Insuffisances de l'intégrale de Cauchy, Riemann, Darboux, Jordan Nécessité métaphysique de la Théorie de Lebesgue

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont pas de dérivée. Charles HERMITE.

1. Changement conceptuel révolutionnaire dans l'Analyse

Au début des années 1870, un changement conceptuel révolutionnaire commença à percer dans l'Analyse mathématique, changement qui conduisit ultérieurement à une évolution spectaculaire de notre compréhension de notions aussi élémentaires que celle de *fonction*, de *continuité*, de *différentiabilité*, d'*intégrabilité*.

Précédemment, les fonctions utiles en Analyse étaient essentiellement données par des formules ou des expressions développables en série entière, éventuellement en un nombre fini de morceaux, et donc ces fonctions étaient par nature continues, ou presque, avec de plus une infinité de dérivées sauf peut-être en un nombre fini de points. Aussi ces fonctions étaient-elles manifestement intégrables par toute méthode d'intégration connue.

Mais à partir de la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, ces idées ont commencé à éprouver leurs limites au contact d'exemples impromptus variés et de problèmes nouveaux qui apparaissaient en Analyse, questions qui ne pouvaient plus être ignorées, et qui requéraient l'élaboration de nouveaux concepts pour être abordées, voire résolues.

En parallèle à ces nouvelles découvertes, des besoins théoriques de type géométrique sont apparus, notamment l'exigence de comprendre plus en profondeur la nature des courbes, leur rectifiabilité, leur extension. Mais surtout, les débuts de la théorie abstraite des ensembles ont été initiés par l'étude des sous-ensembles de la droite réelle ou du plan, et par la question de savoir quelle '*mesure*' assigner à de tels sous-ensembles.

Ceci ne veut pas dire que ne s'exprimait pas une résistance parfois considérable à l'émergence de tels nouveaux points de vue exigés par le sujet. Paradoxalement, quelques uns des mathématiciens les plus éminents de l'époque, ceux dont on aurait pu attendre une haute appréciation de ces directions nouvelles de recherche, se sont avérés être les plus réticents et les plus sceptiques.

Alors le fait que ces idées précurseurs ont finalement résisté aux controverses tient principalement à ce qu'elles s'arrimaient à des questions profondes ouvrant sur la création d'« *extra-êtres mathématiques* » absolument dignes d'étude.

Seule l'insistance d'un questionnement mathématique récurrent a le pouvoir de déceler l'existence d'objet nouveaux qui pourront se fondre ultérieurement dans une harmonie théorique supérieure.

2. Séries de Fourier : complétion

Toutes les fois qu'une fonction bornée :

$$f\colon\quad [-\pi,\,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$

est Riemann-intégrable, on peut lui associer sa *série de Fourier :*

$$f \,\sim\, \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{i\,n\,\theta},$$

dont les coefficients sont donnés par l'intégrale *de Riemann :*

$$\widehat{f}(n) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-i\,n\,t}\, \frac{dt}{2\pi},$$

le signe $\sim$ étant là pour signifier que la fonction f n'est en fait pas toujours égale à sa série de Fourier. Au passage, donc, il y a une question très difficile que nous ne regarderons pas pour l'instant : *quelles fonctions sont égales à leur série de Fourier ?*

En utilisant exclusivement l'intégrale élémentaire de Riemann, on peut alors assez aisément démontrer la célèbre *identité de Parseval* que nous admettrons ici :

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|\widehat{f}(n)\big|^2 \,&=\, \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, \frac{dt}{2\pi} \\ &<\, \infty,\end{aligned}$$

cette dernière intégrale étant *finie*, puisque $|f|^2 = f\overline{f}$ est aussi bornée Riemann-intégrable. Nous affirmons alors que *cette relation entre les fonctions et leurs coefficients de Fourier n'est pas complètement réciproque lorsqu'on se limite aux fonctions Riemann-intégrables*. Et donc, la théorie de l'intégration de Riemann est insuffisante.

