E,$$

expliquée par inégalité triangulaire (signe opposé similaire) :

$$\|y_n\|_E-\|x\|_E \,=\, \big\|y_n-x+x\big\|_E-\|x\|_E \,\leqslant\, \|y_n-x\|_E+\underline{\|x\|_E}_{\circ}-\underline{\|x\|_E}_{\circ}.$$

(k) La fonction valeur absolue $|f|$ est encore dans L^{p}, et puisqu'elle prend des valeurs positives, la Question **(g)** s'applique à elle :

$$\big\|T(|f|)\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \,\leqslant\, \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\,\big\|\,|f|\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \,=\, \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\,\|f\|_{L^{\mathsf{p}}},$$

et puis, des majorations naturelles conduisent à la généralisation désirée de l'inégalité de Hardy :

$$\begin{aligned}\Big(\big\|T(f)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} &= \int_0^\infty \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right|^{\mathsf{p}} dx \\ &\leqslant \int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x \big|f(t)\big|\,dt\right)^{\mathsf{p}} dx \\ &= \int_0^\infty \Big(T\big(|f|\big)(x)\Big)^{\mathsf{p}} dx \\ &= \Big(\big\|T\big(|f|\big)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} \\ &\leqslant \left(\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\right)^{\mathsf{p}} \big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}},\end{aligned}$$

dorénavant vraie pour les fonctions à valeurs complexes.

(l) Soit la fonction :

$$f(t) := \frac{1}{t^2}\,\mathbf{1}_{[1,\infty[}(t),$$

qui appartient à $L^1\big(]0,\infty[,\mathbb{R}_+\big)$. Sa transformée de Hardy vaut 0 pour $0 < x \leqslant 1$, et pour $x \geqslant 1$:

$$T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right) \geqslant 0,$$

d'où pour $x \geqslant 2$:

$$T(f)(x) \geqslant \frac{1}{x}\,\frac{1}{2},$$

ce qui fait qu'elle ne peut pas être dans L^1.

(m) Pour $n \geqslant 1$ entier, soit donc la suite de fonctions :

$$f_n(t) := \frac{1}{t^{\frac{1}{\mathsf{p}}}}\,\mathbf{1}_{[1,n]}(t).$$

Leurs normes L^{p} valent :

$$\|f_n\|_{L^{\mathsf{p}}} = \left(\int_1^n \frac{1}{t}\,dt\right)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} = \big(\log n\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}.$$

Ensuite, leurs transformées de Hardy $T(f_n)(x)$, qui s'annulent bien sûr pour $0 < x \leqslant 1$ valent pour $1 \leqslant x \leqslant n$:

$$\begin{aligned}T(f_n)(x) = \frac{1}{x}\int_1^x \frac{1}{t^{\frac{1}{\mathsf{p}}}}\,dt &= \frac{1}{x}\left[\frac{t^{-\frac{1}{\mathsf{p}}+1}}{-\frac{1}{\mathsf{p}}+1}\right]_1^x \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{x^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}}{\frac{1}{\mathsf{p}'}} - \frac{1}{\frac{1}{\mathsf{p}'}}\right) \\ &= \mathsf{p}'\,\frac{x^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}-1}{x},\end{aligned}$$

et, par le même calcul dans lequel on remplace $\int_1^x$ par $\int_1^n$, ces transformées valent pour $n \leqslant x$:

$$T(f_n)(x) \,=\, \mathsf{p}'\,\frac{n^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}-1}{x}.$$

Alors l'expression exacte de la puissance p-ème de la norme L^{p} de $T(f_n)$ est :

$$\begin{aligned}\Big(\big\|T(f_n)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} &= \int_1^\infty \big(T(f_n)(x)\big)^{\mathsf{p}}\,dx \\ &= (\mathsf{p}')^{\mathsf{p}}\int_1^n \frac{\big(x^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}-1\big)^{\mathsf{p}}}{x^{\mathsf{p}}}\,dx + (\mathsf{p}')^{\mathsf{p}}\int_n^\infty \frac{\big(n^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}-1\big)^{\mathsf{p}}}{x^{\mathsf{p}}}\,dx \\ &=: I_1(n,\mathsf{p}) + I_2(n,\mathsf{p}).\end{aligned}$$

La deuxième intégrale, positive, se calcule et se majore par une constante indépendante de n :

$$\begin{aligned} 0 \,\leqslant\, I_2(n,\mathsf{p}) &= (\mathsf{p}')^{\mathsf{p}}\big(n^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}-1\big)^{\mathsf{p}}\left[\frac{x^{-\mathsf{p}+1}}{-\mathsf{p}+1}\right]_n^\infty \\ &= (\mathsf{p}')^{\mathsf{p}}\big(n^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}-1\big)^{\mathsf{p}}\,\frac{1}{\mathsf{p}-1}\,\frac{1}{n^{\mathsf{p}-1}} \\ [\tfrac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}=\mathsf{p}-1] \qquad &\leqslant (\mathsf{p}')^{\mathsf{p}}\,\underline{n^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}}}\,\frac{1}{\mathsf{p}-1}\,\frac{1}{\underline{n^{\mathsf{p}-1}}} \\ &= \frac{(\mathsf{p}')^{\mathsf{p}}}{\mathsf{p}-1}.\end{aligned}$$

Quant à la première, son intégrande a pour équivalent :

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}-1}{x}\right)^{\mathsf{p}} \,=\, \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{\mathsf{p}}}}-\frac{1}{x}\right)^{\mathsf{p}} \,\sim\, \frac{1}{x} \qquad\qquad \text{(lorsque } x\longrightarrow\infty\text{)},$$

donc :

$$I_1(n,\mathsf{p}) \underset{n\to\infty}{\sim} (\mathsf{p}')^{\mathsf{p}}\int_1^n \frac{1}{x}\,dx \underset{n\to\infty}{\sim} (\mathsf{p}')^{\mathsf{p}}\log n,$$

ce qui donne :

$$\big\|T(f_n)\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \underset{n\to\infty}{\sim} \mathsf{p}'\,\big(\log n\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \,=\, \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\,\big(\log n\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}.$$

Pour terminer, supposons comme suggéré qu'une constante $0 < C_{\mathsf{p}} < \infty$ dépendant de p satisfasse :

$$\big\|T(f)\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \,\leqslant\, C_{\mathsf{p}}\,\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \qquad\qquad (\forall\, f\in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})).$$

En appliquant cela à nos fonctions $(f_n)_{n=1}^\infty$:

$$\big\|T(f_n)\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \,\leqslant\, C_{\mathsf{p}}\,\|f_n\|_{L^{\mathsf{p}}} \qquad\qquad (\forall\, n\geqslant 1),$$

grâce à l'équivalent que nous venons d'obtenir :

$$\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\,\big(\log n\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \,\leqslant\, C_{\mathsf{p}}\,\big(\log n\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}},$$

nous concluons que :

$$\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1} \,\leqslant\, C_{\mathsf{p}}.$$

(n) Le cas $\mathsf{p} = \infty$ devrait donner à la limite, puisque $\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1} \longrightarrow 1$ quand $\mathsf{p} \longrightarrow \infty$:

$$\big\|T(f)\big\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^\infty},$$

et ceci est effectivement vrai, puisque pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\big|T(f)(x)\big| &= \frac{1}{x}\left|\int_0^x f(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{x}\,x\,\|f\|_{L^\infty]0,x[} \\ &\leqslant \|f\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

Exercice 5. **(a)** Soit donc $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions mesurables positives intégrables $f_n \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ convergeant ponctuellement presque partout vers une certaine fonction-limite intégrable :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \text{(pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d\text{)},$$

elle aussi positive qui satisfait :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,dx.$$

Soit aussi la suite auxiliaire :

$$g_n := \min\big(f_n, f\big) \qquad (n \geqslant 1),$$

d'où :

$$0 \leqslant g_n \leqslant f_n \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant g_n \leqslant f.$$

Nous affirmons que :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} g_n(x) &= \lim_{n\to\infty}\min\big(f_n(x), f(x)\big) \\ &= f(x) \qquad \text{(pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d\text{)};\end{aligned}$$

en effet, l'hypothèse que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1$ tel que :

$$n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \implies \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon$$

garantit aussi dans les deux cas possibles :

$$\big|g_n(x) - f(x)\big| = \begin{cases}|f(x) - f(x)| = 0 \leqslant \varepsilon, \\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.\end{cases}$$

Ensuite, en utilisant :

$$\liminf_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} g_n = f,$$

l'inégalité de Fatou — qui s'applique car les $g_n \geqslant 0$ sont positives — donne :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d}\liminf_{n\to\infty} g_n(x)\,dx \\ \text{[Fatou]} \qquad &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)\,dx \\ \text{[Trivial]} \qquad &\leqslant \limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)\,dx.\end{aligned}$$

Par ailleurs, une intégration de l'inégalité $g_n \leqslant f$ donne :

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)\,dx \;\leqslant\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \;=\; \mathsf{constante} \;<\; \infty,$$

d'où en prenant la limite supérieure :

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)\,dx \;\leqslant\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx,$$

et ces deux inégalités mises bout à bout impliquent qu'on a partout égalité, ce qui offre le résultat demandé :

$$\liminf \;=\; \limsup \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)\,dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx.$$

(b) Nous observons que :

$$\big|f_n - f\big| \;=\; f_n + f - 2\min\big(f_n, f\big),$$

car lorsque $f_n \geqslant f$, on a bien :

$$f_n - f \;=\; f_n + f - 2\,f,$$

et quand $f_n \leqslant f$, on a bien aussi :

$$f - f_n \;=\; f_n + f - 2\,f_n.$$

Alors par intégration, le résultat **(a)** qui précède termine aisément :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \big|f_n(x) - f(x)\big|\,dx \;&=\; \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx - 2\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)\,dx \\
&=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx - 2\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \\
&=\; 0!
\end{aligned}$$

(c) Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction :

$$h_n(x) \;:=\; n^d\,\mathbf{1}_{]0,\frac{1}{n}[^d}(x) - n^d\,\mathbf{1}_{]-\frac{1}{n},0[^d}(x)$$

prend, en $x = 0$, visiblement la valeur $h_n(0) = 0$.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ quelconque. Dès que l'une de ses coordonnées $x_i \neq 0$ non nulle satisfait :

$$|x_i| \geqslant \frac{1}{n} \qquad\qquad (\exists\, 1 \leqslant i \leqslant d),$$

à savoir dès que :

$$n \;\geqslant\; \frac{1}{|x_i|},$$

on a $h_n(x) = 0$, ce qui montre la convergence simple :

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) \;=\; 0 \qquad\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^d).$$

Ensuite, il est clair que :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} h_n(x)\,dx &= n^d\, m\big(]0,\tfrac{1}{n}[^d\big) - n^d\, m\big(]-\tfrac{1}{n},0[^d\big)\\ &= n^d\left(\tfrac{1}{n}\right)^d - n^d\left(\tfrac{1}{n}\right)^d\\ &= 0.\end{aligned}$$

Enfin, avec la fonction-limite nulle :

$$h(x) := 0,$$

en posant :

$$g_n := \min\big(h_n, h\big) = \min\big(h_n, 0\big) = -n^d\,\mathbf{1}_{]-\frac{1}{n},0[^d}(x),$$

le résultat de la Question **(a)** est mis en défaut :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{]-\frac{1}{n},0[^d} -n^d\,dx = \lim_{n\to\infty} -n^d\left(\tfrac{1}{n}\right)^d = -1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\,dx.$$

De plus :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\big|h_n(x)-h(x)\big|\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\big|h_n(x)\big|\,dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(n^d\left(\tfrac{1}{n}\right)^d + n^d\left(\tfrac{1}{n}\right)^d\Big)\\ &= 2\\ &\neq 0.\end{aligned}$$

L'interprétation à conduire est de réaliser que sans l'hypothèse $h_n \geqslant 0$, les résultats des Questions **(a)** et **(b)** peuvent être mis en défaut.

(d) Soit un exposant $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$. Pour $\mathsf{p} = 1$:

$$\big\|h_n\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = n^d\left(\tfrac{1}{n}\right)^d + n^d\left(\tfrac{1}{n}\right)^d = 2 \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1),$$

et pour $1 < \mathsf{p} < \infty$:

$$\begin{aligned}\Big(\big\|h_n\big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)}\Big)^{\mathsf{p}} &= (n^d)^{\mathsf{p}}\left(\tfrac{1}{n}\right)^d + (n^d)^{\mathsf{p}}\left(\tfrac{1}{n}\right)^d\\ &= 2\,n^{d(\mathsf{p}-1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.\end{aligned}$$

En conclusion, on n'a donc jamais convergence vers 0 dans $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ de la suite $(h_n)_{n=1}^{\infty}$.

Exercice 6. **(a)** D'après un théorème du cours, $\mathscr{C}_c^0(]0,1[)$ est dense dans $L^2(]0,1[)$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$, et il en va de même pour $\mathscr{C}_c^1(]0,1[)$ — en fait, le cours a traité cela, et même établi la densité de $\mathscr{C}_c^\infty$ dans tous les L^{p} avec $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$.

Lorsque $f \in \mathscr{C}_c^1$, une simple intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\varphi'(x)\,dx &= \Big[f(x)\,\varphi(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 f'(x)\,\varphi(x)\,dx\\ [f(0)=\varphi(0)=f(1)=\varphi(1)=0]\qquad &= 0 - 0 - \int_0^1 \underbrace{f'(x)}_{=:\,\Lambda_f(x)}\,\varphi(x)\,dx\end{aligned}$$

montre qu'on peut prendre la dérivée (continue) de f comme fonction associée Λ_f, donc $\mathscr{C}_c^1 \subset \mathscr{S}$, et ainsi, $\mathscr{S}$ est *a fortiori* dense dans L^2.

(b) Établissons tout d'abord que la correspondance :

$$f \longmapsto \Lambda_f \qquad\qquad (f \in \mathscr{S})$$

est linéaire.

En fait, lorsqu'elle existe, *i.e.* lorsque $f \in \mathscr{S}$, la fonction Λ_f satisfaisant :

$$\int_0^1 f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_0^1 \Lambda_f(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad\qquad (\forall\,\varphi\in\mathscr{C}_c^1),$$

est unique, car si $\Lambda_f^\sim$ est une autre telle fonction, après soustraction évidente, on obtient les annulations :

$$0 = -\int_0^1 \Big(\Lambda_f^\sim(x) - \Lambda_f(x)\Big)\,\varphi(x)\,dx \qquad\qquad (\forall\,\varphi\in\mathscr{C}_c^1),$$

et par densité de $\mathscr{C}_c^1$ dans L^2, on déduit pour toute $g \in L^2$ que :

$$0 = \int_0^1 \Big(\Lambda_f^\sim(x) - \Lambda_f(x)\Big)\,g(x)\,dx,$$

d'où $\Lambda_f^\sim = \Lambda_f$ en choisissant $g := \Lambda_f^\sim - \Lambda_f$ pour trouver l'annulation d'une norme L^2 qui implique l'annulation (presque partout) de la fonction.

Grâce à cette unicité, et grâce à la linéarité des intégrales qui définissent Λ_f, on vérifie maintenant aisément que :

$$f_1 + f_2 \longmapsto \Lambda_{f_1} + \Lambda_{f_2} \qquad\text{et que :}\qquad \mu\,f \longmapsto \mu\,\Lambda_f.$$

Une fois acquise cette linéarité de $f \longmapsto \Lambda_f$, des raisonnements élémentaires standard vus en cours montrent la bilinéarité :

$$\langle f, g\rangle_{\mathscr{S}} := \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx + \int_0^1 \Lambda_f(x)\,\Lambda_g(x)\,dx.$$

Enfin, pour conclure, on a bien positivité :

$$\langle f, f\rangle_{\mathscr{S}} = \int_0^1 f(x)^2\,dx + \int_0^1 \Lambda_f(x)^2\,dx \geqslant 0,$$

et annulation $0 = \langle f, f\rangle_{\mathscr{S}}$ si et seulement si $f(x) = 0$ presque partout, d'ailleurs seulement grâce à $0 = \int_0^1 f^2$.

(c) Pour établir la complétude de $\big(\mathscr{S}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{S}}\big)$, soit donc $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite de Cauchy :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1 \quad \Big(n_1, n_2 \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \implies \big|\big|f_{n_1} - f_{n_2}\big|\big|_{\mathscr{S}} \leqslant \varepsilon\Big),$$

à savoir :

$$\int_0^1 \big(f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)\big)^2\,dx + \int_0^1 \Big(\Lambda_{f_{n_1}}(x) - \Lambda_{f_{n_2}}(x)\Big)^2\,dx \leqslant \varepsilon^2.$$

Or ceci implique manifestement la « *cauchycité* » dans L^2 :

$$\big|\big|f_{n_1} - f_{n_2}\big|\big|_{L^2} \leqslant \varepsilon,$$

et comme L^2 est complet, il existe une limite $f \in L^2$:

$$\big|\big|f - f_n\big|\big|_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De même, la suite $\big(\Lambda_{f_n}\big)_{n=1}^{\infty}$ de L^2 étant tout aussi de Cauchy grâce à la même inégalité, comme L^2 est complet, il existe une limite $g \in L^2$:

$$\big\|g-\Lambda_{f_n}\big\|_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il reste encore à démontrer que $g=\Lambda_f$.

À cette fin, en revenant aux identités intégrales qui définissent les Λ_{f_n} :

$$\int_0^1 f_n(x)\,\varphi'(x)\,dx \;=\; -\int_0^1 \Lambda_{f_n}(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\,\varphi\in\mathscr{C}_c^1)},$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz garantit que le membre de gauche et le membre de droite tendent respectivement vers :

$$\int_0^1 f(x)\,\varphi'(x)\,dx \;=\; -\int_0^1 g(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

ce qui montre que $f\in\mathscr{S}$, avec $\Lambda_f=g$.

Exercice 7. Pour vérifier l'orthonormalité, étant donné deux couples (i,i') et (j,j') d'indices entiers $\geqslant 1$, le théorème de Fubini-Tonelli permet de décomposer l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\big\langle\varphi_i(x)\psi_j(y),\,\varphi_{i'}(x)\psi_{j'}(y)\big\rangle_{L^2(R^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2})} \;&=\; \int_{\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}} \varphi_i(x)\psi_j(y)\,\overline{\varphi_{i'}(x)\psi_{j'}(y)}\,dxdy\\
&=\; \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \varphi_i(x)\,\overline{\varphi_{i'}(x)}\,dx \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \psi_j(y)\,\overline{\psi_{j'}(y)}\,dy\\
&=\; \delta_{i'}^{i}\,\delta_{j'}^{j}\\
&=\; \delta_{i',j'}^{i,j}.
\end{aligned}$$

Ensuite, pour vérifier la complétude, il s'agit de montrer que toute fonction :

$$h(x,y)\;\in\;L^2\big(\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}\big)$$

qui est orthogonale à toutes les $\varphi_i(x)\psi_j(y)$:

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \int_{\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}} \varphi_i(x)\psi_j(y)\,\overline{h(x,y)}\,dxdy\\
&=\; \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \varphi_i(x)\,\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \psi_j(y)\,\overline{h(x,y)}\,dy}_{=:\overline{g(x)}} \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\,i,\forall\,j)},
\end{aligned}$$

est nécessairement nulle (presque partout). Mais alors, la fonction (mesurable) $g(x)$ qui apparaît ci-dessus est orthogonale à toutes les φ_i, donc par totalité de la base hilbertienne $\big(\varphi_i(x)\big)_{i=1}^{\infty}$ de $L^2(\mathbb{R}^{d_1})$, il vient, pour presque tout $x\in\mathbb{R}^d$:

$$0 \;=\; \overline{g(x)} \;=\; \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \psi_j(y)\,\overline{h(x,y)}\,dy \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\,j)},$$

et à nouveau de manière similaire par totalité de la base hilbertienne $\big(\psi_j(y)\big)_{j=1}^{\infty}$ de $L^2(\mathbb{R}^{d_2})$, il vient :

$$h(x,y)\;=\;0 \qquad\qquad {\scriptstyle (\text{presque partout})}.$$

5. Examen 3

Exercice 1. [Convergence en mesure] On dit qu'une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonction $f_n \colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ de fonctions mesurables définies sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ *converge en mesure* vers une fonction $f \colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ si, pour tout $\delta > 0$, on a :

$$0 = \lim_{n \to \infty} m\big(\{x \in E \colon |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\}\big).$$

(a) Lorsque f_n converge en norme L^1 vers une fonction $f \in L^1(E, \mathbb{C})$, montrer que f_n converge en mesure vers f, et généraliser ensuite cela aux espaces L^{p} avec $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$.

(b) Avec l'hypothèse supplémentaire que $m(E) < \infty$, montrer que si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge presque partout vers une fonction f, alors $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge aussi en mesure vers f.

(c) En considérant la suite de fonctions sur $\mathbb{R}_+$:

$$g_n(x) := \frac{x}{n}\, \mathbf{1}_{[0,n^2]}(x) \qquad (n \geqslant 1),$$

montrer que l'hypothèse $m(E) < \infty$ dans **(b)** est en général nécessaire.

Exercice 2. Soit $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable intégrable satisfaisant $\int_{\mathbb{R}^d} f \in]0, \infty[$. Soit $\alpha > 0$ un paramètre. On introduit la suite numérique $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ définie par :

$$a_n := \int_{\mathbb{R}^d} n \log \left[1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right] dx,$$

avec $a_n \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

(a) Montrer que $m\big(\{x \in \mathbb{R}^d \colon f(x) \neq 0\}\big) > 0$, où m désigne la mesure de Borel-Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

(b) Lorsque $0 < \alpha < 1$, montrer que $\infty = \lim_{n \to \infty} a_n$. Indication: Utiliser le théorème de Fatou après en avoir soigneusement rappelé l'énoncé exact.

(c) Lorsque $\alpha = 1$, montrer que $\int f = \lim_{n \to \infty} a_n$.

(d) Lorsque $\alpha > 1$, montrer que $0 = \lim_{n \to \infty} a_n$. Indication: Montrer que la fonction $y \longmapsto \frac{\log(1+y^{\alpha})}{y}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3. Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables sur $[0,1] \subset \mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, K(\varepsilon) \gg 1 \qquad \int_0^1 |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n| > K(\varepsilon)\}} \leqslant \varepsilon \qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

(a) Pour une constante réelle fixée $K > 0$, montrer que :

$$0 = \lim_{p \to \infty} \left(\frac{1}{p} \int_0^1 \Big(\sup_{n \leqslant p} |f_n|\Big) \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n \leqslant p} |f_n| \leqslant K\}}\right).$$

(b) Montrer, pour tout entier $p \geqslant 1$, que :

$$\int_0^1 \Big(\sup_{n \leqslant p} \big|f_n\big|\Big) \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p} |f_n| > K\}} \;\leqslant\; \sum_{1 \leqslant n \leqslant p} \int_0^1 \big|f_n\big| \cdot \mathbf{1}_{\big\{|f_n| > K\big\}}.$$

$$\int_0^1 \big(\sup_{n \leqslant p} |f_n|\big) \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p} |f_n| > K\}} \;\leqslant\; \sum_{1 \leqslant n \leqslant p} \int_0^1 |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n| > K\}},$$

(c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe une grande constante réelle $K(\varepsilon) \gg 1$ telle que :

$$\frac{1}{p} \int_0^1 \Big(\sup_{n \leqslant p} \big|f_n\big|\Big) \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p} |f_n| > K\}} \;\leqslant\; \varepsilon \qquad\qquad (\forall\, p \geqslant 1).$$

(d) Montrer que :

$$0 \;=\; \lim_{p \to \infty} \bigg(\frac{1}{p} \int_0^1 \sup_{n \leqslant p} \big|f_n\big|\bigg).$$

Exercice 4. Pour $y \in \mathbb{R}$, on introduit :

$$I(y) \;:=\; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}\, dx.$$

(a) Calculer $I(y)$ et montrer que $y \longmapsto I(y)$ est une fonction continue bornée.

(b) Soit $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite de nombres réels. Pour $x \in [0,1]$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit :

$$g_n(x) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x-y_k|}}.$$

Montrer que la suite numérique $\big(\int_0^1 g_n(x)\, dx\big)_{n=1}^{\infty}$ est bornée.

(c) Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ converge simplement vers une certaine fonction g_∞ mesurable et intégrable sur $[0,1]$.

(d) Montrer que la série de fonctions de $[0,1]$ à valeurs dans $[0,\infty]$:

$$x \;\longmapsto\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x-y_k|}}$$

converge presque partout vers une fonction finie.

(e) Montrer que si $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite à valeurs dans $[0,1]$ qui est dense dans $[0,1]$, alors la fonction g_∞ est discontinue en presque tout point.

(f) Montrer que si $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ est à valeurs dans $[2,\infty]$, alors la fonction g_∞ est indéfiniment dérivable sur $[0,1]$.

Exercice 5. [Lemme d'Austin] Un ensemble qui est réunion $I_1 \cup \cdots \cup I_n$ d'intervalles ouverts non vides $I_i \subset \mathbb{R}$ est toujours de mesure :

$$m(I_1 \cup \cdots \cup I_n) \;\leqslant\; m(I_1) + \cdots + m(I_n).$$

Montrer qu'il existe une sous-famille d'intervalles deux à deux *disjoints* $I_{i_1}, \ldots, I_{i_k}$ pour certains indices appropriés $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$ tels que :

$$m(I_{i_1}) + \cdots + m(I_{i_k}) \;=\; m\big(I_{i_1} \cup \cdots \cup I_{i_k}\big) \;\geqslant\; \frac{1}{3}\, m\big(I_1 \cup \cdots \cup I_n\big).$$

6. Corrigé de l'examen 3

Exercice 1. **(a)** Soit donc $\delta > 0$ fixé. On travaille directement dans L^{p} avec $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$. Si on abrège, pour $n \geqslant 1$:

$$E_{n,\delta} := \big\{x \in E \colon\, |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\big\},$$

il vient :

$$\delta^{\mathsf{p}}\, \mathbf{1}_{E_{n,\delta}}(x) \leqslant \big|(f_n - f)(x)\big|^{\mathsf{p}} \qquad\qquad (\forall\, x \in E),$$

ce qui, après intégration, donne :

$$\begin{aligned}\delta^{\mathsf{p}}\, m\big(E_{n,\delta}\big) &\leqslant \int_E \big|f_n(x) - f(x)\big|^{\mathsf{p}}\, dx \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

et comme on peut diviser par la constante non nulle $\delta^{\mathsf{p}} > 0$, on obtient bien :

$$\lim_{n\to\infty} m\big(E_{n,\delta}\big) = 0.$$

(b) Pour tout $\delta > 0$ fixé, le but, sur $E \subset \mathbb{R}$ de mesure finie, si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge simplement presque partout vers une certaine fonction mesurable f, est d'atteindre :

$$0 = \lim_{n\to\infty} m\big(E_{n,\delta}\big) = \lim_{n\to\infty} \big(\{x \in E \colon\, |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\}\big),$$

autrement dit, d'établir que :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \gg 1 \quad \Big(n \geqslant N(\varepsilon) \implies m\big(E_{n,\delta}\big) \leqslant \varepsilon\Big).$$

À cette fin, pour $N \geqslant 1$ entier, introduisons les ensembles :

$$G_N := \big\{x \in E \colon\, |f_n(x) - f(x)| < \delta,\ \forall\, n \geqslant N\big\},$$

qui sont emboîtés (exercice mental) :

$$G_N \subset G_{N+1} \qquad\qquad (\forall\, N \geqslant 1),$$

et qui remplissent :

$$E = \bigcup_{N=1}^{\infty} G_N,$$

parce que (exercice mental avec solution), en tout point $x \in E$, l'hypothèse de convergence simple s'écrit :

$$\exists\, N(x,\delta) \gg 1 \quad \Big(n \geqslant N(x,\delta) \implies \big|f_n(x) - f(x)\big| < \delta \ \ \forall\, n \geqslant N(x,\delta)\Big).$$

Les complémentaires :

$$\begin{aligned}F_N &:= \big\{x \in E \colon\, \exists\, n \geqslant N,\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\big\} \\ &= \bigcup_{n \geqslant N} E_{n,\delta},\end{aligned}$$

sont alors décroissants :

$$F_N \,=\, E\big\backslash G_N \,\subset\, E\big\backslash G_{N+1} \,=\, F_{N+1} \qquad\qquad (\forall\, N \geqslant 1),$$

et comme :

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} F_N \,=\, E \bigg\backslash \bigcup_{N=1}^{\infty} G_N \,=\, \emptyset,$$

en tenant compte de l'hypothèse qu'ils sont tous contenus dans l'ensemble E de mesure *finie*, un théorème du cours donne :

$$\lim_{N\to\infty} m\big(F_N\big) \,=\, m\bigg(\bigcap_{N=1}^{\infty} F_N\bigg) \,=\, 0,$$

donc pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $N(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$m\big(F_{N(\varepsilon)}\big) \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Alors la conclusion s'offre à nous, car maintenant, pour tout $n \geqslant N(\varepsilon)$, on a :

$$\begin{aligned} m\big(E_{n,\delta}\big) &\leqslant m\bigg(\bigcup_{n\geqslant N(\varepsilon)} E_{n,\delta}\bigg) \\ &= m\big(F_{N(\varepsilon)}\big) \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

(c) Sur $E = \mathbb{R}_+$, ensemble de mesure infinie, la suite de fonctions *positives :*

$$g_n(x) \,:=\, \tfrac{x}{n} \cdot \mathbf{1}_{[0,n^2]}(x) \qquad\qquad (x \in \mathbb{R}_+,\, n \geqslant 1),$$

est manifestement encadrée par :

$$0 \,\leqslant\, g_n(x) \,\leqslant\, \tfrac{x}{n} \,\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\, 0,$$

ce qui montre la convergence simple vers la fonction nulle $g := 0$.

Toutefois, elle ne converge *pas* en mesure vers la fonction $g = 0$, car si $\delta > 0$ est fixé :

$$\begin{aligned} m\big(\{x \in \mathbb{R}_+ \colon\; g_n(x) \geqslant \delta\big) &= m\big(\{0 \leqslant x \leqslant n^2 \colon\; \tfrac{x}{n} \geqslant \delta\}\big) \\ &= m\big(\{\delta n \leqslant x \leqslant n^2\}\big) \\ &= n\,(n-\delta) \end{aligned}$$

ne tend pas vers 0 lorsque $n \longrightarrow \infty$ — et même bien pire, diverge vers l'infini !

Exercice 2. (a) Si on avait au contraire :

$$0 \,=\, m\big(\{x \in \mathbb{R}^d \colon\; f(x) \neq 0\}\big),$$

on aurait $0 = \int_{\mathbb{R}^d} f$, en contradiction avec l'hypothèse $\int_{\mathbb{R}^d} f \in \,]0, \infty[$.

(b) Tout d'abord, le théorème de Fatou énonce que si une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions mesurables $f_n \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ *ne prend que des valeurs positives* — hypothèse importante —, alors :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\, dx \,\leqslant\, \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\, dx.$$

Ici, comme la mesure de $\{x \in \mathbb{R}^d \colon\, f(x) > 0\}$ est strictement positive, il existe $\delta > 0$ tel que l'ensemble :

$$E_\delta \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\; f(x) \geqslant \delta\big\}$$

est de mesure strictement positive :

$$m\big(E_\delta\big) \,>\, 0,$$

car $m(\{f>0\})>0$ et car $\{f>0\}=\cup_{n=1}^{\infty}\{f>\frac{1}{n}\}$.

Maintenant, supposons que l'exposant α dans :

$$\begin{aligned}
a_n &:= \int_{\mathbb{R}^d} n\log\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right]dx \\
&\geqslant \int_{E_\delta} n\log\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right]dx,
\end{aligned}$$

satisfait $0<\alpha<1$. Comme $\log(1+x)\sim x$ pour x proche de 0, et comme $n\big(\frac{\delta}{n}\big)^{\alpha}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$, il vient :

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left[1+\left(\frac{\delta}{n}\right)^{\alpha}\right] \,=\, \infty,$$

et nous pouvons donc minorer :

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} a_n &\geqslant \liminf_{n\to\infty}\int_{E_\delta} n\log\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right]dx \\
\text{[Fatou !]}\qquad &\geqslant \int_{E_\delta}\liminf_{n\to\infty} n\log\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right]dx \\
&\geqslant \int_{E_\delta}\lim_{n\to\infty} n\log\left[1+\left(\frac{\delta}{n}\right)^{\alpha}\right]dx \\
&= m\big(E_\delta\big)\cdot\infty \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

(c) Lorsque $\alpha=1$, l'inégalité classique $\log(1+y)\leqslant y$ valable pour tout $y\geqslant 0$ — en fait pour tout $y>-1$, mais notre $y:=f(x)$ est ici $\geqslant 0$ — donne :

$$n\log\left[1+\frac{f(x)}{n}\right] \,\leqslant\, f(x) \qquad\qquad (\forall\, x\in\mathbb{R}^d),$$

d'où par intégration :

$$a_n \,=\, \int_{\mathbb{R}^d} n\log\left[1+\frac{f(x)}{n}\right]dx \,\leqslant\, \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \qquad\qquad (\forall\, n\geqslant 1),$$

ce qui montre en particulier que tous ces $a_n<\infty$ sont finis.

Pour l'inégalité inverse, c'est encore et à nouveau Fatou qui nous appelons à la rescousse :

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} a_n &= \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} n\log\left[1+\frac{f(x)}{n}\right]dx \\
&\geqslant \int_{\mathbb{R}^d}\liminf_{n\to\infty} n\log\left[1+\frac{f(x)}{n}\right]dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx,
\end{aligned}$$

cette dernière limite inférieure étant une vraie limite.

(d) Supposons enfin que $\alpha > 1$, et commençons par vérifier, comme cela a été suggéré, que la fonction :

$$y \longmapsto \frac{\log(1+y^\alpha)}{y}$$

est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

En effet, elle est $\mathscr{C}^\infty$ — donc $\mathscr{C}^0$ — sur $]0,\infty[$, et quand $y \xrightarrow{>} 0$, l'équivalent $\log(1+y) \sim y$ donne le prolongement par continuité :

$$\frac{\log(1+y^\alpha)}{y} \underset{y\to 0}{\sim} y^{\alpha-1} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

tandis que, lorsque $y \longrightarrow \infty$:

$$\frac{\log(1+y^\alpha)}{y} \underset{y\to\infty}{\sim} \frac{\alpha \log y}{y} \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, il existe une constante $0 < C_\alpha < \infty$ telle que :

$$(0 \leqslant) \quad \log\big(1+y^\alpha\big) \leqslant C_\alpha\, y \qquad (\forall\, y \in]0,\infty[).$$

Ici appliquée à $y := \frac{f(x)}{n}$, cette inégalité montre que les intégrandes des a_n sont uniformément dominées par une fonction-majorante :

$$n \log\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right] \leqslant n\, C_\alpha\, \frac{f(x)}{n} = C_\alpha\, f(x),$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, puisque f avait été supposée l'être, ce qui permet premièrement de constater agéablement la finitude de tous ces :

$$a_n = \int_{\mathbb{R}^d} n \log\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right] dx \leqslant C_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx < \infty,$$

et deuxièmement, en appliquant le théorème de convergence dominée, après avoir furtivement observé l'annulation des limites ponctuelles en tout $x \in \mathbb{R}^d$ fixé :

$$(0 \leqslant) \quad n \log\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right] \leqslant \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha = \frac{1}{n^{\alpha-1}}\big(f(x)\big)^\alpha \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

de conclure que :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\lim_{n\to\infty} n \log\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right]\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} 0 = 0.\end{aligned}$$

Exercice 3. (a) Pour toute constante réelle fixée $0 < K < \infty$, et tout entier $p \geqslant 1$, on a clairement :

$$\sup_{n\leqslant p} |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{\sup\limits_{n\leqslant p} |f_n| \leqslant K\}} \leqslant K \qquad (\forall\, x \in [0,1]),$$

d'où après intégration la majoration permettant de déterminer la limite demandée :

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty}\left(\frac{1}{p}\int_0^1 \sup_{n\leqslant p}|f_n(x)| \cdot \mathbf{1}_{\{\sup\limits_{n\leqslant p}|f_n|\leqslant K\}}(x)\, dx\right) &\leqslant \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\, K \int_0^1 dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

(b) Fixons un point $x \in [0,1]$, et choisissons un entier $m = m(x)$ avec $1 \leqslant m \leqslant p$ réalisant :

$$\big|f_m(x)\big| \;=\; \sup_{1\leqslant n\leqslant p} \big|f_n(x)\big|,$$

d'où :

$$\big|f_n(x)\big| \;\leqslant\; \big|f_m(x)\big| \qquad\qquad (\forall\, 1\leqslant n\leqslant p),$$

puis :

$$\big|f_n(x)\big|\cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p}|f_n|>K\}}(x) \;\leqslant\; \big|f_m(x)\big|\cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p}|f_n|>K\}}(x) \qquad\qquad (\forall\, 1\leqslant n\leqslant p).$$

Lorsque $|f_m(x)| \leqslant K$, le membre de droite vaut 0, il est donc inférieur à toute quantité positive.

Lorsque $\big|f_m(x)\big| > K$, on poursuit la majoration du membre de droite :

$$\begin{aligned}
\big|f_n(x)\big|\cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p}|f_n|>K\}}(x) \;&\leqslant\; \big|f_m(x)\big|\cdot 1 \\
&=\; \big|f_m(x)\big|\cdot \mathbf{1}_{\{|f_m|>K\}}(x) \\
&\leqslant\; \sum_{1\leqslant n\leqslant p} \big|f_n(x)\big|\cdot \mathbf{1}_{\{|f_n|>K\}}(x),
\end{aligned}$$

puis en prenant le supremum sur $1 \leqslant n \leqslant p$ à gauche :

$$\Big(\sup_{n\leqslant p}|f_n|\Big)\cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p}|f_n|>K\}} \;\leqslant\; \sum_{1\leqslant n\leqslant p} |f_n|\cdot \mathbf{1}_{\{|f_n|>K\}},$$

pour conclure par une simple intégration :

$$\int_0^1 \Big(\sup_{n\leqslant p}|f_n|\Big)\cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p}|f_n|>K\}} \;\leqslant\; \sum_{1\leqslant n\leqslant p} \int_0^1 |f_n|\cdot \mathbf{1}_{\{|f_n|>K\}},$$

(c) Soient donc $\varepsilon > 0$ et $K(\varepsilon) \gg 1$ comme dans l'hypothèse de cet exercice. Alors grâce à ce qui précède, que l'on divise par p :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\int_0^1 \Big(\sup_{n\leqslant p}|f_n|\Big)\cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p}|f_n|>K(\varepsilon)\}} \;&\leqslant\; \frac{1}{p}\sum_{1\leqslant n\leqslant p} \int_0^1 |f_n|\cdot \mathbf{1}_{\{|f_n|>K(\varepsilon)\}} \\
&\leqslant\; \sum_{1\leqslant n\leqslant p} \varepsilon \\
&=\; \varepsilon.
\end{aligned}$$

(d) Il ne reste plus qu'à effectuer la synthèse de ce qui vient d'être vu. L'intégrale dont il faut déterminer la limite quand $p \longrightarrow \infty$ se découpe naturellement en deux morceaux, toujours avec $K = K(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\int_0^1 \sup_{n\leqslant p}|f_n| \;&=\; \frac{1}{p}\int_0^1 \sup_{n\leqslant p}|f_n|\cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p}|f_n|\leqslant K(\varepsilon)\}} + \frac{1}{p}\int_0^1 \sup_{n\leqslant p}|f_n|\cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p}|f_n|>K(\varepsilon)\}} \\
\text{[Questions (a) et (c)]}\qquad &\leqslant\; \underbrace{\frac{1}{p}\int_0^1 \sup_{n\leqslant p}|f_n|\cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p}|f_n|\leqslant K(\varepsilon)\}}}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} + \varepsilon
\end{aligned}$$

et donc, il existe $N(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que, pour tout $n \geqslant N(\varepsilon)$, on ait :

$$(0 \leqslant) \qquad \frac{1}{p} \int_0^1 \sup_{n \leqslant p} |f_n| \leqslant \varepsilon + \varepsilon,$$

ce qui établit bien la « zéro-ité » annoncée de la limite.

