Théorie de l’intégration de Lebesgue

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d’Orsay
Université Paris-Saclay, France

> Une découverte, celle de l’intégrale de Lebesgue, n’est d’abord entendue en son vrai sens que de rares adeptes, prompts à éclairer de ce flambeau saisi quelques coins obscurs de la science. Même la réaction générale est hostile et vive contre l’irruption d’une idée balayant sans égards les jugements révérés. Lentement, mais irrésistiblement, la lumière pénètre un monde d’esprits de plus en plus étendu. Une heure vient où, dans cet ordre de pensées, la dernière acquise des grandes vérités apparaît à tous comme le jour, claire, évidente, et pour finir banale.
> Arnaud DENJOY

1. Intégrale de Lebesgue : propriétés et théorèmes de convergence

Nous allons définir la notion générale d’*intégrale de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^d$ en procédant par généralisations successives à des familles de plus en plus étendues de fonctions. À chaque étape, nous vérifierons que l’intégrale satisfait toutes les propriétés élémentaires qu’on est en droit d’attendre d’elle, la linéarité, la monotonie, l’inégalité du triangle, et nous démontrerons des théorèmes de convergence qui expriment essentiellement que l’on peut intervertir limite et intégration. À la fin de ce processus définitionnel par élargissements successifs, nous aurons atteint une théorie si forte et si générale qu’elle sera d’une utilité décisive dans tous les développements ultérieurs de l’Analyse.

Nous procéderons en quatre étapes majeures, en intégrant progressivement :

1. les fonctions étagées ;

2. les fonctions bornées supportées sur un ensemble de mesure finie ;

3. les fonctions positives ;

4. les fonctions *intégrables*, au sens théorique le plus général.

Soulignons dès à présent que *toutes les fonctions seront d’emblée supposées mesurables*. Le plus souvent aussi, nous travaillerons avec des fonctions qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, et plus tard, nous considérerons aussi des fonctions qui sont à valeurs dans $\mathbb{C}$ en regardant leurs partie réelle et leur partie imaginaire.

2. Étape 1 : Fonctions étagées

Rappelons qu'une *fonction étagée*, telle que définie dans le chapitre précédent, est une fonction :

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k}(x),$$

qui est combinaison linéaire finie à coefficients $a_k \in \mathbb{R}$ de fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{E_k}$ de sous-ensembles mesurables $E_k \subset \mathbb{R}^d$ de mesures $m(E_k) < \infty$ *finies*.

Toutefois, une complication s'insinue dans cette définition, en tant qu'une fonction étagée peut en fait être écrite d'une infinité de manières différentes comme combinaisons linéaires de cette espèce ; par exemple, et quelque peu artificiellement, on a :

$$0 = \mathbf{1}_E - \mathbf{1}_E,$$

pour tout ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$. Fort heureusement, il existe une manière inambiguë de choisir un représentant *unique* parmi toutes les représentations possibles, représentant qui sera à la fois naturel et utile dans les démonstrations.

Proposition-Définition 2.1. *La forme canonique d'une fonction étagée φ est l'unique représentation :*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k},$$

dans laquelle les a_k sont distincts deux à deux, et les E_k sont disjoints deux à deux.

Démonstration. Trouver la forme canonique d'une fonction étagée n'est pas bien difficile. Puisque φ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, l'ensemble de ses valeurs :

$$\begin{aligned} \big\{a_1, \dots, a_N\big\} &= \big\{a_{k_1}, \dots, a_{k_M}\big\} \\ &=: \big\{c_1, \dots, c_M\big\} \end{aligned}$$

se réduit à un certain nombre $M \leqslant N$ de nombres réels *distincts deux à deux :*

$$c_{\ell_1} \neq c_{\ell_2} \qquad\qquad (1 \leqslant \ell_1 < \ell_2 \leqslant M).$$

Si donc nous introduisons les ensembles de niveau :

$$F_\ell := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ \varphi(x) = c_\ell\big\},$$

il vient que ces ensembles sont disjoints deux à deux (exercice mental). Par conséquent :

$$\sum_{\ell=1}^{M} c_\ell \cdot \mathbf{1}_{F_\ell} \,=\, \varphi,$$

est la forme canonique désirée de φ. □

Définition 2.2. Si φ est une fonction étagée sous forme canonique :

$$\varphi = \sum_{\ell=1}^{M} c_\ell \, \mathbf{1}_{F_\ell},$$

on définit l'*intégrale de Lebesgue* de φ comme étant le nombre réel :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, dx \,:=\, \sum_{\ell=1}^{M} c_\ell \cdot m\big(F_\ell\big).$$

Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable de mesure $m(E) < \infty$ finie, alors (exercice) :

$$\varphi(x) \cdot \mathbf{1}_E(x)$$

est encore une fonction étagée.

Définition 2.3. L'intégrale sur $E \subset \mathbb{R}^d$ mesurable de φ étagée sur $\mathbb{R}^d$ est définie par :

$$\int_E \varphi(x)\, dx \,:=\, \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, \mathbf{1}_E(x)\, dx.$$

Afin de bien signaler le choix de la mesure de Lebesgue m dans la définition de l'intégrale, on écrit parfois :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, dm(x),$$

pour l'intégrale de Lebesgue de φ.

Mais en fait, nous abrégerons souvent l'intégrale par :

$$\int \varphi(x)\, dx,$$

voire même par :

$$\int \varphi.$$

Proposition 2.4. *L'intégrale ainsi définie des fonctions étagées φ, ψ sur $\mathbb{R}^d$ jouit des cinq propriétés suivantes.*

(i) Indépendance vis-à-vis de la représentation : *Pour toute représentation — pas forcément canonique — :*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k},$$

on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \,=\, \sum_{k=1}^{N} a_k\, m\big(E_k\big).$$

(ii) Linéarité : *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big(a\, \varphi + b\, \psi\big) \,=\, a \int_{\mathbb{R}^d} \varphi + b \int_{\mathbb{R}^d} \psi.$$

(iii) Additivité domaniale : *Si F et G sont deux sous-ensembles disjoints de $\mathbb{R}^d$ de mesure finie, alors :*

$$\int_{F \cup G} \varphi \,=\, \int_F \varphi + \int_G \varphi.$$

(iv) Monotonie : *Si $\varphi \leqslant \psi$ en tout point, alors :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \psi.$$

(v) Inégalité du triangle : *La fonction valeur absolue $|\varphi|$ est aussi une fonction étagée et l'on a :*

$$\bigg| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \bigg| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|.$$

Démonstration. La seule affirmation qui est quelque peu délicate est la première. Il faut donc être astucieux lorsqu'on ramène une fonction étagée à sa représentation canonique, et nous allons effectuer cela en deux moments.

Supposons d'abord que dans la représentation :

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k},$$

les ensembles E_k sont *disjoints deux à deux*, sans toutefois demander que les a_k soient mutuellement distincts. Plus bas, nous verrons comment nous ramener à cette situation. Il s'agit maintenant d'établir **(i)**, et pour cela, nous devons ramener φ à sa forme canonique.

Si c_ℓ est l'une des valeurs distinctes $c_1, \dots, c_M$, avec $M \leqslant N$, que prennent $a_1, \dots, a_N$, introduisons l'ensemble :

$$E'_\ell := \bigcup_{\{k\colon a_k = c_\ell\}} E_k.$$

Les ensembles $\{k\colon a_k = c_\ell\}$ forment alors une partition de $\{1, 2, \dots, N\}$, et comme les E_k sont disjoints, $E'_1, \dots, E'_M$ sont disjoints deux à deux. De plus, on a visiblement :

$$m\big(E'_\ell\big) \,=\, \sum_{\{k\colon a_k = c_\ell\}} m\big(E_k\big).$$

Enfin, puisque :

$$\varphi = \sum_{\ell=1}^{M} c_\ell \cdot \mathbf{1}_{E'_\ell},$$

est la représentation canonique de φ, une application de la Définition 2.2 suivie d'une réorganisation donne le résultat :

$$\begin{aligned}
\int \varphi \ &\overset{\text{déf}}{=}\ \sum_{\ell=1}^{M} c_\ell\, m\big(E'_\ell\big) \\
&= \sum_{\ell=1}^{M} c_\ell \sum_{\{k\colon a_k = c_\ell\}} m\big(E_k\big) \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_k\, m\big(E_k\big).
\end{aligned}$$

Ensuite, traitons le cas général pour lequel les ensembles $E_1, \dots, E_N$ ne sont pas forcément disjoints, et les valeurs $a_1, \dots, a_N$ ne sont pas forcément distinctes. Pour ramener φ à sa forme canonique, il s'agit surtout de morceler les E_k jusqu'à en faire des pièces de puzzle qui ne se recouvrent plus.

Lemme 2.5. *Étant donné $N \geqslant 1$ sous-ensembles quelconques d'un ensemble abstrait D :*

$$E_1,\, E_2,\, \dots,\, E_N \,\subset\, D,$$

il existe $2^N - 1$ autres sous-ensembles :

$$E_1^*,\, E_2^*,\, \dots\dots\dots,\, E_{2^N-1}^* \,\subset\, D,$$

qui sont mutuellement disjoints :

$$\emptyset \,=\, E_{\ell_1}^* \cap E_{\ell_2}^* \qquad\qquad (1 \leqslant \ell_1 < \ell_2 \leqslant 2^N - 1),$$

dont la réunion est la même que celle des E_k *:*

$$\bigcup_{k=1}^{N} E_k = \bigcup_{\ell=1}^{2^N-1} E_\ell^*,$$

et qui satisfont de plus pour tout $k = 1, \dots, N$ *:*

$$E_k = \bigcup_{\{\ell \colon E_\ell^* \subset E_k\}} E_\ell^*.$$

Démonstration. Ces ensembles sont toutes les 2^N intersections possibles entre les E_k et leurs complémentaires $E_k^c = D \backslash E_k$:

$$\big(E_1 \text{ ou } E_1^c\big) \bigcap \cdots\cdots \bigcap \big(E_N \text{ ou } E_N^c\big),$$

à l'exclusion bien sûr du complémentaire commun :

$$E_1^c \bigcap \cdots \bigcap E_N^c,$$

puisque l'on souhaite demeurer dans la réunion des E_k. Codons alors toutes ces intersections possibles de manière binaire :

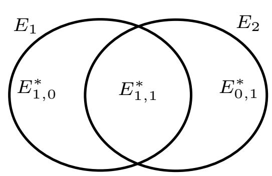
$$E_{i_1,\dots,i_N}^*, \qquad \text{avec } i_1, \dots, i_N \in \{0, 1\},$$

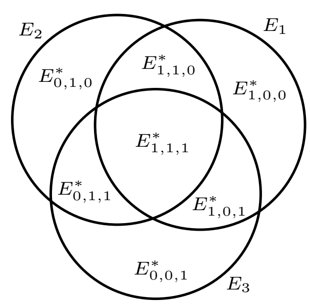
en écartant donc $E_{0,\dots,0}^*$ ce qui nous fait bien $2^N - 1$ ensembles.