En effet, dans cette égalité entre une somme et une intégrale, observons que la suite (doublement infinie) des coefficients de Fourier de f :

$$\big(\widehat{f}(n)\big)_{-\infty\leqslant n\leqslant\infty}$$

appartient à un espace noté classiquement :

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \bigg\{ z = (z_n)_{-\infty\leqslant n\leqslant\infty} \colon\; z_n \in \mathbb{C},\; \sum_{-\infty\leqslant n\leqslant\infty} |z_n|^2 < \infty \bigg\}.$$

Or on démontre que cet espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ est un espace $\mathbb{C}$-vectoriel qui est *complet* pour la norme naturelle :

$$\|z\| := \bigg(\sum_{-\infty\leqslant n\leqslant\infty} |z_n|^2 \bigg)^{1/2}.$$

Alors il se trouve que si on prend un élément quelconque $z = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de cet espace, on peut lui associer formellement la 'fonction' :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n\, e^{i\,n\,\theta},$$

qui n'est peut-être pas bien définie, mais en tout cas, *la question se pose de déterminer quel type de fonction on obtiendrait ainsi*.

En fait, il est assez facile de construire des éléments $z = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de cet espace vectoriel normé complet $\ell^2(\mathbb{Z})$ tels que la fonction associée $\sum z_n\, e^{in\theta}$ existe bel et bien *mais n'est pas Riemann-intégrable !*

On peut même établir que l'espace des fonctions Riemann-intégrables n'*est pas complet !*

En résumé, on est conduit à (au moins) deux questions :

Question. *Quelles pourraient être les 'fonctions' éventuelles f qui apparaîtraient lorsqu'on complète l'espace des fonctions Riemann-intégrables ?*

Autrement dit, étant donné une suite doublement infinie arbitraire $z = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, avec $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |z_n|^2 < \infty$, quelles seraient les fonctions du type $\sum_{n\in\mathbb{Z}} z_n\, e^{in\theta}$? La réponse sera donnée par la théorie de Lebesgue, ce seront exactement les fonctions appartenant à un certain espace noté :

$$L^2\big([-\pi,\,\pi]\big) := \bigg\{ f\colon [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}\colon \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}}_{\substack{\text{même symbole}\\ \text{pour une intégrale différente}}} |f(t)|^2\, \frac{dt}{2\pi} \,<\, \infty \bigg\},$$

des fonctions dites *de carré intégrable*, *l'intégration s'effectuant au sens de Lebesgue*, plus général que celui de Riemann.

Question. *Comment intègre-t-on de telles fonctions, de manière à vérifier l'identité de Parseval en toute généralité ?*

Réponse : en utilisant l'intégrale de Lebesgue !

3. Limites de fonctions continues

Soit une suite de fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$:

$$f_n\colon \quad [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad (n \geqslant 1).$$

Supposons que pour tout $x \in [0,1]$, la limite ponctuelle :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x),$$

existe, et interrogeons-nous sur la nature de la fonction-limite f.

Lorsque la convergence est uniforme, les conclusions sont faciles, puisque f est alors partout continue. Mais dès qu'on supprime l'hypothèse de convergence uniforme, les choses changent radicalement, et les phénomènes qui apparaissent peuvent devenir très subtils.

Un exemple d'un tel phénomène, que nous détaillerons au chapitre suivant, est donné par une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ qui converge simplement vers une fonction f en satisfaisant les conditions suivantes :

(i) $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in [0,1]$;

(ii) en tout point x fixé, la suite réelle $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ est monotone décroissante lorsque $n \to \infty$;

(iii) la fonction-limite est extrêmement discontinue, et en particulier, elle n'est *pas* Riemann-intégrable.