Exercice 4. **(a)** Trois cas sont naturellement à distinguer.

• Lorsque $y \leqslant 0$:

$$I(y) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-y}}\, dx = \Big[2\sqrt{x-y}\Big]_0^1 = 2\sqrt{1-y} - 2\sqrt{-y}.$$

• Lorsque $0 < y < 1$:

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-x}}\, dx + \int_y^1 \frac{1}{\sqrt{x-y}}\, dx \\ &= \Big[-2\sqrt{y-x}\Big]_0^y + \Big[2\sqrt{x-y}\Big]_y^1 \\ &= 2\sqrt{y} + 2\sqrt{1-y}. \end{aligned}$$

• Lorsque $1 \leqslant y$:

$$I(y) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y-x}}\, dx = \Big[-2\sqrt{y-x}\Big]_0^1 = 2\sqrt{y} - 2\sqrt{y-1}.$$

Sur $]-\infty, 0[\, \cup\,]0,1[\, \cup\,]1,\infty[$, la continuité de $y \longmapsto I(y)$ est claire, tandis qu'au premier point spécial 0 :

$$\lim_{\substack{y \longrightarrow 0 \\ <}} I(y) = 2\sqrt{1-0} - \sqrt{-0} = 2\sqrt{0} + 2\sqrt{1-0} = \lim_{\substack{0 \longleftarrow y \\ <}} I(y),$$

et au point spécial 1 :

$$\lim_{\substack{y \longrightarrow 1 \\ <}} I(y) = 2\sqrt{1} + 2\sqrt{1-1} = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{1-1} = \lim_{\substack{1 \longleftarrow y \\ <}} I(y).$$

Ainsi, $y \longmapsto I(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc bornée sur tout compact de $\mathbb{R}$. Mais comme, en utilisant $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$, on a :

$$\lim_{-\infty \leftarrow y} I(y) = \lim_{-\infty \leftarrow y} 2\, \frac{1}{\sqrt{1-y} + \sqrt{-y}} = 0,$$

ainsi que :

$$\lim_{y \to \infty} I(y) = \lim_{y \to \infty} 2\, \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{y-1}} = 0,$$

cette fonction $I(\cdot)$ est en fait bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(b) Ainsi donc, puisque :

$$\|I\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})} = \sup_{y \in \mathbb{R}} |I(y)| < \infty,$$

il devient aisé de majorer uniformément en $n \geqslant 1$ les intégrales sur $[0,1]$ des fonctions proposées :

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \frac{1}{\sqrt{|x-y_k|}} \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

où $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite quelconque de nombres réels, car en effet :

$$
\begin{aligned}
(0 \leqslant) \qquad \int_0^1 g_n(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-y_k|}}\,dx \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\, I(y_k) \\
&\leqslant \|I\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \\
&\leqslant \|I\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})} \frac{\pi^2}{6},
\end{aligned}
$$

en se souvenant que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge et vaut d'ailleurs $\frac{\pi^2}{6}$, comme nous l'a appris Euler.

(c) Tout d'abord, en tout point fixé $x \in [0,1]$, la limite ponctuelle :

$$
g_\infty(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)
$$

existe toujours dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, car les valeurs $g_n(x) \leqslant g_{n+1}(x)$ croissent, et la fonction-limite g_∞ est mesurable, grâce à un théorème fondamental du cours.

De plus, comme $0 \leqslant g_n \leqslant g_{n+1}$ partout sur $[0,1]$, pour tout $n \geqslant 1$, le théorème de convergence monotone s'applique et donne :

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 g_\infty(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx \\
&\leqslant \|I\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})} \frac{\pi^2}{6} \\
&< \infty,
\end{aligned}
$$

inégalité fort agréable qui établit l'intégrabilité sur $[0,1]$ de la fonction positive g_∞.

(d) Observant que la fonction g_∞ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ est bien entendu donnée par :

$$
g_\infty(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x-y_k|}},
$$

la finitude ainsi acquise de $\int g_\infty$ garantit alors, d'après un lemme du cours bien connu car très souvent utilisé, que les valeurs $0 \leqslant g_\infty(x) < \infty$ sont finies en presque tout point $x \in [0,1]$ — car sinon, si ces valeurs étaient infinies sur un ensemble de mesure strictement positive, on aurait $\int g_\infty = \infty$.

(e) D'après la Question **(d)**, la fonction :

$$
g_\infty(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{|x-y_n|}}
$$

prend des valeurs finies en presque tout point $x \in [0,1]$. Posons alors :

$$
D := \big\{x \in [0,1] \colon\ g_\infty(x) < \infty\big\},
$$

et observons que $y_n \notin D$ car on a visiblement :

$$
g_\infty(y_n) = \infty \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1).
$$

Nous affirmons alors que :

$$D \subset \big\{x \in [0,1] \colon\ g_\infty \text{ n'est pas continue en } x\big\},$$

ce qui montrera que g_∞ est discontinue presque partout. En effet, par densité de $(y_n)_{n=1}^\infty$ dans $[0,1]$, tout point $x \in D$ est limite d'une certaine sous-suite $(y_{n_k})_{k=1}^\infty$:

$$y_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x.$$

Si g_∞ était continue en x, elle serait nécessairement bornée dans un petit voisinage ouvert non vide de x (exercice mental), contredisant le fait que :

$$g_\infty\big(y_{n_k}\big) = \infty \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant 1).$$

L'interprétation à retenir est qu'une fonction peut tout à fait être Lebesgue-intégrable, comme l'est g_∞, tout en étant *discontinue* presque partout.

(f) On suppose pour terminer au contraire que tous les y_n, avec $n \geqslant 1$, sont dans $[2,\infty[$, d'où :

$$y_n - x \geqslant 2-1 \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1, \forall\, x \in [0,1]),$$

et donc :

$$\frac{1}{\sqrt{y_n - x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2-1}} = 1,$$

ce qui montre que la série :

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\,\frac{1}{\sqrt{y_n-x}}\bigg|_{[0,1]}$$

est normalement, donc uniformément, convergente sur $[0,1]$, donc définit une fonction continue sur $[0,1]$, d'après un théorème classique connu.

Ensuite généralement, pour tout entier $\kappa \geqslant 0$, la dérivée κ-ième de la fonction $x \longmapsto (y_n - x)^{-1/2}$ vaut :

$$\big(-\tfrac{1}{2}\big)\big(-\tfrac{1}{2}-1\big)\cdots\big(-\tfrac{1}{2}-\kappa+1\big)\,\big(y_n-x\big)^{-\frac{1}{2}-\kappa} = \frac{\mathsf{constante}_\kappa}{(y_n-x)^{\kappa+\frac{1}{2}}},$$

et pour la même raison, on a les majorations uniformes par rapport à $x \in [0,1]$:

$$\left|\frac{d^\kappa}{dx^\kappa}\Big[(y_n-x)^{-\frac{1}{2}}\Big]\right| \leqslant \frac{|\mathsf{constante}_\kappa|}{1^{\kappa+\frac{1}{2}}},$$

qui garantissent la convergence normale-uniforme de la série dérivée terme à terme :

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\sqrt{y_n-x}}\right)^{(\kappa)}\Bigg|_{[0,1]} \qquad\qquad (\kappa \geqslant 0),$$

donc grâce à un théorème connu, $g_\infty\big|_{[0,1]}$ est de classe $\mathscr{C}^\kappa$ pour tout $\kappa \geqslant 0$, donc est $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 5. Avec $n_1 := n$, on renote cette collection d'ouverts non vides :

$$I_1^1 \cup \cdots \cup I_{n_1}^1,$$

on sélectionne l'un d'entre eux $I_{i_1}^1$ de longueur maximale, on définit :

$$\widetilde{I_{i_1}^1} := 3\, I_{i_1}^1,$$

comme étant l'intervalle de même centre dilaté 3 fois, on supprime de la collection *tous* les I_j^1 avec $j \neq i_1$ qui *intersectent* $\widetilde{I}_{i_1}^1$, et on note, avec un certain entier $0 \leqslant n_2 \leqslant n_1 - 1$, la réunion des intervalles restants :

$$I_1^2 \cup \cdots \cup I_{n_2}^2.$$

Comme on a inclusion de tous les intervalles dans la réunion maintenant *disjointe :*

$$I_1^1 \cup \cdots \cup I_{n_1}^1 \subset \widetilde{I_{i_1}^1} \coprod \big(I_1^2 \cup \cdots \cup I_{n_2}^2\big),$$

il vient :

$$\begin{aligned} m\big(I_1^1 \cup \cdots \cup I_{n_1}^1\big) &= m\big(\widetilde{I}_{i_1}^1\big) + m\big(I_1^2 \cup \cdots \cup I_{n_2}^2\big) \\ &= 3\, m\big(I_{i_1}^1\big) + m\big(I_1^2 \cup \cdots \cup I_{n_2}^2\big). \end{aligned}$$

Ensuite, on répète ce procédé avec la collection restante, il se termine en un nombre fini $k \leqslant n$ d'étapes, et on obtient bien une sous-famille disjointe satisfaisant :

$$m\big(I_1 \cup \cdots \cup I_n\big) \leqslant 3\,\big(m(I_{i_1}) + \cdots + m(I_{i_k})\big).$$

7. Examen 4

Exercice 1. [Convergence monotone en théorie de Riemann] Sur un intervalle $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, soit une suite de fonctions $f_n \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont toutes *décroissantes* sur $[a,b]$. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ existe en tout point $x \in [a,b]$. L'objectif est d'établir que $\int_a^b f_n(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx$, l'intégrale étant prise ici au sens de Riemann.

(a) Montrer que f est décroissante.

(b) Justifier que les f_n ainsi que f sont toutes Riemann-intégrables.

(c) Au moyen d'une figure soignée, esthétique et intelligente, faire voir sans mots qu'en un point $x_0 \in \,]a,b[$, la suite numérique $\big(f_n(x_0)\big)_{n=1}^{\infty}$ n'est pas forcément décroissante, ni même croissante.

(d) Justifier, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'une subdivision :

$$\Delta = \Delta_\varepsilon = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\big\}$$

de l'intervalle $[a,b]$ telle que les sommes de Darboux inférieure et supérieure $\Sigma_\Delta(f)$ et $\Sigma^\Delta(f)$, dont on rappelera soigneusement la définition, satisfont :

$$\Sigma^\Delta(f) - \varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \Sigma_\Delta(f) + \varepsilon.$$

(e) Montrer qu'il existe un entier $n = N_\varepsilon \gg 1$ assez grand pour que :

$$f(x_\kappa) - \frac{\varepsilon}{b-a} \leqslant f_n(x_\kappa) \leqslant f(x_\kappa) + \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad (\forall\, n \geqslant N_\varepsilon, \forall\, \kappa = 1, \dots, \nu).$$

(f) Toujours pour $n \geqslant N_\varepsilon$, montrer que :

$$\Sigma^\Delta(f_n) \leqslant \Sigma^\Delta(f) + \varepsilon.$$

(g) Toujours et encore pour $n \geqslant N_\varepsilon$, montrer que :

$$\Sigma_\Delta(f_n) \geqslant \Sigma_\Delta(f) + \varepsilon.$$

(h) Montrer que :

$$\Sigma^\Delta(f_n) - 2\,\varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \Sigma_\Delta(f_n) + 2\,\varepsilon \qquad (\forall\, n \geqslant N_\varepsilon),$$

(i) Montrer que :

$$\int_a^b f_n(x)\,dx - 2\,\varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b f_n(x)\,dx + 2\,\varepsilon \qquad (\forall\, n \geqslant N_\varepsilon),$$

et conclure.

Exercice 2. [Borel-Cantelli] Soit une série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^d$ satisfaisant toutes $a_k \geqslant 0$ presque partout.

(a) Pour $n \geqslant 1$, soit $f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$. Vérifier que $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ presque partout.

(b) Justifier l'existence de $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

(c) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)\, dx \;=\; \int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\, dx.$$

(d) Sous l'hypothèse supplémentaire que la valeur du membre de gauche est $< \infty$, montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ converge presque partout vers une certaine fonction-limite mesurable *finie*.

(e) Soit maintenant une suite $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ de sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^d$ satisfaisant $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$. Montrer que l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^d$ qui appartiennent à une infinité de E_k est de mesure nulle.

Exercice 3. Pour $t > 0$, on pose :

$$k(t) \;:=\; \int_0^{\infty} e^{-t\,x}\, \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

(a) Montrer que k est une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \infty[$.

(b) Montrer que $k'(t) = -\frac{1}{t^2+1}$.

(c) Calculer la limite de $k(t)$ lorsque $t \longrightarrow \infty$.

(d) En déduire $k(t)$.

(e) Calculer la limite quand $t \longrightarrow 0$ de $k(t)$.

(f) La fonction $x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est-elle intégrable sur $[0, \infty[$ pour la mesure de Lebesgue dx sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4. [Théorie de la mesure, Question de cours] Soit une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$.

(a) Justifier brièvement qu'il existe une suite $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ de fonctions étagées positives $\varphi_k \geqslant 0$ qui tendent ponctuellement vers f en tout point, avec $\varphi_k \leqslant \varphi_{k+1}$.

(b) Montrer que :

$$0 \;=\; \lim_{k\to\infty} \big\| f - \varphi_k \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

(c) Soit un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$. Sans rappeler toute la démonstration mais en rappelant les idées, justifier soigneusement qu'il existe une famille finie de rectangle fermés presque disjoints $R_1, \dots, R_J$ tels que :

$$m\bigg(E \;\Delta\; \bigcup_{j=1}^{J} R_j\bigg) \;\leqslant\; \varepsilon.$$

(d) Montrer que :

$$\bigg\| \mathbf{1}_E - \sum_{j=1}^{J} \mathbf{1}_{\mathrm{Int}\, R_j} \bigg\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \;\leqslant\; \varepsilon.$$

(e) Montrer que les fonctions en escalier sont denses dans $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$.

(f) Montrer que les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$.

(g) Comment étendre ces deux résultats à $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$?

Exercice 5. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et soient deux nombres réels $1 \leqslant \mathsf{p} < \mathsf{q} < \infty$.

(a) Pour $d = 1$, trouver un exemple d'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ de mesure $m(\Omega) = \infty$ infinie tel que $L^{\mathsf{q}}(\Omega, \mathbb{C})$ n'est *pas* contenu dans $L^{\mathsf{p}}(\Omega, \mathbb{C})$.

(b) Lorsque Ω est de mesure de Lebesgue *finie*, montrer au contraire que $L^{\mathsf{q}}(\Omega, \mathbb{C}) \subset L^{\mathsf{p}}(\Omega, \mathbb{C})$.

(c) Toujours sous l'hypothèse $m(\Omega) < \infty$, montrer que :

$$\sup \big\{ \|f\|_{L^{\mathsf{p}}(\Omega)} \colon \ f \in L^{\mathsf{q}}(\Omega, \mathbb{C}), \ \|f\|_{L^{\mathsf{q}}(\Omega)} \, = \, 1 \big\} \, = \, \big(m(\Omega)\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}} - \frac{1}{\mathsf{q}}}.$$

Indication: Appliquer l'inégalité de Hölder à $f = f \cdot 1$ avec un réel p_1 tel que $\mathsf{p}\, \mathsf{p}_1 = \mathsf{q}$.

Exercice 6. [Subdivisions verticales L^{p}] Étant donné une fonction mesurable $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$, soit pour tout réel $\lambda \geqslant 0$ l'ensemble :

$$E_\lambda \, := \, \big\{ x \in \mathbb{R} \colon \ f(x) \geqslant \lambda \big\}.$$

(a) Justifier la mesurabilité de ces E_λ.

(b) Montrer que l'application $\lambda \longmapsto m(E_\lambda)$ est mesurable.

(c) Pour tout exposant réel p avec $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}} \big(f(x)\big)^{\mathsf{p}} \, dx \, = \, \mathsf{p} \int_{[0,\infty[} \lambda^{\mathsf{p}-1} \, m\big(E_\lambda\big) \, d\lambda.$$

8. Corrigé de l'examen 4

Exercice 1. Tous les éléments de cet exercice apparaissent déjà dans le cours.

Exercice 2. Il en va de même pour cet exercice, lui aussi conçu en vu de tester l'assimilation du cours.

Exercice 3. (a) Pour $t > 0$ et $x \geqslant 0$, posons :

$$f(t,x) \,:=\, e^{-tx}\,\frac{\sin x}{x}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Comme $t \longmapsto f(t,x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\infty[$, de dérivée $-\,e^{-tx}\sin x$ majorée sur $[\varepsilon,\infty[$ par la fonction dominatrice uniforme en t :

$$\begin{aligned}\big|-e^{-tx}\sin x\big| \,&\leqslant\, e^{-\varepsilon x}\,|\sin x| \\ &\leqslant\, e^{-\varepsilon x},\end{aligned}$$

qui est intégrable sur $[0,\infty[$, le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique pour offrir le caractère $\mathscr{C}^1$ sur $[\varepsilon,\infty[$ de la fonction :

$$k(t) \,:=\, \int_0^\infty e^{-tx}\,\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

avec en sus une formule pour sa dérivée :

$$k'(t) \,=\, \int_0^\infty -\,e^{-tx}\sin x\,dx.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ était prédestiné — par les dieux tout-puissants de la morphogénétique grecque — à tendre vers 0, nous concluons bien que la fonction k est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\infty[$.

(b) Il suffit de calculer l'intégrale précédente, grâce à une primitivation évidente :

$$\begin{aligned}k'(t) \,=\, -\,\mathsf{Im}\left(\int_0^\infty e^{-tx}\,e^{ix}\,dx\right) \,&=\, -\,\mathsf{Im}\left(\left[\frac{e^{(i-t)x}}{i-t}\right]_0^\infty\right) \\ &=\, \mathsf{Im}\left(\frac{1}{i-t}\right) \\ &=\, -\,\frac{1}{t^2+1}.\end{aligned}$$

(c) Pour tout $x > 0$ fixé, il est clair qu'on a la convergence ponctuelle :

$$f(t,x) \,=\, e^{-tx}\,\frac{\sin x}{x} \;\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}\; 0.$$

De plus, en utilisant l'inégalité classique $|\sin x| \leqslant x$ valable pour $x \in [0,\infty[$, on a la majoration uniforme en $t \geqslant 1$:

$$\big|f(t,x)\big| \,=\, e^{-tx}\,\frac{|\sin x|}{x} \,\leqslant\, e^{-1\cdot x}\cdot 1,$$

par la fonction dominatrice $x \longmapsto e^{-x}$, intégrable sur $[0, \infty[$. Ainsi, le théorème de convergence dominée s'applique, pour offrir :

$$k(t) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

(d) On résout l'équation différentielle obtenue en **(b)** :

$$k'(t) = -\frac{1}{t^2+1},$$

par simple primitivation pour obtenir :

$$k(t) = -\operatorname{arctan}(t) + \mathsf{constante},$$

la condition à l'infini de **(c)** déterminant cette constante :

$$k(t) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctan} t \qquad\qquad (t > 0).$$

(e) Il est alors clair que $k(t)$ se prolonge continûment en $t = 0$, avec la belle valeur :

$$k(0) = \frac{\pi}{2}.$$

(f) Ainsi, ce qui vient d'être acquis fournit la valeur de l'intégrale impropre au sens de Riemann :

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty e^{-0} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{\mathrm{M} \to \infty} \int_0^{\mathrm{M}} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

limite dont on peut indépendamment démontrer qu'elle existe, car :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

est une série alternée de terme général tendant vers 0 lorsque $n \longrightarrow \infty$ (exercice), mais à proprement parler, $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est *pas* intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, \infty[$, car lorsqu'on prend les valeurs absolues :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \\
&\geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(n+1)\pi}\, dx \\
&= \int_0^\pi \sin x\, dx \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{2}{\pi} \cdot \infty,
\end{aligned}$$

on trouve un majorant qui vaut ∞ à cause de la divergence $\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ de la série harmonique.

Exercice 4. À nouveau et encore — mais c'est la dernière fois ! —, cet exercice, ce n'était que du cours !

Exercice 5. En dimension $d = 1$, prenons $\Omega := [1, \infty[$, satisfaisant comme suggéré $m(\Omega) = \infty$, et prenons un réel $0 < c < 1$ satisfaisant :

$$c\,\mathsf{p} < 1 < c\,\mathsf{q},$$

ce qui est possible car $1 \leqslant \mathsf{p} < \mathsf{q} < \infty$ par hypothèse.

Alors grâce à la connaissance de $\int_1^\infty \frac{1}{x^e}\,dx = \infty$ pour $e \leqslant 1$ et de $\int_1^\infty \frac{1}{x^e}\,dx = \left[\frac{x^{-e+1}}{-e+1}\right]_1^\infty = \frac{1}{e-1}$ pour $e > 1$, on voit que :

$$x \longmapsto \frac{1}{x^c}$$

n'appartient pas à $L^{\mathsf{p}}(\Omega)$, mais appartient à $L^{\mathsf{q}}(\Omega)$.

(b) Supposons donc maintenant l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de mesure (de Borel-Lebesgue) *finie*, toujours avec $1 \leqslant \mathsf{p} < \mathsf{q} < \infty$, et soit $f \in L^{\mathsf{q}}(\Omega, \mathbb{C})$.

Pour montrer que l'on a aussi $f \in L^{\mathsf{p}}(\Omega, \mathbb{C})$, l'astuce « *intersidérale* » à laquelle il fallait penser (y compris dans de nombreux autres contextes) consiste, afin d'atteindre $\int_\Omega |f|^{\mathsf{p}} < \infty$, à appliquer l'inégalité de Hölder en faisant naître un deuxième facteur artificiel anodin, le 1 :

$$\big|f(x)\big|^{\mathsf{p}} = \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}} \cdot 1,$$

tout en choisissant des exposants finement ajustés :

$$\mathsf{r} := \frac{\mathsf{q}}{\mathsf{p}}, \qquad \frac{1}{\mathsf{r}} + \frac{1}{\mathsf{r}'} = 1, \qquad \mathsf{r}' = \frac{\mathsf{r}}{\mathsf{r}-1} = \frac{\mathsf{q}}{\mathsf{q}-\mathsf{p}},$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx &= \int_\Omega \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}} \cdot 1\,dx \\
\text{[Hölder]} \qquad &\leqslant \left(\int_\Omega \Big(\big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\Big)^{\mathsf{r}} dx\right)^{\frac{1}{\mathsf{r}}} \cdot \left(\int_\Omega 1^{\mathsf{r}'}\,dx\right)^{\frac{1}{\mathsf{r}'}} \\
[\mathsf{pr} = \mathsf{q}] \qquad &= \left(\int_\Omega \big|f(x)\big|^{\mathsf{q}}\,dx\right)^{\frac{1}{\mathsf{r}}} \cdot \underbrace{\Big(m(\Omega)\Big)^{\frac{1}{\mathsf{r}'}}}_{\text{fini !}},
\end{aligned}$$

d'où en faisant apparaître les vraies normes L^{p} et L^{q} :

$$||f||_{L^{\mathsf{p}}(\Omega)} \leqslant \left(\left(\Big(||f||_{L^{\mathsf{q}}(\Omega)}\Big)^{\mathsf{q}}\right)^{\frac{1}{\mathsf{r}}}\right)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \cdot \Big(m(\Omega)^{\frac{1}{\mathsf{r}'}}\Big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}$$

à savoir — exercice d'arithmétique élémentaire — :

$$\begin{aligned}
||f||_{L^{\mathsf{p}}(\Omega)} &\leqslant \big(m(\Omega)\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}} - \frac{1}{\mathsf{q}}} \cdot ||f||_{L^{\mathsf{q}}(\Omega)} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

ce majorant étant fini, puisqu'on a supposé $f \in L^{\mathsf{q}}(\Omega)$.

En fait, cette inégalité montre mieux, elle fait même voir (exercice mental) que l'injection :

$$L^{\mathsf{q}}(\Omega) \hookrightarrow L^{\mathsf{p}}(\Omega)$$

est continue, et que la topologie définie par la norme $||\cdot||_{L^{\mathsf{p}}}$ est plus fine que la topologie définie par la norme $||\cdot||_{L^{\mathsf{q}}}$.

On peut aussi faire voir (mais cela n'était pas demandé) que cette inclusion $L^{\mathsf{q}}(\Omega) \subset L^{\mathsf{p}}(\Omega)$ avec $m(\Omega) < \infty$ est toujours stricte, en s'inspirant, et en généralisant (exercice), le cas de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{x^c},$$

sur $\Omega := [0,1] \subset \mathbb{R}$ en dimension $d=1$, avec un réel $0 < c < 1$ satisfaisant :

$$c\,\mathsf{p} < 1 < c\,\mathsf{q},$$

puisque $\int_0^1 \frac{dx}{x^e} = \infty$ pour $e \geqslant 1$, et puisque $\int_0^1 \frac{dx}{x^e} = \big[\frac{x^{-e+1}}{-e+1}\big]_0^1 = \frac{1}{1-e}$ pour $e < 1$.

On pouvait aussi montrer directement l'inclusion $L^{\mathsf{q}}(\Omega) \subset L^{\mathsf{p}}(\Omega)$ lorsque $m(\Omega) < \infty$ en utilisant l'inégalité élémentaire (distinguer $|y| \leqslant 1$ et $|y| \geqslant 1$) :

$$|y|^{\mathsf{p}} \leqslant 1 + |y|^{\mathsf{q}} \qquad (\forall\, y \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant \mathsf{p} < \mathsf{q} < \infty),$$

d'où avec $y := f(x)$ et par intégration :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx &\leqslant m(\Omega) + \int_\Omega \big|f(x)\big|^{\mathsf{q}}\,dx \\ &< \infty.\end{aligned}$$

(c) Toutefois, c'était la première approche avec l'inégalité de Hölder qui était la plus adéquate, car dans l'inégalité générale obtenue à l'instant :

$$\|f\|_{L^{\mathsf{p}}(\Omega)} \leqslant \big(m(\Omega)\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}-\frac{1}{\mathsf{q}}} \cdot \|f\|_{L^{\mathsf{q}}(\Omega)},$$

nous affirmons que la constante $\big(m(\Omega)\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}-\frac{1}{\mathsf{q}}}$ s'avère être optimale, *i.e.* être la plus petite constante $0 < C < \infty$ satisfaisant :

$$\|f\|_{L^{\mathsf{p}}(\Omega)} \leqslant C \cdot \|f\|_{L^{\mathsf{q}}(\Omega)} \qquad (\forall\, f \in L^{\mathsf{q}}(\Omega)),$$

comme on s'en convainc en réalisant qu'avec le choix « bête » de la fonction constante :

$$f := m(\Omega)^{-\frac{1}{\mathsf{q}}},$$

on a en fait *égalité* dans l'inégalité :

$$\begin{aligned}\bigg(\int_\Omega \Big(m(\Omega)^{-\frac{1}{\mathsf{q}}}\Big)^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} = \Big(m(\Omega)\cdot m(\Omega)^{-\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{q}}}\Big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} &= m(\Omega)^{\frac{1}{\mathsf{p}}-\frac{1}{\mathsf{q}}} \cdot 1 \\ &= m(\Omega)^{\frac{1}{\mathsf{p}}-\frac{1}{\mathsf{q}}} \cdot \Big(m(\Omega)\cdot m(\Omega)^{-\frac{\mathsf{q}}{\mathsf{q}}}\Big)^{\frac{1}{\mathsf{q}}} \\ &= m(\Omega)^{\frac{1}{\mathsf{p}}-\frac{1}{\mathsf{q}}} \cdot \bigg(\int_\Omega \Big(m(\Omega)^{-\frac{1}{\mathsf{q}}}\Big)^{\mathsf{q}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{q}}}.\end{aligned}$$

Exercice 6. (a) Comme $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty[$ est mesurable, pour tout réel $\lambda > 0$, l'ensemble de surniveau :

$$E_\lambda := \big\{x \in \mathbb{R}\colon\ f(x) \geqslant \lambda\big\}$$

est *par définition* mesurable.

(b) Un résultat du cours, obtenu dans le chapitre « *Fubini-Tonelli* », a fait voir qu'une fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ comme celle-ci est mesurable si et seulement si son hypographe :

$$E := \big\{(x,\lambda) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\colon\ 0 \leqslant \lambda \leqslant f(x)\big\}$$

est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$.

Le théorème de Tonelli, appliqué à la fonction :

$$(x, \lambda) \longmapsto \mathbf{1}_E(x, \lambda),$$

nous assure alors que l'application $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$:

$$\lambda \longmapsto \int_{E_\lambda} 1 \cdot dx = m\big(E_\lambda\big),$$

est mesurable, puisque $\lambda \longrightarrow m(E_\lambda)$ est l'intégrale par rapport à la première variable x de la fonction $(x, \lambda) \longmapsto \mathbf{1}_E(x, \lambda)$.

(c) Pour terminer, avec un exposant réel $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, appliquons enfin le théorème de Tonelli à la fonction mesurable $\geqslant 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, \lambda) &\longmapsto \mathsf{p}\, \lambda^{\mathsf{p}-1}\, \mathbf{1}_E(x, \lambda), \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathsf{p} \int_0^\infty \lambda^{\mathsf{p}-1}\, m\big(E_\lambda\big)\, d\lambda = \int_0^\infty \mathsf{p}\, \lambda^{\mathsf{p}-1} \bigg(\int_{E_\lambda} 1\, dx \bigg)\, d\lambda &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} \mathsf{p}\, \lambda^{\mathsf{p}-1}\, \mathbf{1}_E(x, \lambda)\, dx d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} \bigg(\int_0^\infty \mathsf{p}\, \lambda^{\mathsf{p}-1}\, \mathbf{1}_E(x, \lambda)\, d\lambda \bigg)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \bigg(\int_0^{f(x)} \mathsf{p}\, \lambda^{\mathsf{p}-1}\, d\lambda \bigg)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \big(f(x)\big)^{\mathsf{p}}\, dx, \end{aligned}$$

comme demandé.

9. Examen 5

Exercice 1. Sur un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}$, si une fonction quelconque $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée, on rappelle qu'il existe une suite minimisante $(y_\ell^-)_{\ell=1}^\infty$ et une suite maximisante $(y_\ell^+)_{\ell=1}^\infty$ qui réalisent :

$$\inf_E g = \lim_{\ell\to\infty} g(y_\ell^-) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\ell\to\infty} g(y_\ell^+) = \sup_E g.$$

On suppose donnée une suite de fonctions bornées $f_n\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, qui convergent uniformément vers une certaine fonction $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \mathrm{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \quad \forall\, x \in E \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

(a) Montrer que f est elle aussi bornée.

(b) Si deux fonctions $h_1, h_2\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ bornées satisfont :

$$h_1(x) \leqslant h_2(x) \qquad\qquad (\forall\, x \in E),$$

montrer que :

$$\inf_E h_1 \leqslant \inf_E h_2 \qquad \text{et} \qquad \sup_E h_1 \leqslant \sup_E h_2.$$

(c) Montrer que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)$:

$$\Big|\inf_E f_n - \inf_E f\Big| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \Big|\sup_E f_n - \sup_E f\Big| \leqslant \varepsilon.$$

On travaille dorénavant sur un intervalle réel $E = [a,b]$ avec $-\infty < a < b < \infty$ et on ajuste $\mathrm{N}(\varepsilon)$ pour que :

$$n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \implies \bigg(\forall\, x \in [a,b] \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\bigg).$$

Soit $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée.

(d) Si $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\}$ est une subdivision quelconque de $[a,b]$ avec $\nu \geqslant 1$, rappeler les deux définitions des sommes de Darboux inférieure $\Sigma_\Delta(g)$ et supérieure $\Sigma^\Delta(g)$ de g.

(e) Montrer que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}_\varepsilon$:

$$\Sigma_\Delta(f_n) - \varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f_n) + \varepsilon.$$

(f) Montrer que toute fonction qui est limite uniforme d'une suite de fonctions Riemann-intégrables est encore Riemann-intégrable.

(g) On appelle *fonction réglée* toute fonction qui est limite uniforme de fonctions en escalier. Établir que les fonctions réglées sont Riemann-intégrables.

Exercice 2. Dans l'espace euclidien réel standard $\mathbb{R}^d$ de dimension $d \geqslant 1$, soit un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$. On rappelle qu'une fonction $f \colon E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ à valeurs dans l'ensemble étendu des nombres réels est dite *mesurable* si *tous* ses ensembles de sous-niveau :

$$\big\{x \in E \colon\ f(x) < a\big\} \qquad\qquad (\forall\, a \in \mathbb{R}),$$

sont mesurables.

(a) Montrer que $\{x \in E \colon\ f(x) \geqslant a\}$ est mesurable, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que $\{f = -\infty\}$ et $\{f = +\infty\}$ sont mesurables.

(c) Montrer, pour tous réels $-\infty < a < b < +\infty$, que l'ensemble :

$$\big\{x \in E \colon\ a < f(x) < b\big\}$$

est mesurable.

(d) Lorsque $f \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ est à valeurs finies, montrer que f est mesurable si et seulement si l'image inverse $f^{-1}(\mathscr{O})$ par f de tout sous-ensemble ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}$ est mesurable.

Exercice 3. [Questions d'assimilation du cours] Énoncer précisément sans démonstrations :

(a) le théorème de Tonelli, suivi du théorème de Fubini, en explicitant l'articulation logique naturelle qui existe entre eux lorsqu'on doit les appliquer dans des situations concrètes ;

(b) le théorème de Fatou inverse, avec les limites supérieures, au lieu des limites inférieures ;

(c) le théorème de changement de variables dans les intégrales en théorie de Borel-Lebesgue ;

(d) le théorème de dérivation sous le signe intégral d'une intégrale dépendant d'un paramètre, en supposant que la dépendance par rapport au paramètre est $\mathscr{C}^1$.

Exercice 4. Soit dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et soit $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction mesurable intégrable.

(a) Montrer que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \colon |f(x)| = \infty\}$ est de mesure nulle.

(b) À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$0 \,=\, \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\,n} \int_{-n}^{n} f(x)\, dx.$$

(c) En produisant un contre-exemple, montrer que cette limite n'est pas toujours égale à 0 (voire n'existe pas toujours) lorsque la fonction mesurable f n'est pas supposée intégrable.

(d) Maintenant, soit $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables intégrables sur $\mathbb{R}$ qui converge presque partout vers une certaine fonction $h := \lim_{n \to \infty} h_n$. Justifier que h est mesurable.

(e) On suppose de plus que, pour tout $n \geqslant 1$, il existe une fonction positive intégrable $g_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ avec $|h_n| \leqslant g_n$ dont la suite complète $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ converge presque partout vers une certaine fonction $g := \lim_{n \to \infty} g_n$ qui est *intégrable* sur $\mathbb{R}$. Après en avoir justifié l'utilisation, appliquer le Lemme de Fatou aux deux fonctions $g_n - h_n$ et $g_n + h_n$.

(f) Pour toute suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de nombres réels $a_n \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\liminf_{n \to \infty} \big(-a_n\big) \;=\; -\limsup_{n \to \infty} a_n.$$

(g) Montrer l'implication :

$$\left(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx\right) \;\Longrightarrow\; \left(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx\right).$$

(h) Soit enfin $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables intégrables sur $\mathbb{R}$ qui converge presque partout vers une certaine fonction mesurable f qui est *intégrable*. Établir l'équivalence :

$$\left(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \big|f_n(x)-f(x)\big|\,dx \;=\; 0\right) \;\Longleftrightarrow\; \left(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \big|f_n(x)\big|\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx\right).$$

Indication: Pour l'implication « $\Longleftarrow$ », introduire $g_n := 2\big(|f_n| + |f|\big)$ ainsi que $h_n := |f_n - f| + |f_n| - |f|$.

Pour l'implication « $\Longrightarrow$ », utiliser l'inégalité $\big||a| - |b|\big| \;\leqslant\; \big|a - b\big|$ valable pour deux nombres réels quelconques $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit une fonction mesurable intégrable $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(a) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, montrer que la fonction $\mathbb{R}_+ \ni x \longmapsto e^{-xt}\, f(x)$ est aussi mesurable intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(b) On introduit alors la *transformée de Laplace* de f :

$$L_f(t) \;:=\; \int_0^{\infty} e^{-xt}\, f(x)\,dx \qquad\qquad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Montrer que la fonction $\mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto L_f(t) \in \mathbb{R}$ est finie et continue.

(c) Montrer que $0 = \lim_{t\to\infty} L_f(t)$.

(d) Calculer une expression explicite de $L_f(t)$ pour $f(x) := e^{-\theta x}$ avec $\theta > 0$.

(e) Faire de même pour $f(x) := \mathbf{1}_{\{0\leqslant x\leqslant 1\}} \cdot \sin(x)$.

(f) Soient maintenant un nombre réel $T > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\int_0^{\infty} e^{-\,e^{n(T-x)}}\, f(x)\,dx \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, L_f(kn).$$

(g) Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-\,e^{n(T-x)}}\, f(x)\,dx \;=\; \int_T^{\infty} f(x)\,dx.$$

(h) Soit un nombre réel $a > 0$. Établir qu'il n'existe pas de fonction mesurable intégrable f sur $\mathbb{R}_+$ dont la transformée de Laplace vaut $L_f(t) = e^{-at}$ pour tout $t \geqslant 0$.

(i) Pour $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mesurable intégrable, montrer que $t \longmapsto L_f(t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \infty[$.

(j) Quand $f \geqslant 0$ ne prend que des valeurs positives, montrer que :

$$\Big(x \longmapsto x\, f(x) \text{ est } L^1 \text{ sur } [0,\infty[\,\Big) \;\Longleftrightarrow\; \Big(t \longmapsto L_f(t) \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,\infty[\Big).$$

10. Corrigé de l'examen 5

Exercice 1. **(a)** Faisons $\varepsilon := 1$, prenons $n := \mathrm{N}(1)$, et, pour tout $x \in E$, par majoration triangulaire, déduisons le résultat voulu :

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqslant \big|f(x) - f_{\mathrm{N}(1)}(x) + f_{\mathrm{N}(1)}(x)\big| \\ &\leqslant \big|f(x) - f_{\mathrm{N}(1)}(x)\big| + \big|f_{\mathrm{N}(1)}(x)\big| \\ &\leqslant 1 + \sup_E \big|f_{\mathrm{N}(1)}\big| \\ &< \infty, \end{aligned}$$

car par hypothèse, $f_{\mathrm{N}(1)}$ est bornée sur E !