Pour $N = 1$, on a $2^1 - 1 = 1$ et on prend $E_1^* := E_1$.

Pour $N = 2$, on a effectivement $2^2 - 1 = 3$ ensembles qui décomposent disjointement la réunion $E_1 \cup E_2$:

$$E_{1,1}^* = E_1 \cap E_2, \qquad E_{1,0} = E_1 \cap E_2^c, \qquad E_{0,1} = E_1^c \cap E_2.$$





Pour $N = 3$, on a effectivement $2^3 - 1 = 7$ ensembles décomposants. Le diagramme s'avère un auxiliaire utile pour qui souhaite (exercice) rédiger les détails combinatoires en langage symbolique. □

De la représentation de chaque E_k en réunion disjointe de certains E_ℓ^* découle :

$$\mathbf{1}_{E_k} = \sum_{\{\ell \colon E_\ell^* \subset E_k\}} \mathbf{1}_{E_\ell^*},$$

puis :

$$m\big(E_k\big) = \sum_{\{\ell \colon E_\ell^* \subset E_k\}} m\big(E_\ell^*\big).$$

Grâce à cette décomposition plus fine, on peut transformer naturellement :

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k} \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_k \sum_{\{\ell\colon E_\ell^* \subset E_k\}} \mathbf{1}_{E_\ell^*} \\
&= \sum_{\ell=1}^{2^N-1} \underbrace{\bigg(\sum_{\{k\colon E_k \supset E_\ell^*\}} a_k \bigg)}_{=:\, a_\ell^*} \cdot \mathbf{1}_{E_\ell^*}.
\end{aligned}
$$

Or maintenant, puisque cette nouvelle représentation de φ est telle que les ensembles mesurables E_ℓ^* sont disjoints deux à deux, nous pouvons lui appliquer le résultat obtenu dans la première partie de la démonstration, ce qui donne ici la conclusion **(i)** :

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \varphi &= \sum_{\ell=1}^{2^N-1} a_\ell^*\, m\big(E_\ell^*\big) \\
&= \sum_{\ell=1}^{2^N-1} \sum_{\{k\colon E_k \supset E_\ell^*\}} a_k\, m\big(E_\ell^*\big) \\
\text{[Reconnaître } m(E_k)\text{]} \qquad &= \sum_{k=1}^{N} a_k \underbrace{\sum_{\{\ell\colon E_\ell^* \subset E_k\}} m\big(E_\ell^*\big)}_{=\, m(E_k)} \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_k\, m\big(E_k\big).
\end{aligned}
$$

Ensuite, en partant de n'importe quelle représentation étagée pour φ et pour ψ, une fois la propriété **(i)** acquise, la propriété **(ii)** découle de la linéarité évidente des sommations.

Pour ce qui concerne la propriété **(iii)** d'addititivé de l'intégration sur les ensembles disjoints, on transforme :

$$
\begin{aligned}
\int_{F\cup G} \varphi &= \int \varphi \cdot \mathbf{1}_{F\cup G} \\
&= \int \bigg(\sum_{k=1}^{N} a_k\, \mathbf{1}_{E_k} \bigg) \cdot \big(\mathbf{1}_F + \mathbf{1}_G\big) \\
&= \int \bigg\{ \sum_{k=1}^{N} a_k\, \mathbf{1}_{E_k\cap F} + \sum_{k=1}^{N} a_k\, \mathbf{1}_{E_k\cap G} \bigg\} \\
\text{[Linéarité (ii)]} \qquad &= \int \bigg(\sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k} \bigg) \cdot \mathbf{1}_F + \int \bigg(\sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k} \bigg) \cdot \mathbf{1}_G \\
&= \int_F \varphi + \int_G \varphi.
\end{aligned}
$$

Pour **(iv)**, si $\eta \geqslant 0$ est une fonction étagée positive, il est clair (exercice mental) que sa forme canonique est aussi partout positive, et donc par la Définition 2.1, on a bien $\int \eta \geqslant 0$. Si $\varphi \leqslant \psi$, en posant $\eta := \psi - \varphi$, on a bien $\int \varphi \leqslant \int \psi$.

Enfin pour l'inégalité du triangle **(v)**, il suffit d'écrire φ sous sa forme canonique :

$$
\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k},
$$

et d'observer, puisque les E_k sont disjoints, que :

$$
|\varphi| = \sum_{k=1}^{N} \big|a_k\big| \cdot \mathbf{1}_{E_k}.
$$

Par conséquent, grâce à l'inégalité du triangle appliquée à la Définition 2.1 de l'intégrale, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\bigg| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \bigg| &= \bigg| \sum_{k=1}^{N} a_k\, m\big(E_k\big) \bigg| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{N} \big|a_k\big|\, m\big(E_k\big) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|,
\end{aligned}
$$

ce qui termine la démonstration détaillée de ces cinq propriétés (très) élémentaires. □

En fait incidemment, nous avons presque démontré l'énoncé suivant, qui correspond pleinement à la manière de penser propre à la théorie de la mesure : tout énoncé est valide à des ensembles de mesure nulle près.

Proposition 2.6. *Si deux fonctions étagées φ et ψ sur $\mathbb{R}^d$ satisfont presque partout :*

$$
\varphi \leqslant \psi,
$$

alors :

$$\int \varphi \leqslant \int \psi.$$

Démonstration. En considérant à la place la fonction étagée positive presque partout :

$$\begin{aligned} \eta &:= \psi - \varphi \\ &\geqslant 0, \end{aligned}$$

on se ramène à devoir montrer que $\int \eta \geqslant 0$. Or si η est mise sous forme canonique :

$$\eta = \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell \, \mathbf{1}_{E_\ell},$$

puisque l'intégrale de η vaut par définition :

$$\int \eta = \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell \, m\big(E_\ell\big),$$

on peut supposer que tous les E_ℓ sont de mesure strictement positive (mettre de côtés ceux qui sont de mesure nulle). Mais comme les E_ℓ sont disjoints deux à deux, la positivité presque partout de η nécessite (exercice mental) que tous les $b_\ell \geqslant 0$ soient positifs. Donc $\int \eta \geqslant 0$! □

3. Étape 2 : Fonctions mesurables bornées à support dans un ensemble de mesure finie

Définition 3.1. Le *support* d'une fonction mesurable $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble des points où elle ne s'annule pas :

$$\mathsf{supp}(f) := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon \; f(x) \neq 0\big\}.$$

On dit aussi que f est *à support* dans un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ lorsque $f(x) = 0$ pour tout $x \notin E$.

En fait, la mesurabilité de f assure immédiatement que son support est un ensemble mesurable. Dans cette section, nous allons nous intéresser principalement aux fonctions dont le support est de mesure finie :

$$m\big(\mathsf{supp}(f)\big) < \infty.$$

Un résultat important du chapitre précédent énonce que si une fonction mesurable $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée en valeur absolue par une constante $M > 0$ est à support dans un ensemble E de mesure finie, alors il existe une suite de fonctions étagées $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que :

$$\varphi_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(x),$$

en *tout* point $x \in E$. Le lemme-clé qui suit nous permet alors de définir l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables bornées à support dans un ensemble de mesure finie.

Lemme 3.2. *Soit $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée à support dans un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$ finie. Si $\big(\varphi_n\big)_{n=1}^{\infty}$ est une suite quelconque de fonctions étagées telles que :*

- *il existe une constante $M > 0$ avec $\big|\varphi_n\big| \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 1$,*

• $\mathsf{supp}(\varphi_n) \subset E$ *pour tout* $n \geqslant 1$,
• $\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ *pour presque tout* $x \in E$,
alors la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n$$

existe, et de plus, lorsqu'on a $f = 0$*, cette limite vaut (naturellement!)* 0.

Démonstration. Ces conclusions seraient presque évidentes si l'on supposait que φ_n converge *uniformément* vers f. Or souvenons-nous de l'un des trois principes de Littlewood, qui prétendait que la convergence d'une suite de fonctions mesurables est toujours *presque* uniforme. Nous savons d'ailleurs aussi que ce principe informel s'est réalisé rigoureusement sous la forme du Théorème (tellement magique !) d'Egorov, que nous allons maintenant sortir de notre chapeau de prestidigitateur-mathématicien.

Ainsi, comme $m(E) < \infty$, le Théorème d'Egorov s'applique, et pour tout $\varepsilon > 0$, il garantit l'existence d'un sous-ensemble mesurable fermé $E_\varepsilon \subset E$ de mesure presque égale à celle de E :

$$m(E_\varepsilon) \geqslant m(E) - \varepsilon,$$

sur lequel la convergence est *uniforme :*

$$\varphi_n(x)\big|_{E_\varepsilon} \underset{\text{uniformément}}{\longrightarrow} f(x)\big|_{E_\varepsilon}.$$

En utilisant aussi crucialement le fait que la suite $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ est uniformément bornée par la constante $M > 0$, et en découpant :

$$E = E_\varepsilon \cup \big(E \backslash E_\varepsilon\big),$$

nous pouvons alors exécuter des majorations intuitivement naturelles :

$$\begin{aligned}
\bigg|\int \varphi_n - \int \varphi_m\bigg| &\leqslant \int_E \big|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\big|\,dx \\
&= \int_{E_\varepsilon} \big|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\big|\,dx + \int_{E\backslash E_\varepsilon} \big|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\big|\,dx \\
&\leqslant \int_{E_\varepsilon} \big|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\big|\,dx + 2\,M\,m\big(E\backslash E_\varepsilon\big) \\
&\leqslant \int_{E_\varepsilon} \big|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\big|\,dx + 2\,M\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Mais par convergence égorovienne uniforme sur E_ε, il existe un entier $N = N_\varepsilon \gg 1$ tel que :

$$n, m \geqslant N_\varepsilon \implies \Big(\forall\, x \in E_\varepsilon \quad \big|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Au total :

$$\begin{aligned}
\bigg|\int \varphi_n - \int \varphi_m\bigg| &\leqslant \varepsilon\big(m(E_\varepsilon) + 2\,M\big) \\
&\leqslant \varepsilon\,\big(m(E) + 2\,M\big),
\end{aligned}$$

toujours pour $n, m \geqslant N_\varepsilon$, ce qui montre bien que la suite de nombres réels :

$$\bigg(\int \varphi_n\bigg)_{n=1}^\infty$$

est convergente, puisqu'elle est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet !

Enfin, lorsque $f = 0$, on peut répéter les mêmes arguments, et obtenir (exercice) :

$$\left| \int \varphi_n \right| \leqslant \varepsilon\big(m(E) + M\big),$$

ce qui, sans doute aucun, assure que la limite en question vaut effectivement 0. □

En utilisant ce lemme, nous pouvons maintenant définir l'intégration des fonctions mesurables bornées qui sont à support dans un ensemble de mesure finie.

Proposition-Définition 3.3. *Étant donné une fonction mesurable bornée $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ à support contenu* $\mathsf{supp}(f) \subset E$ *dans un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$ finie, on définit l'*intégrale de Lebesgue *de f comme la limite :*

$$\int f(x)\,dx := \lim_{n \to \infty} \int \varphi_n(x)\,dx,$$

où $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite auxiliaire quelconque de fonctions étagées satisfaisant :

- *il existe une constante $M > 0$ avec $\big|\varphi_n\big| \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 1$,*
- $\mathsf{supp}(\varphi_n) \subset E$ *pour tout $n \geqslant 1$,*
- $\varphi_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(x)$ *pour tout $x \in E$.*

Démonstration. Effectivement, vérifions que cette limite ne dépend *pas* de la suite φ_n, en prenant une *autre* suite $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ jouissant des mêmes propriétés que $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$. Alors grâce au lemme précédent qui anticipait notre besoin argumentatif présent, la suite des différences :

$$\big(\eta_n\big)_{n=1}^{\infty} := \big(\varphi_n - \psi_n\big)_{n=1}^{\infty}$$

reste bornée — maintenant par $2\,M$ au lieu de M —, elle reste à support dans E (oui !), et elle tend ponctuellement vers 0, donc la fin du lemme en question assure que :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \to \infty} \int \eta_n \\ &= \lim_{n \to \infty} \int \big(\varphi_n - \psi_n\big) \end{aligned}$$

ce qui veut justement dire, grâce à la linéarité, déjà acquise, de l'intégrale sur les fonctions étagées, que :

$$\lim_{n \to \infty} \int \varphi_n = \lim_{n \to \infty} \int \psi_n,$$

et conclut en longueur cette vérification *très* détaillée. □

Définition 3.4. Si une fonction mesurable bornée $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ possède un support de mesure finie :

$$m\big(\mathsf{supp}(f)\big) < \infty,$$

et si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, on définit l'*intégrale de Lebesgue de f sur E* par :

$$\int_E f := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot \mathbf{1}_E(x)\,dx.$$

Clairement, lorsque f elle-même est une fonction étagée, cette définition coïncide avec la précédente.

Avant de poursuivre, notons que si tous les ensembles E_k mesurables qui interviennent dans une fonction étagée $\varphi = \sum a_k \mathbf{1}_{E_k}$ sont tous de mesure nulle $m(E_k) = 0$, l'intégrale $\int \varphi = \sum a_k \, m(E_k) = 0$ est trivialement nulle. Autrement dit :

« L'intégrale ne voit pas les ensembles de mesure nulle ».

Définition 3.5. Une propriété $\mathscr{P} = \mathscr{P}(x)$ dépendant d'un point $x \in E$ appartenant à un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ sera dite *vraie presque partout*, ou *vraie pour presque tout* $x \in E$ lorsqu'il existe un sous-ensemble :

$$N \subset E$$

de mesure nulle $0 = m(N)$ tel que $\mathscr{P}(x)$ est satisfaite pour tout $x \in E \backslash N$.

Par exemple, on dira qu'une suite de fonctions étagées $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ converge *presque partout* vers une certaine fonction mesurable $f \colon \mathbb{R}^d$ lorsqu'il existe un sous-ensemble $N \subset \mathbb{R}^d$ avec $0 = m(N)$ tel que :

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) \qquad\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^d \backslash N).$$

On vérifie alors (exercice de compréhension) que le Lemme 3.2 ci-dessus reste vrai en supposant seulement la convergence presque partout de la suite de fonctions étagées concernée.

Ainsi donc, sur notre route initiatique en direction de la bellissime et généralisssime *intégrale de Lebesgue*, nous atteignons par l'Étape 2 un niveau considérablement plus élevé que celui des fonctions étagées, puisque nous atteignons leurs limites ponctuelles bornées, limites qui ne sont pas forcément uniformes.

Bien entendu, toute cette élucubration par passages téméraires à la limite s'effondrerait si nous ne conservions pas les propriétés élémentaires fondamentales qu'on est en droit d'attendre de toute intégrale. Éh bien, les voici !

Proposition 3.6. *Soient f et g deux fonctions mesurables bornées $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ à support dans un ensemble (commun) de mesure finie. Alors les quatre propriétés suivantes sont satisfaites.*

(i) Linéarité : *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big(a\, f + b\, g\big) = a \int_{\mathbb{R}^d} f + b \int_{\mathbb{R}^d} g.$$

(ii) Additivité domaniale : *Si F et G sont deux sous-ensembles mesurables disjoints de $\mathbb{R}^d$ de mesure finie, alors :*

$$\int_{F \cup G} f = \int_F f + \int_G f.$$

(iii) Monotonie : *Si $f \leqslant g$ en presque tout point, alors :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} g.$$

(iv) Inégalité du triangle : *La fonction valeur absolue $|f|$ est aussi une fonction mesurable bornée et l'on a :*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} f\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f|.$$

Démonstration. Toutes ces propriétés se vérifient (exercice) en utilisant l'approximation par des fonctions étagées, à partir des propriétés que ces fonctions satisfont déjà en vertu de la Proposition 2.4 □

Nous sommes maintenant en position de démontrer le premier théorème important de convergence.

Théorème 3.7. [Convergence bornée] *Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables $f_n \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant :*

- *il existe une constante $M > 0$ avec $\big|f_n\big| \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 1$,*
- *il existe $E \subset \mathbb{R}^d$ mesurable avec $m(E) < \infty$ et $\mathsf{supp}(f_n) \subset E$ pour tout $n \geqslant 1$,*
- *$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ pour presque tout $x \in E$.*

Alors la fonction-limite f est mesurable, satisfait :

$$\mathsf{supp}(f) \subset E,$$

et de plus, on a surtout :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big|f_n - f\big| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où :

$$\int f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f.$$

Cette dernière ligne signifie précisément la propriété que l'on adore :

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n,$$

autrement dit, que prendre la limite et intégrer sont deux opérations interchangeables.

Démonstration. D'après les hypothèses, on voit immédiatement que la fonction-limite f est bornée par la même constante :

$$|f| \leqslant M \qquad \text{(presque partout)}.$$

On voit aussi que f s'annule hors de E. Clairement, l'inégalité du triangle pour les intégrales assure qu'il suffit d'établir la première convergence.

En fait, la démonstration est une reprise d'un argument basé sur le Théorème d'Egorov, qui nous avait permis dans le Lemme 3.2 de vérifier que l'intégrale était indépendante de la suite approximante de fonctions étagées.

En effet, si $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit et fixé, le Théorème d'Egorov nous permet de trouver un sous-ensemble mesurable $E_\varepsilon \subset E$ avec :

$$m\big(E\backslash E_\varepsilon\big) \leqslant \varepsilon,$$

en restriction auquel on a convergence uniforme :

$$f_n(x)\big|_{E_\varepsilon} \underset{\text{uniformément}}{\longrightarrow} f(x)\big|_{E_\varepsilon}.$$

Alors sur E_ε, nous pouvons trouver un entier $N_\varepsilon \gg 1$ assez grand pour que :

$$n \geqslant N_\varepsilon \implies \Big(\forall\, x \in E_\varepsilon \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Rassemblant tous ces faits, nous pouvons estimer, toujours pour $n \geqslant N_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}\int_E \big|f_n(x) - f(x)\big|\, dx &= \int_{E_\varepsilon} \big|f_n(x) - f(x)\big|\, dx + \int_{E\backslash E_\varepsilon} \big|f_n(x) - f(x)\big|\, dx \\ &\leqslant \varepsilon\, m\big(E_\varepsilon\big) + 2M\, m\big(E\backslash E_\varepsilon\big) \\ &\leqslant \varepsilon\,\big(m(E) + 2M\big).\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, cela conclut. □

Observons que ce théorème de convergence exprime la possibilité d'intervertir intégration et passage à la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Une autre observation utile que nous pouvons faire au point que nous venons d'atteindre est la suivante.

Proposition 3.8. *Si $f \geqslant 0$ est une fonction réelle* positive *bornée à support dans un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie, et si $\int_E f = 0$, alors $f = 0$ presque partout.*

Démonstration. En effet, pour tout entier $k \geqslant 1$, introduisons l'ensemble :

$$E_k := \big\{x \in E\colon\ f(x) \geqslant 1/k\big\}.$$

Alors E_k est mesurable (exercice mental), et le fait que :

$$0 \leqslant \frac{1}{k}\, \mathbf{1}_{E_k}(x) \leqslant f(x)$$

implique par monotonie de l'intégrale :

$$0 \leqslant \frac{1}{k}\, m\big(E_k\big) \leqslant \int f = 0.$$

Par conséquent :

$$m\big(E_k\big) = 0 \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant 1).$$

Enfin, puisque :

$$\big\{x\colon\ f(x) > 0\big\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

on conclut (exercice mental) que $f = 0$ presque partout. □

4. Retour aux fonctions Riemann-intégrables

Rappelons que dans un chapitre qui précède, nous avons formulé une question que la théorie de Riemann semblait dans l'incapacité de résoudre, à savoir la :

Question. *Si une suite de fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$:*

$$f_n\colon \quad [0,1] \longrightarrow [0,1] \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

possède en tout point $x \in [0,1]$ une limite ponctuelle :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x),$$

quelle théorie d'intégration pourrait être développée afin qu'on ait :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx\,?$$

En effet, à la fin du chapitre sur l'ensemble de Cantor, nous avons produit un exemple de fonction bornée $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ limite de fonctions continues $f_n\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ dont les points de discontinuité sont de mesure strictement positive, de telle sorte que f n'est *pas* Riemann-intégrable, bien que la limite des nombres réels $\int_0^1 f_n$ existe.