Mais alors, en vertu des deux conditions **(i)** et **(ii)**, la suite réelle :

$$\bigg(\int_0^1 f_n(x)\,dx\bigg)_{n\geqslant 1}$$

est positive monotone décroissante, *donc elle admet une limite* $\in \mathbb{R}_+$. Alors il est tout à fait naturel de se poser la :

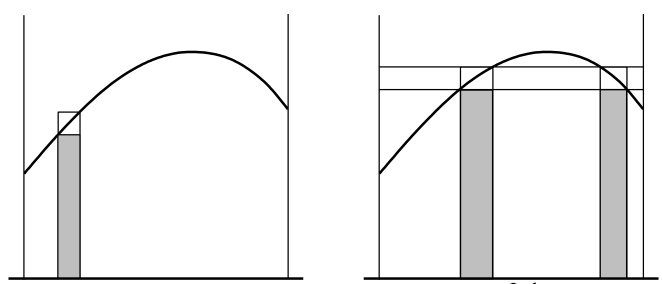
Question. *Quelle méthode d'intégration pourrait être développée afin qu'avec une nouvelle théorie — en admettant le même symbole $\int$ qui aurait une signification plus étendue que dans la théorie de Riemann — on puisse intégrer f et obtenir :*

$$\underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{\text{à inventer}} \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx\,?$$

Encore une fois, la réponse est : avec la théorie de l'intégrale de Lebesgue !

4. Trancher selon l'axe des ordonnées

> Supposons qu'on veuille, connaissant chaque jour à 1 cm près l'étiage d'un cours d'eau dont le flux varie assez lentement, déterminer son niveau moyen dans une année non bissextile. Un premier procédé consistera à ajouter les étiages de tous les jours de l'année et à diviser la somme obtenue par 365. Un second procédé sera de compter pour chaque étiage évalué en centimètres le nombre de jours où le fleuve a atteint cette hauteur, puis de faire le produit de ce nombre par l'étiage correspondant, d'ajouter enfin tous les résultats obtenus pour les divers échelons centimétriques. Le résultat divisé par 365 donne la moyenne cherchée.



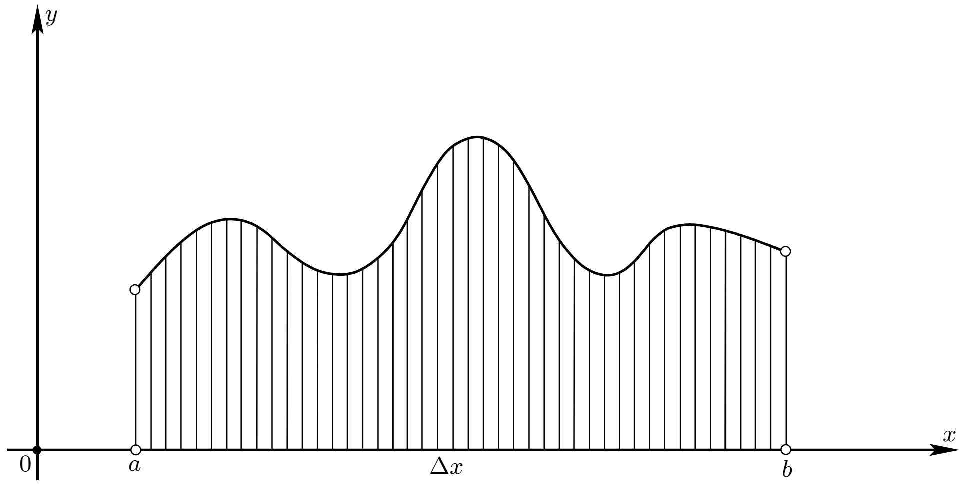
Cauchy, Riemann, Darboux, Jordan — Lebesgue

> La première méthode rappelle l'opération de Riemann, la deuxième celle de Lebesgue.
> Arnaud DENJOY.