(b) Clairement, de $h_1 \leqslant h_2$, on déduit pour tout $x \in E$ que :

$$\inf_E h_1 \leqslant h_1(x) \leqslant h_2(x) \leqslant \sup_E h_2,$$

d'où deux extraits intéressants pour la suite :

$$\inf_E h_1 \leqslant h_2(x) \qquad \text{et} \qquad h_1(x) \leqslant \sup_E h_2 \qquad\qquad (\forall\, x \in E).$$

En prenant deux suites $(y_{2,\ell}^-)_{\ell=1}^\infty$ et $(y_{1,\ell}^+)_{\ell=1}^\infty$ qui réalisent :

$$\inf_E h_2 = \lim_{\ell\to\infty} h_2\big(y_{2,\ell}^-\big) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\ell\to\infty} h_1\big(y_{1,\ell}^+\big) = \sup_E h_1,$$

il vient comme désiré :

$$\inf_E h_1 \leqslant \inf_E h_2 \qquad \text{et} \qquad \sup_E h_1 \leqslant \sup_E h_2.$$

(c) En appliquant le résultat de la question **(b)** qui précède aux deux inégalités :

$$f_n(x) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f_n(x) + \varepsilon \qquad\qquad (\forall\, x \in \mathbb{E}),$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \inf_E f_n - \varepsilon &\leqslant \inf_E f, \\ \sup_E f_n - \varepsilon &\leqslant \sup_E f, \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \inf_E f &\leqslant \inf_E f_n + \varepsilon, \\ \sup_E f &\leqslant \sup_E f_n + \varepsilon, \end{aligned}$$

d'où :

$$-\varepsilon \leqslant \inf_E f_n - \inf_E f \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad -\varepsilon \leqslant \sup_E f_n - \sup_E f \leqslant \varepsilon,$$

et on reconstitue l'inégalité demandée en se souvenant que $-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha|$ pour tout nombre $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) Pour qui n'a pas oublié son cours :

$$\begin{aligned}\Sigma_\Delta(g) &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \inf_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} g,\\ \Sigma^\Delta(g) &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \sup_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} g.\end{aligned}$$

(e) Grâce à la question **(c)** appliquée sur $E := [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, en tenant compte de la normalisation de l'epsilon, nous avons, pour tout $1 \leqslant \kappa \leqslant \nu$:

$$\inf_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f_n - \frac{\varepsilon}{b-a} \leqslant \inf_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f,$$

ainsi que :

$$\sup_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f \leqslant \sup_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f_n + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Nous pouvons donc majorer :

$$\begin{aligned}\Sigma_\Delta(f_n) - \varepsilon &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \inf_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f_n - \varepsilon\\ &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \inf_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f_n - \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1})\\ &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \left[\inf_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f_n - \frac{\varepsilon}{b-a}\right]\\ &\leqslant \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \inf_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f\\ &= \Sigma_\Delta(f),\end{aligned}$$

ce qui est la première inégalité demandée.

La seconde inégalité $\Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f)$, abondamment vue en cours, est essentiellement évidente, donc pourrait être revue en instantané ici en notant que l'infimum de f sur chaque intervalle $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ est bien entendu majoré par son supremum sur ce même segment.

Pour ce qui est de la troisième inégalité, on procède de manière similaire quoique légèrement différente :

$$\begin{aligned}\Sigma^\Delta(f) &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \sup_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f\\ &\leqslant \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \left[\sup_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f_n + \frac{\varepsilon}{b-a}\right]\\ &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \sup_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f_n + \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1})\\ &= \Sigma^\Delta(f_n) + \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration de :

$$\Sigma_\Delta(f_n) - \varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f_n) + \varepsilon.$$

(f) Soit comme ci-dessus $f = \lim f_n$, la convergence étant uniforme sur $[a, b]$. L'objectif est de trouver, pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, une subdivision Δ de $[a, b]$ assez fine pour que :

$$\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leqslant 3\,\varepsilon.$$

Rien de plus facile ! Sachant que pour tout quadruplet de nombres réels :

$$\alpha \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \beta,$$

le petit segment $[\gamma, \delta] \subset [\alpha, \beta]$ a une longueur inférieure au grand :

$$\delta - \gamma \leqslant \beta - \alpha,$$

on tire des inégalités de la question précédente, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)$:

$$\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leqslant \Sigma^{\Delta}(f_n) - \Sigma_{\Delta}(f_n) + 2\,\varepsilon,$$

puis en prenant $n := \mathrm{N}(\varepsilon)$, il suffit de choisir Δ telle que :

$$\Sigma^{\Delta}\big(f_{\mathrm{N}(\varepsilon)}\big) - \Sigma_{\Delta}\big(f_{\mathrm{N}(\varepsilon)}\big) \leqslant \varepsilon,$$

ce qui est possible, puisque $f_{\mathrm{N}(\varepsilon)}$ est Riemann-intégrable par hypothèse !

(g) Dans le cours, on a démontré que les fonctions en escalier sont Riemann-intégrables, donc la dernière question **(f)** vient d'établir que leurs limites uniformes — les fonctions réglées — sont aussi Riemann-intégrables.

Exercice 2. **(a)** D'après un théorème du cours, le complémentaire dans $\mathbb{R}$ d'un ensemble mesurable est toujours mesurable, donc pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \{f \geqslant a\} &= E \big\backslash \{f < a\} \\ &= E \cap \big(\mathbb{R} \big\backslash \{f < a\}\big) \end{aligned}$$

est bel et bien mesurable !

(b) La mesurabilité étant préservée par réunions et par intersections dénombrables, les deux écritures :

$$\{f = -\infty\} = \bigcap_{n \geqslant 1} \{f < -n\} \qquad \text{et} \qquad \{f = +\infty\} = \bigcap_{n \geqslant 1} \{f \geqslant n\}$$

font voir le résultat, en utilisant d'ailleurs furtivement **(a)** qui précède.

(c) On écrit :

$$\{a < f < b\} = \{f < b\} \cap \{f > a\},$$

puis, afin de faire voir que le deuxième ensemble est lui aussi mesurable, on le récrit sous la forme adéquate :

$$\begin{aligned} \{f > a\} &= \bigcup_{n \geqslant 1} \big\{f \geqslant a + \tfrac{1}{n}\big\} \\ &= \underbrace{\bigcup_{n \geqslant 1} \Bigg(\underbrace{E \Big\backslash \underbrace{\big\{f < a + \tfrac{1}{n}\big\}}_{\text{mesurable par définition}}}_{\text{mesurable par un théorème connu}} \Bigg)}_{\text{mesurable par un théorème connu}}. \end{aligned}$$

(d) Dans l'un des tous premiers théorèmes du cours sur les ensembles mesurables, on a montré en dimension $d = 1$ que tout ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^1$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints :

$$\mathscr{O} = \bigcup_{n \geqslant 1} \left]a_n, b_n\right[\qquad\qquad (-\infty \leqslant a_n < b_n \leqslant \infty),$$

d'où :

$$f^{-1}(\mathscr{O}) = \underbrace{\bigcup_{n \geqslant 1} \underbrace{f^{-1}\big(\left]a_n, b_n\right[\big)}_{\text{mesurable par (c)}}}_{\text{donc mesurable !}}.$$

Exercice 3. (a) Comme cela a été dit en cours, dans la pratique réelle des exercices, c'est-à-dire dans la vraie vie des mathématiques, on rencontre parfois une fonction mesurable $f \colon \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie sur un espace-produit :

$$\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \qquad\qquad (d_1 \geqslant 1,\ d_2 \geqslant 1),$$

dont on ignore si elle est Lebesgue-intégrable — telle est la question que l'on se pose !

Alors on lui associe la fonction mesurable positive $|f| \geqslant 0$, fonction dont on voudrait déterminer si elle est d'intégrale finie, ce qui rendrait l'étudiant(e) très content(e).

Mais comme on peut toujours calculer l'intégrale de $|f| \geqslant 0$ *puisqu'on accepte, dans la théorie, que les intégrales de fonctions mesurables* $\geqslant 0$ *puisse valoir* ∞, on espère, en utilisant le Théorème de Tonelli qui permet de se ramener à deux intégrales emboîtées en dimensions inférieures $d_1 < d_1 + d_2$ et $d_2 < d_1 + d_2$, pouvoir calculer ou estimer :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f| = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \big|f(x,y)\big|\, dx \right) dy,$$

et alors — bingo ! —, si le résultat numérique s'avère être *fini*, on peut conclure que f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$! Quel contentement !

Car ensuite, le Théorème de Fubini peut être appliqué puisque l'hypothèse (cruciale) $\int |f| < \infty$ qui apparaît dans son énoncé est satisfaite, et on peut reprendre le calcul que l'on vient de conduire pour $|f|$ et recalculer alors pour f la valeur *finie* de son intégrale en travaillant à nouveau avec des intégrales itérées :

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\, dx \right) dy}_{\text{en général calculable}} = \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

Bien entendu, ces énoncés sont tout aussi vrais pour l'ordre inverse d'intégration itérée :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \big|f(x,y)\big|\, dy \right) dx,$$

puis :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x,y)\, dy \right) dx,$$

et la pratique enseigne que si on a fait un mauvais premier choix d'ordre, il y a de bonnes chances que l'ordre inverse ouvre les portes secrètes.

(b) Le théorème de Fatou inverse, avec les limites supérieures, au lieu des limites inférieures, s'énonce comme suit — attention à la frappe sur les doigts de qui oublie l'hypothèse $f_n \leqslant 0$!

Théorème. [Inégalité généralissime de Fatou inverse] *Étant donné une suite quelconque de fonctions mesurables négatives sur* $\mathbb{R}^d$ *:*

$$f_n \leqslant 0 \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

à valeurs dans $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}_-$*, on a :*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,dx \;\leqslant\; \int_{\mathbb{R}^d} \limsup_{n\to\infty} f_n. \qquad \square$$

(c) Éh bien, le théorème de changement de variables dans les intégrales en théorie de Borel-Lebesgue s'énonce comme suit.

Théorème. [Changement de variables] *Soit* $\varphi\colon U \xrightarrow{\sim} V$ *un difféomorphisme* $\mathscr{C}^1$ *entre deux ouverts* $U \subset \mathbb{R}^d$ *et* $V \subset \mathbb{R}^d$*. Alors pour toute fonction mesurable* $f\colon V \longrightarrow \mathbb{C}$*, la composée* $f \circ \varphi$ *:*

$$U \xrightarrow[\sim]{\varphi} V \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

est aussi mesurable, et si f *est de plus Lebesgue-intégrable,* $f \circ \varphi$ *est aussi Lebesgue-intégrable avec la formule :*

$$\int_V f(y)\,dy \;=\; \int_U f\circ\varphi(x)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx. \qquad \square$$

(d) Le théorème de dérivation sous le signe intégral d'une intégrale dont l'intégrande est de classe $\mathscr{C}^1$ par rapport à la variable et au paramètre s'énonce comme suit.

Théorème. [Dérivabilité sous le signe intégral] *Si* $E \times I \ni (x,t) \longmapsto f(x,t) \in \mathbb{C}$ *est une fonction définie sur le produit d'un sous-ensemble mesurable* $E \subset \mathbb{R}^d$ *par un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *d'intérieur non vide telle que :*

(i) *pour tout* $t \in I$*, la fonction* $x \longmapsto f(x,t)$ *est Lebesgue-intégrable en la variable* x *sur* E*;*

(ii) *pour tout* $x \in E$*, la fonction* $t \longmapsto f(x,t)$ *est* $\mathscr{C}^1$*, de dérivée :*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t);$$

(iii) *il existe une fonction positive* $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *mesurable Lebesgue-intégrable sur* E *qui domine uniformément :*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant g(x),$$

pour tout $x \in E$ *et tout* $t \in I$*;*

Alors en tout $t \in I$ *fixé, la fonction :*

$$x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$

est Lebesgue-intégrable sur E*, et surtout, la fonction :*

$$t \longmapsto \int_E f(x,t)\,dx$$

est dérivable sur I *de dérivée égale à :*

$$\frac{d}{dt}\int_E f(x,t)\,dx \;=\; \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx. \qquad \square$$

Exercice 4. Soit donc $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction mesurable intégrable, à savoir dont l'intégrale de la valeur absolue est finie :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\big|\,dx \;<\; \infty.$$

(a) Le fait que $\{|f| = \infty\}$ est de mesure nulle est un théorème du cours, mais redémontrons-le. Pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant 1$, la majoration :

$$\mathrm{N} \cdot m\big(\{|f| \geqslant \mathrm{N}\}\big) \;\leqslant\; \int |f| \;<\; \infty,$$

donne l'*inégalité de Tchebytchev :*

$$m\big(\{|f| \geqslant \mathrm{N}\}\big) \;\leqslant\; \frac{\int |f|}{\mathrm{N}},$$

dont le membre de droite tend visiblement vers zéro lorsque $\mathrm{N} \longrightarrow \infty$. Mais puisque :

$$\big\{|f| = \infty\big\} \;=\; \bigcap_{\mathrm{N}\geqslant 1} \big\{|f| \geqslant \mathrm{N}\big\},$$

un théorème du cours sur les intersections dénombrables décroissantes d'ensembles mesurables de mesure finie à partir d'un certain rang — ce qui est le cas ici ! — fait voir la nullité demandée :

$$\begin{aligned}
m\big(\{|f| = \infty\}\big) \;&=\; m\bigg(\bigcap_{\mathrm{N}\geqslant 1} \big\{|f| \geqslant \mathrm{N}\big\}\bigg) \\
&=\; \lim_{\mathrm{N}\to\infty} m\big(\big\{|f| \geqslant \mathrm{N}\big\}\big) \\
&=\; 0.
\end{aligned}$$

On pourrait aussi raisonner de manière plus directe, mais quelque peu moins rigoureuse, par l'absurde, en supposant que $m(\{|f| = \infty\}) > 0$, ce qui, puisque f est supposée Lebesgue-intégrable, conduirait à un jeu contradictoire d'inégalités :

$$\begin{aligned}
\infty \;>\; \int_{\mathbb{R}} |f| \;&\geqslant\; \infty \cdot m\big(\{|f| = \infty\}\big) \\
&=\; \infty.
\end{aligned}$$

Notons qu'il serait impossible d'en puiser une contradiction lorsque $0 = m(\{|f| = \infty\})$, puisque $\infty \cdot 0$ n'a pas de valeur fixe attribuable.

(b) Puisque le sujet demande d'*appliquer* le théorème de convergence dominée, introduisons la suite de fonctions mesurables :

$$f_n(x) \;:=\; \frac{1}{2n}\, f(x)\, \mathbf{1}_{[-n,+n]}(x) \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

lesquelles sont constamment dominées par la fonction intégrable f :

$$\big|f_n(x)\big| \;\leqslant\; |f(x)| \qquad\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \geqslant 1),$$

donc le célèbre théorème de Lebesgue s'applique pour offrir sur un plateau ce qui était demandé :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} 0 \\ &= 0\,!\end{aligned}$$

Subrepticement, on a utilisé ici $0 = m(\{|f| = \infty\})$ de la question **(a)**.

On peut en fait se passer du théorème de convergence dominée, grâce à la majoration élémentaire :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n}\left|\int_{-n}^{n} f(x)\,dx\right| &\leqslant \frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} \big|f(x)\big|\,dx \\ &\leqslant \underbrace{\frac{1}{2n}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\big|\,dx}_{\text{constante} \,<\, \infty}}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\, 0},\end{aligned}$$

inégalité qui démontre bien :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\,n}\int_{-n}^{n} f(x)\,dx = 0.$$

(c) La fonction $f(x) := 1$ constante égale à 1 n'est bien sûr pas intégrable sur $\mathbb{R}$ (elle est d'intégrale infinie, ce qui est exclu), et la suite :

$$\frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} 1\cdot dx = 1,$$

est constante égale à 1, donc ne converge pas vers 0.

Plus subtilement, soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}$ la fonction *paire* définie, pour $x \geqslant 0$, par :

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \ x = k \in \mathbb{N}, \\ (-1)^k\,k & \text{lorsque } \ k-1 < x < k \quad \text{ pour un entier } \ k \geqslant 1. \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} f(x)\,dx &= \frac{2}{2n}\int_{0}^{n} f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{n}\big(-1+2-\cdots+(-1)^n\,n\big),\end{aligned}$$

somme dont les creux de vague croissent et décroissent alternativement, égale, lorsque $n = 2n' - 1$ avec $n' \geqslant 1$, à :

$$\begin{aligned}
\frac{[-1+2]+[-3+4]+\cdots+[-(2n'-3)+(2n'-2)]-(2n'-1)}{2n'-1} &= \frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n'-1 \text{ fois}}-(2n'-1)}{2n'-1} \\
&= \frac{-\,n'}{2n'-1} \\
&\underset{n'\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

et autrement, lorsque $n' = 2n$ est pair, constamment égale à :

$$\begin{aligned}
\frac{[-1+2]+[-3+4]+\cdots+[-(2n'-3)+(2n'-2)]+[-(2n'-1)+(2n')]}{2n'} &= \frac{\overbrace{1+1+\cdots+1+1}^{n' \text{ fois}}}{2n'} \\
&= \frac{n'}{2n'} \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

et là, il y a deux limites possibles, $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Un exemple encore plus convaincant faisant voir que la limite de $\frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} f$ n'existe pas forcément est la fonction dérivée :

$$f(x) := \frac{d}{dx}\big(x \sin x\big),$$

non intégrable sur $\mathbb{R}$ au sens de Lebesgue (exercice non immédiat) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|\sin x + x \cos x\big|\, dx \,=\, \infty,$$

tandis que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} \frac{d}{dx}\big(x \sin x\big)\, dx \,&=\, \frac{n \sin n - n \sin(-n)}{2n} \\
&= \sin n
\end{aligned}$$

oscille sans limite entre -1 et $+1$ lorsque $n \longrightarrow \infty$, grâce à un théorème de densité des entiers naturels modulo 2π.

(d) D'après un théorème du cours, toute suite $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ de fonctions mesurables intégrables sur $\mathbb{R}$ qui converge presque partout sur $\mathbb{R}$ a toujours pour limite une fonction qui est mesurable. D'ailleurs, la théorie de la mesure est en grande partie érigée dans l'objectif de stabiliser la mesurabilité par passage à des limites dénombrables quelconques.

Rappelons plus précisément que dans le cours, étant donné une suite quelconque $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions mesurables, on a démontré que les deux fonctions :

$$\liminf_{n\to\infty} h_n \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\to\infty} h_n$$

sont mesurables, et lorsque ces deux fonctions coïncident — partout ou presque partout, cela revient au même —, *i.e.* lorsque h_n converge (presque partout) vers une certaine fonction-limite $h = \lim h_n$, on en a déduit que :

$$\liminf_{n\to\infty} h_n \,=\, \lim_{n\to\infty} h_n \,=\, \limsup_{n\to\infty} h_n$$

est mesurable.

(e) On suppose maintenant que, pour tout $n \geqslant 1$, il existe une fonction positive intégrable $g_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ avec $|h_n| \leqslant g_n$ dont la suite complète $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ converge presque partout vers une certaine fonction $g := \lim_{n\to\infty} g_n$ qui est *intégrable* sur $\mathbb{R}$.

Il est alors clair que les deux fonctions :

$$g_n - h_n \geqslant 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad g_n + h_n \geqslant 0$$

combinaisons algébriques de fonctions mesurables sont mesurables, et de plus sont *positives*, hypothèse *requise* pour pouvoir appliquer le Théorème — généralissime ! — de Fatou, lequel donne ici deux fois :

$$\begin{aligned} \int \liminf_{n\to\infty} \big(g_n - h_n\big) &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int \big(g_n - h_n\big), \\ \int \liminf_{n\to\infty} \big(g_n + h_n\big) &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int \big(g_n + h_n\big). \end{aligned}$$

Or $g_n \longrightarrow g$ et $h_n \longrightarrow h$, donc en faisant extrêmement attention à la manière dont les limites inférieures se distribuent à droite, *i.e.* en n'intervertissant pas le signe moins et la limite inférieure :

$$\begin{aligned} \int g - \int h &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int g_n + \liminf_{n\to\infty} \int \big(-h_n\big), \\ \int g + \int h &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int g_n + \liminf_{n\to\infty} \int h_n. \end{aligned}$$

(f) Tout le monde sait en effet qu'il faut se méfier des signes « $-$ » ! Rappelons que les limites inférieure et supérieure d'une suite numérique quelconque $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ sont définies par :

$$\liminf_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\inf_{m\geqslant n} b_m\Big) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\sup_{m\geqslant n} b_m\Big).$$

Ici appliquée à la suite $b_n := -a_n$, cette définition de la limite inférieure peut être transformée en le résultat demandé :

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \big(-a_n\big) &= \lim_{n\to\infty} \Big(\inf_{m\geqslant n} -a_m\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big(-\sup_{m\geqslant n} a_m\Big) \\ &= -\lim_{n\to\infty} \Big(\sup_{m\geqslant n} a_m\Big) \\ &= -\limsup_{n\to\infty} a_n. \end{aligned}$$

(g) Supposons donc que la suite g_n satisfait :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx.$$

En revenant alors à la fin de la question **(e)** :

$$\begin{aligned} \int g - \int h &\leqslant \int g + \liminf_{n\to\infty} \int \big(-h_n\big), \\ \int g + \int h &\leqslant \int g + \liminf_{n\to\infty} \int h_n, \end{aligned}$$

cela permet instantanément de simplifier et d'obtenir :

$$
\begin{aligned}
-\int h \;&\leqslant\; \liminf_{n\to\infty}\Big(-\int h_n\Big),\\
\int h \;&\leqslant\; \liminf_{n\to\infty}\int h_n.
\end{aligned}
$$

Mais la question **(f)** qui précède avait justement préparé le terrain à l'avance pour que l'on puisse remplacer la première limite inférieure par une limite supérieure :

$$
\begin{aligned}
-\int h \;&\leqslant\; -\limsup_{n\to\infty}\int h_n,\\
\int h \;&\leqslant\; \liminf_{n\to\infty}\int h_n,
\end{aligned}
$$

et en regardant bien droit dans les yeux ces deux inégalités, l'aigle-étudiant qui sommeille en nous les voit s'articuler instantanément en un tryptique :

$$
\limsup_{n\to\infty}\int h_n \;\leqslant\; \int h \;\leqslant\; \liminf_{n\to\infty}\int h_n,
$$

ce qui lui permet d'attraper d'un seul coup d'œil sa proie-réponse :

$$
\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx,
$$

puisqu'une limite inférieure est de toute façon toujours *inférieure* à une limite supérieure !

(h) Soit enfin $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables intégrables sur $\mathbb{R}$ qui converge presque partout vers une certaine fonction mesurable f qui est *intégrable*. Traitons d'abord l'implication facile :

$$
\bigg(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big|f_n(x)-f(x)\big|\,dx \;=\; 0\bigg) \;\;\Longrightarrow\;\; \bigg(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big|f_n(x)\big|\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx\bigg).
$$

Pour cela, l'inégalité élémentaire valable pour deux nombres réels quelconques $a, b \in \mathbb{R}$:

$$
0 \;\leqslant\; \big||a|-|b|\big| \;\leqslant\; \big|a-b\big|,
$$

qui apparaissait — heureusement ! — comme indication dans le sujet, va expédier la démonstration comme suit :

$$
\begin{aligned}
0 \;\leqslant\; \bigg|\Big|\int f_n\Big| - \Big|\int f\Big|\bigg| \;&\leqslant\; \bigg|\int f_n - \int f\bigg|\\
&\leqslant\; \int \big|f_n - f\big|,
\end{aligned}
$$

car en effet, si le membre de droite tend vers zéro, le membre de gauche aussi !

Pour traiter l'autre implication, principale :

$$
\bigg(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big|f_n(x)-f(x)\big|\,dx \;=\; 0\bigg) \;\;\Longleftarrow\;\; \bigg(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big|f_n(x)\big|\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx\bigg),
$$

introduisons, comme cela a été gentiment suggéré par le sujet, les deux fonctions auxiliaires :

$$
g_n \;:=\; 2\,\big(|f_n|+|f|\big) \qquad\text{et}\qquad h_n \;:=\; |f_n-f|+|f_n|-|f|,
$$

lesquelles satisfont effectivement les conditions requises :

$$g_n \longrightarrow g := 4\,|f|, \qquad h_n \longrightarrow h := 0, \qquad |h_n| \leqslant g_n$$

— on a même $h_n \geqslant 0$, quoique cela ne serve pas spécialement —, ainsi que :

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n = \int g,$$

et donc une application directe de la question **(g)** donne :

$$\lim_{n\to\infty} \int h_n = \int h = \int 0 = 0,$$

c'est-à-dire en remplaçant h_n :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int \big|f_n - f\big| + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \int |f_n| - \int |f|}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0},$$

d'où la conclusion :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int \big|f_n - f\big|. \qquad \square$$

Exercice 5. (a) Les deux fonctions $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto e^{-xt}$ sont mesurables, et on a démontré en cours qu'un produit de fonctions mesurables est encore mesurable.

De plus, la majoration :

$$\big|e^{-xt}\,f(x)\big| \leqslant |f(x)| \qquad {\scriptstyle (t\in\mathbb{R}_+,\; x\geqslant 0)},$$

donne après intégration :

$$\begin{aligned} \bigg|\int_0^\infty e^{-xt}\,f(x)\,dx\bigg| &\leqslant \int_0^\infty \big|e^{-xt}\,f(x)\big|\,dx \\ &\leqslant \int_0^\infty |f(x)|\,dx \\ &< \infty, \end{aligned}$$

ce qui démontre que $x \longmapsto e^{-xt}\,f(x)$ est Lebesgue-intégrable, puisque $x \longmapsto f(x)$ l'est.

(b) Posons :

$$g(x,t) := e^{-xt}\,f(x).$$

Pour tout t, nous venons de voir que $x \longmapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $t \longmapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (et même $\mathscr{C}^\infty$!). Enfin, l'inégalité-clé ci-dessus :

$$\big|g(x,t)\big| \leqslant |f(x)|$$

fournit une fonction-dominatrice intégrable indépendante de t.

Toutes les hypothèses du Théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètres sont ainsi satisfaites, et donc, la fonction :

$$\mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto L_f(t) := \int_0^\infty e^{-xt}\,f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

est bel et bien continue !

(c) À nouveau grâce à la domination intégrable uniforme $|g(x,t)| \leqslant |f(x)|$, pour toute suite $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ de réels $t_n \longrightarrow \infty$ divergeant vers l'infini, le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique pour donner :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} g(x,t_n)\,dx \;=\; \int_0^{\infty} \Big(\lim_{n\to\infty} e^{-xt_n}\, f(x)\Big)\,dx.$$

De l'Exercice 4 **(a)**, rappelons que $0 = m(\{|f| = \infty\})$, donc quitte à corriger f sur cet ensemble de mesure nulle, on peut (on pouvait) supposer (dès le départ !) que $f \colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ne prend que des valeurs *finies*, et alors il est clair que :

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty} e^{-xt_n}\, f(x) \qquad\qquad (\forall\, x > 0),$$

et puisque $\int_{]0,\infty[} = \int_{[0,\infty[}$, nous concluons que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-xt_n}\, f(x)\,dx \;=\; \int_0^{\infty} 0\cdot dx \;=\; 0.$$

Ceci étant valable quelle que soit la suite $t_n \longrightarrow \infty$, on a bien fait voir que :

$$\lim_{t\to\infty} L_f(t) \;=\; 0.$$

(d) La transformée de Laplace de la fonction $f(x) := e^{-\theta x}$ avec $\theta > 0$ est :

$$L_f(t) \;=\; \int_0^{\infty} e^{-xt}\, e^{-\theta x}\,dx \;=\; \left[\frac{e^{-x(t+\theta)}}{-t-\theta}\right]_0^{\infty} \;=\; \frac{1}{t+\theta}.$$

(e) Le calcul de la transformée de Laplace de la fonction $f(x) := \mathbf{1}_{\{0\leqslant x\leqslant 1\}}\cdot \mathsf{sin}(x)$ débute astucieusement en douceur comme suit :

$$\begin{aligned}
L_f(t) \;&=\; \int_0^1 e^{-xt}\,\mathsf{sin}\,x\,dx \\
&=\; \mathsf{Im}\left(\int_0^1 e^{-xt}\, e^{ix}\,dx\right) \\
&=\; \mathsf{Im}\left(\left[\frac{e^{x(i-t)}}{i-t}\right]_0^1\right) \\
&=\; \mathsf{Im}\left(\frac{e^{i-t}-1}{i-t}\right),
\end{aligned}$$

puis, pour faire disparaître les imaginaires au dénominateur, on multiplie en haut et à droite par $(-i-t)$, en notant que $(i-t)(-i-t)=1+t^2$:

$$\begin{aligned}
L_f(t) &= \mathsf{Im}\,\frac{(e^{i-t}-1)(-i-t)}{(i-t)(-i-t)} \\
&= \mathsf{Im}\,\frac{e^{-t}(-ie^i-te^i)+i+t}{1+t^2} \\
&= \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,\mathsf{Im}\,\big(-i\,e^i-t\,e^i\big)+\frac{1}{1+t^2}+0 \\
&= \frac{e^{-t}}{1+t^2}\big(-\cos 1-t\sin 1\big)+\frac{1}{1+t^2} \\
&= \frac{1-e^{-t}(\cos 1+t\sin 1)}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

(f) Le développement classique en série entière de l'exponentielle permet d'écrire :

$$e^{-e^{n(T-x)}} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^k}{k!}\,e^{knT}\,e^{-knx}.$$

Multiplions-le par $f(x)$:

$$e^{-e^{n(T-x)}}\,f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^k}{k!}\,e^{knT}\,e^{-knx}\,f(x).$$

Soit la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$:

$$g_n\colon\quad x\longmapsto e^{-e^{n(T-x)}}\,f(x) \qquad\qquad (n\geqslant 1),$$

qui sont mesurables uniformément dominées par :

$$\begin{aligned}
\big|g_n(x)\big| &= \Big|e^{-e^{n(T-x)}}\,f(x)\Big| \\
&\leqslant |f(x)| \qquad\qquad (\forall\,x\in\mathbb{R}_+,\ \forall\,n\geqslant 1),
\end{aligned}$$

donc intégrables. D'un autre côté, les termes :

$$\frac{(-1)^k}{k!}\,e^{knT}\,e^{-knx}\,f(x)$$

ont une somme absolument (car normalement) convergente, puisque :

$$\left|\frac{(-1)^k}{k!}\,e^{knT}\,e^{-knx}\;f(x)\right| \leqslant \frac{e^{knT}}{k!}\,|f(x)|,$$

et puisque :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{(e^{nT})^k}{k!} = e^{e^{nT}} < \infty.$$

Cette convergence normale justifie l'interversion entre intégration et sommation infinie dans le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-e^{n(T-x)}}\, f(x)\, dx &= \int_0^\infty \bigg(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, e^{-knx}\, f(x) \bigg)\, dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT} \int_0^\infty e^{-knx}\, f(x)\, dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, L_f(kn),
\end{aligned}$$

qui aboutit à l'identité demandée.

(g) Lorsque $n \longrightarrow \infty$, la suite de fonction $(g_n)_{n=1}^\infty$ introduite dans la question précédente converge simplement vers :

$$g_\infty(x) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \ 0 \leqslant x < T, \\ e^{-1} f(T) & \text{lorsque } \ x = T, \\ f(x) & \text{lorsque } \ T \leqslant x. \end{cases}$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée, ce qui nous donne :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-e^{n(T-x)}}\, f(x)\, dx = \int_T^\infty f(x)\, dx.$$

(h) Supposons par l'absurde qu'il existe une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ dont la transformée de Laplace vaut :

$$e^{-a\,t} = L_f(t) = \int_0^\infty e^{-xt}\, f(x)\, dx,$$

pour une certaine constante $a > 0$.

Prenons alors un nombre réel $0 < T$. Les questions **(g)** et **(f)** qui précèdent nous permettent alors de représenter la quantité finie :

$$\begin{aligned}
\int_T^\infty f(x)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-e^{n(T-x)}}\, f(x)\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \bigg(\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, L_f(kn) \bigg) \\
&= \lim_{n\to\infty} \bigg(\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, e^{-akn} \bigg) \\
&= \lim_{n\to\infty} \bigg(\sum_{k=0}^\infty \frac{\big(-\, e^{n(T-a)}\big)^k}{k!} \bigg) \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{-\, e^{n(T-a)}} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{lorsque } \ 0 < T < a, \\ e^{-1} & \text{lorsque } \ T = a, \\ 0 & \text{lorsque } \ T > a. \end{cases}
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \;=\; \frac{1}{e},$$

tandis que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\int_{a+\varepsilon}^\infty f(x)\,dx \;=\; 0,$$

ce qui contredit un théorème du cours d'après lequel $\int_a^{a+\varepsilon} g$ doit tendre vers 0 avec ε, pour toute fonction intégrable g.

(i) Soit $t_0 > 0$ et soit l'intervalle ouvert l'entourant sans toucher $\{0\}$ à gauche :

$$t_0 \;\in\; \big]\tfrac{t_0}{2},\,\tfrac{3\,t_0}{2}\big[\;\subset\;]0,\infty[.$$

La dérivée partielle de $x\,e^{-xt}\,f(x)$ par rapport à t est alors majorée par :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial t}\big[e^{-xt}\,f(x)\big]\right| \;&\leqslant\; \big|-\,x\,e^{-xt}\,f(x)\big| \\ &\leqslant\; \big|x\,e^{-x\frac{t_0}{2}}\big|\cdot|f(x)| \\ &\leqslant\; C_0\cdot|f(x)|,\end{aligned}$$

la constante $0 < C_0 < \infty$ étant une majorante quelconque de la fonction continue $x \longmapsto x\,e^{-x\frac{t_0}{2}}$, laquelle vaut 0 en $x = 0$ et tend vers 0 lorsque $x \longrightarrow \infty$.

Grâce à cette majoration uniforme par la fonction-dominatrice $C_0\,|f(x)|$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de dérivation sous le signe intégral s'applique et offre le caractère $\mathscr{C}^1$ de $t \longmapsto L_f(t)$ sur $]\frac{t_0}{2},\frac{3\,t_0}{2}[$, donc sur $]0,\infty[$, puisque le choix initial de $t_0 > 0$ était laissé à notre entière discrétion.

(j) Maintenant, lorsque $f \geqslant 0$ ne prend que des valeurs positives, la fonction $t \longmapsto L_f(t)$ est décroissante, puisque :

$$0 \;\leqslant\; t' \;\leqslant\; t'' \;<\; \infty \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{aligned}L_f(t') - L_f(t'') \;&=\; \int_0^\infty \big(\underbrace{e^{-xt'} - e^{-xt''}}_{\geqslant 0\;\forall\,x\geqslant 0}\big)\;\underbrace{f(x)}_{\geqslant 0}\,dx \\ &\geqslant\; 0.\end{aligned}$$

De l'équivalence :

$$\Big(x \;\longmapsto\; x\,f(x) \text{ est } L^1 \text{ sur } [0,\infty[\;\Big) \;\;\Longleftrightarrow\;\; \Big(t \;\longmapsto\; L_f(t) \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,\infty[\Big),$$

démontrons en premier lieu l'implication la plus délicate '$\Longleftarrow$'.

Puisque le caractère $\mathscr{C}^1$ de $t \longmapsto L_f(t)$ sur $]0,\infty[$ est toujours 'gratuitement' vrai, en vertu du résultat de la question **(i)** qui précède, c'est surtout la dérivabilité $t = 0$ qui est une hypothèse ici, et par la décroissance qui vient d'être observée, l'hypothèse en question est donc que la limite suivante existe et est positive finie :

$$\begin{aligned}0 \;\leqslant\; -\,L_f'(0) \;&=\; \lim_{\substack{t \to 0\\ >}} \frac{L_f(0) - L_f(t)}{t} \\ &=\; \lim_{\substack{t \to 0\\ >}} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt}}{t}\,f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Or pour faire voir que $x \longmapsto x\,f(x)$ est L^1 sur $[0,\infty[$, un bon Coup de Fatou là où il faut — qui s'applique car $\frac{1-e^{-xt}}{t}\,f(x) \geqslant 0$, mais de grâce ! Monsieur de Marçay ! pas de frappe sur nos doigts fragiles ! — permet de vérifier que l'on a effectivement la finitude de l'intégrale :

$$
\begin{aligned}
0 \;&\leqslant\; \int_0^\infty x\, f(x)\, dx \;\overset{?}{<}\; \infty \\
\text{[Reconnaître une dérivée]} \qquad &= \int_0^\infty \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{1 - e^{-xt}}{t}\, f(x)\, dx \\
[\lim = \liminf] \qquad &= \int_0^\infty \liminf_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{1 - e^{-xt}}{t}\, f(x)\, dx \\
\text{[Coup de Fatou !]} \qquad &\leqslant \liminf_{\substack{t \to 0 \\ >}} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt}}{t}\, f(x)\, dx \\
&= \liminf_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{L_f(0) - L_f(t)}{t} \\
[\lim = \liminf] \qquad &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{L_f(0) - L_f(t)}{t} \\
&= -\, L_f'(0) \\
&\overset{\textbf{oui}}{<} \infty,
\end{aligned}
$$

ce qui montre que $x \longmapsto x\, f(x)$ est bien L^1 sur $[0, \infty[$.

L'implication inverse '$\Rightarrow$' est en fait plus facile, et généralement vraie sans supposer que $f \geqslant 0$. Supposons donc $x \longmapsto x\, |f(x)|$ intégrable sur $[0, \infty[$. À nouveau grâce au théorème de dérivation sous le signe intégral, comme dans la question **(i)**, mais maintenant sur $[0, \infty[$ en *incluant* l'extrémité gauche $\{0\}$, on a la majoration uniforme de la dérivée partielle par rapport à t :

$$
\big| - x\, e^{-xt}\, f(x) \big| \;\leqslant\; x\, |f(x)|,
$$

par une fonction indépendante de t qui *est* intégrable sur $[0, \infty[$, et donc — youpi ! c'est enfin fini ! —, le théorème de dérivation sous le signe intégral tord le cou à cette dernière implication !

11. Examen 6

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Borel-Lebesgue $m(\bullet)$, soit un compact $K \subset \mathbb{R}$ de mesure $m(K) > 0$ strictement positive. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit :

$$U_n := \bigcup_{x \in K} \left]x - \tfrac{1}{n},\ x + \tfrac{1}{n}\right[.$$

(a) Vérifier que $U_{n+1} \subset U_n$, pour tout $n \geqslant 1$.

(b) Montrer que :

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Indication: Pour l'inclusion non triviale, prendre $z \in \mathbb{R} \backslash K$, justifier que dist $(z, K) > 0$, puis argumenter que $z \notin U_{\mathrm{N}}$ pour $\mathrm{N} \gg 1$ assez grand.

(c) Montrer qu'il existe un entier $\mathrm{N} \gg 1$ assez grand pour que :

$$0 < \tfrac{2}{3}\, m(U_{\mathrm{N}}) < m(K).$$

(d) Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ avec $|\tau| < \frac{1}{\mathrm{N}}$, on pose $K_\tau := \big\{x - \tau \colon\ x \in K\big\}$. Vérifier que :

$$K_\tau \subset U_{\mathrm{N}},$$

puis montrer que :

$$U_{\mathrm{N}} \big\backslash \big(K \cap K_\tau\big) = \big(U_{\mathrm{N}} \backslash K\big) \cup \big(U_{\mathrm{N}} \backslash K_\tau\big).$$

Indication: Élaborer une figure complète, parlante, notée.

(e) Montrer que :

$$m\big(U_{\mathrm{N}} \big\backslash (K \cap K_\tau)\big) \leqslant \tfrac{2}{3}\, m(U_{\mathrm{N}}).$$

(f) Montrer que pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ avec $|\tau| < \frac{1}{\mathrm{N}}$, on a $K \cap K_\tau \neq \emptyset$.

(g) Obtenir le *Théorème de Steinhaus*, d'après lequel, si K est un compact de $\mathbb{R}$ de mesure > 0, alors l'ensemble des différences :

$$K - K := \big\{x - x' \in \mathbb{R} \colon\ x \in K,\ x' \in K\big\},$$

contient un voisinage ouvert de l'origine 0 dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$ muni de la mesure de Borel-Lebesgue $m(\bullet)$, soit un ensemble mesurable E, et soit une fonction mesurable $f \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$. On rappelle que par définition, $f \in L^1(E)$ si et seulement si $\int_E |f| < \infty$.

(a) Montrer l'implication :

$$f \in L^1(E) \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = \lim_{n \to \infty} n \cdot m\big(\big\{x \in E \colon\ |f(x)| \geqslant n\big\}\big).$$

Indication: Utiliser la suite $f_n(x) := n \cdot \mathbf{1}_{\{|f| \geqslant n\}}(x)$.