Mais au niveau que nous venons d'atteindre dans la théorie plus puissante de Lebesgue, le Théorème 3.7 de convergence bornée que nous venons d'établir répond déjà en un certain sens à cette question, et ce Théorème 3.7 montre surtout que *notre fonction f de la fin du chapitre sur l'ensemble de Cantor est Lebesgue-intégrable*.

Or puisque nous allons maintenant montrer que les fonctions Riemann-intégrables sont aussi Lebesgue-intégrables (la réciproque n'étant pas vraie !), nous pouvons d'ores et déjà conclure que c'est l'intégrale de Lebesgue qu'il fallait inventer pour répondre à la question dont nous venons de rappeler l'énoncé ci-dessus.

Théorème 4.1. *Sur un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée Riemann-intégrable. Alors f est mesurable, et son intégrale au sens de Riemann coïncide avec son intégrale au sens de Lebesgue :*

$$\int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} f(x)\,dx \;=\; \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} f(x)\,dx.$$

Démonstration. Puisque l'intégrale de Riemann ne concerne par définition que les fonctions bornées, il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\big|f(x)\big| \;\leqslant\; M \qquad\qquad (\forall\, x \in [a,b]).$$

Comme f est Riemann-intégrable, ses sommes de Darboux inférieure et supérieure associées à des subdivisions de plus en plus fines de l'intervalle $[a,b]$ permettent de définir deux suites :

$$\big(\varphi_k^-(x)\big)_{k=1}^{\infty} \qquad \text{et} \qquad \big(\varphi_k^+(x)\big)_{k=1}^{\infty}$$

de fonctions en escalier bornées :

$$\big|\varphi_k^-\big| \;\leqslant\; M \qquad \text{et} \qquad \big|\varphi_k^+\big| \;\leqslant\; M,$$

qui encadrent f de manière monotone :

$$\varphi_1^-(x) \leqslant \varphi_2^-(x) \leqslant \cdots \leqslant f(x) \leqslant \cdots \leqslant \varphi_2^+(x) \leqslant \varphi_1^+(x),$$

et dont les intégrales convergent vers celle de f :

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} \varphi_k^-(x)\,dx \;=\; \int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} f(x)\,dx \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} \varphi_k^+(x)\,dx. \tag{4.2}$$

Plusieurs observations se manifestent à nous simultanément. Premièrement, il découle immédiatement des définitions que les intégrales de Riemann et de Lebesgue coïncident sur les fonctions en escalier, d'où :

(4.3)

$$\int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} \varphi_k^-(x)\,dx \;=\; \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_k^-(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} \varphi_k^+(x)\,dx \;=\; \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_k^+(x)\,dx,$$

pour tout $k \geqslant 1$. Ensuite, sachant que toutes les φ_k^- et toutes les φ_k^+ sont mesurables, leurs limites :

$$\varphi_\infty^-(x) := \lim_{k\to\infty} \varphi_k^-(x) \qquad \text{et} \qquad \varphi_\infty^+(x) := \lim_{k\to\infty} \varphi_k^+(x)$$

sont mesurables elles aussi — car la mesurabilité est préservée par passage à la limite —, et bien entendu, on a :

$$\varphi_\infty^- \leqslant f \leqslant \varphi_\infty^+.$$

Plus avant, le Théorème 3.7 de convergence bornée assure que :

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_k^-(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_\infty^-(x)\,dx,$$

et que :

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_k^+(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_\infty^+(x)\,dx.$$

Ceci combiné à (4.2) et (4.3) donne :

$$\int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \big(\varphi_\infty^+(x) - \varphi_\infty^-(x)\big)\,dx = 0,$$

et comme par ailleurs $\varphi_k^+ - \varphi_k^- \geqslant 0$ donne à la limite :

$$\varphi_\infty^+ - \varphi_\infty^- \geqslant 0,$$

nous déduisons grâce à la Proposition 3.8 que :

$$\varphi_\infty^+ - \varphi_\infty^- = 0,$$

presque partout, et enfin que :

$$\varphi_\infty^+ = \varphi_\infty^- = f,$$

presque partout, ce qui démontre merveilleusement que f est mesurable !

Pour terminer, puisque :

$$\varphi_k^- \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f \qquad \text{et} \qquad f \underset{\infty\leftarrow k}{\longleftarrow} \varphi_k^+$$

presque partout, on a, *par définition même* de l'intégrale des fonctions mesurables bornées donnée dans cette section :

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_k^-(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_k^+(x)\,dx,$$

et en tenant à nouveau compte de (4.2) et (4.3), on conclut que :

$$\int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} f(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} f(x)\,dx,$$

comme annoncé. $\square$

5. Étape 3 : Fonctions mesurables positives quelconques

Nous procédons maintenant à l'intégrale des fonctions mesurables positives quelconques, pas nécessairement bornées. Il sera important d'autoriser ces fonctions à prendre leurs valeurs dans l'ensemble étendu des nombres réels positifs :

$$\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},$$

la valeur $+\infty$ étant bien entendu prise sur un ensemble mesurable. Rappelons la convention standard que le supremum d'un ensemble de nombres réels positifs vaut $+\infty$ lorsque, et seulement lorsque, l'ensemble en question est non borné.

Définition 5.1. L'*intégrale de Lebesgue* $\int_{\mathbb{R}^d} f$ d'une fonction mesurable positive :

$$f\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

est le nombre :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx := \sup \bigg\{ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,dx : \varphi\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ mesurable bornée avec } 0 \leqslant \varphi \leqslant f \text{ à support dans un ensemble de mesure finie} \bigg\},$$

nombre qui appartient à $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Avec cette définition, deux cas se présentent : ou bien le supremum en question est fini, ou bien il est infini.

Définition 5.2. Dans les mêmes circonstances, lorsque :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx < \infty,$$

on dit que f *est Lebesgue-intégrable*, ou, simplement, *intégrable*.

En restriction à un ensemble mesurable, on peut aussi introduire la :

Définition 5.3. Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, si $f \geqslant 0$ est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors $f \cdot \mathbf{1}_E$ est aussi positive mesurable sur $\mathbb{R}^d$, et on définit :

$$\int_E f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot \mathbf{1}_E(x)\,dx.$$

Pour un réel $a > 0$, considérons les deux fonctions bien connues sur $\mathbb{R}^d$:

$$f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^a} & \text{lorsque } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{lorsque } |x| > 1, \end{cases}$$

$$F_a(x) = \frac{1}{1+|x|^a}.$$

Comme en théorie de l'intégrale généralisée de Riemann (exercice de révision), f_a est Lebesgue-intégrable précisément quand $a < d$, tandis que F_a l'est précisément quand $a > d$.

Proposition 5.4. *L'intégrale des fonctions mesurables positives quelconques :*

$$f,\ g\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

satisfait les six propriétés suivantes.

(i) Linéarité positive : *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big(a\, f + b\, g\big) \,=\, a \int_{\mathbb{R}^d} f + b \int_{\mathbb{R}^d} g.$$

(ii) Additivité domaniale : *Si F et G sont deux sous-ensembles disjoints de $\mathbb{R}^d$, alors :*

$$\int_{F \cup G} f \,=\, \int_F f + \int_G f.$$

(iii) Monotonie : *Si $0 \leqslant f \leqslant g$ en presque tout point, alors :*

$$0 \,\leqslant\, \int_{\mathbb{R}^d} f \,\leqslant\, \int_{\mathbb{R}^d} g.$$

(iv) *Si g est intégrable et si $0 \leqslant f \leqslant g$, alors f est aussi intégrable.*

(v) *Si f est intégrable, alors $f(x) < \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.*

(vi) *Si $\int f = 0$, alors $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Seule la première assertion **(i)** n'est pas une conséquence rapide des définitions, et pour l'établir, nous procéderons comme suit.

Par dilatation, il suffit de traiter le cas $a = b = 1$. Si $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ et si $0 \leqslant \psi \leqslant g$, où φ et ψ sont bornées à support dans un ensemble de mesure finie, alors :

$$\varphi + \psi \,\leqslant\, f + g,$$

et la somme $\varphi + \psi$ est aussi bornée à support dans un ensemble de mesure finie. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int f + \int g &= \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant f} \int \varphi + \sup_{0 \leqslant \psi \leqslant g} \int \psi \\
&= \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant f \\ 0 \leqslant \psi \leqslant g}} \int \big(\varphi + \psi\big) \\
&\leqslant \sup_{\varphi + \psi \leqslant f + g} \int \big(\varphi + \psi\big) \\
&\leqslant \sup_{0 \leqslant \chi \leqslant f + g} \int \chi \\
&= \int \big(f + g\big).
\end{aligned}$$

Pour ce qui concerne l'inégalité inverse, supposons qu'une fonction $\eta \geqslant 0$ est bornée à support dans un ensemble de mesure finie avec :

$$\eta \,\leqslant\, f + g,$$

et introduisons la fonction mesurable :

$$\eta_1(x) \,:=\, \min\big(f(x),\, \eta(x)\big),$$

ainsi que :

$$\eta_2 \,:=\, \eta - \eta_1 \,\geqslant\, 0.$$

Évidemment, on a :

$$0 \,\leqslant\, \eta_1 \,\leqslant\, f,$$

et puisque η_2 est en tout point, ou bien égale à $\eta - f \leqslant g$, ou bien égale à $\eta - \eta = 0$, on a aussi :

$$0 \,\leqslant\, \eta_2 \,\leqslant\, g.$$

Clairement, η_1 et η_2 sont toutes deux bornées à support dans un ensemble de mesure finie. Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\int \eta &= \int \big(\eta_1 + \eta_2\big)\\ &= \int \eta_1 + \int \eta_2\\ &\leqslant \int f + \int g.\end{aligned}$$

Enfin, en prenant le supremum sur η, nous obtenons l'inégalité inverse :

$$\int \big(f+g\big) \,\leqslant\, \int f + \int g,$$

ce qui conclut **(i)**.