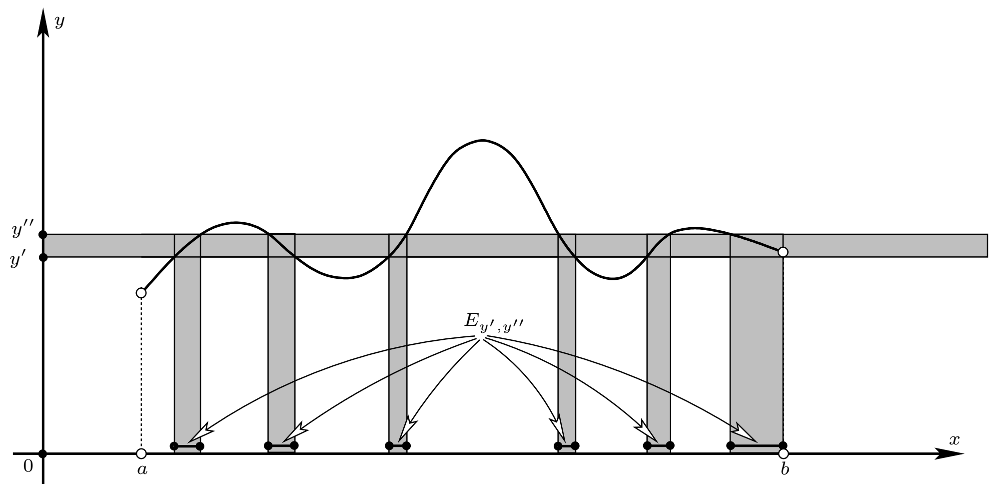
Géométriquement, l'idée fondamentale de la théorie de l'intégrale de Lebesgue est très simple : elle consiste en un *renversement de la perspective de découpage*.

Étant donné par exemple pour simplifier une fonction continue positive $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie sur un intervalle fermé borné $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, rappelons que son intégrale est l'aire de son hypographe :

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \mathsf{Aire}\Big(\big\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\colon\; 0\leqslant y\leqslant f(x)\big\}\Big).$$



Cauchy, Riemann, Darboux, Jordan emploient la méthode la plus directement intuitive, qui consiste à découper cette aire en *tranches fines verticales*.



À l'inverse, Lebesgue découpe le graphe $\{y = f(x)\}$ en *tranches fines horizontales*.

Par exemple, étant donné deux réels y' et y'' assez proches l'un de l'autre et satisfaisant :

$$\inf_{[a,b]} f \leqslant y' < y'' \leqslant \sup_{[a,b]} f,$$

la bande horizontale fine :

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \colon \ y' \leqslant y \leqslant y''\big\}$$

découpe le graphe $\{y = f(x)\}$ de f comme illustré sur le diagramme. Ensuite, en relation avec l'hypographe $\{0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, un tel découpage fait naturellement apparaître le sous-ensemble suivant de l'axe des x :

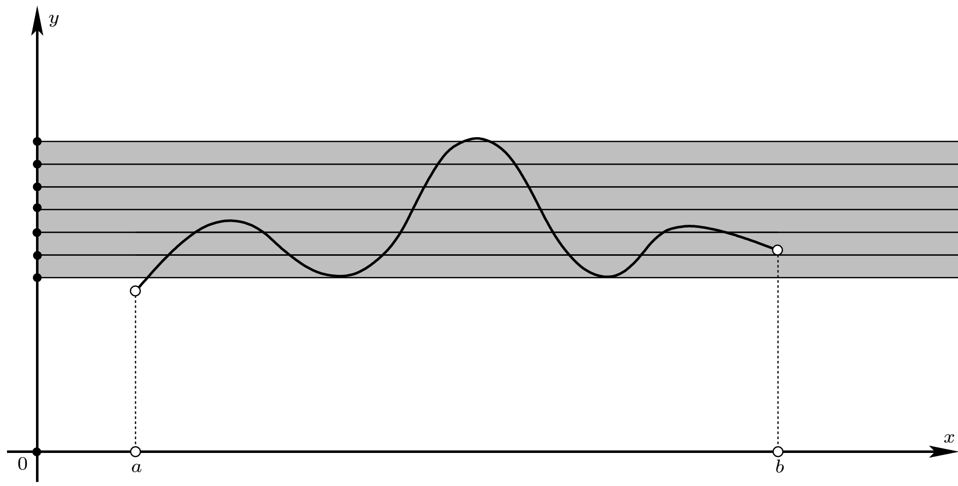
$$E_{y',y''} := \big\{x \in [a,b] \colon \ y' \leqslant f(x) \leqslant y''\big\},$$

qui consiste en six segments sur la figure. Alors dans la situation favorable où f est continue, lorsqu'on calcule l'aire de l'hypographe $\{0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, à toute tranche fine horizontale $\mathbb{R} \times [y', y'']$ est associée une aire approximativement égale à :

$$\underbrace{\frac{y'+y''}{2}}_{\substack{\text{hauteur}\\ \text{commune}\\ \text{approximative}}} \cdot \underbrace{\mathsf{mesure}\big(E_{y',y''}\big)}_{\substack{\text{longueur}\\ \text{totale}\\ \text{de la base}}},$$

pourvu que l'on puisse « *mesurer* » la longueur de tels sous-ensembles $E_{y',y''} \subset [a,b]$.