(b) On se propose de démontrer que l'implication inverse n'est pas vraie. Soit la fonction définie sur $\big[0, e^{-1}\big]$, où $e^{-1} \approx 0,369\cdots$, par :

$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{pour } x = 0, \\ x \log\big(x^{-1}\big) & \text{pour } 0 < x \leqslant e^{-1}. \end{cases}$$

Montrer que $g(x)$ est continue sur $\big[0, e^{-1}\big]$, croissante de $g(0) = 0$ à $g(e^{-1}) = e^{-1}$.

(c) On pose $f(x) := \frac{1}{g(x)}$. Montrer que $f \notin L^1\big([0, e^{-1}]\big)$, c'est-à-dire que :

$$\int_0^{e^{-1}} f(x)\, dx = \infty.$$

Indication: Effectuer le changement de variable $u := \frac{1}{x}$, puis, trouver une primitive.

(d) Montrer, pour tout entier $n \geqslant 3$, qu'il existe un unique réel $x_n \in \big]0, e^{-1}\big[$ tel que :

$$- x_n \log x_n = \tfrac{1}{n}.$$

(e) Montrer que :

$$n \cdot m\big(\{|f| \geqslant n\}\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 3. Soient $-\infty < a < b < \infty$, soit l'intervalle fermé $[a, b]$, soit $f \colon [0, 1] \longrightarrow [a, b]$ une fonction mesurable, et soit $\varphi \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *convexe*, au sens où :

$$\forall\, c \in [a, b] \quad \exists\, p_c \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \varphi(y) \geqslant p_c\,\big(y - c\big) + \varphi(c) \quad \forall\, y \in [a, b].$$

(a) Montrer que la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\, dx$ appartient à l'intervalle $[a, b]$.

(b) Établir l'*inégalité de Jensen :*

$$\int_0^1 \varphi\big(f(x)\big)\, dx \geqslant \varphi\Big(\int_0^1 f(x)\, dx\Big).$$

Exercice 4. Soit l'intervalle $[0, 1]$, muni de la mesure de Borel-Lebesgue $m(\bullet)$. Soit un exposant $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$.

(a) Montrer (question de cours) que $L^{\mathsf{p}}\big([0, 1]\big) \subset L^1\big([0, 1]\big)$, pour tout $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$.

(b) Pour $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$ fixé, calculer $\|f_n\|_{L^{\mathsf{p}}}$, où pour $n \geqslant 1$ entier, les fonctions $f_n \colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ sont définies par :

$$f_n(x) := n \cdot \mathbf{1}_{]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[}(x) = \begin{cases} n & \text{pour } \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

(c) Soit $\big(E, \|\cdot\|_E\big)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Si une suite $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vecteurs $v_n \in E$ converge en norme vers un certain vecteur $v \in E$, montrer que l'on a aussi $\|v_n\|_E \longrightarrow \|v\|_E$ quand $n \longrightarrow \infty$. Indication: Après l'avoir justifiée, utiliser l'inégalité $\big|\|u\|_E - \|v\|_E\big| \leqslant \|u - v\|_E$, pour tous $u, v \in E$.

(d) Pour tout $1 \leqslant \mathsf{p} < 2$, trouver une fonction $f \in L^{\mathsf{p}}\big([0, 1]\big)$ telle que f_n converge vers f en norme L^{p}.

(e) Pour tout $2 < \mathsf{p} < \infty$, montrer qu'il n'existe *pas* de fonction $f \in L^{\mathsf{p}}\big([0, 1]\big)$ telle que f_n converge vers f en norme L^{p}.

(f) Pour tout exposant $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, montrer qu'il n'existe *pas* de fonction-dominatrice $g \in L^{\mathsf{p}}\big([0, 1], \mathbb{R}_+\big)$ de la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(g) Pour $\mathsf{p} = 2$, existe-t-il une fonction $f \in L^2\big([0,1]\big)$ telle que f_n converge vers f en norme L^2.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$ muni de la mesure de Borel-Lebesgue $m(\bullet)$, soit un ensemble mesurable E, et soit une fonction mesurable $f\colon E \longrightarrow \mathbb{C}$.

(a) Soit $f \in L^1(E)$. Pour $n \geqslant 1$ entier, on introduit :

$$f_n(x) := \frac{1}{n^2}\,\big|f(x)\big|^2\,\mathbf{1}_{\{|f|\leqslant n\}}(x).$$

Justifier brièvement que les f_n sont mesurables, puis, justifier que :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\,dx = \int_E \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)\,dx.$$

(b) On pose :

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,\big|f(x)\big|^2\mathbf{1}_{\{|f|\leqslant n\}}(x).$$

Montrer que :

$$F(x) = \big|f(x)\big|^2 \sum_{n\geqslant \max\{|f(x)|,1\}}\frac{1}{n^2}.$$

(c) Pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant 1$, montrer que :

$$\sum_{n\geqslant \mathrm{N}}\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}-1}.$$

Indication: Comparer cette somme avec $\int_{\mathrm{N}-1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$.

(d) On admet la valeur de la série convergente :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,645\cdots.$$

Montrer que :

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \begin{cases} \frac{\pi^2}{6}\,\big|f(x)\big|^2 & \text{lorsque } |f(x)| \leqslant 2, \\ \dfrac{|f(x)|^2}{|f(x)|-1} & \text{lorsque } |f(x)| > 2. \end{cases}$$

(e) Toujours sous l'hypothèse que $f \in L^1(E)$, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_{\{|f|\leqslant n\}}\big|f(x)\big|^2\,dx < \infty.$$

Indication: Montrer que $F(x) \leqslant 4\,|f(x)|$ pour tout $x \in E$.

(f) Le fait que la somme de la Question **(e)** converge implique-t-il que $f \in L^1(E)$?

12. Corrigé de l'examen 6

Exercice 1. (a) Comme $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, il est clair, pour tout $x \in \mathbb{R}$, que :

$$\big]x - \tfrac{1}{n+1},\ x + \tfrac{1}{n+1}\big[\ \subset\ \big]x - \tfrac{1}{n},\ x + \tfrac{1}{n}\big[,$$

et donc :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \bigcup_{x \in K} \big]x - \tfrac{1}{n+1},\ x + \tfrac{1}{n+1}\big[\\ &\subset \bigcup_{x \in K} \big]x - \tfrac{1}{n},\ x + \tfrac{1}{n}\big[\ =\ U_n. \end{aligned}$$

(b) Comme $\{x\} \subset \big]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\big[$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout point $x \in K$, la première inclusion est claire :

$$K \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Pour ce qui est de l'inclusion inverse, passons au complémentaire :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \overset{?}{\subset} K \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad \mathbb{R}\Big\backslash \bigcap_{n \geqslant 1} U_n \overset{?}{\supset} \mathbb{R}\backslash K.$$

Étant donné un point quelconque $z \in \mathbb{R}\backslash K$, cherchons donc à montrer qu'il est dans $\mathbb{R}\backslash \cap U_n$.

Rappelons que les compacts de $\mathbb{R}$ sont les sous-ensembles fermés-bornés. Alors d'après un théorème connu de topologie générale, plusieurs fois utilisé en cours de théorie de la mesure, on a stricte positivité de :

$$d := \mathsf{dist}\,(z, K) > 0.$$

Ensuite, avec un entier $\mathrm{N} \gg 1$ assez grand afin que $\frac{1}{\mathrm{N}} \leqslant d$, d'où :

$$\mathsf{dist}\,(z,\ K) \geqslant \tfrac{1}{\mathrm{N}},$$

le fait que par définition :

$$\forall\, y \in U_{\mathrm{N}}, \quad \exists\, x \in K, \qquad\qquad y \in \big]x - \tfrac{1}{\mathrm{N}}, x + \tfrac{1}{\mathrm{N}}\big[,$$

implique :

$$\mathsf{dist}\,(y,\ K) < \tfrac{1}{\mathrm{N}},$$

allié à l'inégalité triangulaire, garantissent que :

$$z \notin U_{\mathrm{N}},$$

d'où :

$$z \notin \bigcap_{n \geqslant 1} U_n,$$

et enfin :

$$z \in \mathbb{R} \Big\backslash \bigcap_{n \geqslant 1} U_n.$$

(c) Toute réunion (y compris non dénombrable) d'ouverts étant encore un ouvert par définition d'une topologie, il est clair que chaque U_n est ouvert, donc mesurable.

Soit $\mathrm{R} \gg 1$ assez grand pour que $K \subset [-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$. Alors $U_{n=1} \subset \big[-\mathrm{R}-1,\, \mathrm{R}+1\big]$, d'où $m\big(U_{n=1}\big) < \infty$. Un théorème du cours qui requiert cette hypothèse de finitude assure alors que :

$$\begin{aligned} 0 < m(K) &= m\Big(\bigcap_{n \geqslant 1} U_n\Big) \\ &= \lim_{n \to \infty} m\big(U_n\big), \end{aligned}$$

la suite $\big\{m(U_n)\big\}_{n=1}^{\infty}$ étant décroissante.

Il existe donc un entier $\mathrm{N} \gg 1$ tel que :

$$0 < m(K) \leqslant m(U_{\mathrm{N}}) < \tfrac{3}{2}\, m(K) < \infty,$$

d'où :

$$\tfrac{2}{3}\, m(U_{\mathrm{N}}) < m(K) < \infty.$$

(d) Effectivement, $K_\tau \subset U_{\mathrm{N}}$, puisque U_{N} contient tous les points à distance $< \frac{1}{\mathrm{N}}$ de K, et puisque K_τ est un translaté de K à distance $|\tau| < \frac{1}{\mathrm{N}}$.

Ensuite, soit un point $x \in U_{\mathrm{N}}$ avec $x \notin K \cap K_\tau$, c'est-à-dire $x \notin K$ ou $x \notin K_\tau$. Alors $x \in U_{\mathrm{N}} \backslash K$ ou $x \in U_{\mathrm{N}} \backslash K_\tau$.

Inversement, soit y un point dans cette réunion à droite, c'est-à-dire $y \in U_{\mathrm{N}} \backslash K$ ou $y \in U_{\mathrm{N}} \backslash K_\tau$. Dans les deux cas, $y \in U_{\mathrm{N}}$. De plus, $y \notin K$ ou $y \notin K_\tau$. Donc $y \notin K \cap K_\tau$, ce qui donne $y \in U_{\mathrm{N}} \big\backslash (K \cap K_\tau)$.

(e) La mesure de Borel-Lebesgue étant invariante par translation, on a :

$$m\big(K_\tau\big) = m(K).$$

Nous pouvons donc majorer :

$$\begin{aligned} m\Big(U_{\mathrm{N}} \big\backslash (K \cap K_\tau)\Big) &= m\Big(\big(U_{\mathrm{N}} \backslash K\big) \cup \big(U_{\mathrm{N}} \backslash K_\tau\big)\Big) \\ &\leqslant m\big(U_{\mathrm{N}} \backslash K\big) + m\big(U_{\mathrm{N}} \backslash K_\tau\big) \\ &= m(U_{\mathrm{N}}) - m(K) + m(U_{\mathrm{N}}) - m(K_\tau) \\ &= 2\, m(U_{\mathrm{N}}) - 2\, m(K) \\ \text{[Question (c) } -2\, m(K) < -\tfrac{4}{3}\, m(U_{\mathrm{N}})\text{]} \qquad &< \tfrac{2}{3}\, m(U_{\mathrm{N}}). \end{aligned}$$

(f) C'est immédiat parce que grâce à la question qui précède :

$$m\big(K \cap K_\tau\big) > \tfrac{1}{3}\, m(U_{\mathrm{N}}) > 0,$$

et parce que tout ensemble de mesure strictement positive est évidemment *non vide*.

(g) Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ avec $|\tau| < \frac{1}{\mathrm{N}}$, nous venons de voir qu'il existe un point :

$$x_\tau \in K \cap K_\tau.$$

Mais $x_\tau \in K_\tau$ signifie qu'il existe $x'_\tau \in K$ avec :

$$\begin{aligned} & x_\tau \;=\; x'_\tau - \tau \\ \Longleftrightarrow \qquad & \tau \;=\; x'_\tau - x_\tau. \end{aligned}$$

Nous avons donc démontré que l'intervalle ouvert $\big] - \frac{1}{\mathrm{N}},\ \frac{1}{\mathrm{N}} \big[$, qui est un voisinage ouvert dans $\mathbb{R}$ de l'origine 0, est inclus dans $K - K$.

Exercice 2. **(a)** Puisque f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, d'où $|f(x)| < \infty$ pour tout $x \in E$, il est clair que pour tout $x \in E$, on a :

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

De plus, les f_n sont uniformément dominées par $|f|$ qui est intégrable :

$$\big(0 \leqslant \big) \qquad f_n(x) \;\leqslant\; |f(x)| \qquad {\scriptstyle (\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in E)}.$$

Donc le théorème de la convergence dominée donne :

$$\int_E \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\, dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, dx,$$

c'est-à-dire :

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, dx.$$

(b) En effet, comme on sait que $0 = \lim \varepsilon \log \varepsilon$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, cette fonction $-\,x \log x$ est continue en 0, donc sur $\big[0, e^{-1}\big]$. De plus, comme on a sur $\big]0, e^{-1}\big]$:

$$g'(x) \;=\; \big(-\ x \log x\big)' \;=\; -\log x - \tfrac{x}{x} \;=\; -\log x - 1 \;\geqslant\; 0,$$

elle est effectivement croissante, de $g(0) = 0$ à :

$$g\big(e^{-1}\big) \;=\; e^{-1} \log\big((e^{-1})^{-1}\big) \;=\; e^{-1} \log e \;=\; e^{-1}.$$

(c) Avec $x = \frac{1}{u}$, d'où $dx = -\frac{du}{u^2}$, calculons :

$$\begin{aligned} \int_0^{e^{-1}} f(x)\, dx \;&=\; \int_0^{e^{-1}} \frac{1}{x \log \frac{1}{x}}\ dx \\ &=\; \int_\infty^{e} \frac{1}{\frac{1}{u} \log u} \,\Big(-\ \frac{du}{u^2}\Big) \\ &=\; \int_e^{\infty} \frac{du}{u \log u} \\ &=\; \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_e^{\mathrm{R}} \frac{du}{u \log u} \\ &=\; \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \Big[\log\log u\Big]_e^{\mathrm{R}} \\ &=\; \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \Big(\log\log \mathrm{R} - \underline{\log\log e}\Big) \\ &=\; \infty. \end{aligned}$$

(d) Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, et à la croissance de $g(x)$ sur $\big[0, e^{-1}\big]$, l'existence et l'unicité de x_n tel que $g(x_n) = \frac{1}{n}$ est claire, pourvu que $n \geqslant 3$ afin d'avoir :

$$\tfrac{1}{n} \leqslant 0,333\cdots < 0,369\cdots = e^{-1}.$$

(e) En effet, pour tout $n \geqslant 3$, on a grâce à la continuité croissante de $g\colon [0, e^{-1}] \xrightarrow{\sim} [0, e^{-1}]$:

$$\begin{aligned}\big\{x \in [0, e^{-1}]\colon\ |f(x)| \geqslant n\big\} &= \big\{|g(x)| \leqslant \tfrac{1}{n}\big\} \\ &= \big[0,\, x_n\big],\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} n \cdot m\big(\{|f| \geqslant n\}\big) &= n \cdot x_n \\ \text{[Question (d)]} \qquad &= -\tfrac{1}{\log x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

car $x_n \longrightarrow 0^+$.

En conclusion, cette fonction mesurable $f(x) = \frac{1}{x \log \frac{1}{x}}$ définie sur $E := \big[0, e^{-1}\big]$ avec $f(0) = \infty$ et continue sur $\big]0, e^{-1}\big]$ montre que la condition $n \cdot m\big(\{|f| \geqslant n\}\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ n'est *pas* suffisante pour garantir l'intégrabilité, car $\int |f| = \int f = \infty$, d'après la Question **(c)**.

Exercice 3. **(a)** En effet, l'hypothèse :

$$a \leqslant f(x) \leqslant b \qquad\qquad (\forall\, x \in [0,1]),$$

donne, après intégration sur $[0,1]$:

$$a = \int_0^1 a\,dx \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 b\,dx = b.$$

(b) Posons :

$$c := \int_0^1 f(x)\,dx \ \in [a,b],$$

exprimons l'hypothèse de convexité de φ :

$$\varphi(y) \geqslant p_c\,\big(y - c\big) + \varphi(c) \qquad\qquad (\forall\, y \in [a,b]),$$

remplaçons $y := f(x)$ là-dedans :

$$\varphi\big(f(x)\big) \geqslant p_c\,\big(f(x) - c\big) + \varphi(c),$$

puis, intégrons sur $[0,1]$, et enfin, terminons les calculs :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi\big(f(x)\big)\,dx &\geqslant p_c\left(\int_0^1 f(x)\,dx - c\right) + \int_0^1 \varphi(c)\,dx \\ &= p_c\left(\underline{\int_0^1 f(x)\,dx} - \underline{\int_0^1 f(x)\,dx}\right) + \varphi(c) \\ &= 0 + \varphi(c) \\ &= \varphi\Big(\int_0^1 f(x)\,dx\Big).\end{aligned}$$

Exercice 4. **(a)** Comme la mesure $m\big([0,1]\big) = 1 < \infty$ de l'ensemble ambiant est finie, on peut appliquer l'inégalité de Hölder en faisant apparaître la fonction 1, astucieusement comme suit.

Pour toute fonction $f \in L^{\mathsf{p}}\big([0,1]\big)$, c'est-à-dire satisfaisant :

$$\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} = \bigg(\int_0^1 \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} < \infty,$$

on constate que la fonction f appartient aussi à L^1, car avec l'exposant conjugué $\frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'} = 1$, il vient :

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^1} = \int_0^1 \big|f(x)\big|\,dx &\leqslant \bigg(\int_0^1 \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \cdot \bigg(\int_0^1 1^{\mathsf{p}'}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}} \\ &= \|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \cdot 1 \\ &< \infty.\end{aligned}$$

(b) On calcule :

$$\begin{aligned}\big\|f_n\big\|_{L^{\mathsf{p}}} &= \bigg(\int_0^1 \Big|n \cdot \mathbf{1}_{]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[}(x)\Big|^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \\ &= \bigg(\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} n^{\mathsf{p}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \\ &= \bigg(n^{\mathsf{p}}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big)\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \\ &= n\,\frac{1}{\big(n(n+1)\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}}.\end{aligned}$$

(c) Les deux inégalités triangulaires :

$$\begin{aligned}\|u\|_E &= \big\|u - v + v\big\|_E \leqslant \|u-v\|_E + \|v\|_E, \\ \|v\|_E &= \big\|v - u + u\big\|_E \leqslant \|v-u\|_E + \|u\|_E,\end{aligned}$$

qui se ré-écrivent comme :

$$\begin{aligned}\|u\|_E - \|v\|_E &\leqslant \|u-v\|_E, \\ -\|u\|_E + \|v\|_E &\leqslant \|v-u\|_E,\end{aligned}$$

donnent effectivement :

$$\Big|\|u\|_E - \|v\|_E\Big| \leqslant \big\|u-v\big\|_E.$$

En supposant donc que :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \big\|v_n - v\big\|_E,$$

cette inégalité permet de terminer la question :

$$\Big|\|v_n\|_E - \|v\|_E\Big| \leqslant \big\|v_n - v\big\|_E \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(d) Soit $f := 0$. Alors pour tout $1 \leqslant \mathsf{p} < 2$, on a grâce à la Question **(b)** :

$$\begin{aligned}\big\|f_n - 0\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \,=\, \|f_n\|_{L^{\mathsf{p}}} \,&=\, \frac{n}{\big(n(n+1)\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}} \\ &\underset{n\infty}{\sim}\, n^{1-\frac{2}{\mathsf{p}}} \,\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\, 0.\end{aligned}$$

(e) Tout d'abord, toujours grâce à la Question **(b)**, on a :

$$\begin{aligned}\|f_n\|_{L^{\mathsf{p}}} \,&=\, \frac{n}{\big(n(n+1)\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}} \\ &\underset{n\infty}{\sim}\, n^{1-\frac{2}{\mathsf{p}}} \,\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\, \infty.\end{aligned}$$

S'il existait $f \in L^{\mathsf{p}}\big([0,1]\big)$ satisfaisant :

$$0 \,=\, \lim_{n\to\infty} \big\|f_n - f\big\|_{L^{\mathsf{p}}},$$

alors la Question **(c)** impliquerait la convergence des nombres réels positifs :

$$\|f_n\|_{L^{\mathsf{p}}} \,\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\, \|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \,<\, \infty,$$

en contradiction flagrante avec la divergence qui vient d'être montrée.

(f) Par l'absurde, supposons qu'il existe $g \in L^{\mathsf{p}}\big([0,1],\,\mathbb{R}_+\big)$ satisfaisant :

$$\big|f_n(x)\big| \,\leqslant\, g(x) \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1,\ \text{presque partout}),$$

pour presque tout $x \in [0,1]$. Comme les intervalles-supports de $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots$:

$$\big]\tfrac{1}{2},\,\tfrac{1}{1}\big[,\qquad \big]\tfrac{1}{3},\,\tfrac{1}{2}\big[,\qquad \big]\tfrac{1}{4},\,\tfrac{1}{3}\big[,\qquad \dots,\qquad \big]\tfrac{1}{n+1},\,\tfrac{1}{n}\big[,\qquad \dots,$$

sont mutuellement disjoints, les inégalités précédentes impliqueraient que la *somme infinie :*

$$h(x) \,:=\, \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

satisferait aussi :

$$|h(x)| \,\leqslant\, g(x) \qquad\qquad (\text{presque partout}).$$

Comme $\|g\|_{L^{\mathsf{p}}} < \infty$, on en déduirait que $\|h\|_{L^{\mathsf{p}}} < \infty$ aussi. Mais en fait, comme les intervalles ci-dessus sont disjoints, on a :

$$\begin{aligned}\big(\|h\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}} \,&=\, \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} n^{\mathsf{p}}\,dx \\ &=\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\mathsf{p}}}{n(n+1)} \\ &=\, \infty,\end{aligned}$$

car le terme général est équivalent à $\frac{1}{n^{2-\mathsf{p}}}$, or on sait que $\sum \frac{1}{n^c} < \infty$ si et seulement si $c > 1$, et ici, $2 - \mathsf{p} > 1$ est impossible car on a supposé $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$.

(g) Si f existait, la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ devrait être de Cauchy en norme L^2, à savoir :

$$0 \overset{?}{=} \lim_{n>m\to\infty} \big\|f_m - f_n\big\|_{L^2},$$

mais cela est impossible, car à cause du caractère disjoint des supports, on a pour tout $m < n$:

$$\begin{aligned}\big\|f_m - f_n\big\|_{L^2} &= \bigg(\int_{\frac{1}{m+1}}^{\frac{1}{m}} (m-0)^2\,dx + \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} (0-n)^2\,dx\bigg)^{1/2} \\ &= \bigg(m^2\,\frac{1}{\big(m(m+1)\big)} + n^2\,\frac{1}{\big(n(n+1)\big)}\bigg)^{1/2},\end{aligned}$$

quantité qui tend vers $\big(1+1\big)^{1/2} = \sqrt{2}$, certainement pas vers 0, lorsque $n > m \longrightarrow \infty$.

Exercice 5. (a) Puisque toutes ces fonctions visiblement mesurables d'après les théorèmes du cours sont positives, avec la suite des sommes partielles :

$$g_{\mathrm{N}}(x) := \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} f_n(x),$$

cette égalité, qui est autorisée à signifier $\infty = \infty$, est une conséquence directe du théorème de convergence monotone, ou de Beppo-Levi, puisque $g_{\mathrm{N}} \leqslant g_{\mathrm{N}+1}$, partout dans E.

(b) En effet :

$$\begin{aligned}F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,\big|f(x)\big|^2 \mathbf{1}_{\{|f|\leqslant n\}}(x) \\ &= \big|f(x)\big|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,\mathbf{1}_{\{|f|\leqslant n\}}(x) \\ &= \big|f(x)\big|^2 \sum_{n\geqslant \max\{|f(x)|,1\}} \frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

(c) Pour $\mathrm{N} = 1$, on a trivialement $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \leqslant \infty$, ne serait-ce que parce que cette série converge, d'après le critère de Riemann.

Supposons donc $\mathrm{N} \geqslant 2$. Comme la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ décroît sur $]0, \infty[$, le principe de comparaison entre séries et intégrales donne :

$$\begin{aligned}\sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{\mathrm{N}^2} + \frac{1}{(\mathrm{N}+1)^2} + \frac{1}{(\mathrm{N}+2)^2} + \cdots \\ &\leqslant \int_{\mathrm{N}-1}^{\mathrm{N}} \frac{dx}{x^2} + \int_{\mathrm{N}}^{\mathrm{N}+1} \frac{dx}{x^2} + \int_{\mathrm{N}+1}^{\mathrm{N}+2} \frac{dx}{x^2} + \cdots \\ &= \int_{\mathrm{N}-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \\ &= \frac{1}{\mathrm{N}-1}.\end{aligned}$$

(d) En revenant à la Question **(b)**, quand $|f(x)| \leqslant 2$, on majore aisément :

$$\big(0 \leqslant\big) \qquad\qquad \begin{aligned}F(x) &\leqslant \big|f(x)\big|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \big|f(x)\big|^2\,\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

Quand $|f(x)| > 2$, grâce à la Question **(c)**, en introduisant :

$$\mathrm{N}_x := \text{ plus petit entier } \geqslant |f(x)|,$$

d'où :

$$|f(x)| - 1 \leqslant \mathrm{N}_x - 1 \qquad \text{puis} \qquad \frac{1}{\mathrm{N}_x - 1} \leqslant \frac{1}{|f(x)| - 1},$$

il vient :

$$\begin{aligned} \big(0 \leqslant \big) \qquad F(x) &= \big|f(x)\big|^2 \sum_{n=\mathrm{N}_x}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &\leqslant \big|f(x)\big|^2 \frac{1}{\mathrm{N}_x - 1} \\ &\leqslant \big|f(x)\big|^2 \frac{1}{|f(x)| - 1}. \end{aligned}$$

(e) Tout d'abord, il faut observer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{\{|f| \leqslant n\}} \big|f(x)\big|^2 \, dx = \int_E F(x) \, dx.$$

Donc il suffit de montrer que $F \in L^1(E)$. Pour cela, on revient aux inégalités de la Question **(d)**.

Quand $|f(x)| \leqslant 2$, en tenant compte de $\frac{\pi^2}{6} \leqslant 2$, on majore :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant F(x) &\leqslant \tfrac{\pi^2}{6} \, |f(x)| \, |f(x)| \\ &\leqslant 2 \cdot 2 \cdot |f(x)|. \end{aligned}$$

Quand $|f(x)| > 2$, on majore :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant F(x) &\leqslant \frac{|f(x)|}{|f(x)| - 1} \big|f(x)\big| \\ &\leqslant \frac{2}{2-1} \big|f(x)\big| \\ &= 2 \big|f(x)\big|. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a :

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 4 \, |f(x)|,$$

et comme $f \in L^1(E)$, il en va de même pour $F \in L^1(E)$. En conclusion, nous avons démontré l'implication :

$$f \in L^1(E) \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{\{|f| \leqslant n\}} \big|f(x)\big|^2 \, dx < \infty.$$

(f) Non, car avec la fonction $f(x) := \frac{1}{x} \, \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)$, qui n'est *pas* dans $L^1(E)$ avec $E := [1, \infty[$, on a néanmoins :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{\{|f| \leqslant n\}} \big|f(x)\big|^2 \, dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{\{x \geqslant 1\}} \frac{1}{x^2} \, dx \\ &= \frac{\pi^2}{6} < \infty. \end{aligned}$$

13. Examen 7

Exercice 1. Soit une fonction réelle mesurable $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ à valeurs *positives* qui est *intégrable*, *i.e.* satisfait $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx < \infty$. Pour un paramètre réel $t \geqslant 0$, on considère :

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\sqrt{1+t\,(f(x))^2}}\,dx.$$

(a) Montrer que $t \longmapsto F(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Indication: Introduire $g(x,t) := \frac{f(x)}{\sqrt{1+t\,f(x)^2}}$.

(b) Montrer que $0 = \lim\limits_{t\to\infty} F(t)$.

(c) Pour $(x,t) \in \mathbb{R}\times\,]0,\infty[$, calculer $\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)$, puis, en observant la décomposition :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(x) = \mathbf{1}_{\{0\leqslant f\leqslant 1\}}(x) + \mathbf{1}_{\{1<f\}}(x),$$

pour tout $\delta > 0$ fixé, montrer la majoration pour tout $t > \delta$:

$$\Big|\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\Big| \leqslant \tfrac{1}{2}\,f(x)\cdot\mathbf{1}_{\{0\leqslant f\leqslant 1\}}(x) + \tfrac{1}{2}\,\frac{f(x)^3}{(1+\delta\,f(x)^2)^{3/2}}\cdot\mathbf{1}_{\{1<f\}}(x).$$

(d) Déterminer une constante positive $C_\delta < \infty$ telle que pour tout $t > \delta$, on ait la majoration :

$$\Big|\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\Big| \leqslant \tfrac{1}{2}\,f(x)\cdot\mathbf{1}_{\{0\leqslant f\leqslant 1\}}(x) + \tfrac{1}{2}\,C_\delta\,f(x)\cdot\mathbf{1}_{\{1<f\}}(x).$$

(e) Établir que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\infty[$.

(f) Pour $t > 0$, montrer que :

$$\frac{F(t)-F(0)}{t} = \int_{\mathbb{R}} \frac{-\,f(x)^3}{\sqrt{1+t\,f(x)^2}\,\big(1+\sqrt{1+t\,f(x)^2}\big)}\,dx.$$

(g) Montrer que le quotient différentiel :

$$\frac{F(t)-F(0)}{t}$$

admet une limite dans $\{-\infty\}\cup\mathbb{R}_-$ lorsque $t > 0$ tend vers 0 en décroissant. Indication: Noter $h(x,t)$ la fonction sous le signe intégral obtenue à la Question **(e)**, et penser à la monotonie.

(h) Montrer que :

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ >}} \int_{\mathbb{R}} \frac{-\,f(x)^3}{\sqrt{1+t\,f(x)^2}\,\big(1+\sqrt{1+t\,f(x)^2}\big)}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)^3\,dx.$$

(i) Établir que la fonction $t \longmapsto F(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\infty[$ si et seulement si $f \in L^1(\mathbb{R})\cap L^3(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Avec $d \geqslant 1$ entier, on munit $\mathbb{R}^d$ des coordonnées $x = (x_1, \dots, x_d)$ et de la norme $|x| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$. Pour tout multi-indice entier $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, on note $\partial_x^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}}$. Soit l'*espace de Schwartz :*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) := \Big\{ \text{fonctions } f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ telles que} \\ 0 = \lim_{|x| \to \infty} |x|^\kappa \, \big| \partial_x^\alpha f(x) \big|, \ \forall \, \kappa \in \mathbb{N}, \ \forall \, \alpha \in \mathbb{N}^d \Big\}.$$

Pour $\xi \in \mathbb{R}^d$, avec le produit scalaire $x \cdot \xi := x_1 \, \xi_1 + \cdots + x_d \, \xi_d$, on définit la *transformée de Fourier* d'une fonction quelconque $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ par $\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, e^{-2i\pi \xi \cdot x} \, dx$.

On s'intéresse à l'*équation des ondes* sur $\mathbb{R}^d$ d'inconnue une fonction $u = u(x,t)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, avec deux conditions initiales $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ u(x,0) = f(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x). \end{cases}$$

(a) Montrer que toute solution u de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, telle que $x \longmapsto u(x,t)$ appartient à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ pour tout t fixé, satisfait :

$$-\,4\,\pi^2 \, |\xi|^2 \, \widehat{u}(\xi, t) = \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}(\xi, t).$$

(b) Montrer que :

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) \cos\big(2\pi \, |\xi| \, t\big) + \widehat{g}(\xi) \, \frac{\sin\big(2\pi \, |\xi| \, t\big)}{2\pi \, |\xi|}.$$

(c) L'objectif est d'établir qu'une solution de l'équation des ondes avec conditions initiales est donnée par la formule intégrale :

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^d} \bigg[\widehat{f}(\xi) \cos\big(2\pi \, |\xi| \, t\big) + \widehat{g}(\xi) \, \frac{\sin\big(2\pi \, |\xi| \, t\big)}{2\pi \, |\xi|} \bigg] \, e^{2i\pi x \cdot \xi} \, d\xi.$$

Commencer par justifier brièvement que $(x,t) \longmapsto u(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

(d) Montrer que cette formule intégrale est solution de l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

(e) Montrer que $u(x,0) = f(x)$.

(f) Montrer que $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$.

(g) La fonction $\xi \longmapsto \widehat{f}(\xi) \cos\big(2\pi \, |\xi| \, t\big)$ appartient-elle à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$? La fonction $\xi \longmapsto \widehat{g}(\xi) \, \frac{\sin(2\pi \, |\xi| \, t)}{2\pi \, |\xi|}$ appartient-elle à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$?

(h) On introduit l'*énergie* d'une solution de l'équation des ondes (avec conditions initiales) :

$$E(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \bigg(\Big| \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|^2 + \cdots + \Big| \frac{\partial u}{\partial x_d} \Big|^2 + \Big| \frac{\partial u}{\partial t} \Big|^2 \bigg) \, dx.$$

Établir que l'énergie est *conservée*, à savoir que l'on a $E(t) = E(0)$ constamment pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$, soit une fonction mesurable *positive* $A\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe une constante $0 \leqslant C_0 < \infty$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,dx \leqslant C_0, \qquad\qquad \text{pour presque tout } y \in \mathbb{R} \text{ fixé,}$$
$$\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,dy \leqslant C_0, \qquad\qquad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R} \text{ fixé.}$$

On rappelle que pour toute fonction mesurable *positive* $(x,y) \longmapsto A(x,y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$, un théorème du cours (Tonelli) a démontré que la fonction-tranche $x \longmapsto A(x,y)$ est mesurable pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, et de même pour la fonction-tranche $y \longmapsto A(x,y)$. On notera $d(x,y)$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

(a) Pour une fonction mesurable $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, on introduit :

$$Tf(x) := \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,f(y)\,dy.$$

Justifier que $y \longmapsto A(x,y)\,f(y)$ est mesurable pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, puis montrer que $Tf(x)$ est bien définie, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Indication: Montrer, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité $\big|Tf(x)\big| \leqslant C_0\,\|f\|_{L^\infty}$.

(b) Pour deux fonctions quelconques $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que l'application $(x,y) \longmapsto A(x,y)\,f(y)\,g(x)$ est mesurable sur $\mathbb{R}^2$, puis, montrer qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

(c) Toujours avec deux fonctions quelconques $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que l'application $x \longmapsto Tf(x)\,g(x)$ est mesurable et intégrable sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que la fonction $x \longmapsto Tf(x)$ est mesurable.

(e) Montrer que $f \longmapsto \big(Tf\colon x \longmapsto Tf(x)\big)$ définit un opérateur linéaire borné $L^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$, dont la norme d'opérateur satisfait $\|T\| \leqslant C_0\,\|f\|_{L^1}$.

(f) On suppose maintenant que $f \in L^1(\mathbb{R})$ est intégrable. Établir que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \longmapsto A(x,y)\,f(y)$ est intégrable en y, puis que la formule $x \longmapsto Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,f(y)\,dy$ définit une fonction mesurable-intégrable $Tf \in L^1(\mathbb{R})$ qui satisfait l'inégalité $\big\|Tf\big\|_{L^1} \leqslant C_0\,\|f\|_{L^1}$.

(g) Pour une fonction mesurable *positive* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, on définit à nouveau $Tf(x) := \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,f(y)\,dy$, en admettant que la valeur $Tf(x) \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ puisse éventuellement être infinie. Justifier que $x \longmapsto Tf(x)$ est mesurable.

(h) Soit maintenant un exposant réel $1 < \mathsf{p} < \infty$. Toujours avec $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ *positive*, montrer l'inégalité :

$$\big(0 \leqslant\big) \qquad\qquad Tf(x) \leqslant C_0^{1-\frac{1}{\mathsf{p}}} \left(\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,f(y)^{\mathsf{p}}\,dy\right)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}.$$

(i) Montrer l'inégalité :

$$\big\|Tf\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant C_0\,\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

(j) Toujours avec $1 < \mathsf{p} < \infty$, on suppose maintenant plus généralement que $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R})$ est à valeurs dans $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, sans forcément être positive.

Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \longmapsto A(x,y)\, f(y)$ est intégrable en y.

Pour ces x, on définit ensuite $Tf(x) := \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)\, dy$, et on décide de poser $Tf(x) := 0$ pour les x appartenant à l'ensemble négligeable restant.

(k) Soit $\mathsf{q} := 1 - \frac{1}{\mathsf{p}}$. Établir, pour toute fonction $g \in L^{\mathsf{q}}(\mathbb{R})$, que la fonction $x \longmapsto Tf(x)\, g(x)$, est mesurable. Indication: Penser encore à Tonelli $\rightarrow$ Fubini.

(l) Montrer que la fonction $x \longmapsto Tf(x)$ elle-même est mesurable.

(m) Montrer que $Tf \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R})$ avec $\big\| Tf \big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant C_0 \, \| f \|_{L^{\mathsf{p}}}$.

(n) On pose $A(x,y) := u(x-y)$ avec une fonction *positive* $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Montrer que A vérifie les hypothèses énoncées tout au début, et montrer que l'on obtient la bonne définition du produit de convolution $u * v \in L^{\mathsf{p}}$ lorsque $v \in L^{\mathsf{p}}$, en établissant la majoration :

$$\big\| u * v \big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \| u \|_{L^1} \, \| v \|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

14. Corrigé de l'examen 7

Exercice 1. (a) Puisqu'il s'agit d'une intégrale à paramètre, il est avisé d'introduire la fonction positive de deux variables :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \ni (x,t) \longrightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{1 + t\, f(x)^2}} =: g(x,t) \in \mathbb{R}_+.$$

Pour appliquer le théorème concerné du cours sur les intégrales à paramètres, trois observations sont nécessaires.

• Pour $t \geqslant 0$ fixé, la fonction $x \longmapsto g(x,t)$ est mesurable sur $\mathbb{R}$, par opérations usuelles de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

• Comme f est intégrable, il est clair que ses valeurs $(0 \leqslant) f(x) < \infty$ sont *finies* pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, donc pour ces presque tous $x \in \mathbb{R}$ fixés, la fonction $t \longmapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$,

• Enfin, comme pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big|g(x,t)\big| = g(x,t) \leqslant \frac{f(x)}{\sqrt{1 + t\, f(x)^2}} \leqslant f(x),$$

et comme $\int f < \infty$, il existe une fonction-dominatrice intégrable évidente.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, on en déduit que F est finie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Soit une suite $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ de réels $t_n \longrightarrow \infty$ s'évadant vers l'infini à droite. Deux observations s'imposent.

• Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ fixé tel que $0 < f(x) < \infty$, il est clair que la suite $\big\{g(x,t_n)\big\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0 lorsque $t_n \longrightarrow \infty$. C'est encore vrai si $f(x) = 0$, donc c'est vrai pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

• À nouveau, nous avons une inégalité dominatrice uniforme $\big|g(x,t_n)\big| \leqslant f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, avec $\int f < \infty$.

Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée, et grâce au critère séquentiel, nous concluons bien que $0 = \lim\limits_{t \to \infty} F(t)$.