Pour montrer **(v)**, introduisons pour tous $k \geqslant 1$ entiers les ensembles :

$$E_k \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\, f(x) \geqslant k\big\},$$

ainsi que :

$$E_\infty \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\, f(x) = \infty\big\}.$$

Alors il est clair que :

$$\infty \,>\, \int f \,\geqslant\, \int f \cdot \mathbf{1}_{E_k} \,\geqslant\, k\, m\big(E_k\big),$$

inégalité qui montre instantanément que :

$$m\big(E_k\big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Mais puisque $(E_k)_{k=1}^\infty$ est une suite décroissante emboitée d'ensembles mesurables qui tend vers E_∞, un énoncé du chapitre qui précède assure que :

$$\begin{aligned}m\big(E_\infty\big) &= \lim_{k\to\infty} m\big(E_k\big)\\ &= 0,\end{aligned}$$

ce qui montre bien que f ne peut être infinie que sur un ensemble de mesure nulle.

Pour terminer, la démonstration de **(vi)** est essentiellement la même que celle de la Proposition 3.8. □

Développons maintenant des théorèmes de convergence importants valables pour la classe des fonctions mesurables positives. Afin de motiver ces résultats, posons la :

Question 5.5. *Si une suite* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *de fonctions mesurables positives* $f_n \geqslant 0$ *converge ponctuellemement vers une certaine fonction-limite* f *:*

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x),$$

elle-même alors automatiquement mesurable, est-il toujours vrai qu'on peut intervertir limite et intégration :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{??} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx?$$

Malheureusement, tel n'est pas toujours le cas, comme le montre un exemple extrêmement simple. Sur $\mathbb{R}$, soit la suite de fonctions :

$$f_n(x) := \begin{cases} n & \text{lorsque } \ 0 < x < 1/n, \\ 0 & \text{lorsque } \ x \leqslant 0 \ \text{ ou lorsque } \ x \geqslant 1/n. \end{cases}$$

Il est clair que $f_n(x) \longrightarrow 0$ en tout point x, mais on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) = 1,$$

constamment pour tout entier $n \geqslant 1$.

Bien qu'essentiellement stupide, cet exemple possède quand même une vertu inattendue ! En effet, il fait suspecter intuitivement que l'intégrale de la fonction-limite doive toujours être inférieure à la limite des intégrales, et tel est bien le cas en général !

Théorème 5.6. [Lemme de Fatou] *Si une suite de fonctions mesurables* positives *sur* $\mathbb{R}^d$ *:*

$$\big(f_n\big)_{n=1}^{\infty} : \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

converge presque partout vers une certaine fonction f*, automatiquement mesurable :*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

alors :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,dx.$$

Il importe de faire observer que dans cet énoncé, on n'exclut ni le cas $\int \lim_{n\to\infty} f_n = \infty$, ni le cas $\liminf_{n\to\infty} \int f_n = \infty$.

Démonstration. Soit une fonction mesurable g bornée à support dans un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$ finie telle que :

$$0 \leqslant g \leqslant f.$$

Si nous introduisons :

$$g_n(x) := \min\big(g(x),\, f_n(x)\big),$$

alors la suite $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ est aussi mesurable, aussi à support dans E, et l'on a presque partout :

$$g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(x),$$

donc le Théorème 3.7 de convergence bornée assure que :

$$\int g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int g.$$

Mais par construction on a aussi $g_n \leqslant f_n$ pour tout $n \geqslant 1$, d'où :

$$\int g_n \leqslant \int f_n,$$

et en prenant la limite à gauche, même si le membre de droite n'a pas de limite, sa limite inférieure lui demeure nécessairement supérieure :

$$\int g \leqslant \liminf_{n \to \infty} \int f_n.$$

Enfin, en prenant le supremum à gauche sur toutes les fonctions g, on trouve bien par application de la Définition 5.1 :

$$\int f \leqslant \liminf_{n \to \infty} \int f_n,$$

ce qui est la conclusion. □

Du Lemme de Fatou, on peut déduire les résultats les plus importants de la Théorie de l'Intégration de Lebesgue.

Théorème 5.7. *Soit $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ une fonction mesurable positive, et soit une suite :*

$$\big(f_n\big)_{n=1}^{\infty}$$

de fonctions mesurables encadrées en presque tout point $x \in \mathbb{R}^d$:

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant f(x),$$

et qui convergent presque partout ponctuellement vers f :

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

Alors :

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n = \int f.$$

Démonstration. Puisque $f_n(x) \leqslant f(x)$ presque partout, on a instantanément :

$$\int f_n \leqslant \int f,$$

d'où découle (exercice mental) :

$$\limsup_{n \to \infty} \int f_n \leqslant \int f.$$

Par ailleurs, le Lemme de Fatou qui précède complète ceci :

$$\limsup_{n \to \infty} \int f_n \leqslant \int f \leqslant \liminf_{n \to \infty} \int f_n,$$

et comme une limite supérieure ne peut se trouver en-dessous d'une limite inférieure que lorsque toutes deux coïncident, c'est bien que la limite existe et vaut $\int f$! □

Ensuite, nous récoltons aussi comme fruit mûr un résultat très important de convergence pour les suites monotones de fonctions positives.

Théorème 5.8. [Convergence monotone, Beppo-Levi] *Soit une suite de fonctions mesurables positives :*

$$\big(0 \leqslant \big) \quad f_n\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

qui est ponctuellement croissante :

$$\big(0 \leqslant \big) \quad f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \qquad \text{(en presque tout point } x \in \mathbb{R}^d\text{)},$$

donc qui converge vers une certaine fonction-limite mesurable :

$$f := \lim_{n\to\infty} f_n$$
$$\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

Alors on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Il est particulièrement important de noter que l'éventualité $\int f = \infty$ n'est pas exclue ici. Bien entendu, un énoncé analogue vaut aussi pour les suites de fonctions presque partout *ponctuellement décroissantes* de fonctions à valeurs dans $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}_-$.

Démonstration. Il s'agit juste d'un corollaire immédiat du théorème qui précède ! □

Ce magnifique théorème de convergence monotone possède de nombreuses conséquences utiles. Par exemple, voici un énoncé spectaculaire qui produit de la convergence.

Théorème 5.9. *Soit une série :*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x),$$

de fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^d$:

$$a_k(x) \geqslant 0 \qquad (\forall\, k \geqslant 1, \text{ presque partout}).$$

Alors pourvu seulement qu'on ait la finitude :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)\, dx < \infty,$$

la série :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$$

converge presque partout vers une certaine fonction-limite mesurable finie.

Démonstration. Introduisons en effet les sommes partielles d'ordre n :

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k(x),$$

ainsi que la somme infinie complète :

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x).$$

Bien entendu, les fonctions f_n sont mesurables, leur suite est croissante :

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \qquad (\forall\, k \geqslant 1, \text{ presque partout}),$$

et l'on a en admettant toujours la valeur ∞ pour les fonctions :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \,=\, f(x) \qquad\qquad \text{(presque partout)}.$$

Mais alors puisque :

$$\int f_n \,=\, \sum_{k=1}^{n} \int a_k(x)\,dx,$$

le Théorème de convergence monotone assure que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)\,dx \,=\, \int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\,dx.$$

Si donc on a comme cela a été supposé dans l'énoncé qu'il faut démontrer :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)\,dx \,<\, \infty,$$

cette dernière équation implique la finitude de l'intégrale :

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\,dx \,<\, \infty,$$

ce qui signifie précisément que la fonction-limite :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$$

est *Lebesgue-intégrable*, et nous avons déjà vu que toute fonction positive Lebesgue-intégrable prend presque partout des valeurs *finies*. □

Donnons encore deux belles illustrations de ce dernier énoncé.

Théorème 5.10. [Borel-Cantelli] *Si une collection infinie dénombrable :*

$$E_1,\, E_2,\, \dots,\, E_k,\, \dots,$$

de sous-ensembles $E_k \subset \mathbb{R}^d$ satisfait :

$$\sum_{k=1}^{\infty} m\big(E_k\big) \,<\, \infty,$$

alors l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^d$ qui appartiennent à une infinité de E_k est de mesure nulle.

Démonstration. Introduisons en effet les fonctions indicatrices de ces ensembles :

$$a_k(x) \,:=\, \mathbf{1}_{E_k}(x),$$

et observons alors qu'un point $x \in \mathbb{R}^d$ appartient à une infinité de E_k précisément lorsque :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \,=\, \infty.$$

Mais par contraste, notre hypothèse que la somme des mesures de E_k est *finie* se ré-exprime comme la finitude :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)\,dx \;<\; \infty,$$

et nous venons à l'instant de voir dans le théorème qui précède que cela forçait la série positive $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ à prendre des valeurs finies excepté sur un ensemble de mesure nulle, et ainsi, Borel-Cantelli tombe de l'arbre mathématique comme une pomme de Newton ! □

La seconde illustration servira ultérieurement dans de nombreux contextes.

Proposition 5.11. *La fonction :*

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^{d+1}} & \text{lorsque } x \neq 0, \\ 0 & \text{lorsque } x = 0, \end{cases}$$

est Lebesgue-intégrable hors de toute boule de rayon $\varepsilon > 0$, et son intégrale correspondante satisfait l'inégalité :

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} f(x)\,dx \;\leqslant\; \frac{C}{\varepsilon},$$

pour une certaine constante $C > 0$.