Effectuer comme Lebesgue des découpages fins horizontaux fait naturellement naître un nouveau problème, le Problème de la mesure*, détaillé dans la section suivante.*



En résumé, Cauchy, Riemann, Darboux, Jordan conceptualisent l'intégration comme un passage à la limite dans les formules d'approximation :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_k f(x_k)\,\underbrace{\big(x_k - x_{k-1}\big)}_{\substack{\text{subdivision}\\ \text{de l'axe}\\ \text{horizontal}}}.$$

Lebesgue, quant à lui, passe à la limite dans les formules d'approximation :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_l \underbrace{y_l}_{\substack{\text{subdivision}\\ \text{de l'axe}\\ \text{vertical}}} \cdot \mathsf{mesure}\big\{x \in [a,b]\colon\ y_{l-1} \leqslant f(x) \leqslant y_l\big\},$$

mais il doit auparavant développer une vaste et nouvelle *Théorie de la Mesure*.

5. Le problème de la mesure

Afin d'essayer de résoudre toutes ces questions, le problème fondamental sur lequel Lebesgue lui-même a débouché est donc celui d'assigner une mesure aux ensembles de points. Pour le formuler de manière imprécise en dimension $d = 2$, étant donné un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}^2$, ce problème demande comment définir son aire 2-dimensionnelle $m_2(E)$, et ce, en généralisant la notion standard de surface pour les figures géométriques élémentaires.

Essayons plutôt d'abord de considérer ce problème en dimension $d = 1$, à savoir tentons de formuler la question de construire une mesure 1-dimensionnelle $m = m_1$ qui généralisait considérablement la notion de longueur d'un segment dans $\mathbb{R}$.

Disons alors que nous recherchons une fonction positive m définie sur la famille des sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ — fonction que nous autorisons donc à prendre la valeur ∞ au cas où les longueurs soient infinies —, et qui satisfasse les conditions naturelles suivantes :

(i) $m(E) = b - a$ lorsque $E = [a, b]$ est un intervalle compact, $-\infty < a < b < \infty$, de longueur euclidienne $b - a$;

(ii) $m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$, toutes les fois que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ où les ensembles E_n sont disjoints deux à deux.

Cette deuxième condition **(ii)** s'appelle *addititivé dénombrable* de la mesure m. Elle implique en particulier l'additivité finie :

(i') $m\big(E_1 \cup \cdots \cup E_N\big) = m(E_1) + \cdots + m(E_N)$ lorsque $E_{j_1} \cap E_{j_2} = \emptyset$ pour $j_1 \neq j_2$.

Toutefois — et c'est là un point crucial —, la condition d'additivité par réunion *infinie* dénombrable disjointe sera un point-force majeur de la théorie de la mesure développée par Borel et Lebesgue. En fait, la condition restreinte **(i')** d'additivité disjointe *finie* est celle qui a été choisie par une théorie de la mesure plus ancienne attribuée à Jordan, mais il s'avère comme nous allons le voir que cette dernière est définitivement limitée et inadéquate.

Aux axiomes **(i)** et **(ii)**, on ajoute la demande parfaitement naturelle que la mesure soit aussi invariante par translation :

(iii) $m(E + h) = m(E)$ pour tout $h \in \mathbb{R}$.

Un résultat fondamental de la théorie montre alors qu'il existe une unique telle mesure m, appelée *mesure de Lebesgue* sur $\mathbb{R}$, et lorsqu'on se limite à la classe des sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}$ qui sont mesurables de cette manière-là, on obtient une classe déjà extrêmement étendue — bien qu'elle ne contienne pas *tous* les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ —, classe qui contient tous les ouverts, tous les fermés, qui est stable par réunions dénombrables, par intersections dénombrables, par passage au complémentaire, ces opérations pouvant de plus être répétées une infinité (dénombrable) de fois.