(c) Aisément, on trouve :

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\right| &= \left|-\frac{1}{2}\,\frac{f(x)^3}{(1+t\,f(x)^2)^{3/2}}\right| \\
&\leqslant \tfrac{1}{2}\,f(x)^3\cdot\mathbf{1}_{\{0\leqslant f\leqslant 1\}}(x)+\frac{1}{2}\,\frac{f(x)^3}{(1+t\,f(x)^2)^{3/2}}\cdot\mathbf{1}_{\{1<f\}}(x) \\
[y^3\leqslant y \text{ pour } 0\leqslant y\leqslant 1] \qquad &\leqslant \tfrac{1}{2}\,f(x)\cdot\mathbf{1}_{\{0\leqslant f\leqslant 1\}}(x)+\frac{1}{2}\,\frac{f(x)^3}{(1+t\,f(x)^2)^{3/2}}\cdot\mathbf{1}_{\{1<f\}}(x) \\
&\leqslant \tfrac{1}{2}\,f(x)\cdot\mathbf{1}_{\{0\leqslant f\leqslant 1\}}(x)+\frac{1}{2}\,\frac{f(x)^3}{(1+\delta\,f(x)^2)^{3/2}}\cdot\mathbf{1}_{\{1<f\}}(x).
\end{aligned}
$$

(d) Ensuite, il s'agit de trouver une constante $0\leqslant C_\delta<\infty$ telle que, pour toute valeur $f(x)>1$ et tout $t>\delta$, on ait :

$$
\frac{1}{2}\,\frac{f(x)^3}{(1+t\,f(x)^2)^{3/2}} \;\leqslant\; \frac{1}{2}\,\frac{f(x)^3}{(1+\delta\,f(x)^2)^{3/2}} \;\overset{?}{\leqslant}\; \tfrac{1}{2}\,C_\delta\cdot f(x),
$$

ce qui équivaut à :

$$
f(x)^2 \;\overset{?}{\leqslant}\; C_\delta\,\big(1+\delta\,f(x)^2\big)^{3/2},
$$

c'est-à-dire à :

$$
\begin{aligned}
\underline{f(x)^4} \;&\overset{?}{\leqslant}\; C_\delta^2\,\big(1+\delta\,f(x)^2\big)^3 \\
&= C_\delta^2\,\Big(1+3\,\delta\,f(x)^2+\underline{3\,\delta^2\,f(x)^4}+\delta^3\,f(x)^6\Big),
\end{aligned}
$$

et l'on voit que l'on peut choisir :

$$
C_\delta := \frac{1}{\sqrt{3}\,\delta}.
$$

(e) Il s'agit à nouveau d'appliquer soigneusement un théorème du cours concernant la dérivabilité (continue) d'une intégrale à paramètre. Nous allons montrer que $F(t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]\delta,\infty[$ pour $\delta>0$ arbitraire, ce qui conviendra. Trois observations s'imposent, dont la dernière repose sur la question précédente.

• Pour tout $t>\delta$ fixé, la fonction positive $x\longmapsto g(x,t)$ est intégrable car majorée par $f(x)$, d'après ce qui précède.

• Pour presque tout $x\in\mathbb{R}$ fixé, la fonction $t\longmapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\delta,\infty[$, puisque la racine carrée au dénominateur porte sur une fonction constamment $\geqslant 1$.

• Enfin, pour des paramètres $t\in\,]\delta,\infty[$, la Question **(c)** qui précède nous permet de majorer la dérivée partielle, par rapport au paramètre, de l'intégrande :

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\right| &\leqslant \tfrac{1}{2}\,f(x)\cdot\mathbf{1}_{\{0\leqslant f\leqslant 1\}}(x)+\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{\sqrt{3}\,\delta}\,f(x)\cdot\mathbf{1}_{\{1<f\}}(x) \\
&\leqslant \Big(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{\sqrt{3}\,\delta}\Big)\,f(x)\cdot\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(x) \\
&= \mathsf{constante}_\delta\,f(x),
\end{aligned}
$$

par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ indépendante de t.

Grâce au théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre, nous obtenons que $t \longmapsto F(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]\delta, \infty[$, de dérivée égale à :

$$F'(t) \,=\, \int_{\mathbb{R}} \frac{-\,\frac{1}{2}\,f(x)^3}{\big(1+t\,f(x)^2\big)^{3/2}}\,dx.$$

Le réel sécuritaire positif $\delta > 0$ étant arbitraire, nous concluons que $t \longmapsto F(t)$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \infty[$.

(f) En effet, calculons en utilisant une astuce connue concernant les racines carrées :

$$\begin{aligned}
\frac{F(t)-F(0)}{t} &= \frac{1}{t}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\sqrt{1+t\,f(x)^2}}\,dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1-\sqrt{1+t\,f(x)^2}}{\sqrt{1+t\,f(x)^2}}\right) f(x)\,dx\\
&= \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\big(1-\sqrt{1+t\,f(x)^2}\big)\,\big(1+\sqrt{1+t\,f(x)^2}\big)}{\sqrt{1+t\,f(x)^2}\quad\big(1+\sqrt{1+t\,f(x)^2}\big)}\right) f(x)\,dx\\
&= \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} \frac{1-1-t\,f(x)^2}{\sqrt{1+t\,f(x)^2}\,\big(1+\sqrt{1+t\,f(x)^2}\big)}\,f(x)\,dx\\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{-\,f(x)^3}{\sqrt{1+t\,f(x)^2}\,\big(1+\sqrt{1+t\,f(x)^2}\big)}\,dx.
\end{aligned}$$

(g) Effectivement, comme $t \longmapsto \sqrt{1+t\,f(x)^2}$ est clairement croissante, ainsi que $t \longmapsto 1+\sqrt{1+t\,f(x)^2}$, donc leur produit aussi, après une inversion *et* un signe moins qui neutralisent leurs inversions de monotonie respectives, la fonction sous le signe intégral :

$$h(x,t) \,:=\, \frac{-\,f(x)^3}{\sqrt{1+t\,f(x)^2}\,\big(1+\sqrt{1+t\,f(x)^2}\big)},$$

est elle aussi *croissante* par rapport à $t \in \,]0, \infty[$. Par croissance de l'intégrale, il en va de même pour :

$$\frac{F(t)-F(0)}{t} \,=\, \int_{\mathbb{R}} h(x,t)\,dx.$$

Clairement, $h(x,t) \leqslant 0$, donc $\frac{F(t)-F(0)}{t} \leqslant 0$ aussi.

Par conséquent, lorsque $t \overset{>}{\longrightarrow} 0$ tend vers 0 *en décroissant*, les valeurs du quotient différentiel $\frac{F(t)-F(0)}{t}$ *décroissent* dans l'ensemble $\mathbb{R}_-$ des réels négatifs, donc il est clair que $\frac{F(t)-F(0)}{t}$ tend vers une certaine limite négative, éventuellement égale à $-\infty$.

(h) Pour toute suite $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ décroissante $0 < t_{n+1} \leqslant t_n$ avec $0 \longleftarrow t_n$, soit la suite de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$:

$$h_n(x) \,:=\, h(x,t_n) \,=\, \frac{-\,f(x)^3}{\sqrt{1+t_n\,f(x)^2}\,\big(1+\sqrt{1+t_n\,f(x)^2}\big)},$$

satisfaisant d'après ce qui précède pour (presque) tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h_{n+1}(x) \,\leqslant\, h_n(x) \,\leqslant\, 0.$$

Le théorème de convergence monotone *inversé* s'applique — il fallait y penser ! — et permet alors d'obtenir aisément :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n)-F(0)}{t_n} &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x,t_n)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} h(x,t_n)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{-f(x)^3}{\sqrt{1+0\,f(x)^2}\,\big(1+\sqrt{1+0\,f(x)^2}\big)}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)^3\,dx.
\end{aligned}$$

Comme la suite $t_n \longrightarrow 0$ était arbitraire, la question est « pliée » !

(i) Premièrement, nous savons que F est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\infty[$, continue sur $[0,\infty[$ avec $F(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$.

Deuxièmement, nous venons de prendre conscience grâce à la Question **(g)** qui précède que $F(t)$ est dérivable à droite en 0^+ si et seulement si la valeur :

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)^3\,dx \;=\; \lim_{t\to 0}\frac{F(t)-F(0)}{t}$$

existe et est *finie* — appartient à $\mathbb{R}_-$ —, c'est-à-dire si et seulement si $f\in L^3(\mathbb{R})$, sachant que $f\in L^1(\mathbb{R})$ depuis le début.

Troisièmement, il nous reste encore à vérifier que la dérivée $F'(t)$ sur $]0,\infty[$ que nous avons avons calculée à la Question **(d)** :

$$F'(t) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \frac{-\frac{1}{2}\,f(x)^3}{\big(1+t\,f(x)^2\big)^{3/2}}\,dx,$$

tend, lorsque $t \overset{>}{\longrightarrow} 0$, vers cette valeur négative *dorénavant supposée finie :*

$$F'(0) \;=\; -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)^3\,dx \;\in\; \mathbb{R}_-.$$

Or par chance, l'intégrande concerné pour $F'(t)$:

$$\ell(x,t) \;:=\; \frac{-\frac{1}{2}\,f(x)^3}{\big(1+t\,f(x)^2\big)^{3/2}},$$

est à nouveau négatif croissant par rapport à $t\in\,]0,\infty[$ pour presque tout $x\in\mathbb{R}$ fixé, donc pour toute suite $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $0<t_{n+1}<t_n$, le théorème de convergence monotone nous

permet de conclure de manière analogue que :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F'(t_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \ell(x,t_n)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \ell(x,t_n)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{-\frac{1}{2}\,f(x)^3}{\big(1+0\,f(x)^2\big)^{3/2}}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)^3\,dx \\ &= F'(0).\end{aligned}$$

Exercice 2. **(a)** À travers la transformation de Fourier, la différentiation par rapport à une variable x_k pour $k \in \{1,\dots,d\}$ devient la multiplication par $2i\pi\,\xi_k$.

Comme la fonction u est $\mathscr{C}^\infty$, comme ses fonctions-tranches $x \longmapsto u(x,t)$ appartiennent à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ où la transformation de Fourier est bien définie (de surcroît inversible), et comme la différentiation par rapport à t commute avec la transformation de Fourier dans l'espace des x, on obtient en effet :

$$\mathscr{F}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}\Big) = \mathscr{F}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big),$$

c'est-à-dire :

$$\big(2i\pi\,\xi_1\big)^2\,\widehat{u}(\xi,t)+\cdots+\big(2i\pi\,\xi_d\big)^2\,\widehat{u}(\xi,t) = \frac{\partial^2\widehat{u}}{\partial t^2}(\xi,t),$$

ou :

$$-\,4\,\pi^2\,|\xi|^2\,\widehat{u}(\xi,t) = \frac{\partial^2\widehat{u}}{\partial t^2}(\xi,t).$$

(b) Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ fixé, nous venons de trouver une équation différentielle ordinaire en t du second ordre (ultra-classique !), dont la solution générale est :

$$\widehat{u}(\xi,t) = A(\xi)\cos\big(2\pi\,|\xi|\,t\big)+B(\xi)\sin\big(2\pi\,|\xi|\,t\big).$$

Mais à cause des conditions initiales posées, qui deviennent après transformation de Fourier :

$$\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi) \qquad\text{et}\qquad \frac{\partial\widehat{u}}{\partial t}(\xi,0) = \widehat{g}(\xi),$$

il est clair qu'on a nécessairement :

$$A(\xi) := \widehat{f}(\xi) \qquad\text{et}\qquad 2\pi\,|\xi|\,B(\xi) = \widehat{g}(\xi).$$

(c) La transformation de Fourier étant un endomorphisme de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on peut retrouver $u(x,t)$ par transformation de Fourier *inverse :*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d}\Big[\widehat{f}(\xi)\cos\big(2\pi\,|\xi|\,t\big)+\widehat{g}(\xi)\,\frac{\sin\big(2\pi\,|\xi|\,t\big)}{2\pi\,|\xi|}\Big]\,e^{2i\pi x\cdot\xi}\,d\xi,$$

et cette formule a clairement un sens car l'intégrale converge visiblement — ne serait-ce que parce que $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ sont à décroissance rapide lorsque $|\xi| \longrightarrow \infty$, tandis que $\cos(\bullet)$ et $\sin(\bullet)$ restent bornées.

De plus, en x et en t, on a affaire ici à une intégrale à paramètres $x \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}$, et à nouveau, la décroissance rapide à l'infini de $\widehat{f}$ et de $\widehat{g}$ domine toutes les dérivées partielles de l'intégrale par rapport aux variables $x_1, \dots, x_d$ et t.

Donc la fonction $u(x,t)$ représentée par cette formule est bien $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

(d) Par dérivation sous le signe d'intégration, on a d'une part, pour $k \in \{1, \dots, d\}$ quelconque :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \int_{\mathbb{R}^d} \Big[\widehat{f}(\xi) \cos\big(2\pi\,|\xi|\,t\big) + \widehat{g}(\xi)\,\frac{\sin\big(2\pi\,|\xi|\,t\big)}{2\pi\,|\xi|}\Big] \big(2i\pi\,\xi_k\big)^2\, e^{2i\pi x\cdot\xi}\,d\xi,$$

d'où :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} &= \Big(-\,4\,\pi^2\,\xi_1^2 - \cdots - 4\,\pi^2\,\xi_d^2\Big)\,u(x,t) \\ &= -\,4\,\pi^2\,|\xi|^2\,u(x,t),\end{aligned}$$

et on a d'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \int_{\mathbb{R}}^d \Big[-\,\big(2\pi\,|\xi|\big)^2\,\widehat{f}(\xi)\cos\big(2\pi\,|\xi|\,t\big) - \big(2\pi\,|\xi|\big)^2\,\widehat{g}(\xi)\,\frac{\sin\big(2\pi\,|\xi|\,t\big)}{2\pi\,|\xi|}\Big]\,e^{2i\pi x\cdot\xi}\,d\xi \\ &= -\,4\,\pi^2\,|\xi|^2\,u(x,t),\end{aligned}$$

ce qui montre que cette expression intégrale satisfait bien l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

(e) Pour $t = 0$, il vient :

$$\begin{aligned}u(t,0) &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\,e^{2i\pi x\cdot\xi}\,d\xi \\ &= f(x),\end{aligned}$$

car on a $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et on sait d'après le cours que f est égale à la transformée de Fourier *inverse* de $\widehat{f}$.

(f) Ensuite, en différentiant par rapport à t en $t = 0$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big[0 + 2\pi\,|\xi|\,\widehat{g}(\xi)\,\frac{\cos\big(2\pi\,|\xi|\,0\big)}{2\pi\,|\xi|}\Big]\,e^{2i\pi x\cdot\xi}\,d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g}(\xi)\,e^{2i\pi x\cdot\xi}\,d\xi \\ &= g(x),\end{aligned}$$

de nouveau grâce au fait que $\widehat{g} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

(g) Oui dans les deux cas, grâce à la formule de Leibniz, et grâce au fait que la décroissance forte à l'infini de $\widehat{f}$ et de $\widehat{g}$ ainsi que de toutes leurs dérivées partielles *domine — neutralise !* — tous les facteurs polynomiaux en ξ qui proviennent des dérivées de $\cos\big(2\pi|\xi|\,t\big)$ et de $\frac{\sin(2\pi|\xi|\,t)}{2\pi\,|\xi|}$ — les détails « *maniaco-masochistes* » s'avérant quelque peu fastidieux à écrire . . .

Exercice 3. (a) Comme $y \longmapsto A(x,y)$ est mesurable pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, son produit avec la fonction mesurable $f(y)$ est encore mesurable.

Ensuite, pour ces presque tous $x \in \mathbb{R}$, comme on a $|f(y)| \leqslant \|f\|_{L^\infty}$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, l'intégrale qui définit $Tf(x)$ est convergente (existe), car :

$$\begin{aligned} \big|Tf(x)\big| &\leqslant \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,\big|f(x)\big|\,dx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,dy \cdot \|f\|_{L^\infty} \\ \text{[Hypothèse]}\qquad &\leqslant C_0 \cdot \|f\|_{L^\infty} \;<\; \infty. \end{aligned}$$

Donc pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur $Tf(x)$ calculée par une intégrale est bien définie et donne un nombre réel unique qui appartient à $\mathbb{R}$.

(b) Nous savons que les produits de fonctions mesurables sont encore mesurables, donc il est clair que $(x,y) \longmapsto A(x,y)\,f(y)\,g(x)$ est mesurable.

Ensuite, pour déterminer si $A(x,y)\,f(y)\,g(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, à savoir si l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Big|A(x,y)\,f(y)\,g(x)\Big|\,d(x,y) \;\overset{?}{<}\; \infty,$$

est finie, en remarquant que $A(x,y) \geqslant 0$, nous savons que le théorème de Tonelli permet de tester cela au moyen d'intégrales unidimensionnelles itérées :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} A(x,y)\,\big|f(y)\,g(x)\big|\,d(x,y) &= \int_{\mathbb{R}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,|f(y)|\,dy\bigg)\,|g(x)|\,dx \\ \text{[Hypothèse]}\qquad &\leqslant C_0\,\|f\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,dx \\ &= C_0\,\|f\|_{L^\infty}\,\|g\|_{L^1} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

(c) Comme $(x,y) \longmapsto A(x,y)\,f(y)\,g(x)$ est mesurable-intégrable *sur* $\mathbb{R}^2$, le théorème de Fubini nous assure alors que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction :

$$\begin{aligned} x \;\longmapsto\; &\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,f(y)\,g(x)\,dy \\ &= Tf(x)\,g(x), \end{aligned}$$

est mesurable, avec de plus :

$$\int_{\mathbb{R}} Tf(x)\,g(x)\,dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} A(x,y)\,f(y)\,g(x)\,d(x,y),$$

ce qui montre que $x \longmapsto Tf(x)\,g(x)$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$.

(d) Nous savons que $Tf(x)\,g(x)$ est mesurable pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$, et il s'agit maintenant d'éliminer ce facteur g. Or la fonction continue (mesurable) jamais nulle :

$$g(x) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{pour } \; 0 \leqslant |x| \leqslant 1, \\ \frac{1}{x^2} & \text{pour } \; 1 < |x|, \end{cases}$$

appartient à $L^1(\mathbb{R})$, et comme son inverse $\frac{1}{g(x)}$ est encore mesurable car continu, le produit suivant est mesurable :

$$T f(x)\, g(x)\, \tfrac{1}{g(x)} \,=\, T f(x).$$

(e) La linéarité de T est claire. Comme $x \longmapsto T f(x)$ est mesurable, on peut se poser la question, avec $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, de savoir si l'on a aussi $T f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Et c'est bien le cas, grâce à la Question **(a)** qui nous a fait voir que l'on a $\big|T f(x)\big| \leqslant C_0\, \|f\|_{L^\infty}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, majoration qui, d'ailleurs, fournit immédiatement l'inégalité demandée $\|T\| \leqslant C_0\, \|f\|_{L^1}$.

(f) Soit donc $f \in L^1(\mathbb{R})$. Grâce au théorème de Tonelli et grâce à l'hypothèse faite au début sur $A(x, y)$, nous obtenons une inégalité :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} A(x,y)\, |f(y)|\, d(x,y) \,&=\, \int_{\mathbb{R}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, |f(y)|\, dx \bigg)\, dy \\
&=\, \int_{\mathbb{R}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, dx \bigg)\, |f(y)|\, dy \\
&\leqslant\, \int_{\mathbb{R}} C_0\, |f(y)|\, dy \\
&=\, C_0\, \|f\|_{L^1} \,<\, \infty,
\end{aligned}$$

qui montre que la fonction $(x, y) \longmapsto A(x, y)\, f(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

Alors le théorème de Fubini nous assure que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction-tranche $y \longmapsto A(x, y)\, f(y)$ est mesurable et intégrable. Ainsi, pour ces presque tous $x \in \mathbb{R}$, la valeur :

$$T f(x) \,:=\, \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)\, dy,$$

est bien définie, et le théorème de Fubini assure de plus que $x \longmapsto T f(x)$ est intégrable, avec comme valeur :

$$\int_{\mathbb{R}} T f(x)\, dx \,=\, \int_{\mathbb{R}^2} A(x,y)\, f(y)\, d(x,y).$$

Enfin, il est clair, grâce à ce que nous avons constaté au début de la question, que :

$$\begin{aligned}
\big\|T f\big\|_{L^1} \,&=\, \int_{\mathbb{R}} \big|T f(x)\big|\, dx \\
&=\, \int_{\mathbb{R}} \bigg| \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)\, dy \bigg|\, dx \\
&\leqslant\, \int_{\mathbb{R}^2} A(x,y)\, |f(y)|\, d(x,y) \\
&\leqslant\, C_0\, \|f\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

(g) D'après le théorème de Tonelli (valable pour les fonctions réelles à valeurs $\geqslant 0$) appliqué à $\int_{\mathbb{R}^2} A(x, y)\, f(y)\, d(x, y)$, chacune des deux fonctions intégrale-tranche possible est mesurable — éventuellement à valeurs égales à ∞ sur un ensemble mesurable de mesure > 0.

Ainsi, la fonction intégrale-tranche :

$$x \,\longmapsto\, \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)\, dy \,=\, T f(x),$$

de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, est mesurable.

(h) L'astuce consiste à appliquer l'inégalité de Hölder en « découpant » la fonction A en deux quartiers d'orange nappés de caramel, comme suit :

$$\begin{aligned}
Tf(x) &= \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \underline{\Big[A(x,y)\Big]^{\frac{1}{\mathsf{p}}} f(y)}\ \ \underline{\Big[A(x,y)\Big]^{1-\frac{1}{\mathsf{p}}}}\, dy \\
&\leqslant \bigg(\int_{\mathbb{R}} \Big(A(x,y)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} f(y)\Big)^{\mathsf{p}} dy\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} \Big(A(x,y)^{1-\frac{1}{\mathsf{p}}}\Big)^{\frac{1}{1-\frac{1}{\mathsf{p}}}} dy\bigg)^{1-\frac{1}{\mathsf{p}}} \\
&= \bigg(\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)^{\mathsf{p}}\, dy\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, dy\bigg)^{1-\frac{1}{\mathsf{p}}},
\end{aligned}$$

pour en déduire, grâce à l'hypothèse faite sur $A(x,y)$, que :

$$Tf(x) \leqslant \bigg(\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)^{\mathsf{p}}\, dy\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} C_0^{1-\frac{1}{\mathsf{p}}}.$$

(i) En prenant les puissances p-ièmes et en appliquant l'inégalité obtenue à l'instant, nous pouvons calculer afin d'atteindre l'inégalité demandée :

$$\begin{aligned}
\Big(\big\|Tf\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} &= \int_{\mathbb{R}} \big(Tf(x)\big)^{\mathsf{p}}\, dx \\
&\leqslant \Big(C_0^{1-\frac{1}{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} \int_{\mathbb{R}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)^{\mathsf{p}}\, dy\bigg)\, dx \\
\text{[Tonelli]} \qquad &\leqslant C_0^{\mathsf{p}-1} \int_{\mathbb{R}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, dx\bigg) f(y)^{\mathsf{p}}\, dy \\
\text{[Hypothèse]} \qquad &\leqslant C_0^{\mathsf{p}-1} \int_{\mathbb{R}} C_0\, f(y)^{\mathsf{p}}\, dy \\
&= C_0^{\mathsf{p}} \Big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}}.
\end{aligned}$$

(j) Tout ce qui précède s'applique à la fonction positive $x \longmapsto |f(x)|$. L'inégalité obtenue à l'instant :

$$\big\|T|f|\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant C_0 \big\||f|\big\|_{L^{\mathsf{p}}} = C_0 \|f\|_{L^{\mathsf{p}}},$$

montre que $T|f| \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R})$.

On en déduit que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la valur $T|f|(x) < \infty$ est finie, et donc, pour ces presque tous x, la fonction $y \longmapsto A(x,y)\, f(y)$ est intégrable en y, ce qui permet de définir $Tf(x) := \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)\, dy$, en décidant d'attribuer la valeur $Tf(x) := 0$ aux autres x, « perdus dans les limbres de la poussière nulle ».

(k) Pour établir la mesurabilité de la fonction $x \longmapsto Tf(x)\, g(x)$, nous allons à nouveau raisonner « indirectement », en appliquant Tonelli-Fubini.

Considérons donc encore la fonction mesurable $(x,y) \longmapsto A(x,y)\, f(y)\, g(x)$, et cherchons à démontrer qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, de telle sorte que Fubini offrira la mesurabilité de la fonction-tranche :

$$x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)\, g(x)\, dy = Tf(x)\, g(x).$$

Grâce à Tonelli qui permet d'évaluer l'intégrale sur $\mathbb{R}^2$ d'une fonction positive comme intégrale itérée, et grâce à Hölder, tout fonctionne « comme sur des roulettes » :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} A(x,y)\,|f(y)|\,|g(x)|\,d(x,y) &= \int_{\mathbb{R}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,|f(y)|\,dy\bigg)\,|g(x)|\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} T|f|(x)\,|g(x)|\,dx \\
&\leqslant \bigg(\int_{\mathbb{R}} \Big(T|f|(x)\Big)^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}\,\bigg(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^{\mathsf{q}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{q}}} \\
&= \big\|T|f|\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\,\|g\|_{L^{\mathsf{q}}} \\
&\leqslant C_0\,\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\,\|g\|_{L^{\mathsf{q}}}.
\end{aligned}$$

(l) Comme dans la Question **(d)**, la fonction continue (mesurable) jamais nulle :

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leqslant |x| \leqslant 1, \\ \frac{1}{|x|^{\frac{2}{\mathsf{q}}}} & \text{pour } 1 < |x|, \end{cases}$$

appartient à $L^{\mathsf{q}}(\mathbb{R})$, et comme son inverse $\frac{1}{g(x)}$ est encore mesurable car continu, le produit suivant est mesurable :

$$Tf(x)\,g(x)\,\tfrac{1}{g(x)} = Tf(x).$$

(m) Sachant que :

$$\begin{aligned}
\big|Tf(x)\big| &= \bigg|\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,f(y)\,dy\bigg| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,|f(y)|\,dy \\
&= T|f|(x),
\end{aligned}$$

nous pouvons obtenir par le calcul une majoration qui démontre que Tf appartient bien à $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ lorsque $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned}
\Big(\big\|Tf\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} &= \int_{\mathbb{R}} \big|Tf(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \Big(T|f|(x)\Big)^{\mathsf{p}}\,dx \\
&= \Big(\big\|T|f|\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} \\
&\leqslant C_0^{\mathsf{p}}\,\Big(\big\||f|\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} \\
&= C_0^{\mathsf{p}}\,\big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

(n) On voit aisément que A vérifie les deux hypothèses de départ avec la constante $C_0 := \|u\|_{L^1}$.

Ensuite, puisqu'il est clair que :

$$\begin{aligned} Tv(x) &= \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, v(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x-y)\, v(y)\, dy \\ &= u * v\,(x), \end{aligned}$$

on retrouve effectivement la définition du produit de convolution $u * v \in L^1 * L^{\mathsf{p}}$.

En cours au tableau ou dans le polycopié, nous avons démontré que $L^1 * L^{\mathsf{p}} \subset L^{\mathsf{p}}$, avec un exposant quelconque $1 < \mathsf{p} < \infty$.

Ici, à l'extrême fin de cet exercice, nous constatons que tout ce qui précède fournit une autre démonstration, alternative, du même résultat, tout en établissant à nouveau la belle inégalité connue :

$$\begin{aligned} \big\| u * v \big\|_{L^{\mathsf{p}}} &= \big\| Tv \big\|_{L^{\mathsf{p}}} \\ &\leqslant C_0\, \|v\|_{L^{\mathsf{p}}} \\ &= \|u\|_{L^1}\, \|v\|_{L^{\mathsf{p}}}. \end{aligned}$$

Excellente année 2022 ! ! !

Orange-Caramelle, tout dans l'âtre des mignardises

rayonne

illumine la cuisine suspendue

sur l'autre nappage

d'inondations

C'était une peau d'opale, et translucide, sur la pulpe,

craquante comme le fruit sous l'écorce en fusion

C'étaient,

des cristaux de bijoux de confiserie

prêts à nous transmettre leurs gemmes

petites sphères, petits quartiers, petites pommes,
orangescentes

Trêve des Confiseurs, Saint-Sylvestre 2021

15. Examen 8

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^{d\geqslant 1}$ muni de la mesure de Lebesgue $m(\bullet)$, soit une suite $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'ensembles mesurables. On pose :

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{p=n}^{\infty} A_p \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{p=n}^{\infty} A_p$$

(a) Justifier que ces deux ensembles sont mesurables.

(b) Montrer que :

$$m\Big(\liminf_{n\to\infty} A_n\Big) \leqslant \liminf_{n\to\infty} m\big(A_n\big).$$

(c) Trouver un exemple montrant que cette inégalité peut être *stricte*.

(d) On suppose qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 0$ tel que $m\big(\bigcup_{p\geqslant n_0} A_p\big) < \infty$. Montrer que :

$$m\Big(\limsup_{n\to\infty} A_n\Big) \geqslant \limsup_{n\to\infty} m\big(A_n\big).$$

(e) Trouver un exemple montrant que cette inégalité peut être *stricte*.

Exercice 2. **(a)** Étudier la limite, lorsque $n \longrightarrow \infty$, de la suite numérique :

$$\int_{]0,1]} \left(\cos\frac{1}{x}\right)^n dx = \textbf{?} \qquad\qquad (n\in\mathbb{N}).$$

(b) Dans le cas $a \leqslant 1$, déterminer, si elle existe, la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty[} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-ax}\,dx = \textbf{?}$$

(c) Faire de même dans le cas $a > 1$.

Exercice 3. On note l'ensemble étendu des nombres réels positifs $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

(a) Soit une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de fonctions mesurables *positives* $f_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

(b) Pour $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable, et pour $x \in \mathbb{R}$, on introduit :

$$g(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\big(n+x\big) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Montrer que :

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt.$$

(c) Montrer que si $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est (Lebesgue-)intégrable, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 = \lim_{|n|\to\infty} f\big(n+x\big).$$

(d) A-t-on nécessairement $f(t) \longrightarrow 0$ lorsque $|t| \longrightarrow \infty$ **?**

(e) Soit B un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$, de mesure de Lebesgue $m(B) < 1$. Montrer que la réunion de ses translatés entiers :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \big(n+B\big) \;\not\supset\; \mathbb{R},$$

ne recouvre pas toute la droite réelle $\mathbb{R}$. Indication: On pourra poser $f := \mathbf{1}_B$.

Exercice 4. On considère la fonction à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ définie pour $x \in \mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt.$$

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Que vaut $f(0)$?

(b) Déterminer, si elle existe :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \textbf{?}$$

(c) Montrer que $x \longmapsto f(x)$ est dérivable sur $]0,\infty[$, hors l'origine. Indication: Avec $a > 0$ fixé arbitrairement petit proche de 0, on pourra raisonner d'abord sur $]a,\infty[$.

(d) Déterminer, si elle existe :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f'(x) = \textbf{?}$$

Indication: On pourra considérer plutôt $-f'(x_n)$, avec une suite $x_n \longrightarrow 0$, et travailler avec lim inf.

Exercice 5. En dimension $d \geqslant 1$, soit un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$ *finie*. Soit $L^1(E)$ l'ensemble des fonctions mesurables intégrables $f\colon E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

On dit qu'une partie (*i.e.* un sous-ensemble) $\mathscr{H} \subset L^1(E)$ est *uniformément intégrable* si :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \bigg(\sup_{f\in\mathscr{H}} \int_{\{|f|>n\}} \big|f(x)\big|\, dx\bigg).$$

(a) Montrer que l'on peut bien parler de limite lorsque $n \longrightarrow \infty$.

(b) La partie infinie suivante de $L^1\big([0,1]\big)$:

$$\mathscr{H}_1 := \Big\{ i\, \mathbf{1}_{\left[\frac{1}{i+1},\, \frac{1}{i}\right]} \colon\; i \in \mathbb{N}_{\geqslant 1} \Big\}$$

est-elle uniformément intégrable ?

(c) La partie infinie suivante de $L^1\big([0,1]\big)$:

$$\mathscr{H}_2 := \Big\{ i\, \mathbf{1}_{\left[0,\, \frac{1}{i}\right]} \colon\; i \in \mathbb{N}_{\geqslant 1} \Big\}$$

est-elle uniformément intégrable ?

(d) Montrer que toute partie $\mathscr{H} \subset L^1(E)$, qui est *dominée* au sens où il existe $g \in L^1(E)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ telle que :

$$\big|f(x)\big| \leqslant g(x) \qquad\qquad (\forall\, f \in \mathscr{H}),$$

est uniformément intégrable. Indication: On pourra introduire la suite :

$$g_n(x) := \begin{cases} g(x) & \text{si } g(x) \leqslant n, \\ 0 & \text{si } g(x) > n. \end{cases}$$

(e) Toute partie uniformément intégrable dans $L^1(E)$ est-elle nécessairement dominée ?

(f) Montrer que toute partie finie $\big\{f_1, \dots, f_{\mathrm{K}}\big\}$ de $L^1(E)$ est uniformément intégrable.

(g) Montrer que si une partie $\mathscr{H} \subset L^1(E)$ est uniformément intégrable, alors les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

(P1) $\sup\limits_{f \in \mathscr{H}} \|f\|_{L^1(E)} < \infty$;

(P2) $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \eta > 0$ tel que pour tout ensemble mesurable $A \subset E$:

$$m(A) \leqslant \eta \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{f \in \mathscr{H}} \int_A |f| \leqslant \varepsilon.$$

(h) Réciproquement, montrer que si une famille $\mathscr{H}$ de fonctions $f \in L^1(E)$ définies sur un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$ finie satisfait **(P1)** et **(P2)**, *alors* elle est uniformément intégrable.

(i) Montrer que si $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une suite convergente dans $L^1(E)$, *i.e.* s'il existe $f \in L^1(E)$ satisfaisant :

$$0 = \lim_{i \to \infty} \big\|f - f_i\big\|_{L^1(E)},$$

alors la partie $\big\{f_i \colon \ i \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\big\}$ est uniformément intégrable.

16. Corrigé de l'examen 8

Exercice 1. (a) D'après le cours, les intersections dénombrables et les réunions dénombrables d'ensembles mesurables sont encore mesurables, donc :

$$B_n := \bigcap_{p=n}^{\infty} A_p \qquad \text{et} \qquad C_n := \bigcup_{p=n}^{\infty} A_p,$$

sont mesurables, puis, pour la même raison :

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = \liminf_{n\to\infty} A_n \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = \limsup_{n\to\infty} A_n,$$

sont eux aussi, encore mesurables.

(b) Avec $B_n = \cap_{p\geqslant n} A_p$, nous avons une suite croissante $B_n \subset B_{n+1}$ d'ensembles mesurables dont la réunion est $\liminf_{n\to\infty} A_n$. Donc un théorème vu en cours garantit que :

$$\lim_{n\to\infty} m\big(B_n\big) = m\Big(\liminf_{n\to\infty} A_n\Big) \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

Par ailleurs, $B_n \subset A_p$ pour tout $p \geqslant n$ implique, par monotonie de la mesure :

$$m\big(B_n\big) \leqslant m\big(A_p\big) \qquad\qquad (\forall\, p \geqslant n),$$

d'où :

$$m\big(B_n\big) \leqslant \inf_{p\geqslant n} m\big(A_p\big),$$

et enfin, en prenant la limite quand $n \longrightarrow \infty$, nous obtenons bien :

$$\begin{aligned} m\Big(\liminf_{n\to\infty} A_n\Big) &\leqslant \lim_{n\to\infty} \Big(\inf_{p\geqslant n} m\big(A_p\big)\Big) \\ &= \liminf_{n\to\infty} m\big(A_n\big). \end{aligned}$$

(c) Pour $n \geqslant 1$, posons :

$$A_{2n-1} = [-2, 1] \qquad \text{et} \qquad A_{2n} := [-1, 2].$$

Clairement :

$$\begin{aligned} 3 &= m\big(A_{2n-1}\big) = m\big(A_{2n}\big) \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1) \\ [-1, 1] &= \liminf_{n\to\infty} A_n, \end{aligned}$$

d'où une inégalité stricte :

$$m\Big(\liminf_{n\to\infty} A_n\Big) = 2 < 3 = \liminf_{n\to\infty} m\big(A_n\big).$$

(d) Avec $C_n = \cup_{p\geqslant n} A_p$ satisfaisant la décroissance $C_n \supset C_{n+1}$, comme on a :

$$\bigcap_{n\geqslant 0} C_n = \bigcap_{n\geqslant n_0} C_n,$$

il est clair qu'on peut supposer d'emblée que $n_0 = 0$. Alors un théorème du cours, qui requiert expressément cette hypothèse de finitude de la mesure, garantit l'égalité :

$$m\bigg(\bigcap_{n\geqslant 0} C_n\bigg) = \lim_{n\to\infty} m\big(C_n\big).$$

Par ailleurs, $C_n \supset A_p$ pour $p \geqslant n$ implique par monotonie de la mesure que :

$$m\big(C_n\big) \geqslant m\big(A_p\big) \qquad\qquad (\forall\, p \geqslant n),$$

d'où :

$$m\big(C_n\big) \geqslant \sup_{p\geqslant n} m\big(A_p\big),$$

et enfin, en prenant la limite quand $n \longrightarrow \infty$, nous obtenons bien :

$$\begin{aligned} m\Big(\limsup_{n\to\infty} A_n\Big) &\geqslant \lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{p\geqslant n} m\big(A_p\big)\Big) \\ &= \limsup_{n\to\infty} m\big(A_n\big). \end{aligned}$$

(e) Le même exemple qu'à la solution de la Question **(c)** fonctionne, et donne :

$$[-2,2] = \limsup_{n\to\infty} A_n,$$

d'où :

$$\limsup_{n\to\infty} m\big(A_n\big) = 3 < 4 = m\Big(\limsup_{n\to\infty} A_n\Big).$$

Exercice 2. (a) Soit $A = \{(k\pi)^{-1}, k \in \mathbb{Z}\}$. On remarque que $\cos(1/x)$ vaut ± 1 si $(1/x) \in \pi\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $x \in A$, mais dès que $x \notin A$, on a

$$|\cos(1/x)| < 1 \Rightarrow (\cos 1/x)^n \to 0.$$

Or A est dénombrable donc de mesure nulle. Donc, pour presque tout x dans $]0,1]$, $(\cos(1/x))^n$ tend vers 0. De plus, cette suite est bornée par 1, qui est une fonction intégrable sur $]0,1]$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_{]0,1]} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n dx \to 0.$$

(b) Si $a \leqslant 1$, le lemme de Fatou donne

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{[0,\infty[} f_n(x)dx \geq \int_{[0,\infty[} \exp(x(1-a))dx = +\infty$$

et donc la suite $\int_{[0,\infty[} f_n(x)dx$ tend vers l'infini.

(c) Posons $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-ax}$. On remarque que ces fonctions sont positives. De plus

$$f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - ax\right) = \exp\left(n\left(\frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right)\right) - ax\right) \to \exp(x(1-a)).$$

Cette dernière fonction est intégrable sur $[0,\infty[$ si et seulement si $a > 1$. Si $a > 1$, on peut utiliser le théorème de convergence dominée, puisqu'on a la domination

$$f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - ax\right) \leq \exp\left(n\left(\frac{x}{n}\right) - ax\right) \leq \exp(x(1-a))$$

(avec $\exp(x(1-a))$ intégrable qui ne dépend pas de n). Donc , si $a > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty[} f_n(x)dx = \int_{[0,\infty[} \exp(x(1-a))dx = \frac{1}{a-1}.$$

Exercice 3. (a) C'est une application directe du théorème de convergence monotone.