Démonstration. En partant de l'anneau ouvert :

$$\mathscr{A} := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\; 1 \leqslant |x| < 2\big\},$$

pour tout entier $k \geqslant 1$, introduisons ses dilatés d'un facteur $2^{k-1}\varepsilon$:

$$\mathscr{A}_k := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\; 2^{k-1}\varepsilon \;\leqslant\; |x| \;<\; 2^k\varepsilon\big\},$$

dont la réunion infinie est *disjointe* et remplit :

$$\big\{\varepsilon \;\leqslant\; |x| \;\leqslant\; \infty\big\} \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{A}_k.$$

Introduisons aussi la série infinie :

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x),$$

constituée des fonctions :

$$g_k(x) \;:=\; \frac{1}{(2^{k-1}\varepsilon)^{d+1}}\, \mathbf{1}_{\mathscr{A}_k}(x).$$

Comme la fonction $|x| \longmapsto \frac{1}{|x|^{d+1}}$ est décroissante, on se convainc aisément qu'en restriction à $\mathscr{A}_k$, on a :

$$f(x) \;\leqslant\; g_k(x) \qquad\qquad {\scriptstyle (x\,\in\,\mathscr{A}_k)},$$

puis :

$$f(x) \;\leqslant\; g(x) \qquad\qquad {\scriptstyle (\varepsilon\,\leqslant\,|x|\,\leqslant\,\infty)},$$

d'où :

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} f \;\leqslant\; \int_{|x|\geqslant\varepsilon} g.$$

D'un autre côté, grâce aux propriétés d'invariance par dilatation de la mesure de Lebesgue, on a :

$$m(\mathscr{A}_k) = \left(2^{k-1}\varepsilon\right)^d m(\mathscr{A}) \qquad\qquad (k \geqslant 1),$$

et comme g est manifestement une fonction étagée :

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} g &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(\mathscr{A}_k)}{(2^{k-1}\varepsilon)^{d+1}} \\ &= m(\mathscr{A}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^{k-1}\varepsilon)^d}{(2^{k-1}\varepsilon)^{d+1}} \\ &= \frac{m(\mathscr{A})}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= \frac{2\,m(\mathscr{A})}{\varepsilon},\end{aligned}$$

ce qui explicite une constante possible $C > 0$! □

Concluons la présentation de cette floppée de théorèmes de convergence par celui qui les chapeaute tous.

Théorème 5.12. [Inégalité généralissime de Fatou] *Étant donné une suite quelconque* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *de fonctions mesurables* positives *sur* $\mathbb{R}^d$ *:*

$$f_n \geqslant 0,$$

à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$*, la fonction limite inférieure (positive) :*

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x),$$

est toujours automatiquement mesurable, et on a en toute généralité maximalissime :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,dx.$$

La force extrême de cet énoncé, en effet, c'est qu'absolument aucune hypothèse de convergence n'est faite : il est vrai dans toutes les situations imaginables !

Démonstration. D'après les propriétés standard de la notion de limite inférieure (exercice : à réviser !) d'une suite de nombres réels, on a :

$$\liminf_{n\to\infty} \underbrace{\int f_n}_{\in[0,\infty]} = \lim_{k\to\infty} \Bigg(\underbrace{\inf_{n\geqslant k} \int f_n}_{\text{suite croissante en fonction de } k} \Bigg).$$

De manière similaire, la limite inférieure de la suite de fonctions :

$$\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$$

se détermine comme :

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{k\to\infty} \Big(\underbrace{\inf_{n\geqslant k} f_n(x)}_{=: g_k(x)} \Big).$$

Il est alors avisé d'introduire la suite auxiliaire de fonctions définies pour $k \geqslant 1$ entier par :

$$g_k(x) := \inf_{n \geqslant k} f_n(x),$$

qui satisfait donc :

$$\lim_{k \to \infty} g_k(x) = \liminf_{n \to \infty} f_n(x),$$

et qui est manifestement positive croissante :

$$\big(0 \leqslant \big) \qquad g_k \leqslant g_{k+1} \qquad\qquad (k \geqslant 1).$$

Mais alors, tel le fantôme phosphorescent d'un Lucky-Luke solitaire perdu au milieu des elfes radioactifs du Plateau de Saclay, en dégainant infiniment plus vite que l'ombre insaisissable de notre intuition mathématique intime, qu'avons-nous de mieux à faire que d'appliquer à une vitesse supérieure à celle de la lumière le Théorème 5.8 de convergence monotone ?

Oui, *dégainons Beppo-Levi calibre 58 :*

$$\int \lim_{k \to \infty} g_k = \lim_{k \to \infty} \int g_k \,!$$

Ensuite, comme pour tout $n \geqslant k$, on a :

$$0 \leqslant g_k \leqslant f_n,$$

une intégration donne :

$$\int g_k \leqslant \int f_n \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant k),$$

puis :

$$\int g_k \leqslant \inf_{n \geqslant k} \int f_n,$$

ce qui, en prenant la limite quand k tend vers l'infini, donne justement parce que Beppo-Levi s'applique :

$$\int \lim_{k \to \infty} g_k \leqslant \lim_{k \to \infty} \left(\inf_{n \geqslant k} \int f_n \right),$$

ce qui est bien (exercice visuel) l'inégalité établie par le *Général en Chef*, Fatou, de notre Grande Armée de l'Intégration théorique (sans blaguer, Fatou était un mathématicien très profond, qui n'a peut-être pas bénéficié de toute la reconnaissance qu'il méritait de son vivant). □

Corollaire 5.13. [Inégalité de Fatou inverse] *Étant donné une suite quelconque de fonctions mesurables négatives sur* $\mathbb{R}^d$ *:*

$$f_n \leqslant 0$$

à valeurs dans $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}_-$*, on a :*

$$\limsup_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \limsup_{n \to \infty} f_n.$$

Démonstration. Appliquons le théorème précédent à la suite de fonctions $-f_n \geqslant 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n \to \infty} \big(- f_n(x) \big)\, dx \leqslant \liminf_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \big(- f_n(x) \big)\, dx.$$

Lemme 5.14. *Pour toute suite* $(a_n)_{n=1}^\infty$ *de nombres réels* $a_n \in \mathbb{R}$*, on a :*

$$\liminf_{n \to \infty} \big(-a_n \big) = -\limsup_{n \to \infty} a_n,$$

ainsi que :

$$\limsup_{n \to \infty} \big(-a_n \big) = -\liminf_{n \to \infty} a_n.$$

Démonstration. Rappelons que les limites inférieures et supérieures d'une suite numérique quelconque $(b_n)_{n=1}^\infty$ sont définies par :

$$\liminf_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \Big(\inf_{m \geqslant n} b_m \Big) \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \Big(\sup_{m \geqslant n} b_m \Big),$$

où les deux suites :

$$\inf_{m \geqslant n} b_m \qquad \text{et} \qquad \sup_{m \geqslant n} b_m$$

ont chacune une limite, puisqu'elles sont respectivement croissantes et décroissantes avec n (exercice mental).

Ici appliquée à la suite $b_n := -a_n$, cette définition de la limite inférieure peut être transformée en le premier résultat annoncé :

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \to \infty} \big(-a_n \big) &= \lim_{n \to \infty} \Big(\inf_{m \geqslant n} -a_m \Big) \\
&= \lim_{n \to \infty} \Big(-\sup_{m \geqslant n} a_m \Big) \\
&= -\lim_{n \to \infty} \Big(\sup_{m \geqslant n} a_m \Big) \\
&= -\limsup_{n \to \infty} a_n,
\end{aligned}$$

le second se vérifiant ensuite de manière similaire. □

Grâce à ce lemme élémentaire, l'inégalité en cours de travaux devient :

$$\int_{\mathbb{R}^d} -\limsup_{n \to \infty} f_n \leqslant -\limsup_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\, dx,$$

et pour conclure il suffit alors d'infliger à cette dernière inégalité imparfaite la foudre transperçante d'une inversion de signe ! □

6. Étape 4 : Fonctions Lebesgue-intégrables au sens le plus général possible

Définition 6.1. Une fonction mesurable réelle quelconque :

$$f\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

est dite *Lebesgue-intégrable* lorsque sa valeur absolue :

$$|f|\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

— une fonction elle aussi mesurable —, est Lebesgue-intégrable d'intégrale *finie :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f| < \infty,$$

au sens de la Définition 5.1 qui précède.

En fait, on peut donner un sens précis et naturel à la valeur de l'intégrale de f en introduisant les deux fonctions auxiliaires positives :

$$f^+(x) := \max\big(0,\, f(x)\big) \qquad \text{et} \qquad f^-(x) := -\min\big(f(x), 0\big),$$

lesquelles sont mesurables ; en effet, on a déjà vu dans le chapitre sur l'intégrale de Riemann que l'on peut écrire simultanément :

$$\begin{aligned} f &= f^+ - f^-, \\ |f| &= f^+ + f^-, \end{aligned}$$

de telle sorte qu'en tenant compte aussi des deux majorations :

$$0 \leqslant f^- \leqslant |f| \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant f^+ \leqslant |f|,$$

montrant que f^- et f^+ sont Lebesgue-intégrables lorsque f *i.e.* $|f|$ l'est, la définition suivante apparaît comme étant parfaitement naturelle.

Définition 6.2. La *valeur* de l'intégrale de Lebesgue d'une fonction Lebesgue-intégrable est :

$$\int f := \int f^+ - \int f^-.$$

En vérité, on peut rencontrer dans la pratique de multiples décompositions :

$$f = f_1 - f_2,$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions mesurables positives, et alors il est légitime de se demander si l'on est toujours en droit d'écrire :

$$\int f = \int f_1 - \int f_2?$$

Oui, c'est bien le cas, parce que si f jouit d'une *autre* telle décomposition :

$$f = g_1 - g_2,$$

avec $g_1 \geqslant 0$ et $g_2 \geqslant 0$, il vient :

$$f_1 + g_2 = g_1 + f_2,$$

et comme les deux côtés de cette équation consistent en des fonctions mesurables positives, la linéarité déjà vue de l'intégrale sur les fonctions positives donne :

$$\int f_1 + \int g_2 = \int g_1 + \int f_2,$$

ce qui, puisque toutes ces intégrales sont des nombres réels finis, donne bien l'indépendance escomptée :

$$\int f_1 - \int f_2 = \int g_1 - \int g_2.$$

Intermède spéculatif crucial. Maintenant, lorsqu'on parcourt en arrière mentalement, synthétiquement et intelligemment toute la théorie qui a été développée jusqu'à présent, *il importe d'effectuer une mise au point capitale concernant la pensée interne relative au concept intuitif de « presque partout ».*

Tout d'abord, nous savons que l'intégrabilité d'une fonction f et la valeur de son intégrale $\int f$ restent inchangées lorsqu'on modifie à souhait f sur des ensembles de mesure nulle. Par conséquent, il est à la fois naturel et utile dans le contexte de la *Théorie de l'intégration* d'*adopter la convention fondamentale que les fonctions seront essentiellement non définies sur les ensembles de mesure nulle*.