Ce sera donc par la construction mathématique complète de cette *mesure de Lebesgue* que nous débuterons notre étude de la théorie. Ensuite, grâce à de telles fondations fermes et solides, nous pourrons développer la théorie de l'intégration, laquelle, par toute sa splendeur abstraite éclatante — comme un soleil resplendissant réservé aux prisonniers qui seront parvenus à s'extirper de la caverne de Platon —, résoudra d'un seul trait tous les problèmes que nous venons de mentionner.

6. Une chronologie succincte

Concluons ce chapitre de transition motivationnelle en listant quelques événements marquants qui ont marqué les premiers moments historiques du développement de l'Analyse infinie.

1872 – Weierstrass construit une fonction continue qui n'est dérivable en aucun point.

1881 – Jordan introduit les fonctions dites *à variation bornée*, et plus tard en 1887, il montre qu'elles sont naturellement reliées à la rectifiabilité des courbes.

1883 – Cantor introduit l'ensemble ternaire qui porte son nom, source de nombreux contre-exemples pathologiques mais intéressants (*cf.* le chapitre qui suit).

1890 – Peano construit une courbe continue qui parcourt tous les points d'un carré.

1898 – Borel introduit les ensembles mesurables.

1902 – Lebesgue développe la théorie de la mesure et la théorie de l'intégration.

1905 – Vitali construit un ensemble non-mesurable en utilisant l'Axiome du choix.

1906 – Fatou applique la théorie de Lebesgue à l'Analyse Complexe.

7. Exercices

Exercice 1. Construire une suite de fonctions Riemann-intégrables $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ sur $[-\pi, \pi]$ satisfaisant :

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \big|f_n(\theta)\big|^2 \, \frac{d\theta}{2\pi},$$

mais dont les limites ponctuelles :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\theta)$$

n'existent en *aucun* point $\theta \in [-\pi, \pi]$. Indication: Trouver une suite d'intervalles $I_n \subset [-\pi, \pi]$ dont la longueur tend vers 0 telle que chaque point $\theta \in [-\pi, \pi]$ appartient à un nombre infini de I_n sans appartenir à tous, et prendre $f_n := \mathbf{1}_{I_n}$.

Exercice 2. Sur $[0, 2\pi]$, soit la fonction définie par :

$$f(\theta) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{en } \; \theta = 0, \\ \log \dfrac{1}{\theta} & \text{lorsque } \; 0 < \theta \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

et soit la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions définies par :

$$f_n(\theta) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \; 0 \leqslant \theta < \frac{1}{n}, \\ f(\theta) & \text{lorsque } \; \frac{1}{n} \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

(a) Vérifier que f n'est pas Riemann-intégrable, tandis que les f_n le sont.

(b) Montrer que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans l'espace $\mathscr{R}[0, 2\pi]$ des fonctions Riemann-intégrables g sur $[0, 2\pi]$ muni de la semi-norme $\int_0^{2\pi} \big|g(\theta)\big| \, \frac{d\theta}{2\pi}$.

(c) Interpréter le résultat.

Exercice 3. Soit à nouveau $\mathscr{R}[0, 2\pi]$ l'espace des fonctions Riemann-intégrables g sur $[0, 2\pi]$, mais cette fois-ci muni d'une autre semi-norme :

$$\|g\|_2 \;:=\; \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big|g(\theta)\big|^2 \, \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(a) Montrer qu'il existe des fonctions Riemann-intégrables non identiquement nulles telles que $\|g\|_2 = 0$.

(b) Cependant, si $g \in \mathscr{R}[0, 2\pi]$ satisfait $\|g\|_2 = 0$, montrer que $g(\theta_0) = 0$ en tout point $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ en lequel g est continue.

(c) Réciproquement, montrer que si $g \in \mathscr{R}[0, 2\pi]$ s'annule en tous ses points de continuité, alors $\|g\|_2 = 0$.