(b) La fonction g est mesurable comme limite des fonctions mesurables $\sum_{-N}^{N} f(x+n)$. Comme f est positive, on a par théorème de convergence monotone — utilisé deux fois, la première fois comme dans la Question **(a)** — :

$$\int_0^1 g(t)dt = \int_{[0,1[} \big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n)\big)\,dt \overset{\text{CM}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{[0,1[} f(t+n)dt$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{[n,n+1[} f(t)dt \overset{\text{CM}}{=} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{[n,n+1[}(t)f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt.$$

(c) Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $\int_0^1 g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt < +\infty$ et g est intégrable sur $[0,1[$. On a donc g finie presque partout sur $[0,1[$, mettons sauf sur A. Comme g est périodique de période 1, elle est finie sauf sur $B = \cup_{n\in\mathbb{Z}}(n+A)$ qui est aussi de mesure nulle comme réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle. La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ est donc convergente (dans $\mathbb{R}^+$) si $x \notin B$. On en déduit que son terme général $f(x+n)$ doit tendre vers 0 lorsque $|n| \to +\infty$ si $x \notin B$.

(d) On n'a pas nécessairement pour autant f de limite nulle en ∞, comme le montre par exemple $f = \sum_{n\geq 1} n\mathbf{1}_{[n,n+n^{-3}]}$.

(e) On considère $f = \mathbf{1}_B$. Alors

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_B(n+x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{B-n}(x) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{Z} \mid x \in B-n\}\,.$$

En particulier $g \geq \mathbf{1}_A$ avec $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n+B)$. Alors d'après 1, on a

$$m(A \cap [0,1[) = \int_0^1 \mathbf{1}_A(t)dt \leq \int_0^1 g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = m(B) < 1\,.$$

L'ensemble A ne peut donc pas recouvrir $[0,1[$, encore moins $\mathbb{R}$.

Exercice 4. (a) La fonction de deux variables :

$$(x,t) \longmapsto \frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2},$$

définie pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{R}_+$, est, grâce à :

$$0 < e^{-x\,t^2} \leqslant 1,$$

dominée par une fonction manifestement Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+$:

$$\big(0 \leqslant\big) \quad \frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

Comme pour tout t fixé, la fonction $x \longmapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue, un théorème du cours garantit que l'intégrale à paramètre :

$$x \longmapsto \int_0^\infty \frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2}\,dt,$$

est bien une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

Enfin, il est clair que :

$$f(0) \,=\, \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt \,=\, \big[\arctan t\big]_0^\infty \,=\, \tfrac{\pi}{2}.$$

(b) Soit une suite quelconque $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ de réels $x_n \longrightarrow \infty$. Grâce à la domination par une fonction intégrable :

$$\big(0\,<\,\big) \quad \frac{e^{-x_n\,t^2}}{1+t^2} \,\leqslant\, \frac{1}{1+t^2},$$

le théorème de convergence dominée s'applique, et donne instantanément :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x_n) \,&=\, \lim_{n\to\infty} \int_{]0,\infty[} \frac{e^{-x_nt^2}}{1+t^2}\,dt\\ &=\, \int_{]0,\infty[} \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-x_n\,t^2}}{1+t^2}\,dt\\ &=\, 0.\end{aligned}$$

Comme la suite $x_n \longrightarrow \infty$ était quelconque, nous concluons que :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \,=\, 0.$$

(c) Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ fixé, la fonction à intégrer $x \longmapsto \frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2}$ est continûment dérivable, de dérivée :

$$\frac{\partial}{\partial x}\bigg(\frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2}\bigg) \,=\, -\,\frac{t^2\,e^{-x\,t^2}}{1+t^2}.$$

Soit $a>0$ arbitrairement proche de 0. Sur l'intervalle $]a,\infty[$ strictement inclus dans $]0,\infty[$, on peut majorer cette dérivée par une fonction-dominatrice *indépendante du paramètre x :*

$$\begin{aligned}\bigg|\frac{\partial}{\partial x}\bigg(\frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2}\bigg)\bigg| \,&=\, t^2\,\frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2}\\ &\leqslant\, t^2\,\frac{e^{a\,t^2}}{1+t^2}\\ &\leqslant\, e^{-a\,t^2},\end{aligned}$$

qui est Lebesgue-intégrable par rapport à t sur $\mathbb{R}_+$, grâce à $a>0$ et à la décroissance rapide à l'infini de $t\longmapsto e^{-a\,t^2}$.

Ainsi, les hypothèses du théorème de dérivabilité sous le signe intégral sont vérifiées, et donc, la fonction $x\longmapsto f(x)$ est dérivable sur $]a,\infty[$, de dérivée :

$$f'(x) \,=\, -\int_0^\infty t^2\,\frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2}\,dt.$$

Comme $a>0$ était arbitraire, et comme :

$$\bigcup_{a>0}\,]a,\infty[\,=\,]0,\infty[,$$

nous concluons que cela est vrai pour $x\in]0,\infty[$.

(d) Soit donc une suite quelconque $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres réels strictement positifs $x_n \longrightarrow \infty$. En changeant de signe la dérivée partielle de l'intégrande par rapport à x, posons :

$$g_n(t) \;:=\; t^2\,\frac{e^{-x_n t^2}}{1+t^2}.$$

Chaque g_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc mesurable, et positive. Donc le théorème de Fatou-qui-fait-tout s'applique :

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\Big(-\,f'(x_n)\Big) \;=\; \liminf_{n\to\infty}\int_0^\infty g_n(t)\,dt \;&\overset{\text{Fatou}}{\geqslant}\; \int_0^\infty \liminf_{n\to\infty} g_n(t)\,dt\\ &=\; \int_0^\infty \frac{t^2}{1+t^2}\,dt\\ &=\; \int_0^\infty \Big(1-\frac{1}{1+t^2}\Big)\,dt\\ &=\; \infty,\end{aligned}$$

et donc :

$$\lim_{n\to\infty}\Big(-\,f'(x_n)\Big) \;=\; \infty,$$

d'où nous concluons :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f'(x) \;=\; -\,\infty.$$

Exercice 5. (a) Regardons la suite numérique $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$c_n \;:=\; \sup_{f\in\mathscr{H}}\int_{\{|f|>n\}} |f|.$$

Pour $0 \leqslant n < n+1$, comme :

$$\big\{|f|>n+1\big\} \;\subset\; \big\{|f|>n\big\},$$

il est clair que pour toute $f\in\mathscr{H}$:

$$\begin{aligned}\int_{\{|f|>n+1\}} |f| \;&\leqslant\; \int_{\{|f|>n\}} |f|\\ &\leqslant\; \sup_{g\in\mathscr{H}}\int_{\{|g|>n\}} |g|,\end{aligned}$$

et enfin, en prenant à gauche le supremum pour $f\in\mathscr{H}$, il vient :

$$\sup_{f\in\mathscr{H}}\int_{\{|f|>n+1\}} |f| \;\leqslant\; \sup_{g\in\mathscr{H}}\int_{\{|g|>n\}} |g|,$$

ce qui signifie la *décroissance* de la suite positive $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\big(0\leqslant\big)\qquad c_{n+1} \;\leqslant\; c_n,$$

laquelle possède donc bien une certaine limite appartenant à $\mathbb{R}_+$.

(b) Notons $\mathscr{H}_1 := \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, et regardons :

$$\sup_{i\geqslant 1}\int_{\{|f_i|>n\}} \big|f_i(x)\big|\,dx.$$

Pour un entier $n \longrightarrow \infty$, nous avons :

$$\Big\{x \in [0,1] \colon\ i\,\mathbf{1}_{\left[\frac{1}{i+1},\,\frac{1}{i}\right]}(x) > n\Big\} \;=\; \begin{cases} \emptyset & \text{si } \ i \leqslant n, \\ \left[\frac{1}{i+1},\ \frac{1}{i}\right] & \text{si } \ i \geqslant n+1, \end{cases}$$

donc :

$$\int_{\{|f_i|>n\}} |f_i| \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } \ i \leqslant n, \\ \displaystyle\int_{\left[\frac{1}{i+1},\frac{1}{i}\right]} i & \text{si } \ i \geqslant n+1, \end{cases}$$

donc en calculant $i\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{i+1}$, il vient :

$$\begin{aligned} \sup_{i\geqslant 1} \int_{\{|f_i|>n\}} |f_i| \;&=\; \sup_{i\geqslant 1} \Big\{0,\ \big\{\tfrac{1}{i+1}\big\}_{i\geqslant n+1}\Big\} \\ &=\; \frac{1}{n+2} \quad \xrightarrow[]{\ n\to\infty\ } \quad 0, \end{aligned}$$

et ainsi, $\mathscr{H}_1$ *est* uniformément intégrable.

(c) Éh bien, cette fois-ci, non !

En effet, notons $\mathscr{H}_2 = \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, fixons un entier n qui tendra vers ∞, et observons que :

$$\Big\{x \in [0,1] \colon\ i\,\mathbf{1}_{\left[0,\,\frac{1}{i}\right]}(x) > n\Big\} \;=\; \begin{cases} \emptyset & \text{si } \ i \leqslant n, \\ \left[0,\ \frac{1}{i}\right] & \text{si } \ i \geqslant n+1, \end{cases}$$

d'où :

$$\int_{\{|g_i|>n\}} |g_i| \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } \ i \leqslant n, \\ \displaystyle\int_{\left[0,\frac{1}{i}\right]} i & \text{si } \ i \geqslant n+1, \end{cases}$$

et comme $i\left(\frac{1}{i} - 0\right) = 1$, il vient :

$$\begin{aligned} \sup_{i\geqslant 1} \int_{\{|g_i|>n\}} |g_i| \;&=\; \sup_{i\geqslant 1} \Big\{0,\ \big\{1\big\}_{i\geqslant n+1}\Big\} \\ &=\; 1, \end{aligned}$$

constante qui ne *tend pas* vers 0 lorsque $n \longrightarrow \infty$, et ainsi, la famille $\mathscr{H}_2$ *n'est pas* uniformément intégrable — tant pis pour elle !

(d) D'abord, quand $n \longrightarrow \infty$, introduisons :

$$g_n(x) \;:=\; \begin{cases} g(x) & \text{si } \ g(x) \;\leqslant\; n, \\ 0 & \text{si } \ g(x) \;>\; n. \end{cases}$$

Ces $g_n \geqslant 0$ sont positives, tendent vers $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$, et satisfont :

$$0 \;\leqslant\; g_n(x) \;\leqslant\; g_{n+1}(x) \;\leqslant\; g(x),$$

donc le théorème de convergence monotone donne :

$$\int_E g_n \quad \xrightarrow[]{\ n\to\infty\ } \quad \int_E g,$$

d'où :

$$(0 \;\leqslant\;) \qquad\qquad \int_E \big(g - g_n\big) \quad \xrightarrow[]{\ n\to\infty\ } \quad 0.$$

Mais comme $g(x) - g_n(x)$ vaut 0 si $g(x) \leqslant n$ et vaut $g(x)$ si $g(x) > n$, cette dernière intégrale est égale à :

$$\int_E (g - g_n) = \int_{\{g>n\}} g \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Ensuite, comme pour toute $f \in \mathscr{H}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité de domination :

$$n < \big|f(x)\big| \leqslant g(x),$$

donne :

$$\big\{|f| > n\big\} \subset \big\{g > n\big\},$$

il vient :

$$\sup_{f\in\mathscr{H}} \int_{\{|f|>n\}} |f| \leqslant \int_{\{g>n\}} g \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

ce qui prouve que $\mathscr{H}$ est uniformément intégrable.

(e) *Ah que non !* Revenons à $\mathscr{H}_1$ de la Question **(b)** qui était uniformément intégrable. S'il existait g positive intégrable qui dominait toutes les f_i (qui sont positives) :

$$0 \leqslant f_i(x) \leqslant g(x) \qquad (i \geqslant 1,\ x \in [0,1]),$$

c'est-à-dire si :

$$0 \leqslant i\,\mathbf{1}_{\left[\frac{1}{i+1},\frac{1}{i}\right]}(x) \leqslant g(x) \qquad (i \geqslant 1,\ x \in [0,1]),$$

comme on a la réunion presque disjointe :

$$\big]0,1\big] = \bigcup_{i=1}^{\infty} \big[\tfrac{1}{i+1}, \tfrac{1}{i}\big],$$

il viendrait :

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} i\left(\tfrac{1}{i} - \tfrac{1}{i+1}\right) \leqslant \int_{]0,1]} g(x)\,dx$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tfrac{1}{i+1} = \infty \leqslant \int_{]0,1]} g,$$

ce qui forcerait g à ne pas être Lebesgue-intégrable — contradiction.

(f) Comme $\int_E |f_1| < \infty$, …, $\int_E |f_{\mathrm{K}}| < \infty$, cette partie finie est dominée par la fonction positive appartenant à $L^1(E)$:

$$g := |f_1| + \cdots + |f_{\mathrm{K}}|,$$

c'est-à-dire :

$$\big(0 \leqslant\big) \qquad \big|f_k(x)\big| \leqslant g(x) \qquad (1 \leqslant k \leqslant \mathrm{K},\ x \in E),$$

donc la réponse est un corollaire direct de la Question **(d)**.

(g) Prouvons **(P1)**. Comme :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sup_{f\in\mathscr{H}} \int_{\{|f|>n\}} |f|,$$

il existe $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant \mathrm{N}_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{f\in\mathscr{H}} \int_{\{|f|>n\}} |f| \leqslant 1.$$

Prenons alors $n := \mathrm{N}_1$. Pour $f \in \mathscr{H}$ quelconque, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_E |f| &= \int_{\{|f| \leqslant \mathrm{N}_1\}} |f| + \int_{\{|f| > \mathrm{N}_1\}} |f| \\ &\leqslant m(E) \cdot \mathrm{N}_1 + 1,\end{aligned}$$

d'où **(P1)** :

$$\begin{aligned}\sup_{f \in \mathscr{H}} \int_E |f| &\leqslant m(E) \cdot \mathrm{N}_1 + 1 \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Prouvons ensuite **(P2)**. Choisissons $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. À nouveau, comme par hypothèse :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \sup_{f \in \mathscr{H}} \int_{\{|f| > n\}} |f|,$$

il existe $\mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1$ tel que :

$$n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{f \in \mathscr{H}} \int_{\{|f| > n\}} |f| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Prenons $n := \mathrm{N}(\varepsilon)$, et prenons $A \subset E$ mesurable avec :

$$m(A) \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2\,\mathrm{N}(\varepsilon)} =: \eta(\varepsilon).$$

Alors pour toute $f \in \mathscr{H}$, nous pouvons majorer :

$$\begin{aligned}\int_A |f| &= \int_{A \cap \{|f| \leqslant \mathrm{N}(\varepsilon)\}} |f| + \int_{A \cap \{|f| > \mathrm{N}(\varepsilon)\}} |f| \\ &\leqslant m(A) \cdot \mathrm{N}(\varepsilon) + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

ce qui est **(P2)**.

(h) Pour $n \in \mathbb{N}$, introduisons les sous-ensembles mesurables de E :

$$A_{f,n} := \big\{|f| > n\big\},$$

avec l'objectif d'estimer uniformément :

$$\int_{A_{f,n}} |f| = \int_{\{|f| > n\}} |f|.$$

Nous affirmons que si nous démontrons que :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \sup_{f \in \mathscr{H}} m\big(A_{f,n}\big),$$

alors $\mathscr{H}$ est uniformément intégrable.

En effet, ceci s'exprime comme :

$$\forall\, \eta > 0 \quad \exists\, \mathrm{N}(\eta) \gg 1 \quad \Big(n \geqslant \mathrm{N}(\eta) \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{f \in \mathscr{H}} m\big(A_{f,n}\big) \leqslant \eta \Big).$$

Si donc cela est vrai, fixons $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et trouvons $\eta(\varepsilon) > 0$ assez petit comme dans **(P2)**, c'est-à-dire :

$$m(A) \leqslant \eta(\varepsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\int_A |f| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall\, f \in \mathscr{H} \Big).$$

Alors avec $A := A_{f,n}$ qui satisfait $m\big(A_{f,n}\big) \leqslant \eta(\varepsilon)$, il vient pour tout $n \geqslant \mathrm{N}\big(\eta(\varepsilon)\big)$:

$$\int_{A_{f,n}} |f| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall\, f \in \mathscr{H},$$

d'où l'uniforme intégrabilité :

$$n \geqslant \mathrm{N}\big(\eta(\varepsilon)\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{f\in\mathscr{H}} \int_{\{|f|>n\}} |f| \leqslant \varepsilon.$$

Il reste à faire voir que :

$$d_n := \sup_{f\in\mathscr{H}} m\big(A_{f,n}\big) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Raisonnons par l'absurde, en supposant que $d_n \not\to 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. Clairement, l'inclusion $\big\{|f| > n+1\big\} \subset \big\{|f| > n\big\}$ donne la décroissance :

$$d_n \geqslant d_{n+1} \geqslant \cdots \geqslant 0,$$

et donc $d_n \not\to 0$ s'exprime par l'existence d'un $\delta > 0$ tel que :

$$d_n > \delta > 0 \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1),$$

c'est-à-dire d'après la définition d'un supremum comme dans d_n :

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, n \geqslant 1 \quad \exists\, f_n \in \mathscr{H} \quad m\big(A_{f_n,n}\big) > \delta > 0,$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned}\|f_n\|_{L^1(E)} &\geqslant \int_{A_{f_n,n}} |f_n| \\ &\geqslant \delta\cdot n \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \infty,\end{aligned}$$

en contradiction manifeste avec **(P1)**.

(i) Appliquons la Question **(h)** et montrons que **(P1)**, **(P2)** sont satisfaites.
Pour **(P1)**, utilisons l'existence d'un entier I tel que :

$$i \geqslant \mathrm{I} \qquad \Longrightarrow \qquad \big\|f_i - f\big\|_{L^1} \leqslant 1,$$

d'où pour tout $i \geqslant \mathrm{I}$:

$$\begin{aligned}\big\|f_i\big\|_{L^1} &\leqslant \big\|f_i - f\big\|_{L^1} + \|f\|_{L^1} \\ &\leqslant 1 + \|f\|_{L^1},\end{aligned}$$

puis, obtenons **(P1)** :

$$\begin{aligned}\sup_{i\geqslant 1} \big\|f_i\big\|_{L^1(E)} &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant \mathrm{I}-1} \big\|f_i\big\|_{L^1} + 1 + \|f\|_{L^1} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Traitons enfin **(P2)**. Par hypothèse :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \mathrm{I}(\varepsilon) \gg 1 \quad \Big(i \geqslant \mathrm{I}(\varepsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad \big\|f_i - f\big\|_{L^1} \leqslant \varepsilon \Big),$$

Or d'après un théorème du cours, **(P2)** est vraie pour une fonction donnée $f \in L^1(E)$, et de plus, par un raisonnement élémentaire, **(P2)** est vraie aussi pour un nombre fini de fonctions

$f_i \in L^1(E)$, ce qui donne, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit l'existence de $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $A \subset E$ mesurable :

$$\begin{aligned} m(A) \leqslant \eta(\varepsilon) \qquad & \Longrightarrow \qquad \int_A |f| \leqslant \varepsilon, \\ & \Longrightarrow \qquad \int_A \big|f_i\big| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{I}(\varepsilon) - 1, \end{aligned}$$

d'où en conclusion pour tous $i \geqslant \mathrm{I}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \int_A \big|f_i\big| & \leqslant \int_A \big|f - f_i\big| + \int_A |f| \\ & \leqslant \int_E \big|f - f_i\big| + \varepsilon \\ & \leqslant \varepsilon + \varepsilon. \end{aligned}$$

17. Examen 9

Exercice 1. Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble mesurable, soit un exposant réel $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, et soit une suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $f_n \in L^{\mathsf{p}}(E, \mathbb{C})$, *i.e.* $\int_E |f_n|^{\mathsf{p}} < \infty$, qui satisfont l'hypothèse de domination uniforme :

$$\big|f_n(x)\big|^{\mathsf{p}} \leqslant g(x) \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1,\ \text{p.p.}\, x \in E),$$

par une certaine fonction positive intégrable $g \in L^1(E, \mathbb{R}_+)$.

On suppose que cette suite $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ converge simplement presque partout vers une certaine fonction $f \colon E \longrightarrow \mathbb{C}$.

(a) Montrer que $\big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} \leqslant 2^{\mathsf{p}}\, g$.

(b) Pour $\mathrm{M} \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, on introduit :

$$E_{\mathrm{M}} := \big\{x \in E \colon\ |x| \leqslant \mathrm{M} \text{ et } g(x) \leqslant \mathrm{M}\big\},$$

ainsi que la suite :

$$g_{\mathrm{M}} := g \cdot \mathbf{1}_{E_{\mathrm{M}}}.$$

Montrer, pour tout $\varepsilon > 0$, qu'il existe un entier $\mathrm{M} = \mathrm{M}(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$\int_{E \backslash E_M} g \leqslant \varepsilon.$$

(c) On fixe $\mathrm{M} = \mathrm{M}(\varepsilon)$, et sur E_{M}, on considère la suite de fonctions :

$$\big\{f_n \cdot \mathbf{1}_{E_{\mathrm{M}}}\big\}_{n=1}^{\infty} \qquad\qquad (n \geqslant 1).$$

Montrer, pour tout $\delta > 0$, qu'il existe un sous-ensemble mesurable $F_{\mathrm{M},\delta} \subset E_{\mathrm{M}}$ (dépendant aussi de ε), et un entier $\mathrm{N}(\delta) \gg 1$, tels que, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}(\delta)$, on ait :

$$\int_{F_{\mathrm{M},\delta}} \big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} + \int_{E_{\mathrm{M}} \backslash F_{\mathrm{M},\delta}} \big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} \leqslant m(E_{\mathrm{M}}) \cdot \delta^{\mathsf{p}} + \delta \cdot 2^{\mathsf{p}} \cdot \mathrm{M}.$$

(d) Montrer que :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \big\|f_n - f\big\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

(e) Montrer que $f \in L^{\mathsf{p}}(E)$.

Exercice 2. On devra utiliser, à un certain moment, le résultat de l'Exercice 1. Sur $\mathbb{R}$, soit une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ à valeurs complexes telle que $f \in L^2(\mathbb{R})$ *ainsi que* $f' \in L^2(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $f \cdot f' \in L^1(\mathbb{R})$.

(b) Montrer l'existence des deux limites :

$$\lim_{-\infty \leftarrow x} f(x)^2 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)^2.$$

Indication: Intégrer sur $[-\mathrm{R}, \mathrm{S}]$.

(c) Montrer que ces deux limites valent 0. Indication: Raisonner par l'absurde.

(d) On note $\mathscr{F}(f) \in L^2(\mathbb{R})$ la transformée de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{R})$, car l'écriture $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} f(x)\,dx$ n'est pas toujours légitime — sauf lorsque $f \in L^1(\mathbb{R})$, ici si $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, *cf.* le cours polycopié.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, on pose :

$$f_n(x) \,:=\, f(x)\,\mathbf{1}_{[-n,n]}(x).$$

Justifier que $f_n \in L^2$, puis, montrer que :

$$0 \,=\, \lim_{n\to\infty} \big\| f_n - F \big\|_{L^2}.$$

(e) Justifier que $f_n \in L^1$, puis, montrer que $\widehat{f_n}$ converge *en norme* L^2 vers $\mathscr{F}(f)$.

(f) Montrer qu'il existe une sous-suite $\big\{\widehat{f}_{n_k}(\xi)\big\}_{k=1}^{\infty}$ de la suite $\{\widehat{f}_n(\xi)\}_{n=1}^{\infty}$ qui converge en presque tout $\xi \in \mathbb{R}$ ponctuellement vers $\mathscr{F}(f)(\xi)$.

(g) On pose :

$$f_n^1(x) \,:=\, f'(x)\,\mathbf{1}_{[-n,n]}(x).$$

Justifier que $f_n^1 \in L^1$, puis, montrer que $\widehat{f_n^1}$ converge en norme L^2 vers $\mathscr{F}(f')$.

(h) Établir la formule :

$$\mathscr{F}(f')(\xi) \,=\, 2i\pi\xi\,\mathscr{F}(f)(\xi).$$

Exercice 3. Sur $\mathbb{R}_+^*$, soit une fonction mesurable $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$ à valeurs complexes de carré intégrable.

(a) Montrer que l'on peut, pour tout $x > 0$, définir :

$$F(x) \,:=\, \int_0^\infty \frac{f(t)}{x+t}\,dt.$$

Indication: Penser à Cauchy-Schwarz.

(b) Montrer que F est continûment dérivable sur tout intervalle $]a, \infty[$, avec $a > 0$ quelconque. Indication: On pourra estimer $\int_a^\infty \frac{dt}{(a+t)^4}$.

(c) Montrer que $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$, avec la formule :

$$F'(x) \,=\, -\int_0^\infty \frac{f(t)}{(x+t)^2}\,dt.$$

(d) On admettra la valeur de $\int_0^\infty \frac{\log u}{\sqrt{u}\,(u-1)}\,du = \pi^2$. Pour $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$, montrer que la fonction :

$$g(t,u) \,:=\, \varphi(t)\,\overline{\psi\big(t\,u\big)}\,\frac{\log u}{1-u},$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, avec :

$$\int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*} \big|g(t,u)\big|\,dtdu \,\leqslant\, \pi^2\,\|\varphi\|_{L^2}\,\|\psi\|_{L^2}.$$

(e) Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \big|F(x)\big|^2\,dx \,\leqslant\, \int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*} \left|\frac{f(t)\,\overline{f(s)}}{(x+t)\,(x+s)}\right| dxdtds.$$

(f) Pour $s \neq t$ dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifier que :

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{dx}{(x+t)\,(x+s)} \;=\; \frac{1}{s-t}\,\mathsf{log}\,\frac{s}{t}.$$

(g) Établir l'inégalité :

$$\big\|F\big\|_{L^2} \;\leqslant\; \pi\,\|f\|_{L^2}.$$

18. Corrigé de l'examen 9

Exercice 1. **(a)** À la limite, quand $n \longrightarrow \infty$, en partant de $\big|f_n(x)\big|^{\mathsf{p}} \leqslant g(x)$ presque partout, il vient :

$$\big|f(x)\big|^{\mathsf{p}} \leqslant g(x) \qquad \text{(p.p.)}.$$

Nous pouvons donc majorer presque partout :

$$\begin{aligned}\big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} = \Big(\big|f_n - f\big|\Big)^{\mathsf{p}} &\leqslant \Big(|f_n| + |f|\Big)^{\mathsf{p}} \\ &\leqslant \Big(2\max\big\{|f_n|,\, |f|\big\}\Big)^{\mathsf{p}} \\ &= 2^{\mathsf{p}} \max\big\{|f_n|^{\mathsf{p}},\, |f|^{\mathsf{p}}\big\} \\ &\leqslant 2^{\mathsf{p}}\, g.\end{aligned}$$

(b) Comme la suite $\big\{g_{\mathrm{M}}(x)\big\}_{\mathrm{M}=1}^{\infty}$ est ponctuellement croissante, positive, et tend simplement presque partout vers $g(x)$ sur E, le théorème de convergence monotone s'applique :

$$\int_E g_{\mathrm{M}} \xrightarrow{\mathrm{M}\to\infty} \int_E g.$$

Donc la différence entre ces deux intégrales tend vers zéro :

$$\int_E \big(g - g_{\mathrm{M}}\big) \xrightarrow{\mathrm{M}\to\infty} 0,$$

c'est-à-dire :

$$\int_{E\backslash E_{\mathrm{M}}} \big(g - g_{\mathrm{M}}\big) + \int_{E_{\mathrm{M}}} \big(g - g_{\mathrm{M}}\big) \xrightarrow{\mathrm{M}\to\infty} 0,$$

ou encore :

$$\int_{E\backslash E_{\mathrm{M}}} g + 0 \xrightarrow{\mathrm{M}\to\infty} 0.$$

Donc on a bien, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un entier $\mathrm{M} = \mathrm{M}(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que $\int_{E\backslash E_{\mathrm{M}}} g \leqslant \varepsilon$.

(c) Maintenat, comme $E_{\mathrm{M}} \subset \big\{|x| \leqslant \mathrm{M}\big\}$ est de mesure finie (inférieure ou égale au volume de la boule de rayon $\mathrm{M} < \infty$), le théorème d'Egorov s'applique à la suite de fonctions mesurables définies sur E_{M} :

$$\big\{f_n \cdot \mathbf{1}_{E_{\mathrm{M}}}\big\}_{n=1}^{\infty},$$

qui converge par hypothèse ponctuellement presque partout vers $f(x)$.

Ainsi, pour tout $\delta > 0$ arbitrairement petit, il existe un sous-ensemble mesurable $F_{\mathrm{M},\delta} \subset E_{\mathrm{M}}$ de mesure presque pleine :

$$m\big(E_{\mathrm{M}} \backslash F_{\mathrm{M},\delta}\big) \leqslant \delta,$$

en restriction auquel la suite :

$$\big\{f_n\big|_{F_{\mathrm{M},\delta}}\big\}_{n=1}^{\infty},$$

converge *uniformément* vers $f\big|_{F_{\mathrm{M},\delta}}$. Donc avec ce même $\delta > 0$ arbitrairement petit, nous avons :

$$\exists\, \mathrm{N}(\delta) \gg 1 \qquad \Big(n \geqslant \mathrm{N}(\delta) \quad \Longrightarrow \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \delta \quad \text{p.p. sur } F_{\mathrm{M},\delta} \Big).$$

Nous pouvons donc majorer, pour $n \geqslant \mathrm{N}(\delta)$:

$$\begin{aligned}
\int_{E_{\mathrm{M}}} \big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} &= \int_{F_{\mathrm{M},\delta}} \big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} + \int_{E_{\mathrm{M}}\setminus F_{\mathrm{M},\delta}} \big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} \\
&\leqslant m\big(F_{\mathrm{M},\delta}\big) \cdot \delta^{\mathsf{p}} + \int_{E_{\mathrm{M}}\setminus F_{\mathrm{M},\delta}} 2^{\mathsf{p}} \cdot g \\
&\leqslant m\big(E_{\mathrm{M}}\big) \cdot \delta^{\mathsf{p}} + m\big(E_{\mathrm{M}} \big\backslash F_{\mathrm{M},\delta}\big) \cdot 2^{\mathsf{p}} \cdot \mathrm{M} \\
&\leqslant m\big(E_{\mathrm{M}}\big) \cdot \delta^{\mathsf{p}} + \delta \cdot 2^{\mathsf{p}} \cdot \mathrm{M}.
\end{aligned}$$

(d) Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et fixons $\mathrm{M} = \mathrm{M}(\varepsilon)$ comme à la Question **(b)**. Choisissons aussi $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ assez petit pour que :

$$m\big(E_{\mathrm{M}}\big) \cdot \delta^{\mathsf{p}} + \delta \cdot 2^{\mathsf{p}} \cdot \mathrm{M} \leqslant \varepsilon.$$

Alors pour tout $n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)$, nous pouvons majorer :

$$\begin{aligned}
\int_{E} \big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} &= \int_{E\setminus E_{\mathrm{M}}} \big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} + \int_{E_{\mathrm{M}}\setminus F_{\mathrm{M},\delta}} \big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} + \int_{F_{\mathrm{M},\delta}} \big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} \\
&\leqslant \int_{E\setminus E_{\mathrm{M}}} \big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} + m\big(E_{\mathrm{M}}\big) \cdot \delta^{\mathsf{p}} + \delta \cdot 2^{\mathsf{p}} \cdot \mathrm{M} \\
&\leqslant 2^{\mathsf{p}} \cdot \varepsilon + \varepsilon \\
&\xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0,
\end{aligned}$$

ce qui montre qu'on a bien un théorème de convergence dominée dans les espaces L^{p}.

(e) Fixons $n_0 \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ quelconque tel que $\big\|f_{n_0} - f\big\|_{L^{\mathsf{p}}} < \infty$, ce qui est possible car nous venons de voir que $\big\|f_n - f\big\|_{L^{\mathsf{p}}}$ devient de plus en plus petit.

Mais $L^{\mathsf{p}}(E)$ est un espace vectoriel grâce à l'inégalité de Minkowski ! Donc $f_{n_0} \in L^{\mathsf{p}}$ et $f_{n_0} - f \in L^{\mathsf{p}}$ donne la réponse :

$$L^{\mathsf{p}} \ni f_{n_0} - \big(f_{n_0} - f\big) = f\,!$$

Exercice 2. **(a)** L'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \big|f \cdot f'\big| &\leqslant \bigg(\int_{\mathbb{R}} |f|^2\bigg)^{1/2} \bigg(\int_{\mathbb{R}} |f'|^2\bigg)^{1/2} \\
&= \|f\|_{L^2}\, \|f'\|_{L^2} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

montre bien que $f \cdot f' \in L^1$.

(b) Comme ff' est continue et a pour primitive évidente $\frac{1}{2}\, f^2$, et comme l'intégrale de Lebesgue des fonctions continues coïncide avec leur intégrale de Riemann (impropre, généralisée), l'intégrabilité sur $]-\infty, \infty[$ de ff' signifie l'existence de la double limite :

$$\lim_{\substack{-\infty \leftarrow -\mathrm{R} \\ \mathrm{S} \to \infty}} \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{S}} f(x)\, f'(-x)\, dx,$$

c'est-à-dire de :

$$\lim_{\substack{-\infty\leftarrow -\mathrm{R} \\ \mathrm{S}\to\infty}} \left[\tfrac{1}{2}\,f(x)^2\right]_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{S}}.$$

Donc on a bien l'existence des deux limites :

$$\lim_{-\infty\leftarrow x} f(x)^2 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \lim_{x\to\infty} f(x)^2,$$

dans lesquelles on peut évidemment enlever le carré $(\bullet)^2$.

(c) Par l'absurde, si $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x)|^2 =: \ell > 0$ était non nulle, on aurait $|f(x)|^2 \geqslant \frac{1}{2}\,\ell$ pour tout $x \geqslant \mathrm{S} \gg 1$ assez grand, d'où :

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \,\geqslant\, \int_{\mathrm{S}}^{\infty} \tfrac{1}{2}\,\ell \,=\, \infty,$$

ce qui contredirait massivement l'hypothèse que $f \in L^2(\mathbb{R})$.

On vérifie de même que $0 = \lim\limits_{-\infty\leftarrow x} f(x)^2$.

(d) Vérifier que $f_n \in L^2$, c'est facile :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \big|f_n(x)\big|^2\,dx \,&=\, \int_{\mathbb{R}} \Big|f(x)\,\mathbf{1}_{[-n,n]}(x)\Big|^2\,dx \\
&=\, \int_{-n}^{n} |f(x)|^2\,dx \\
&\leqslant\, \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx \\
&=\, \big(\|f\|_{L^2}\big)^2 \,<\, \infty.
\end{aligned}$$

Ensuite, comme :

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) \qquad\qquad \text{(p.p.)},$$

et comme la suite $|f_n|^2 \leqslant |f|^2 =: g$ est uniformément dominée par une fonction positive intégrable, une application directe du résultat de l'Exercice 1 **(d)** avec $\mathsf{p} = 2$ nous donne bien :

$$0 \,=\, \lim_{n\to\infty} \big\|f_n - f\big\|_{L^2}.$$

(e) La fonction f_n étant à support contenu dans l'ensemble *de mesure finie* $[-n, n]$, l'astuce vue en cours qui consiste à appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit artificiel $f \cdot 1$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \big|f_n(x)\big|\,dx \,&=\, \int_{\mathbb{R}} \Big|f(x)\,\mathbf{1}_{[-n,n]}(x)\Big|\,dx \\
&=\, \int_{-n}^{n} \big|f(x)\cdot 1\big|^1\,dx \\
&\leqslant\, \bigg(\int_{-n}^{n} \big|f(x)\big|^2\,dx\bigg)^{1/2} \bigg(\int_{-n}^{n} 1^2\,dx\bigg) \\
&=\, \|f\|_{L^2}\cdot\sqrt{2\,n} \,<\, \infty,
\end{aligned}$$

nous permet de constater que $f_n \in L^1$. Ainsi, nous pouvons calculer les transformées de Fourier de toutes ces fonctions f_n au moyen de la formule intégrale classique :

$$\widehat{f_n}(\xi) \,:=\, \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\xi}\, f_n(x)\,dx.$$

Ensuite, l'égalité de Parseval :

$$\big\|\mathscr{F}\big(f_n - f\big)\big\|_{L^2} \,=\, \big\|f_n - f\big\|_{L^2}$$

nous permet de déduire que la transformée de Fourier « abstraite dans L^2 » $\mathscr{F}(f)$ de notre fonction initiale $f \in L^2$ est limite *en norme* L^2 des transformées de Fourier « concrètes dans L^1 » $\widehat{f_n}$ de ses approximations $f_n = f\,\mathbf{1}_{[-n,n]}$:

$$\begin{aligned}
0 \,&=\, \lim_{n\to\infty} \big\|f_n - f\big\|_{L^2} \\
&=\, \lim_{n\to\infty} \big\|\mathscr{F}\big(f_n - f\big)\big\|_{L^2} \\
&=\, \lim_{n\to\infty} \big\|\widehat{f_n} - \mathscr{F}(f)\big\|_{L^2},
\end{aligned}$$

ce qui est un super-joli théorème général !

(f) Mais la convergence en norme L^2 n'a souvent rien à voir avec la convergence ponctuelle (presque partout).

Heureusement, d'après un théorème du cours, la convergence, en norme L^1, ou en norme L^2, ou plus généralement en norme L^{p} avec $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, d'une suite de fonctions, vers une certaine fonction-limite, implique, après extraction d'une sous-suite, la convergence ponctuelle presque partout.

(g) Comme $f' \in L^2$ par hypothèse, on procède exactement comme pour $f \in L^2$ dans les questions qui précèdent, pour obtenir de même :

$$0 \,=\, \lim_{n\to\infty} \Big\|\widehat{f_n^1} - \mathscr{F}(f')\Big\|_{L^2}.$$

(h) Après extraction itérée d'une sous-sous-suite $\big\{n_{k_m}\big\}_{m=1}^{\infty}$ de $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, nous pouvons nous arranger pour avoir simultanément les deux convergences ponctuelles :

$$\begin{aligned}
\widehat{f_{n_{k_m}}}(\xi) &\xrightarrow{\,m\to\infty\,} (f)(\xi), \\
\widehat{f_{n_{k_m}}^1}(\xi) &\xrightarrow{\,m\to\infty\,} \mathscr{F}(f')(\xi),
\end{aligned}$$

en presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Mais avant de prendre ces limites, pour tout entier n_{k_m}, les deux transformées de Fourier en question sont reliées entre elles grâce à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\widehat{F_{n_{k_m}}^1}(\xi) \,&=\, \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x}\, f'(x)\,\mathbf{1}_{[-n_{k_m},n_{k_m}]}(x)\,dx \\
&=\, \int_{-n_{k_m}}^{n_{k_m}} e^{-2i\pi\xi x}\, f'(x)\,dx \\
&=\, \Big[e^{-2i\pi\xi x}\, f(x)\Big]_{-n_{k_m}}^{n_{k_m}} + 2i\pi\xi \int_{-n_{k_m}}^{n_{k_m}} e^{-2i\pi\xi x}\, f(x)\,dx \\
&=\, e^{-2i\pi\xi n_{k_m}} \underset{m\to\infty}{\underline{f\big(n_{k_m}\big)}}{}_{\circ} - e^{+2i\pi\xi n_{k_m}} \underset{m\to\infty}{\underline{f\big(-n_{k_m}\big)}}{}_{\circ} + 2i\pi\xi\,\widehat{f_{n_{k_m}}}(\xi).
\end{aligned}$$

Enfin, en faisant prestement tendre $m \to \infty$:

$$\lim_{m\to\infty} \widehat{f^1_{n_{k_m}}}(\xi) \,=\, 0 - 0 + \lim_{m\to\infty} \widehat{f_{n_{k_m}}}(\xi),$$

nous obtenons la belle formule naturelle :

$$\mathscr{F}(f')(\xi) \,=\, 2i\pi\xi\, \mathscr{F}(f)(\xi).$$

En conclusion, la formule naturelle pour la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1 \cap \mathscr{C}^1$ dont la dérivée $f' \in L^1$ est aussi intégrable :

$$\widehat{f}(\xi) \,=\, 2i\pi\xi\, \widehat{f}(\xi) \qquad \text{(Exercice subsididaire)},$$

est encore valable pour une fonction $f \in L^2 \cap \mathscr{C}^1$ dont la dérivée $f' \in L^2$ est de carré intégrable, après remplacement de la transformé de Fourier intégrale « concrète dans L^1 » $\widehat{(\bullet)}$ par la transformée de Fourier « abstraite dans L^2 » $\mathscr{F}(\bullet)$.