Qui plus est, puisque nous savons aussi qu'une fonction Lebesgue-intégrable f prend des valeurs finies presque partout, on prolonge cette convention fondamentale en admettant, par exemple, que l'addition $f+g$ de deux fonctions intégrables f et g est toujours possible, puisque l'ambiguïté causée par la non-définition de f et de g sur certains ensembles de mesure nulle, et aussi le fait que f et g peuvent éventuellement prendre des valeurs infinies, ces deux difficultés ne concernent au total qu'un ensemble négligeable et $\int$*-invisible* parce que de mesure nulle.

Enfin, lorsqu'on parle d'une fonction f, il devient alors naturel d'*admettre par convention qu'on considère simultanément la collection de toutes les fonctions qui diffèrent de f seulement sur un ensemble de mesure nulle*.

De simples applications des définitions, accompagnées des résultats obtenus jusqu'à présent, montrent que les propriétés élémentaires de l'intégrale sont héritées par la Définition 6.1 la plus générale.

Proposition 6.3. *L'intégrale de Lebesgue des fonctions Lebesgue-intégrables est linéaire, additive, monotone, et elle satisfait l'inégalité du triangle.* □

Rassemblons maintenant deux résultats qui non seulement sont instructifs, éclairants et intéressants en eux-mêmes, mais s'avéreront aussi utiles pour la démonstration du célébrissime *Théorème de la convergence dominée* de Lebesgue qui va suivre.

Théorème 6.4. *Si f est une fonction Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble de mesure finie B — une boule assez grande par exemple — tel que :*

$$\int_{\mathbb{R}^d\backslash B} |f| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration. Après remplacement de f par $|f|$, on peut supposer que $f \geqslant 0$.

Si B_N désigne la boule fermée centrée à l'origine de rayon un entier $N \geqslant 1$, introduisons la suite de fonctions mesurables positives « tronquées » :

$$f_N(x) := f(x) \cdot \mathbf{1}_{B_N}(x),$$

qui est manifestement croissante :

$$0 \leqslant f_N(x) \leqslant f_{N+1}(x),$$

et qui converge ponctuellement vers f partout :

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = f(x).$$

Or grâce au Théorème 5.8 de convergence monotone, on a :

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_N = \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $N = N_\varepsilon \gg 1$ assez grand pour que :

$$\big(0 \leqslant\big) \quad \int_{\mathbb{R}^d} f - \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \mathbf{1}_{B_N} \leqslant \varepsilon,$$

et alors puisque :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \backslash B_N} \,=\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d} - \mathbf{1}_{B_N},$$

il vient :

$$\int_{\mathbb{R}^d \backslash B_N} f \,\leqslant\, \varepsilon,$$

comme nous nous étions proposé de le faire voir. □

Intuitivement, les fonctions intégrables doivent en un certain sens s'annuler à l'infini, puisque leurs intégrables sont finies, mais attention ! une telle annulation n'est valable qu'au *sens intégral*, et elle est en général *fausse au sens ponctuel* — penser en effet à une fonction qui contient une infinité de pics s'enfuyant vers l'infini dont les contributions intégrales deviennent de plus en plus petites telle que par exemple (exercice) la fonction :

$$f\colon\quad \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

définie précisément par :

$$f(x) \,=\, \begin{cases} n & \text{lorsque } x \in \big[n,\, n + \tfrac{1}{n^3}\big] \text{ avec } n \geqslant 2 \text{ entier,} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Théorème 6.5. *Si f est une fonction Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ avec :*

$$m(E) \,\leqslant\, \delta,$$

on a :

$$\int_E |f| \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Cette dernière condition est connue sous le nom d'*absolue continuité* de l'intégrale d'une fonction par rapport à la mesure de Lebesgue.

Démonstration. Après remplacement de f par $|f|$, on peut à nouveau supposer que $f \geqslant 0$.

Pour $N \geqslant 1$ entier, introduisons l'ensemble :

$$F_N \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\; f(x) \leqslant N\big\},$$

et la suite de fonctions :

$$f_N(x) := f(x) \cdot \mathbf{1}_{F_N}(x) \qquad\qquad (N \geqslant 1),$$

satisfaisant visiblement :

$$0 \,\leqslant\, f_N \,\leqslant\, N.$$

Comme dans la démonstration du théorème qui précède, cette suite de fonctions positives est croissante :

$$0 \,\leqslant\, f_N(x) \,\leqslant\, f_{N+1}(x),$$

avec de plus sur $\mathbb{R}^d \backslash \{f = \infty\}$ la convergence presque partout :

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} f_N(x),$$

donc le Théorème 5.8 de convergence monotone assure, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, l'existence d'un entier $N = N_\varepsilon > 0$ assez grand pour que :

$$\big(0 \,\leqslant\,\big) \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \big(f - f_N\big) \,\leqslant\, \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si maintenant nous prenons $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ avec :

$$N\,\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

alors pour *tout* sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure petite :

$$m(E) \leqslant \delta,$$

on peut majorer :

$$\begin{aligned}
\big(0 \leqslant\big) \qquad \int_E f &= \int_E \big(f - f_N\big) + \int_E f_N \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \big(f - f_N\big) + \int_E f_N \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + N\,m(E) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

ce qui conclut ! □

Nous sommes enfin parvenus au terme de ce long périple théorique dévolu à l'intégrale de Lebesgue, et c'est pour fêter ensemble ce moment intellectuel important que nous offrons au lecteur comme bouquet final le théorème le plus frappant et le plus utile de toute la théorie.

Théorème 6.6. [Théorème dit de la *convergence dominée* dû à Lebesgue] *Si une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions mesurables :*

$$f_n\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

converge ponctuellement vers une certaine fonction-limite :

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \qquad\qquad \text{(pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d\text{)},$$

tout en restant constamment majorée *presque partout en valeur absolue par une fonction positive fixe $g\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$:*

$$\big|f_n(x)\big| \leqslant g(x) \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1),$$

qui est Lebesgue-intégrable :

$$\int_{\mathbb{R}^d} g < \infty,$$

alors on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int \big|f_n - f\big| = 0,$$

d'où aussi :

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Bien entendu, l'énoncé est tout aussi valable lorsque les fonctions f_n et g sont définies sur un sous-ensemble mesurable fixé $E \subset \mathbb{R}^d$. L'*intérêt phénoménal* de ce théorème, par rapport à ceux de la théorie de Riemann qui exigaient en général d'abondantes doses de *convergence uniforme*, c'est que la seule hypothèse de domination par une fonction d'intégrale finie suffit à justifier rigoureusement l'interversion entre limite et intégrale !

Rendez-vous compte ! L'exigence de convergence uniforme part en fumée !

Lebesgue, bien à tort, se montra confus des dieux qu'il avait destitués, des statues qu'il avait renversées de leur socle. Arnaud DENJOY

Démonstration. Pour tout entier $N \geqslant 1$, introduisons l'ensemble simultanément tronqué à l'horizontale et à la verticale :

$$G_N := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon \ |x| \leqslant N \text{ et } g(x) \leqslant N\big\},$$

ainsi que la suite de fonctions croissantes :

$$g_N(x) \ := \ g(x) \cdot \mathbf{1}_{G_N}.$$

Une convergence monotone de ces g_N vers g entièrement analogue à celle qui avait lieu dans la démonstration du Théorème 6.4 assure alors (« petit » exercice) que pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $N = N_\varepsilon \gg 1$ assez grand pour que :

$$\int_{\mathbb{R}^d \backslash G_N} g \ \leqslant \ \varepsilon,$$

mais pour la clarté et la complétude de ce cours, mieux vaut résoudre cet exercice pas si « petit » que cela… Ces détails peuvent être sautés en première lecture.

Commençons par un préliminaire classique qui peut être effectué dans de nombreuses situations.

Comme $\int g < \infty$, l'ensemble $\big\{g = \infty\big\}$ est de mesure nulle. Modifions les valeurs de g sur cet ensemble en posant $g(x) := 0$ si $g(x) = \infty$, ce qui ne change pas la valeur finie positive de l'intégrale de notre fonction dominatrice intégrable g.

Modifions aussi les valeurs de chacune des fonctions f_n là où nous avions $g(x) = \infty$, en posant de même $f_n(x) := 0$, ce qui ne change pas les valeurs des intégrales $\int f_n$.

Observons que ces modifications (mineures) de valeurs préservent aussi notre hypothèse des inégalités ponctuelles $|f_n(x)| \leqslant g(x)$.

Évidemment, chaque f_n est intégrable, puisque $|f_n| \leqslant g$ et puisque g est intégrable !

Ensuite, comme on vérifie en revenant à la définition de la suite de fonctions $\big\{g_N\big\}_{N=1}^{\infty}$ qu'elle est ponctuellement *croissante :*

$$0 \ \leqslant \ g_N \ \leqslant \ g_{N+1},$$

et comme on vérifie mentalement qu'en tout point $x \in \mathbb{R}^d$ on a :

$$g_N(x) \ \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \ g(x),$$

le Théorème 5.8 de convergence monotone nous donne :

$$\int g_N \ \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \ \int g,$$

c'est-à-dire :

$$\int_{G_N} g \ \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \ \int_{\mathbb{R}^d} g,$$

d'où par soustraction ensembliste :

$$0 \underset{\infty \leftarrow N}{\longleftarrow} \int_{\mathbb{R}^d \backslash G_N} g,$$

et ainsi, pour $N \gg 1$ assez grand, cette intégrale peut effectivement être rendue plus petite qu'un epsilon de la moitié d'un quart d'une demi-miette. □

Par ailleurs, pour un tel N fixé, la suite de fonctions :

$$f_n \cdot \mathbf{1}_{G_N} \qquad\qquad (n \geqslant 1)$$

reste bornée par N en valeur absolue puisque $|f_n| \leqslant g \leqslant N$ sur G_N, et comme cette suite reste de plus à support contenu dans l'ensemble de mesure finie G_N, le Théorème 3.7 de convergence bornée s'applique et fournit un entier $n = n_\varepsilon \gg 1$ assez grand pour que :

$$n \geqslant n_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \int_{G_N} \big|f_n - f\big| \leqslant \varepsilon.$$

Grâce à ces deux inégalités, nous pouvons alors aisément majorer :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \big|f_n - f\big| &= \int_{G_N} \big|f_n - f\big| + \int_{\mathbb{R}^d \backslash G_N} \big|f_n - f\big| \\
&\leqslant \int_{G_N} \big|f_n - f\big| + 2 \int_{\mathbb{R}^d \backslash G_N} g \\
&\leqslant \varepsilon + 2\,\varepsilon,
\end{aligned}$$

toujours pour $n \geqslant n_\varepsilon$, ce qui achève la démonstration de ce grand théorème. □

Pour terminer cette section capitale, mettons en lumière une conséquence facile du Théorème 6.6 *majeur* de convergence dominée, ainsi que du Théorème 5.8 — tout aussi *majeur* ! — de convergence monotone, sous la forme d'un « théorème-corollaire », hyper-fréquemment utilisé dans les applications, et qui renforce le Théorème 5.9 sans supposer la positivité des fonctions considérées.