Exercice 3. **(a)** L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de majorer, pour $x > 0$ fixé :

$$\begin{aligned}
\big|F(x)\big| \,&\leqslant\, \int_0^\infty \left|\frac{f(t)}{x+t}\right| dt \\
&\leqslant\, \bigg(\int_0^\infty \big|f(t)\big|^2\, dt\bigg)^{1/2} \bigg(\int_0^\infty \frac{dt}{(x+t)^2}\bigg)^{1/2} \\
&=\, ||f||_{L^2} \left(\tfrac{1}{x}\right)^{1/2} \\
&<\, \infty,
\end{aligned}$$

ce qui fait voir l'intégrabilté, sur $\mathbb{R}_+^*$, de la fonction $t \longmapsto \frac{f(t)}{x+t}$, quel que soit le paramètre réel $x > 0$, et justifie donc que $F(x) := \int_0^\infty \frac{f(t)}{x+t} dt$ est bien définie.

(b) Certainement, la fonction $x \longmapsto \frac{f(t)}{x+t}$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, de dérivée égale à $-\frac{f(t)}{(x+t)^2}$.

Sur tout intervalle $]a, \infty[$ avec $a > 0$ fixé, l'inégalité de Cauchy-Schwarz — encore elle ! — nous permet de majorer, uniformément pour $x \in \,]a, \infty[$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{f(t)}{x+t}\right| dt \,&=\, \int_0^\infty \frac{|f(t)|}{(x+t)^2}\, dt \\
&\leqslant\, \bigg(\int_0^\infty \big|f(t)\big|^2\, dt\bigg)^{1/2} \bigg(\int_0^\infty \frac{dt}{(x+t)^4}\bigg)^{1/2} \\
&=\, ||f||_{L^2} \left(\tfrac{1}{3\,x^3}\right)^{1/2} \\
&\leqslant\, ||f||_{L^2} \left(\tfrac{1}{3\,a^3}\right)^{1/2} \\
&<\, \infty.
\end{aligned}$$

Mieux encore, uniformément pour $x \in \,]a, \infty[$, nous avons :

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{f(t)}{x+t}\right| \,=\, \frac{|f(t)|}{(x+t)^2} \,\leqslant\, \frac{|f(t)|}{(a+t)^2} \,=:\, g(t),$$

avec $g \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$, car :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{|f(t)|}{(a+t)^2} &\leqslant \bigg(\int_0^\infty \big|f(t)\big|^2\,dt\bigg)^{1/2}\bigg(\int_0^\infty \frac{dt}{(a+t)^4}\bigg)^{1/2}\\ &= \|f\|_{L^2}\,\big(\tfrac{1}{3\,a^3}\big)^{1/2}\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Le théorème de dérivation sous le signe intégral garantit alors que F est continûment dérivable sur $]a,\infty[$, avec la formule :

$$F'(x) \,=\, -\int_0^\infty \frac{f(t)}{(x+t)^2}\,dt \qquad\qquad (x>a).$$

(c) Ceci étant vrai sur tout intervalle $]a,\infty[$ avec $a>0$ quelconque, il est clair que cela est vrai sur :

$$\bigcup_{a>0}\,]a,\infty[\,=\,\mathbb{R}_+^*.$$

(d) En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz — qu'est-ce qu'elle est 'collante', celle-là ! —, nous obtenons la majoration demandée :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*}\big|g(t,u)\big|\,dtdu &= \int_{\mathbb{R}_+^*}\bigg\{\int_{\mathbb{R}_+^*}|\varphi(t)|\,\big|\psi(t\,u)\big|\,dt\bigg\}\frac{\log u}{u-1}\,du\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}_+^*}\bigg\{\bigg(\int_{\mathbb{R}_+^*}|\varphi(t)|^2\,dt\bigg)^{1/2}\bigg(\int_{\mathbb{R}_+^*}\big|\psi(t\,u)\big|^2\,dt\bigg)^{1/2}\bigg\}\frac{\log u}{u-1}\,du\\ [v\,:=\,t\,u]\qquad &= \int_{\mathbb{R}_+^*}\bigg\{\|\varphi\|_{L^2}\bigg(\int_{\mathbb{R}_+^*}\big|\psi(v)\big|^2\,\frac{dv}{u}\bigg)^{1/2}\bigg\}\frac{\log u}{u-1}\,du\\ &= \|\varphi\|_{L^2}\,\|\psi\|_{L^2}\int_{\mathbb{R}_+^*}\frac{\log u}{\sqrt{u}\,(u-1)}\,du\\ [\text{Admis}]\qquad &= \|\varphi\|_{L^2}\,\|\psi\|_{L^2}\,\pi^2.\end{aligned}$$

(e) Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^*}\big|F(x)\big|^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}_+^*}F(x)\,\overline{F(x)}\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*}\bigg(\int_{\mathbb{R}_+^*}\frac{f(t)}{x+t}\,dt\bigg)\bigg(\int_{\mathbb{R}_+^*}\frac{\overline{f(s)}}{x+s}\,ds\bigg)\,dx\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}_+^*}\bigg(\int_{\mathbb{R}_+^*}\bigg|\frac{f(t)}{x+t}\bigg|\,dt\bigg)\bigg(\int_{\mathbb{R}_+^*}\bigg|\frac{\overline{f(s)}}{x+s}\bigg|\,ds\bigg)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*}\bigg|\frac{f(t)\,\overline{f(s)}}{(x+t)\,(x+s)}\bigg|\,dxdtds,\end{aligned}$$

cette dernière égalité délectable étant offerte par les célèbres confiseries Tonelli.

(f) Pour $s\neq t$ dans $\mathbb{R}_+^*$, la décomposition :

$$\frac{1}{(x+t)\,(x+s)} \,=\, \frac{1}{s-t}\bigg[\frac{1}{x+t}-\frac{1}{x+s}\bigg],$$

nous permet d'intégrer :

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{dx}{(x+t)\,(x+s)} &= \frac{1}{s-t} \int_0^\infty \left[\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x+s}\right] dx \\
&= \frac{1}{s-t} \left[\log \frac{x+t}{x+s}\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{s-t} \log \frac{s}{t}.
\end{aligned}
$$

(g) Synthétisons toutes les belles gerbes de blé que nous venons récolter, en repartant de la Question **(c)** :

$$
\begin{aligned}
\Big(\|F\|_{L^2}\Big)^2 &= \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \left| \frac{f(t)\,\overline{f(s)}}{(x+t)\,(x+s)} \right| dx dt ds \\
\text{[Fubini-Tonelli]} \qquad &= \int_{\mathbb{R}_+^*} |f(t)| \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} \big|\overline{f(s)}\big| \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{dx}{(x+t)\,(x+s)} \right) ds \right) dt \\
\text{[Question (f)]} \qquad &= \int_{\mathbb{R}_+^*} |f(t)| \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} \big|\overline{f(s)}\big| \, \frac{1}{s-t} \log \frac{s}{t} \, ds \right) dt \\
[u := \tfrac{s}{t}] \qquad &= \int_{\mathbb{R}_+^*} |f(t)| \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} \big|\overline{f(t\,u)}\big| \, \frac{1}{u-1} \log u \; du \right) dt \\
\text{[Question (d) avec } \varphi = f = \psi] \qquad &= \pi^2 \, \|f\|_{L^2} \, \|f\|_{L^2},
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire :

$$
\|F\|_{L^2} \leqslant \pi \, \|f\|_{L^2}.
$$

19. Examen 10

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^{d\geqslant 1}$, soit une suite $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ de sous-ensembles mesurables $E_i \subset \mathbb{R}^d$. On note :

$$S := \Big\{ x \in \mathbb{R}^d : \ x \text{ appartient à une infinité de } E_i \Big\}.$$

(a) Montrer que S est mesurable.

(b) On considère deux suites numériques positives $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ et $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ satisfaisant :

$$0 \leqslant e_i \leqslant f_i \qquad\qquad (\forall\, i \geqslant 1),$$

et on suppose la décroissance $f_i \geqslant f_{i+1}$ de la deuxième suite. Montrer que :

$$\liminf_{i\to\infty} e_i \leqslant \lim_{i\to\infty} f_i.$$

(c) On suppose de plus que :

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) < \infty.$$

Justifier, en posant :

$$F_i := \bigcup_{j\geqslant i} E_j \qquad\qquad (i \geqslant 1),$$

que l'on a :

$$m(S) = \lim_{i\to\infty} m(F_i).$$

(d) On pose :

$$\sigma := \liminf_{i\to\infty} m(E_i).$$

Montrer que :

$$\sigma \leqslant m(S).$$

Indication: On pourra partir de $E_i \subset \cup_{j\geqslant i} E_j = F_i$.

(e) Sans l'hypothèse $m\big(\cup_{j=1}^{\infty} E_j\big) < \infty$, trouver un contre-exemple simple à l'inégalité de la Question **(d)**.

(f) On suppose de plus que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) < \infty.$$

Montrer que :

$$m(S) = 0.$$

Exercice 2. Sur un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$, soit une suite croissante $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$ de fonctions mesurables positives $f_n \colon E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. On fait l'hypothèse qu'il existe une constante $0 \leqslant \mathrm{M} < \infty$ telle que $\int_E f_n \leqslant \mathrm{M}$, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$.

Pour $k \geqslant 1$ entier, on pose :

$$T_{k,n} := \big\{ x \in E \colon \; f_n(x) \geqslant k \big\}.$$

(a) Après avoir justifié que $T_{k,n}$ est mesurable, montrer que :

$$m\big(T_{k,n}\big) \leqslant \frac{\mathrm{M}}{k}.$$

(b) On pose :

$$T_\infty := \Big\{ x \in E \colon \; \text{la suite } \big\{ f_n(x) \big\}_{n=1}^\infty \text{ est non bornée} \Big\}.$$

Montrer que T_∞ est mesurable. Indication: Écrire T_∞ à l'aide des $T_{k,n}$.

(c) Établir que :

$$m\big(T_\infty\big) = 0.$$

Indication: Raisonner d'abord en fixant k.

(d) Montrer que $f(x) := \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ prend des valeurs finies presque partout.

(e) Montrer que :

$$\int_E f \leqslant \mathrm{M} \; \big(< \infty \big).$$

Quelle information supplémentaire ce résultat ajoute-t-il à quel théorème du cours ?

Exercice 3. Pour une suite $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions mesurables $f_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ à valeurs positives, on considère :

$$A := \liminf_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx, \qquad A' := \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \to \infty} f_n(x)\, dx,$$

$$B := \limsup_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx, \qquad B' := \int_{\mathbb{R}} \limsup_{n \to \infty} f_n(x)\, dx.$$

Soit la suite $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions continues positives :

$$g_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ n^2\, x & \text{si } 0 < x \leqslant \frac{1}{n}, \\ n^2 \left(\frac{2}{n} - x \right) & \text{si } \frac{1}{n} < x \leqslant \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} < x. \end{cases}$$

(a) Vérifier que pour tout $x > 0$, on a $0 = \lim\limits_{n \to \infty} g_n(x)$.

(b) Calculer A' et B' pour $\{g_n\}_{n=1}^\infty$.

(c) Calculer A et B pour $\{g_n\}_{n=1}^\infty$.

(d) Soit une autre suite $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions mesurables positives définies, pour $m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ par :

$$h_{2m-1} := \mathbf{1}_{[\frac{1}{4}, 1]} \qquad \text{et} \qquad h_{2m} := \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{4}]}.$$

Calculer A et B.

(e) Pour la suite $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, calculer A' et B'. Indication: On pourra regarder d'abord $]-\infty, 0[\, \cup \{\frac{1}{4}\} \cup\,]1, \infty[$, puis regarder $[0, \frac{1}{4}[\, \cup\,]\frac{1}{4}, 1]$.

(f) On revient au cas général d'une suite quelconque $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions mesurables positives $f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Montrer que :

$$A' \leqslant A \leqslant B \qquad\qquad \text{et que :} \qquad\qquad A' \leqslant B'.$$

(g) Peut-on comparer B et B' ?

(h) Sans supposer que les f_n sont positives, on suppose qu'il existe une fonction mesurable $\phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, pas forcément positive, Lebesgue-intégrale, *i.e.* avec $\int_{\mathbb{R}} |\phi| < \infty$, telle que :

$$\phi(x) \leqslant f_n(x) \qquad\qquad \text{(pour presque tout } x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \geqslant 1).$$

Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\, dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx.$$

(i) L'inégalité de la Question **(h)** demeure-t-elle vraie sans minoration de la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ par une fonction $\phi \leqslant f_n$ intégrable ?

(j) Que dire, lorsqu'il existe une fonction intégrable ψ telle que $f_n \leqslant \psi$ pour tout $n \geqslant 1$?

Exercice 4. Soit une fonction réelle mesurable positive définie sur $[1, \infty[$ qui est intégrable, *i.e.* avec $\int_{[1,\infty[} f(x)\, dx < \infty$.

(a) Soit un entier $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Vérifer que :

$$\int_{[1,2]} n\, f(n\, t)\, dt = \int_{[n,2n]} f(x)\, dx.$$

(b) Montrer que :

$$\int_{[1,2]} \sum_{n=1}^{\infty} f(n\, t)\, dt = \int_{[1,\infty[} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, \mathbf{1}_{[n,2n]}(x)\, f(x)\, dx.$$

(c) Soit $x \in [1, \infty[$. Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, \mathbf{1}_{[n,2n]}(x) = \sum_{\frac{x}{2} \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{n} \leqslant 3.$$

(d) Montrer que, pour presque tout $t \in [1, 2]$, on a $f(n\, t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

(e) Peut-on modifier la fonction f sur un ensemble de mesure nulle afin de garantir que $f(n\, t)$ tende vers 0 lorsque $n \longrightarrow \infty$, ce, pour *tout* $t \in [1, \infty[$?

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^{d \geqslant 1}$, on considère un nombre $n \geqslant 1$ de sous-ensembles mesurables quelconques $E_1, E_2, \dots, E_n \subset \mathbb{R}^d$.

Pour toute collection *non vide* d'indices $\mathrm{I} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ comportant un nombre $1 \leqslant \ell \leqslant n$ d'éléments :

$$\mathrm{I} = \big\{ i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \big\},$$

on note son *complémentaire* :

$$\mathrm{I}^c = \big\{ j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-\ell} \big\},$$

avec donc $\mathrm{I} \cup \mathrm{I}^c = \{1, \dots, n\}$. On pose :

$$E_{\mathrm{I}} := \bigcap_{i \in \mathrm{I}} E_i \bigcap_{j \in \mathrm{I}^c} \mathbb{R}^d \backslash E_j.$$

(a) Pour $n = 2$ et pour $n = 3$, faire deux figures parlantes, sur lesquelles sont indiqués *tous* les E_{I}.

(b) Pour deux collections (non vides) distinctes $\mathrm{I} \neq \mathrm{I}\prime$ d'indices, montrer que :

$$E_{\mathrm{I}} \cap E_{\mathrm{I}\prime} = \emptyset.$$

(c) Montrer que l'on a la réunion disjointe :

$$\bigcup_{\substack{\mathrm{I} \subset \{1, \dots, n\} \\ 1 \leqslant \mathsf{Card}\, \mathrm{I}}} E_{\mathrm{I}} = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n.$$

(d) Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} m(E_i) = \sum_{\substack{\mathrm{I} \subset \{1, \dots, n\} \\ 1 \leqslant \mathsf{Card}\, \mathrm{I}}} \mathsf{Card}\, I \cdot m(E_{\mathrm{I}}).$$

(e) Maintenant, on fixe un entier $1 \leqslant k \leqslant n$, et on introduit :

$$A_{k,n} := \text{Ensemble des } x \in \mathbb{R}^d \text{ qui appartiennent à (au moins) } k \text{ ensembles } E_{i_1},\, E_{i_2},\, \dots,\, E_{i_k} \text{ distincts, avec } 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n.$$

Montrer que :

$$m\big(A_{k,n}\big) \leqslant \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} m(E_i).$$

(f) Généraliser cette inégalité à une *infinité* de sous-ensembles mesurables $E_1, \dots, E_n, \dots, \subset \mathbb{R}^d$.

20. Corrigé de l'examen 10

Exercice 1. (a) Grâce au cours, nous savons que :

$$\begin{aligned} S &= \limsup_{i\to\infty} E_i \\ &= \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j\geqslant i} E_j. \end{aligned}$$

Or comme la mesurabilité est conservée par réunions et par intersections dénombrables, il est clair que notre joli S est bien mesurable.

(b) Pour tout $i \geqslant 1$ fixé, on a :

$$e_i^- := \inf_{j\geqslant i} e_j \leqslant e_i \leqslant f_i,$$

et comme la suite positive $\{e_i^-\}_{i=1}^{\infty}$ est visiblement croissante $e_i^- \leqslant e_{i+1}^-$ et tend vers la limite inférieure de la suite $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ lorsque $i \longrightarrow \infty$, tandis que f_i, monotone décroissante positive possède elle aussi une limite lorsque $i \longrightarrow \infty$, il vient :

$$\lim_{i\to\infty} e_i^- \leqslant \lim_{i\to\infty} f_i,$$

c'est-à-dire :

$$\liminf_{i\to\infty} e_i \leqslant \lim_{i\to\infty} f_i.$$

(c) Cette suite d'ensembles mesurables est décroissante :

$$F_i \supset F_{i+1}.$$

De plus, F_1 est de mesure *finie*, car :

$$\begin{aligned} m(F_1) &= m\Big(\bigcup_{j\geqslant 1} E_j\Big) \\ \text{[Hypothèse !]} \qquad &< \infty, \end{aligned}$$

donc un théorème vu en cours s'applique, et donne :

$$\begin{aligned} m(S) &= m\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i\Big) \\ &= \lim_{i\to\infty} m(F_i). \end{aligned}$$

(d) Posons :

$$e_i := m(E_i), \qquad\qquad f_i := m(F_i) = m\Big(\bigcup_{j\geqslant i} E_j\Big),$$

où $f_i \geqslant f_{i+1} \geqslant 0$ décroît. Alors $E_i \subset F_i$ implique :

$$\big(0 \leqslant\big) \quad m(E_i) \leqslant m(F_i),$$

et donc la Question **(b)** s'applique et donne :

$$\liminf_{i\to\infty} e_i \leqslant \lim_{i\to\infty} f_i,$$

c'est-à-dire :

$$\liminf_{i\to\infty} m(E_i) \leqslant \lim_{i\to\infty} m(F_i),$$

d'où en conclusion grâce à la Question **(c)** :

$$\sigma \leqslant m(S).$$

(e) Soit une suite $\big\{E_i = Q_i\big\}_{i=1}^{\infty}$ de cubes fermés $Q_i = \overline{Q_i}$ *disjoints deux à deux*, tous de même volume $1 = \mathrm{vol}(Q_i)$, par exemple disposés le long du premier axe de coordonnées :

$$Q_i := [0,1]^d + \big(2\,i, 0, \dots, 0\big).$$

Clairement :

$$S = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i = \emptyset, \qquad\qquad m(S) = 0,$$
$$\sigma = \liminf_{i\to\infty} m(Q_i) = 1,$$

ce qui viole l'inégalité :

$$1 = \sigma \overset{\textbf{Faux}}{\leqslant} m(S) = 0.$$

(f) Partons de la sous-additivité dénombrable :

$$m\bigg(\bigcup_{j\geqslant i} E_j\bigg) \leqslant \sum_{j=i}^{\infty} m(E_j),$$

c'est-à-dire :

$$m(F_i) \leqslant \mathsf{Reste}\,(i) \xrightarrow{\;i\to\infty\;} 0,$$

et comme le reste d'une série numérique positive convergente tend vers 0, nous concluons bien grâce au résultat de la Question **(c)** en faisant $i \longrightarrow \infty$ dans ces inégalités que :

$$m(S) = 0.$$

Exercice 2. (a) Oui-da, $T_{k,n}$ est bien mesurable, comme ensemble de surniveau de la fonction mesurable f_n !

Ensuite, il est clair que :

$$k\,m\big(\{f_n \geqslant k\}\big) = \int_{\{f_n\geqslant k\}} k \leqslant \int_{\{f_n\geqslant k\}} f_n \leqslant \int f_n \leqslant \mathrm{M},$$

d'où l'inégalité demandée :

$$m\big(T_{k,n}\big) \leqslant \frac{\mathrm{M}}{k}.$$

(b) En un point $x \in E$, la suite numérique positive $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ est *non bornée* si et seulement si, pour tout entier $k \geqslant 1$ (arbitrairement grand), il existe une infinité d'indices n tels que $f_n(x) \geqslant k$.

Mais-mais-mais ?! Comme pour tous les indices $p \geqslant n$, on a aussi grâce à l'hypothèse de croissance :

$$f_p(x) \geqslant f_n(x) \geqslant k,$$

il suffit en fait qu'il existe un seul indice n avec $f_n(x) \geqslant k$. Cette condition s'exprime donc en termes ensemblistes comme suit :

$$\begin{aligned} T_\infty &= \bigcap_{k\geqslant 1} \bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{x \in E\colon\ f_n(x) \geqslant k\big\} \\ &= \bigcap_{k\geqslant 1} \bigcup_{n=1}^{\infty} T_{k,n}. \end{aligned}$$

Enfin, comme les $T_{k,n}$ sont mesurables, et comme la mesurabilité est préservée par réunions et intersections dénombrables quelconques (théorie de la mesure), nous voyons bien que T_∞ est mesurable.

(c) Fixons donc k. Il est clair par croissance des f_n que :

$$\begin{aligned} T_{k,n} &= \big\{f_n \geqslant k\big\} \\ [f_n \leqslant f_{n+1}] \qquad &\subset \big\{f_{n+1} \geqslant k\big\} = T_{k,n+1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\big\{T_{k,n}\big\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite *croissante* d'ensembles mesurables.

Un théorème (basique) du cours assure alors que :

$$\begin{aligned} m\bigg(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_{k,n}\bigg) &= \lim_{n\to\infty} m\big(T_{k,n}\big) \\ [\text{Question } (\mathbf{c})] \qquad &\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{M}}{k} \\ &= \frac{\mathrm{M}}{k}. \end{aligned}$$

Ensuite, abrégeons :

$$T_k := \bigcup_{n=1}^{\infty} T_{k,n},$$

qui est de mesure $m(T_k) \leqslant \frac{\mathrm{M}}{k} < \infty$ finie, d'où en particulier pour $k = 1$:

$$m(T_1) < \infty.$$

En outre, comme il est clair que cette suite indexée par k est décroissante $T_k \supset T_{k+1}$, les hypothèses d'un théorème de théorie de la mesure sont remplies, ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} m\big(T_\infty\big) &= m\bigg(\bigcap_{k\geqslant 1} T_k\bigg) \\ &= \lim_{k\to\infty} m\big(T_k\big) \\ [\text{Vu à l'instant}] \qquad &\leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{M}}{k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(d) Effectivement, nous venons d'établir la nullité de la mesure du lieu T_∞ où la suite $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ est non bornée ! Donc pour tout $x \in E \backslash T_\infty$ en-dehors de ce mauvais ensemble, la suite *monotone croissante* des valeurs $f_n(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ tend vers une valeur $f(x) \in \mathbb{R}_+$ *finie*.

(e) Si nous notons :

$$f := \lim_{n\to\infty} f_n,$$

une simple application du théorème de convergence monotone nous donne (tandis que le tonnerre d'octobre tonne) :

$$\begin{aligned} \int_E f &= \int_E \lim_{n\to\infty} f_n \\ \text{[TCM]} \qquad &= \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \\ \text{[Hyp]} \qquad &\leqslant \lim_{n\to\infty} \mathrm{M} \\ &= \mathrm{M} < \infty. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse de bornitude uniforme $\int_E f_n \leqslant \mathrm{M} < \infty$, ce résultat ajoute donc une information de finitude $\int_E f < \infty$ intéressante concernant l'intégrale de la fonction-limite dans le théorème de la convergence monotone, lequel autorise aussi, comme nous l'avons vu en cours, les situations plus hautaines où $\int_E f = \infty$.

Exercice 3. **(a)** On a $g_n \equiv 0$ sur $\left[\frac{2}{n}, \infty\right[$. En un $x > 0$ fixé, pour un entier $N \gg 1$ assez grand, on a pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$:

$$x \in \left[\tfrac{2}{\mathrm{N}}, \infty\right[\subset \left[\tfrac{2}{n}, \infty\right[,$$

d'où $g_n(x) = 0$ pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, puis :

$$0 = \lim_{n\to\infty} g_n(x) \qquad\qquad (x > 0).$$

(b) En fait, comme $g_n \equiv 0$ aussi sur $]-\infty, 0]$, on a en *tout* $x \in \mathbb{R}$:

$$0 = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

et puisque la limite existe, limite inférieure et limite supérieure coïncident :

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = \limsup_{n\to\infty} f_n(x).$$

Ainsi :

$$A' = \int_{\mathbb{R}} 0\, dx = 0 = \int_{\mathbb{R}} 0\, dx = B'.$$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ fixé, il est clair que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx &= \int_0^{1/n} n^2\, x\, dx + \int_{1/n}^{2/n} n^2 \left(\tfrac{2}{n} - x\right) dx \\ [y := \tfrac{2}{n} - x] \qquad &= n^2 \left[\tfrac{x^2}{2}\right]_0^{1/n} + \int_0^{1/n} n^2\, y\, dy \\ \text{[Pareil !]} \qquad &= n^2 \tfrac{1}{2\,n^2} + n^2 \tfrac{1}{2\,n^2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

et donc, les limites inférieure et supérieure sont constantes, d'où :

$$A = 1 = B.$$

(d) Pour $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} h_n(x)\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int_{1/4}^{1} 1\,dx = \tfrac{3}{4} & \text{si } n = 2m-1, \\ \displaystyle\int_{0}^{1/4} 1\,dx = \tfrac{1}{4} & \text{si } n = 2m, \end{cases}$$

donc :

$$A = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n(x)\,dx = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad B = \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n(x)\,dx = \frac{3}{4}.$$

(e) Clairement, sur $]-\infty, 0[\, \cup \{\frac{1}{4}\} \cup\,]1, \infty[$, les valeurs de h_n restent constantes, donc :

$$\liminf_{n\to\infty} h_n(x) = \limsup_{n\to\infty} h_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in\,]-\infty, 0[, \\ 1 & \text{si } x = \frac{1}{4} \\ 0 & \text{si } x \in\,]1, \infty[. \end{cases}$$

Ensuite, si $x \in [0, \frac{1}{4}[\, \cup\,]\frac{1}{4}, 1]$, la suite $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ prend alternativement les valeurs 0 et 1, suivant que $n = 2m-1$ est impair ou que $n = 2m$ est pair, donc sur $[0, \frac{1}{4}[\, \cup\,]\frac{1}{4}, 1]$:

$$\liminf_{n\to\infty} h_n(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\to\infty} h_n(x) = 1.$$

Par synthèse de ce qui vient d'être analysé, sur :

$$\mathbb{R} =]-\infty, 0[\, \cup \big[0, \tfrac{1}{4}\big[\cup \big\{\tfrac{1}{4}\big\} \;\bigcup\; \big]\tfrac{1}{4}, 1\big] \cup \big]1, \infty\big[,$$

on a :

$$\liminf_{n\to\infty} h_n = \mathbf{1}_{\{\frac{1}{4}\}} \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\to\infty} h_n = \mathbf{1}_{[0,1]},$$

d'où :

$$A' = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} h_n(x)\,dx = 0 \qquad \text{et} \qquad B' = \int_{\mathbb{R}} \limsup_{n\to\infty} h_n(x)\,dx = 1.$$

(f) Fatou s'applique, car l'hypothèse importante $f_n \geqslant 0$ est satisfaite, ce qui nous donne :

$$A' = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = A.$$

Par ailleurs, l'inégalité $A \leqslant B$ est évidemment satisfaite, en vertu de la définition (vue en cours) des limites inférieure et supérieure de suites numériques.

Enfin, pour la même raison, l'inégalité valable partout :

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} f_n(x),$$

fournit après intégration :

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = A' \leqslant B' = \int_{\mathbb{R}} \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

(g) Non, car l'exemple des Questions **(b)**, **(c)** a montré que :

$$B = 1 > 0 = B',$$

tandis que l'exemple des Questions **(d)**, **(e)** a montré que :

$$B = \tfrac{3}{4} < 1 = B'.$$

Donc « malheureusement », aucune des deux inégalités :

$$B \overset{\textbf{Faux}}{\leqslant} B' \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad B' \overset{\textbf{Faux}}{\leqslant} B,$$

n'est satisfaite, en général.

(h) Introduisons la suite auxiliaire de fonctions mesurables positives :

$$f_n' := f_n - \phi \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

à laquelle nous *pouvons* appliquer le théorème de Fatou :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} \big(f_n(x) - \phi(x)\big)\,dx \\
\text{[Faitout !]} \qquad &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \big(f_n(x) - \phi(x)\big)\,dx \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx,
\end{aligned}$$

pour soustraire ensuite la quantité numérique finie $-\int \phi$ afin de trouver effectivement :

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx.$$

(i) Non ! Comme le montre le contre-exemple de la suite de fonctions :

$$\theta_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ -\,n & \text{si } 0 < x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x, \end{cases}$$

qui satisfait :

$$\begin{aligned}
0 &= \liminf_{n\to\infty} \theta_n(x), && (\forall\, x \in \mathbb{R}), \\
-1 &= \int_{\mathbb{R}} \theta_n(x)\,dx && (\forall\, n \geqslant 1),
\end{aligned}$$

d'où :

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} \theta_n(x)\,dx \overset{\textbf{Faux}}{\leqslant} \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \theta_n(x)\,dx = -1,$$

et l'on vérifie en outre que toute fonction minorante uniforme $\phi \leqslant \theta_n$ satisfait nécessairement :

$$\phi \leqslant -\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbf{1}_{]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]},$$

ce qui la force à être non-intégrable :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\phi| &\geqslant \int_{]0,1]} |\phi| \\
&\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n+1} = \infty,
\end{aligned}$$

de telle sorte que ce contre-exemple $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ ne satisfait *pas* l'hypothèse (de minoration uniforme par une fonction intégrable) qui aboutissait, dans la Question **(h)**, à une généralisation sympathique du Théorème de Fatou.

(j) Le Théorème de Fatou inverse, appliqué à la suite $\big\{f_n - \psi\big\}_{n=1}^{\infty}$, ou, de manière équivalente, sachant que lim inf et lim sup s'intervertissent après un changement de signe, la Question **(h)**, appliquée à $-f_n \geqslant -\psi$, donne :

$$\int_{\mathbb{R}} \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \;\geqslant\; \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx.$$

Enfin, sans l'hypothèse de majoration uniforme par une fonction intégrable, une telle inégalité n'est pas satisfaite généralement, comme le montre — ce dont on se convainc aisément — la suite $\{-\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Exercice 4. Soit une fonction réelle mesurable positive définie sur $[1,\infty[$ qui est intégrable, *i.e.* avec $\int_{[1,\infty[} f(x)\,dx < \infty$.

(a) Il suffit d'effectuer le changement de variable $n\,t =: x$:

$$\begin{aligned}\int_{[1,2]} n\,f(n\,t)\,dt &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[1,2]}(t)\,f(n\,t)\,d\,(n\,t)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[n,2n]}(x)\,f(x)\,dx\\ &= \int_{[n,2n]} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

(b) La fonction $t \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} f(n\,t)$ est mesurable comme limite (simple) de la suite de fonctions mesurables :

$$\Big\{\sum_{1\leqslant n\leqslant \mathrm{N}} f(n\,t)\Big\}_{\mathrm{N}=1}^{\infty}.$$

De plus, cette suite est croissante puisque $f(n\,t) \geqslant 0$.

Par conséquent, nous pouvons appliquer le théorème de Convergence Monotone, comme suit, *deux fois :*

$$\begin{aligned}\int_{[1,2]} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f(n\,t)\Big)\,dt &\overset{\text{CM}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\int_{[1,2]} f(n\,t)\,dt\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{[1,2]} \frac{1}{n}\,f(n\,t)\,d\,(n\,t)\\ [n\,t =: x] \qquad &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{[n,2n]} \frac{1}{n}\,f(x)\,dx\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{[1,\infty[} \frac{1}{n}\,\mathbf{1}_{[n,2n]}(x)\,f(x)\,dx\\ &\overset{\text{CM}}{=} \int_{[1,\infty[} \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\mathbf{1}_{[n,2n]}(x)\Big)\,f(x)\,dx.\end{aligned}$$

(c) En un point $x \in [1,\infty[$ fixé, on a :

$$n \leqslant x \leqslant 2\,n \qquad\Longleftrightarrow\qquad \tfrac{x}{2} \leqslant n \leqslant x,$$

d'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n}\, \mathbf{1}_{[n,2n]}(x) \;=\; \sum_{\frac{x}{2}\leqslant n\leqslant x} \frac{1}{n}.$$

Ensuite, comme il y a au plus $x-\frac{x}{2}+1$ entiers n dans l'intervalle fermé $\big[\frac{x}{2}, x\big]$, et comme $\frac{x}{2} \leqslant n \leqslant n$ implique $\frac{1}{n} \leqslant \frac{2}{x}$, nous pouvons majorer :

$$\begin{aligned}\sum_{\frac{x}{2}\leqslant n\leqslant x} \frac{1}{n} &\leqslant \big(x-\tfrac{x}{2}+1\big)\cdot \tfrac{2}{x}\\ &= 1+\tfrac{2}{x}\\ &\leqslant 1+2 \;=\; 3.\end{aligned}$$

(d) Pour $x \in [1, \infty[$, en multipliant l'inégalité obtenue à la Question **(c)** par $f(x) \geqslant 0$, ce qui ne change pas le sens de l'inégalité, il vient :

$$\bigg(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, \mathbf{1}_{[n,2n]}(x)\bigg)\, f(x) \;\leqslant\; 3\, f(x).$$

En revenant à la Question **(b)**, et par croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_{[1,2]} \bigg(\sum_{n=1}^{\infty} f(n\,t)\bigg)\, dt &= \int_{[1,\infty[} \bigg(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, \mathbf{1}_{[n,2n]}(x)\bigg)\, f(x)\, dx\\ &\leqslant \int_{[1,\infty[} 3\, f(x)\, dx\\ \text{[Hypothèse !]}\qquad &< \infty.\end{aligned}$$

Cette inégalité agréable montre que la fonction mesurale positive :

$$\begin{aligned}[1,2] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}\\ t &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} f(n\,t),\end{aligned}$$

est Lebesgue-intégrable. Donc, grâce à une proposition cruciale vue en cours, cette fonction positive prend des valeurs *finies* (non égales à ∞) en presque tout $t \in [1, 2]$.

Autrement dit, la série à termes positifs :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n\,t),$$

converge pour presque tout $t \in [1, 2]$, ce qui implique enfin, d'après une propriété connue des séries numériques convergentes, que :

$$f(n\,t) \xrightarrow[]{n\to\infty} 0 \qquad\qquad \text{(pour presque tout } t \in [1,2]\text{)}.$$

(e) D'un coup d'épée (Zéro comme Zorro !), notons [1] :

$$\begin{aligned}Z &:= \Big\{t \in [1, \infty[\colon\; \lim_{n\to\infty} f(n\,t) = 0\Big\} &&(\text{« bons » } t),\\ N &:= [1, \infty[\backslash Z &&(\text{« mauvais » } t).\end{aligned}$$

1. — et contemplons comme Z s'est transformé en N après une rotation idiote de 90 degrés —

Notons aussi :

$$\begin{aligned} Z_1 \;&:=\; [1,2] \cap Z, \\ N_1 \;&:=\; [1,2] \cap N, \qquad\quad \text{avec} \qquad\quad Z_1 \cup N_1 \;=\; [1,2] \qquad\qquad \text{(réunion disjointe)}, \end{aligned}$$

et, plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ quelconque, notons :

$$\begin{aligned} Z_k \;&:=\; [k,\, 2\,k] \cap Z, \\ N_k \;&:=\; [k,\, 2\,k] \cap N, \qquad\quad \text{avec} \qquad\quad Z_k \cup N_k \;=\; [1,2] \qquad\qquad \text{(réunion disjointe)}, \end{aligned}$$

Nous affirmons que :

$$k\, Z_1 \;\subset\; Z_k.$$

En effet, si $t \in [1,2]$ appartient à Z_1, c'est-à-dire si :

$$0 \;=\; \lim_{m \to \infty} f(m\, t),$$

d'où en faisant $m = n\, k$ multiple de k avec $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ arbitraire (ce qui est une sous-suite) :

$$0 \;=\; \lim_{n \to \infty} f\big(n \cdot k\, t\big),$$

nous voyons que $k\, t \,\in\, [k,\, 2\,k]$ appartient bien à Z_k, ce qui prouve bien cette inclusion $k\, Z_1 \subset Z_k$.

En passant au complémentaire dans $[k, 2\,k]$, nous obtenons l'inclusion inverse :

$$k\, N_1 \;\supset\; N_k.$$

Maintenant, tout « mauvais » point $t \,\in\, N$ appartient à un N_k pour k assez grand, puisque :

$$[1, \infty[\;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} \big[k,\, 2\,k\big] \qquad\qquad \text{(réunion } \textit{non}\text{-disjointe)},$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} N \;&=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \\ &\subset\; \bigcup_{k=1}^{\infty} k\, N_1 \\ &=:\; N^*, \end{aligned}$$

où nous introduisons un ensemble *a priori* plus gros $N^* \supset N$.

Or comme nous avons démontré à la Question **(d)** que N_1 est de mesure nulle, nous en déduisons qu'il en va de même pour N et pour N^* :

$$\begin{aligned} m(N) \;&\leqslant\; m\big(N^*\big) \\ &\leqslant\; \sum_{k=1}^{\infty} m\big(k\, N_1\big) \\ &=\; \sum_{k=1}^{\infty} k\, \underline{m(N_1)} \\ &=\; 0. \end{aligned}$$

Après cela, modifions les valeurs de f sur $[1,\infty[$ en introduisant :

$$\widetilde{f}(t) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } t \in N^*, \\ f(t) & \text{lorsque } t \in [1,\infty[\backslash N^*. \end{cases}$$

Alors comme pour tout $t \in [1,\infty[$, on a :

$$0 \leqslant \widetilde{f}(t) \leqslant f(t) \qquad \text{d'où} \qquad 0 \leqslant \widetilde{f}(n\,t) \leqslant f(n\,t) \qquad (\forall\, n \geqslant 1),$$

il est clair que $t \in Z$ « bon », *i.e.* $f(n\,t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, implique :

$$\widetilde{f}(n\,t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

c'est-à-dire « bon pour f » implique « bon pour $\widetilde{f}$ ».

Enfin, si un point t est « mauvais » (pour f), *i.e.* si :

$$t \in N \subset N^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} k\,N_1,$$

alors il est de la forme $t = k\,t_1$ pour un certain $t_1 \in N_1$ et un certain $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, d'où pour tout $n \geqslant 1$:

$$n\,t = (\underbrace{n\,k}_{m_0})\,t_1 \in \bigcup_{m=1}^{\infty} m\,N_1 = N^*,$$

et comme $\widetilde{f}\big|_{N^*} \equiv 0$ par définition, on a $\widetilde{f}(n\,t) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, d'où trivialement :

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{f}(n\,t) = 0 \qquad (\forall\, t \in N \text{ « mauvais »}),$$

c'est-à-dire « mauvais pour f » implique « bon pour $\widetilde{f}$ ».

Donc tout est bon pour (le cochon ?) $\widetilde{f}$!

En conclusion, nous avons réussi à modifier les valeurs sur un ensemble (négligeable) de mesure nulle de notre fonction mesurable positive $f\colon [1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui est intégrable (à l'infini) $\int_{[1,\infty[} f < \infty$, afin d'avoir l'évanouissement-limite à l'infini :

$$f(n\,t) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

en *tout* — ce qui est mieux que « presque tout » — $t \in [1,\infty[$.

Exercice 5. (a) Les deux figures demandées peuvent être tracées à main levée.

(b) Par symétrie, on peut supposer que $\mathrm{I} \not\subset \mathrm{I}'$, d'où l'existence d'un $i_0 \in \mathrm{I}$ avec $i_0 \notin \mathrm{I}'$, puis $i_0 \in \mathrm{I}'^c$. Alors :

$$E_{\mathrm{I}} = \bigcap_{i\in \mathrm{I}} E_i \bigcap_{j\in \mathrm{I}^c} \mathbb{R}^d \backslash E_j \subset E_{i_0},$$

$$E_{\mathrm{I}'} = \bigcap_{i\in \mathrm{I}'} E_i \bigcap_{j\in \mathrm{I}'^c} \mathbb{R}^d \backslash E_j \subset \mathbb{R}^d \backslash E_{i_0},$$

et :

$$\emptyset = E_{i_0} \cap \mathbb{R}^d \backslash E_{i_0} \qquad \Longrightarrow \qquad E_{\mathrm{I}} \cap E_{\mathrm{I}'} = \emptyset.$$

(c) Certainement, grâce à la Question **(b)**, cette réunion est disjointe. De plus, elle est trivialement contenue dans $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$.

Pour l'inclusion inverse, étant donné un élément quelconque $x \in E_1 \cup \cdots \cup E_n$, on définit :

$$\mathrm{I} := \Big\{ i \in \{1, \dots, n\} \colon \; x \in E_i \Big\},$$

d'où :

$$x \notin E_j \qquad\qquad \forall\, j \in \{1, \dots, n\} \big\backslash \mathrm{I} = \mathrm{I}^c,$$

et ainsi :

$$x \in E_{\mathrm{I}}.$$

(d) D'abord, observons que :

$$E_i = \bigcup_{\mathrm{I} \ni i} E_{\mathrm{I}}.$$

Ensuite, puisque les E_{I} sont disjoints deux à deux :

$$m(E_i) = \sum_{\mathrm{I} \ni i} m(E_{\mathrm{I}}),$$

et enfin par sommation et réorganisation :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n m(E_i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{\mathrm{I} \ni i} m(E_{\mathrm{I}}) \\ &= \sum_{\substack{\mathrm{I} \subset \{1, \dots, n\} \\ 1 \leqslant \mathsf{Card}\, \mathrm{I}}} \mathsf{Card}\, \mathrm{I} \cdot m(E_{\mathrm{I}}).\end{aligned}$$

(e) Grâce à ce qui précède, il est clair que :

$$A_{k,n} = \sum_{\substack{\mathrm{I} \subset \{1, \dots, n\} \\ \mathsf{Card}\, \mathrm{I} \geqslant k}} E_{\mathrm{I}}.$$

Prenons la mesure $m(\bullet)$ des deux membres de cette égalité, en nous souvenant que les E_{I} mesurables sont *disjoints*, multiplions le résultat par k, et calculons :

$$\begin{aligned}k\, m\big(A_{k,n}\big) &= \sum_{\substack{\mathrm{I} \subset \{1, \dots, n\} \\ \mathsf{Card}\, \mathrm{I} \geqslant k}} k\, m(E_{\mathrm{I}}) \\ &\leqslant \sum_{\substack{\mathrm{I} \subset \{1, \dots, n\} \\ \mathsf{Card}\, \mathrm{I} \geqslant k}} \mathsf{Card}\, \mathrm{I} \cdot m(E_{\mathrm{I}}) \\ \text{[Question (d)]} \qquad &= \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i),\end{aligned}$$

d'où l'inégalité demandée après division par k :

$$m\big(A_{k,n}\big) \leqslant \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} m(E_i).$$

(f) Toujours pour $k \leqslant n \leqslant n+1$, notons maintenant :

$$\begin{aligned} A_{k,n+1} \ &:= \ \text{Ensemble des } x \in \mathbb{R}^d \text{ qui appartiennent à (au moins) } k \text{ ensembles} \\ &\qquad E_{i_1},\, E_{i_2},\, \dots,\, E_{i_k} \text{ distincts, avec } 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n+1, \\ A_{k,\infty} \ &:= \ \text{Ensemble des } x \in \mathbb{R}^d \text{ qui appartiennent à (au moins) } k \text{ ensembles} \\ &\qquad E_{i_1},\, E_{i_2},\, \dots,\, E_{i_k} \text{ distincts, avec } 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k < \infty. \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} A_{k,n} \ &\subset \ A_{k,n+1}, \\ A_{k,\infty} \ &\subset \ \bigcup_{n=k}^{\infty} A_{k,n}, \end{aligned}$$

il vient :

$$\begin{aligned} m\big(A_{k,\infty}\big) \ &= \ \lim_{n\to\infty} m\big(A_{k,n}\big) \\ \text{[Question (e)]} \qquad &\leqslant \ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} m\big(E_i\big), \end{aligned}$$

d'où en faisant $n \longrightarrow \infty$:

$$m\big(A_{k,n}\big) \ \leqslant \ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i),$$

ce qui est la généralisation naturelle de l'inégalité de la Question **(e)**.

21. Examen 11

Exercice 1. En dimension $d = 1$, soit un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^1$ de mesure $m(E) < \infty$ *finie*. Soit la fonction :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_E \colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \varphi_E(x) := m\big(E \cap \,]-\infty, x]\big). \end{array}$$

(a) Justifier que φ_E est croissante.

(b) Montrer que la fonction φ_E est *1-lipschitzienne*, c'est-à-dire qu'elle satisfait, pour tous $x', x'' \in \mathbb{R}$:

$$\big|\varphi_E(x') - \varphi_E(x'')\big| \leqslant |x' - x''|.$$

(c) Maintenant, soit un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}$ de mesure égale à $1 = m(E)$. Montrer qu'il existe un sous-ensemble mesurable $A \subset E$ tel que l'on ait, exactement :

$$m(A) = \tfrac{1}{2}\, m(E).$$

(d) Le résultat de la Question **(c)** reste-t-il vrai lorsque E est de mesure infinie ?

Exercice 2. En dimension $d = 1$, soit un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^1$ de mesure strictement positive $0 < m(E) \leqslant \infty$, éventuellement infinie. On fixe un paramètre réel $0 < \alpha < 1$. L'objectif est d'établir la propriété :

$$\mathscr{P}_\alpha(E) \qquad \begin{array}{c} \textit{Il existe un invervalle ouvert } I \subset \mathbb{R} \text{ avec } m(I) < \infty \text{ tel que :} \\ \alpha\, m(I) \leqslant m\big(E \cap I\big) \leqslant m(I). \end{array}$$

(a) On suppose tout d'abord que $0 < m(E) < \infty$. Justifier que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathscr{O} \supset E$ tel que :

$$m(E) \leqslant m(\mathscr{O}) \overset{?}{\leqslant} (1+\varepsilon)\, m(E).$$

(b) Montrer qu'il existe une famille non vide finie ou infinie dénombrable $\big\{I_n\big\}_{n \in N}$ avec $\emptyset \neq N \subset \mathbb{N}$, d'intervalles ouverts $I_n \subset \mathbb{R}$ tels que :

$$\sum_{n \in N} m\big(I_n\big) \leqslant \tfrac{1}{\alpha} \sum_{n \in N} m\big(E \cap I_n\big).$$

(c) Obtenir la propriété $\mathscr{P}_\alpha(E)$ dans le cas où $0 < m(E) < \infty$.

(d) En déduire que la propriété $\mathscr{P}_\alpha(E)$ est encore vraie lorsque $m(E) = \infty$.

Exercice 3. On introduit la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) := \frac{\sin x}{x^2} \frac{x^{1/n}}{1 + x^{1/n}} \qquad (n \geqslant 1).$$

(a) Montrer que toutes ces f_n sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Déterminer :

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{\infty} f_n(x)\, dx.$$

(c) Déterminer :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\, dx.$$

Exercice 4. Soient $a < b$ des réels et $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a, b]$. On étend F à $[a, +\infty[$ en posant, pour $x > b$, $F(x) := F(b) + F'(b)(x - b)$ de façon à ce que F soit dérivable sur $[a, +\infty[$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit aussi des fonctions $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ en posant, pour $x \in [a, b]$:

$$f_n(x) := 2^n [F(x + 2^{-n}) - F(x)].$$

(a) Montrer que la fonction $F' : [a, b] \to \mathbb{R}$ est mesurable. Indication: On pourra utiliser la suite (f_n).

(b) Montrer que, *si F' est bornée sur* $[a, b]$, c'est-à-dire s'il existe une constante $0 \leqslant M < \infty$ telle que $|F'(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in [a, b]$, alors la suite (f_n) vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée sur $[a, b]$. Indication: On montrera que $|f_n(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in [a, b]$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

(c) En déduire que, *si la fonction F dérivable sur* $[a, b]$ *a une dérivée F' qui est* bornée *sur* $[a, b]$, alors F' est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a, b]$ avec :

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

(d) On suppose à présent que $a < b$ et $c < d$ sont des réels, que $f : [c, d] \to [a, b]$ est *continue* et que $g : [a, b] \to [c, d]$ est croissante (resp. décroissante), dérivable et de dérivée g' *bornée* (sur $[a, b]$).

Montrer que, dans ces conditions, on a (les intégrales s'interprètant au sens de Lebesgue) la formule de substitution :

$$\int_a^b (f \circ g)\, g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f \qquad \left(\text{resp. } \int_a^b (f \circ g)\, g' = -\int_{g(b)}^{g(a)} f\right).$$

Indication: On pourra utiliser le fait que f admet une primitive.

On va montrer maintenant qu'il existe des fonctions dérivées (non bornées) qui ne sont *pas* intégrables au sens de Lebesgue. À cet effet, on introduit la fonction :

$$\begin{aligned} G\colon \quad [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(e) Montrer que G est dérivable sur $[0, 1]$ et que sa dérivée $G' : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est mesurable.

(f) Montrer que G' est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1]$ si et seulement $|g|$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1]$, où la fonction g est définie par :

$$\begin{array}{rccl} g\colon & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

(g) Montrer que $|g|$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,b]$ pour tous $0 < a < b \leqslant 1$.

(h) Si $|g|$ était intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1]$, montrer que l'on aurait :

$$\infty > \int_0^1 |g| = \int_{1/\sqrt{\pi}}^1 |g| + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/\sqrt{(k+1)\pi}}^{1/\sqrt{k\pi}} |g|.$$

(i) Montrer que $|g|$ n'est *pas* intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1]$. Indication: On pourra chercher une minoration de chaque intégrale :

$$\int_{1/\sqrt{(k+1)\pi}}^{1/\sqrt{k\pi}} |g| \qquad\qquad (k \geqslant 1),$$

en utilisant d'abord le résultat de la Question **(d)** avec la fonction décroissante :

$$t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{t}} =: \varphi(t).$$

Exercice 5. L'objectif est de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence en *moyenne* de suites monotones de fonctions mesurables.

Sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$, soit donc une suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions mesurales $f_n\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que cette suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est ponctuellement croissante :

$$f_n \leqslant f_{n+1} \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

mais pas forcément positive. On suppose que toutes les f_n sont *intégrables* (sur E). On note la fonction-limite mesurable :

$$\lim_{n\to\infty} f_n =: f\colon \quad E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

L'objectif est d'établir que les 4 conditions suivantes sont équivalentes.

(i) $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|$;

(ii) $\int_E |f| < \infty$.

(iii) $\sup\limits_{n\geqslant 1} \left| \int_E f_n \right| < \infty$;

(iv) $\sup\limits_{n\geqslant 1} \int_E |f_n| < \infty$.

(a) Montrer que **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)**.

(b) Montrer que **(ii)** $\Longrightarrow$ **(iii)**.

(c) Montrer que **(iii)** $\Longrightarrow$ **(iv)**. Indication: On pourra partir, après l'avoir justifiée, de l'inégalité $|f_n| \leqslant f_n - f_1 + |f_1|$.

(d) Pour établir la dernière implication **(iv)** $\Longrightarrow$ **(i)**, on procède en deux moments. Établir d'abord que $f - f_1$ est intégrable (sur E).

(e) Montrer ensuite que $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \int_E \left| f_n - f \right|$.

22. Corrigé de l'examen 11

Exercice 1. **(a)** La monotonie de la mesure sur les paires d'ensembles mesurables inclus l'un dans l'autre :

$$E \subset F \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad m(E) \leqslant m(F),$$

ainsi que les deux faits élémentaires que les intervalles sont mesurables et que la mesurabilité est préservée par intersections (finies ou dénombrables), nous offrent instantanément :

$$\begin{aligned} x' \leqslant x'' \qquad\qquad & \Longrightarrow \qquad\qquad \big]-\infty, x'\big] \subset \big]-\infty, x''\big] \\ & \Longrightarrow \qquad\qquad E \cap \big]-\infty, x'\big] \subset E \cap \big]-\infty, x''\big] \\ & \Longrightarrow \qquad\qquad m\big(E \cap \big]-\infty, x'\big]\big) \leqslant m\big(E \cap \big]-\infty, x''\big]\big), \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\varphi_E(x') \leqslant \varphi_E(x'').$$

(b) Cette inégalité de 1-lipschitzianité (*sic !*) pour φ_E étant *invariante* par rapport à la transposition $x' \longleftrightarrow x''$, nous pouvons supposer que $x' \leqslant x''$.

Alors il est aisé d'obtenir :

$$\begin{aligned} \big(0 \leqslant\big) \qquad\qquad \varphi_E(x'') - \varphi_E(x') & = m\big(E \cap \big]-\infty, x''\big]\big) - m\big(E \cap \big]-\infty, x'\big]\big) \\ & = m\Big(E \cap \Big(\big]-\infty, x''\big] \Big\backslash \big]-\infty, x'\big]\Big)\Big) \\ & = m\big(E \cap \big]x', x''\big]\big) \\ & \leqslant m\big(\big]x', x''\big]\big) \\ & = x'' - x'. \end{aligned}$$

(c) Évidemment, la fonction 1-lipschitzienne φ_E est *continue*, et même, *uniformément continue* — regarder l'inégalité de la Question **(b)**.

De plus, il est clair via des théorèmes naturels vus en cours (concernant des suites emboîtées d'ensembles mesurables) que :

$$0 = \lim_{-\infty \longleftarrow x} \varphi_E(x) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \lim_{x \longrightarrow \infty} \varphi_E(x) = m(E).$$

Le théorème des valeurs intermédiaires garantit alors que pour toute constante fixée à l'avance :

$$0 < c < m(E),$$

il existe un $x = x_c \in \,]-\infty, \infty[$ tel que :

$$\varphi_E(x_c) = c.$$

En particulier, pour $c := \frac{1}{2}\, m(E)$, nous trouvons l'ensemble :

$$A := E \cap \,]-\infty, x_c],$$

évidemment mesurable et contenu dans E, qui satisfait donc :

$$\tfrac{1}{2}\, m(E) \,=\, m\big(A\big).$$

(d) Oui-da mon bon Dédé, pas de dédale ici ! Lorsque $m(E) = \infty$, en prenant tout simplement :

$$A \,:=\, E,$$

on a instantanément :

$$m(A) \,=\, \infty \,=\, \tfrac{1}{2}\,\infty \,=\, \tfrac{1}{2}\, m(E).$$

Exercice 2. **(a)** Cette propriété, dite *de régularité*, est vraie d'après le cours avec la mesure extérieure $m^*(\bullet)$ au lieu de la mesure $m(\bullet)$, pour des sous-ensembles quelconques (pas forcément mesurables) $E \subset \mathbb{R}^d$.

Or comme $m(\bullet) = m^*(\bullet)$ sur les ensembles mesurables, tout est clair !

(b) Comme $0 < \alpha < 1$, on a :

$$\tfrac{1}{\alpha} \,=\, 1 + \varepsilon,$$

avec $\varepsilon > 0$ strictement positif — mais pas forcément arbitrairement petit, car l'habit ne fait pas le moine (ou *vice-versa* !).

D'après le cours, tout ouvert non vide $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^1$, et en particulier l'ouvert $\mathscr{O}$ de la Question **(a)** :

$$\mathscr{O} \,=\, \bigcup_{n \in N} I_n,$$

est réunion finie ou infinie dénombrable d'intervalles ouverts $I_n \subset \mathbb{R}$ *disjoints deux à deux*. Ici, $\emptyset \neq N \subset \mathbb{N}$.

Par conséquent, un théorème absolument central du cours qui garantit l'additivité des mesures :

$$\begin{aligned} m\big(\mathscr{O}\big) \,&=\, \sum_{n \in N} m\big(I_n\big), \\ m\big(E \cap \mathscr{O}\big) \,&=\, \sum_{n \in N} m\big(E \cap I_n\big), \end{aligned}$$

s'applique directement à l'inégalité de la Question **(a)** pour nous offrir en toute facilité ce qui nous était demandé :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in N} m\big(I_n\big) \,&=\, m\big(\mathscr{O}\big) \\ &\leqslant\, \big(1+\varepsilon\big)\, m\big(E\big) \\ [E \subset \mathscr{O}\,!] \qquad &=\, \big(1+\varepsilon\big)\, m\big(E \cap \mathscr{O}\big) \\ &=\, \big(1+\varepsilon\big) \sum_{n \in N} m\big(E \cap I_n\big) \\ &=\, \tfrac{1}{\alpha} \sum_{n \in N} m\big(E \cap I_n\big). \end{aligned}$$

(c) En partant donc de :

$$\sum_{n \in N} m\big(I_n\big) \,\leqslant\, \tfrac{1}{\alpha} \sum_{n \in N} m\big(E \cap I_n\big),$$

avec $\emptyset \neq N$, nous affirmons qu'il existe au moins un indice $n_0 \in N$ tel que :

$$m\big(I_{n_0}\big) \leqslant \tfrac{1}{\alpha}\, m\big(E \cap I_{n_0}\big) \qquad \big(< \infty \text{ car } m(E) < \infty\big). \tag{$*$}$$

Sinons, si nous avions pour *tout* $n \in N$ l'inégalité *inverse stricte :*

$$m\big(I_n\big) > \tfrac{1}{\alpha}\, m\big(E \cap I_n\big),$$

une sommation $\sum_{n \in N} \big(\bullet\big)$ de ces inégalités strictes impliquerait :

$$\sum_{n \in N} m\big(I_n\big) \overset{\textbf{Faux}}{>} \tfrac{1}{\alpha} \sum_{n \in N} m\big(E \cap I_n\big).$$

Enfin, en posant :

$$I := I_{n_0},$$

qui est de mesure *finie* parce que E l'est en vertu l'inégalité $(*)$ ci-dessus, nous obtenons bien la propriété désirée $\mathscr{P}_\alpha(E)$:

$$\alpha\, m\big(I_{n_0}\big) \overset{(*)}{\leqslant} m\big(E \cap I_{n_0}\big) \overset{\text{OK}}{\leqslant} m\big(I_{n_0}\big) \qquad \big(< \infty\big).$$

(d) Supposons donc $\infty = m(E)$. Pour $R \geqslant 1$ entier, soit :

$$E_R := E \cap \big[-R, R\big].$$

Clairement :

$$E = \bigcup_{R=1}^{\infty} E_R,$$

et puisqu'un théorème fondamental du cours nous assure que :

$$m\big(E_R\big) \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} m(E) = \infty,$$

nous sommes certains que pour un $R_0 \gg 1$ assez grand, nous aurons :

$$0 < m\big(E_{R_0}\big),$$

avec de plus *via* $E_{R_0} \subset [-R_0, R_0]$:

$$m\big(E_{R_0}\big) \leqslant 2\, R_0 < \infty,$$

ce qui nous glisse dans les hypothèses qui précèdent, et nous permet donc, grâce au résultat de la Question **(c)**, d'affirmer au sujet de cet E_{R_0} qu'il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ de mesure finie satisfaisant :

$$\begin{aligned} \alpha\, m(I) & \overset{\textbf{(c)}}{\leqslant} m\big(E_{R_0} \cap I\big) \\ {}_{[E_{R_0} \subset E]} \qquad & \overset{\text{OK}}{\leqslant} m\big(E \cap I\big) \leqslant m(I), \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration par l'entremise sympathique d'une inégalité triviale 'OK'.

Exercice 3. (a) En partant de :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*} = \mathbf{1}_{]0,1[} + \mathbf{1}_{[1,\infty[},$$

effectuons la majoration pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
\big|f_n(x)\big| &\leqslant \left|\frac{\sin x}{x^2}\,\frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}}\right|\,\mathbf{1}_{]0,1[} + \left|\frac{\sin x}{x^2}\,\frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}}\right|\,\mathbf{1}_{[1,\infty[}\\
&\leqslant \frac{|\sin x|}{x^2}\,x^{1/n}\,\mathbf{1}_{]0,1[} + \frac{1}{x^2}\,\mathbf{1}_{[1,\infty[}\\
\text{[}|\sin x| \leqslant |x|\text{]}\qquad &\leqslant \frac{|x|}{x^{2-\frac{1}{n}}}\,\mathbf{1}_{]0,1[} + \frac{1}{x^2}\,\mathbf{1}_{[1,\infty[}\\
\text{[}0 < x\text{]}\qquad &= x^{-1+\frac{1}{n}}\,\mathbf{1}_{]0,1[} + \frac{1}{x^2}\,\mathbf{1}_{[1,\infty[}
\end{aligned}$$

Alors pour tout $n \geqslant 1$ fixé, l'intégrabilité de f_n se voit grâce aux deux critères standard de Riemann concernant l'intégrabilité de $x \longmapsto x^{\alpha}$ en 0^+ et en $+\infty$.

- Lorsque $0 \longleftarrow x$, la fonction positive $x^{-1+\frac{1}{n}}$ est intégrable puisque $-1 < -1 + \frac{1}{n}$.
- Lorsque $x \longrightarrow \infty$, la fonction positive $\frac{1}{x^2}$ est intégrable puisque $1 < 2$.

(b) Sur le sous-intervalle :

$$[1,\infty[\ \subset \mathbb{R}_+^*,$$

nous venons de voir que la suite de fonctions $\big\{|f_n(x)|\big\}_{n=1}^{\infty}$ était majorée, indépendamment de $n \geqslant 1$, par la fonction-dominatrice $g\colon\ x \longmapsto \frac{1}{x}^2$, continue et intégrable sur $[1,\infty[$.

Le théorème de convergence dominée CD s'applique alors pour nous permettre d'intervertir limite et intégration :

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty} f_n(x)\,dx \overset{\text{CD}}{=} \int_1^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Ensuite, en nous souvenant que $\sqrt[n]{t} \longrightarrow 1$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ pour tout $t > 0$ puisque $e^{\frac{1}{n}\log t} \longrightarrow e^0$, nous pouvons déterminer ces limites ponctuelles en tout point $x \in [1,\infty[$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\frac{\sqrt[n]{x}}{1+\sqrt[n]{x}}\\
&= \frac{\sin x}{x^2}\,\frac{1}{1+1},
\end{aligned}$$

et ainsi :

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty} f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}\,dx,$$

cette dernière intégrable étant d'ailleurs visiblement convergente *via* $|\sin x| \leqslant 1$ (les raisonnements du théorème de convergence dominée garantissent d'ailleurs l'intégrabilité de la fonction-limite dans un cadre général).

(c) Tout d'abord, puisque nous venons de faire voir l'existence de la limite de ces intégrales $\int f_n$ en restriction au sous-intervalle $[1,\infty[\ \subset\ ]0,\infty[$, il nous reste à nous interroger sur l'existence et la valeur éventuelle de :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2}\,\frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}}\,dx = \mathbf{?}.$$

Et maintenant ici astucieusement, il fallait penser à appliquer le théorème Fatou pour court-circuiter certains raisonnements plus coûteux impliquant des minorations dans l'esprit de l'intégrale généralisée de Cauchy, En effet, sur $]0,1[$, la fonction $x \longmapsto \sin x$ demeure *positive*, tandis que les autres facteurs de l'intégrande f_n sont aussi visiblement positifs. De plus, on a la convergence ponctuelle simple :

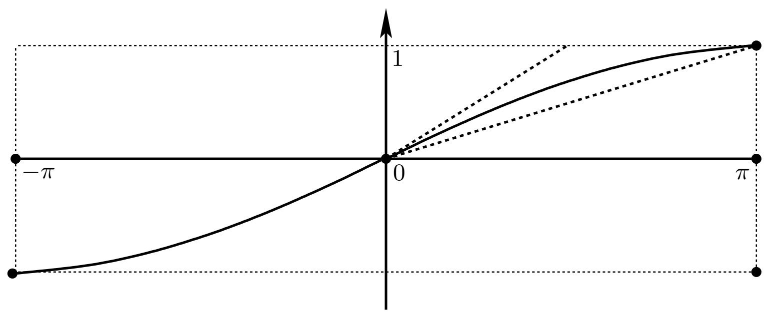
$$\frac{\sin x}{x^2}\,\frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}} \quad \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \quad \frac{\sin x}{x^2}\,\frac{1}{1+1} \qquad\qquad (x>0).$$

Yepouh ! Les hypothèses du lemme de Fatou sont donc satisfaites ! Et Fatou-qui-fait-tout :

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \;\leqslant\; \liminf_{n\to\infty} \int f_n,$$

produit :

$$\big(0\;<\;\big) \qquad \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2}\,dx \;\leqslant\; \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$



Enfin, sur l'intervalle $[0,\pi] \supset [0,1]$, la minoration classique exprimant que le graphe de la fonction sinus se situe au-dessus de sa corde :

$$\frac{1}{\pi}\,x \;\leqslant\; \sin x \qquad\qquad (0\leqslant x\leqslant \pi),$$

permet de constater que le minorant ci-dessus est lui-même minoré par une « *intégrale-dragon-divergente-comme-la-série-harmonique* » :

$$\begin{aligned}\infty \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \;&\leqslant\; \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2}\,dx\\ &\leqslant\; \liminf_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx,\end{aligned}$$

et par conséquent, la limite inférieure à droite est une vraie limite, immodérément égale à $+\infty$!

Au final, la limite recherchée existe, et elle vaut donc :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx + \lim_{n\to\infty}\int_1^\infty f_n(x)\,dx\\ &=\; \infty + \mathsf{constante}\\ &=\; \infty.\end{aligned}$$

Exercice 4. (a) Les fonctions f_n pour $n \in \mathbb{N}$ sont continues sur $[a,b]$ (rappelons que F, dérivable sur $[a,+\infty[$, y est donc continue) et donc également mesurables. De ce fait, leur limite ponctuelle (qui n'est autre que F' !) est également mesurable.

(b) Fixons $M>0$ un réel tel que l'on ait $|F'| \leqslant M$ sur $[a,b]$. Par définition, on a donc aussi $|F'(b)| \leqslant M$ et il en résulte que l'extension (toujours notée F) de F à $[a,+\infty[$ vérifie aussi $|F'| \leqslant M$ sur $[a,+\infty[$.

Si $x \in [a,b]$ et $n \in \mathbb{N}$ sont fixés, observons que le théorème de la moyenne de Lagrange (aussi appelé théorème des accroissements finis) assure l'existence d'un réel $x < c_{x,n} < x + 2^{-n}$ tel que l'on ait :

$$\begin{aligned} F(x+2^{-n}) - F(x) &= \big(x + 2^{-n} - x\big)\, F'(c_{x,n}) \\ &= 2^{-n} F'(c_{x,n}), \end{aligned}$$

de sorte que l'on trouve $|f_n(x)| \leqslant |F'(c_{x,n})| \leqslant M$. On obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n| \leqslant M \quad \text{sur } [a,b].$$

En particulier, la mesurabilité des fonctions f_n et le théorème de comparaison assurent que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,b]$ puisque la fonction constante M l'est.

Les conditions sont donc les suivantes :

- la suite (f_n) est constituée de fonctions intégrables au sens de Lebesgue sur $[a,b]$;
- la suite (f_n) converge ponctuellement (partout) sur $[a,b]$ vers F' ;
- pour tout n, on a $|f_n| \leqslant M$ sur $[a,b]$ où la fonction constante M (indépendante de n !) est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,b]$.

Les hypothèses du théorème de convergence dominée sont donc satisfaites par la suite (f_n).

(c) Le théorème de convergence dominée, appliqué à (f_n), assure à la fois l'intégrabilité sur $[a,b]$ de la fonction $F' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ et l'égalité :

$$\int_a^b F' = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Or on calcule, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f_n &= 2^n \left[\int_a^b F(x+2^{-n})\, dx - \int_a^b F(x)\, dx \right] \\ &= 2^n \left[\int_{a+2^{-n}}^{b+2^{-n}} F - \int_a^b F \right] \\ &= 2^n \left[\int_b^{b+2^{-n}} F - \int_a^{a+2^{-n}} F \right]. \end{aligned}$$

La continuité de F en a et en b assure alors que l'on a :

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \int_b^{b+2^{-n}} F = F(b) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} 2^n \int_a^{a+2^{-n}} F = F(a),$$

et donc on trouve comme attendu :

$$\int_a^b F' = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = F(b) - F(a).$$

(d) Soit $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ une primitive de f, *i.e.* une fonction dérivable vérifiant $F' = f$ sur $[c,d]$, par exemple $F(x) := \int_c^x f(t)\, dt$ pour tout $x \in [x,d]$, l'intégrale étant ici celle de Riemann ou celle de Lebesgue — choisissez pour qui vous votez !

Alors $f = F'$ est une dérivée bornée (elle est continue sur l'intervalle compact $[c, d]$!), et puisque par hypothèse g' est *bornée* sur $[a, b]$, la fonction suivante , définie sur $[a, b]$, est elle aussi *bornée :*

$$(f \circ g)\, g' = (F' \circ g)\, g' = (F \circ g)'.$$

Cette identité montre alors que la composée dérivable $F \circ g$ est de dérivée *bornée* sur son ensemble de définition $[a, b]$.

De ce fait, le résultat de la Question **(c)** s'applique à la fonction $F \circ g$, et il donne :

$$\int_a^b (f \circ g)\, g' = \int_a^b (F \circ g)' = F \circ g(b) - F \circ g(a) = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big).$$

Mais par ailleurs et plus simplement, on a pour tous $c \leqslant x < y \leqslant d$, en appliquant à nouveau le résultat de la Question **(c)** et en tenant compte du fait que $F' = f$ sur $[c, d]$:

$$F(y) - F(x) = \int_x^y F' = \int_x^y f.$$

Selon que g est croissante ou décroissante, il suffit alors d'appliquer cette égalité à $x = g(a)$ et $y = g(b)$ ou à $x = g(b)$ et $y = g(a)$ respectivement, pour conclure.

(e) En un point quelconque $x \in \,]0, 1]$, cette fonction G est évidemment dérivable de dérivée égale à :

$$G'(x) = 2\, x \sin \tfrac{1}{x^2} - \tfrac{2}{x} \cos \tfrac{1}{x^2}.$$

On a aussi :

$$G'(0) := \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in]0,1]}} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in]0,1]}} x \sin \frac{1}{x^2} = 0.$$

Ainsi G est dérivable sur $[0, 1]$ tout entier.

Il résulte alors de la Question **(a)** que $G' \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ est mesurable.

(f) Si on définit $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ en posant, pour $x \in [0, 1]$:

$$h(x) := \begin{cases} 2\, x \sin \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

alors h est continue, et donc intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, 1]$, *via*, par exemple, un théorème du cours.

Or on a $G' = h - g$ (et donc aussi $g = h - G'$) sur $[0, 1]$. Il en résulte aussitôt que G' est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, 1]$ si et seulement si g l'est. Par ailleurs, $g = h - G'$, différence de deux fonctions mesurables, est mesurable, et on sait donc que g est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, 1]$ si et seulement si $|g|$ l'est.

(g) Si $0 < a < b \leqslant 1$ sont donnés, alors $|g|$ est continue sur $[a, b]$; elle y est donc intégrable au sens de Lebesgue.

(h) La suite de fonctions mesurables positives (γ_n) définies pour $n \geqslant 1$ par :

$$\gamma_n := |g|\, \mathbf{1}_{[1/\sqrt{\pi}, 1]} + \sum_{k=1}^{n} |g|\, \mathbf{1}_{[1/\sqrt{(k+1)\pi}, 1/\sqrt{k\pi}]},$$

croît ponctuellement presque partout sur $[0, 1]$ vers $|g| = \gamma_\infty$. Si $|g|$ était intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, 1]$, il résulterait aussitôt du théorème de convergence monotone que l'on eût :

$$\begin{aligned}\infty > \int_0^1 |g| &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \gamma_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\int_{1/\sqrt{\pi}}^1 |g| + \sum_{k=1}^{n} \int_{1/\sqrt{(k+1)\pi}}^{1/\sqrt{k\pi}} |g|\right] \\ &= \int_{1/\sqrt{\pi}}^1 |g| + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/\sqrt{(k+1)\pi}}^{1/\sqrt{k\pi}} |g|.\end{aligned}$$

(i) Fixons $k \in \mathbb{N}^*$ et observons que si l'on introduit la fonction *dé*croissante :

$$\begin{aligned}\varphi_k\colon \quad \big[k\pi, (k+1)\pi\big] &\longrightarrow \big[1/\sqrt{(k+1)\pi}, 1/\sqrt{k\pi}\big] \\ t &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{t}} = \varphi_k(t),\end{aligned}$$

on a grâce à la Question **(d)** — attention au signe moins devant l'intégrale ! — :

$$\begin{aligned}\int_{1/\sqrt{(k+1)\pi}}^{1/\sqrt{k\pi}} |g| = \int_{\varphi_k[(k+1)\pi]}^{\varphi_k(k\pi)} |g| &= -\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \big|g\big(\varphi_k(t)\big)\big|\, \varphi_k'(t)\, dt \\ &= -2\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sqrt{t}\, |\cos t| \left(-\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\right) dt \\ &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos t|}{t}\, dt.\end{aligned}$$

Or on peut minorer cette dernière intégrale, grâce à la π-périodicité de $|\cos|$:

$$\begin{aligned}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos t|}{t}\, dt &\geqslant \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\cos t|\, dt \\ &= \frac{1}{k+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos t|\, dt}_{\text{constante } >0}.\end{aligned}$$

La divergence de la série harmonique $\infty = \sum_k \frac{1}{k+1}$ permet alors de conclure que l'on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/\sqrt{(k+1)\pi}}^{1/\sqrt{k\pi}} |g| = \infty,$$

et ainsi que $|g|$ ne peut *pas* être intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, 1]$, car si elle l'était, la somme ci-dessus devrait être *finie* en vertu de la formule obtenue à la Question **(h)**.

Exercice 5. **(a)** L'hypothèse $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| = 0$ implique en particulier qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que :

$$\int_E \big|f_{n_0} - f\big| < \infty,$$

et alors, en écrivant :

$$f = f - f_{n_0} + f_{n_0},$$

l'inégalité triangulaire et l'intégrabilité de f_{n_0} montrent aussitôt que f est intégrable :

$$\begin{aligned}\int_E |f| &\leqslant \int_E \big|f - f_{n_0}\big| + \int_E \big|f_{n_0}\big| \\ &< \infty.\end{aligned}$$

(b) Supposons donc que $\int_E |f| < \infty$. La suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ étant croissante depuis son départ f_1 vers sa fonction-limite f :

$$f_1 \leqslant f_n \leqslant f \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

il vient « en vertu de la croissance de l'intégration » :

$$\underbrace{\int_E f_1}_{\text{constante finie}} \leqslant \int_E f_n \leqslant \underbrace{\int_E f}_{\text{constante finie}}.$$

Or comme f_1 est intégrable, et comme f l'est aussi d'après l'hypothèse faite **(ii)**, ces deux inégalités font voir que la suite numérique :

$$\bigg\{\int_E f_n\bigg\}_{n=1}^{\infty},$$

est bornée inférieurement ainsi que supérieurement, et donc il est clair que :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}} \bigg|\int_E f_n\bigg| < \infty.$$

(c) Supposons donc la finitude de :

$$M_1 := \sup_{n\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}} \bigg|\int_E f_n\bigg| < \infty.$$

Effectivement, on a :

$$\begin{aligned}|f_n| &= \big|f_n - f_1 + f_1\big| \\ &\leqslant \big|f_n - f_1\big| + \big|f_1\big| \\ \text{[Croissance } f_1 \leqslant f_n \text{ !]} \qquad &= f_n - f_1 + \big|f_1\big| \\ \text{[Soyons fous : modifions !]} \qquad &= f_n + \big(|f_1| - f_1\big),\end{aligned}$$

d'où par intégration :

$$\begin{aligned}\int_E |f_n| &\leqslant \int_E f_n + \int_E \big(|f_1| - f_1\big) \\ &\leqslant M_1 + \mathsf{constante} \\ &= \mathsf{constante} < \infty,\end{aligned}$$

ce qui nous donne **(iv)** :

$$\sup_{n\geqslant 1} \int_E \big|f_n\big| < \infty.$$

(d) Supposons donc la finitude de :

$$M_2 := \sup_{n\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}} \int_E \big|f_n\big| < \infty.$$

Pour $n \geqslant 1$ fixé, nous avons par croissance ponctuelle des f_n :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant f_n - f_1 &= \big|f_n - f_1\big| \\ &\leqslant \big|f_n\big| + \big|f_1\big|, \end{aligned}$$

d'où par intégration :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_E \big(f_n - f_1\big) &= \int_E \big|f_n\big| + \int_E \big|f_1\big| \\ &\leqslant \underbrace{M_2 + \int_E \big|f_1\big|}_{=:\, M_3 < \infty} \end{aligned}$$

Maintenant, la suite :

$$\big\{f_n - f_1\big\}_{n=1}^{\infty}$$

est non seulement *croissante* puisque :

$$f_n \leqslant f_{n+1} \qquad \Longrightarrow \qquad f_n - f_1 \leqslant f_{n+1} - f_1,$$

mais encore *positive* puisque :

$$f_1 \leqslant f_n \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \leqslant f_n - f_1.$$

Donc nous sommes dans la situation favorable où le théorème de convergence monotone s'applique ! Et ainsi, en prenant la limite quand $n \longrightarrow \infty$ de l'inégalité ci-dessus :

$$0 \leqslant \int_E \big(f_n - f_1\big) \leqslant M_3,$$

nous trouvons deux inégalités :

$$0 \leqslant \int_E \big(f - f_1\big) \leqslant M_3,$$

qui montrent bien que la fonction positive $f - f_1$ est intégrable (sur E).

(e) Ainsi, nous avons obtenu l'intégrabilité de :

$$g := f - f_1 \in L^1(E).$$

Alors pour tout $n \geqslant 1$, en partant de $-f_n \leqslant -f_1$, les inégalités uniformes :

$$0 \leqslant f - f_n \leqslant \underbrace{f - f_1}_{g \,\in\, L^1(E)}$$

interprétées comme *inégalités de domination* par une fonction $g \in L^1(E)$ de la suite $\{f - f_n\}_{n=1}^{\infty}$, montrent que le théorème de convergence dominée CD s'applique à cette suite de fonctions positive, pour nous offrir la conclusion :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_E \big|f_n - f\big| = \lim_{n\to\infty} \int_E \big(f - f_n\big) &\overset{\text{CD}}{=} \int_E \lim_{n\to\infty} \big(f - f_n\big) \\ &= \int_E 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$