Abrégeons ici :

$$\overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Théorème 6.7. *Si une suite $\big\{f_k(x)\big\}_{k=1}^{\infty}$ de fonctions mesurables intégrables sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ est telle que :*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \big|f_k(x)\big|\,dx < \infty,$$

alors en presque tout point $x \in \mathbb{R}^d$, la série numérique :

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x),$$

converge absolument vers une valeur finie *appartenant à $\mathbb{R}$, elle définit une fonction mesurable intégrable $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, et surtout, elle satisfait l'interversion entre intégration et sommation infinie dénombrable :*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \bigg(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\bigg)\,dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Démonstration. Comme les f_k sont intégrables, nous pouvons changer à l'avance leurs valeurs sur une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle de manière à ce qu'aucune fonction $f_k \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ ne prenne les valeurs $-\infty$ et ∞.

Ensuite, pour $n \geqslant 1$ entier, posons :

$$F_n(x) := \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} f_k(x) \qquad (\in \mathbb{R}),$$

$$G_n(x) := \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \big|f_k(x)\big|, \qquad (\in \mathbb{R}_+),$$

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \big|f_k(x)\big| \qquad (\in \overline{\mathbb{R}}_+),$$

où :

$$\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

D'après le Théorème 5.8 de convergence monotone, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n\to\infty} G_n(x)\,dx \\
&\overset{\text{CM}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} G_n(x)\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \int_{\mathbb{R}^d} \big|f_k(x)\big|\,dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \big|f_k(x)\big|\,dx \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

quantité qui est finie, grâce à l'hypothèse principale du théorème en cours de démonstration.

Alors puisque $\int g < \infty$, la Proposition 5.4 **(v)** offre pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ la *finitude* des valeurs $g(x) \in \mathbb{R}_+$, la valeur ∞ étant ainsi *exclue*. C'est exactement la convergence *absolue* :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \big|f_k(x)\big| < \infty \qquad \text{(presque partout)},$$

de notre série initiale de fonctions :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) &=: f(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} F_n(x),
\end{aligned}$$

qui converge donc aussi presque partounette !

Enfin, notre suite $\big\{F_n(x)\big\}_{n=1}^{\infty}$ étant par nature *dominée :*

$$\begin{aligned}
\big|F_n(x)\big| = \bigg|\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} f_k(x)\bigg| \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \big|f_k(x)\big| &= G_n(x) \\
&\leqslant g(x),
\end{aligned}$$

par notre fonction-plafond positive g dont nous venons de dire qu'elle est Lebesgue-intégrable, le Théorème 6.6 de convergence dominée de Lebesgue — le benêt qui bégaille ! — :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\lim_{n\to\infty} F_n(x)\Big)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} F_n(x)\,dx,$$

nous offre la conclusion annoncée :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \bigg(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \bigg) \, dx \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k(x) \, dx \qquad \square$$

7. Fonctions à valeurs complexes

Lorsque les fonctions f que l'on considère sont à valeurs complexes, elles se décomposent :

$$f(x) = u(x) + i\, v(x),$$

en partie réelle u et en partie imaginaire v. Bien entendu, la fonction f est mesurable si et seulement si u et v le sont.

Définition 7.1. On dit qu'une fonction à valeurs complexes $f = u + i\, v$ définie sur $\mathbb{R}^d$ est *Lebesgue-intégrable* lorsque son module :

$$\big|f(x)\big| \;=\; \sqrt{u(x)^2 + v(x)^2}$$

est Lebesgue-intégrable d'intégrale finie :

$$\int |f| \;<\; \infty.$$

Rappelons les inégalités élémentaires :

$$\big|u(x)\big| \;\leqslant\; \big|f(x)\big| \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \big|v(x)\big| \;\leqslant\; \big|f(x)\big|,$$

ainsi que :

$$\big|f(x)\big| \;\leqslant\; \big|u(x)\big| + \big|v(x)\big|,$$

cette dernière découlant de l'inégalité $(a+b)^{1/2} \leqslant a^{1/2} + b^{1/2}$, valable pour $a, b \geqslant 0$ (exercice).

Ces inégalités extrêmement simples font d'ailleurs voir qu'une fonction à valeurs complexes est Lebesgue-intégrable *si et seulement si* ses parties réelle et imaginaire le sont, et dans ce cas :

$$\int f(x)\, dx \;=\; \int u(x)\, dx + i \int v(x)\, dx.$$

Définition 7.2. Étant donné un sous-ensemble mesurable quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$, on dit qu'une fonction mesurable :

$$f\colon \quad E \longrightarrow \mathbb{C}$$

est *Lebesgue-intégrable* lorsque $f \cdot \mathbf{1}_E$ l'est sur $\mathbb{R}^d$ au sens de la définition qui précède, et dans ce cas, on note :

$$\int_E f = \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \mathbf{1}_E.$$

La collection de toutes les fonctions à valeurs complexes intégrables sur un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ forme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, comme on s'en convainc aisément ; en effet, si f et g sont intégrables, alors $f + g$ l'est aussi puisque l'inégalité du triangle donne :

$$\big|(f+g)(x)\big| \;\leqslant\; \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big|,$$

et puisque la monotonie de l'intégrale donne :

$$\int_E \big|f + g\big| \;\leqslant\; \int_E |f| + \int_E |g| \;<\; \infty.$$

Enfin, il est clair que pour $\lambda \in \mathbb{C}$, si f est intégrable, $\lambda\, f$ l'est aussi.

8. Intégrale de Riemann généralisée versus intégrale de Lebesgue

Cherchons maintenant à comparer l'intégrale de Lebesgue avec l'intégrale de Riemann généralisée.

Sur un intervalle ouvert $]a, b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, soit donc $f \colon]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *localement Riemann-intégrable*, à savoir qui, sur tout intervalle compact $[c, d] \subset]a, b[$, est bornée et Riemann-intégrable, d'où grâce au Théorème 4.1 :

$$\int_{[c,d]}^{\mathsf{R}} f(x)\, dx \;=\; \int_{[c,d]}^{\mathsf{L}} f(x)\, dx.$$

Rappelons que f est dite *intégrable au sens généralisé de Riemann* lorsque, avec $c \in]a, b[$ fixé :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\, dx \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx$$

existent toutes deux, *i.e.* pour toutes paires de suites $a \longleftarrow a_n$ décroissante et $b_n \longrightarrow b$ croissante :

$$\lim_{n \to \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\, dx \;=:\; \int_{a}^{b} f(x)\, dx \qquad \text{existe.}$$

Lemme 8.1. *Sous ces hypothèses, si f est Lebesgue-intégrable sur $]a, b[$:*

$$\int_{]a,b[}^{\mathsf{L}} \big|f(x)\big|\, dx \;<\; \infty,$$

alors $|f|$ est intégrable au sens généralisé de Riemann, et f aussi.

Preuve. Le Théorème 6.6 de convergence dominée tout récemment démontré qui sort du four comme un croissant chaud nous offre pour la première fois son croustillant instantané :

$$\int_{[a_n,b_n]}^{\mathsf{R}} \big|f(x)\big|\, dx \;=\; \int_{[a_n,b_n]}^{\mathsf{L}} \big|f(x)\big|\, dx \;\xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{}\; \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \big|f(x)\big|\, dx \;<\; \infty,$$

ou alors, pour ceux qui préfèrent déguster lentement le beurré délicieux de la vérification scrupuleuse des hypothèses, comme la suite $f_n := f \cdot \mathbf{1}_{[a_n,b_n]}$ est majorée $|f_n| \leqslant |f|$ par la fonction-dominatrice $g := f$ elle-même qui est Lebesgue-intégrable sur $[a, b]$, on peut effectivement intervertir limite et intégration !

Que cette première viennoiserie ne nous déçoive jamais ! car dans l'avenir, nous aurons d'innombrable occasions de constater la puissance incomparable qu'offre la convergence dominée, toujours rapide comme l'éclair ! $\square$

Toutefois, la réciproque est *fausse :* la fonction $t \longmapsto \frac{\sin t}{t}$ sur $[0, \infty[$ nous a déjà fait voir, à la fin du chapitre sur l'intégrale de Riemann, qu'elle admet une intégrale de Riemann généralisée, tandis que :

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[0,n\pi]}^{\mathsf{L}} \frac{|\sin t|}{t}\, dt \;=\; \lim_{n \to \infty} \int_{[0,n\pi]}^{\mathsf{R}} \frac{|\sin t|}{t}\, dt \;=\; \infty.$$

9. Espace L^1 des fonctions intégrables : complétude ; séparabilité

Le fait que les fonctions intégrables forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel constitue une propriété fondamentale qui est de type *algébrique*.

Une propriété de type *analytique* encore plus importante mais bien moins élémentaire — *et qui n'était absolument pas satisfaite en théorie de Riemann* —, est que ce $\mathbb{C}$-espace vectoriel est *complet* pour la quantité positive naturelle :

$$\int |f|,$$

laquelle va s'avérer être une vraie norme.

Définition 9.1. La *norme* d'une fonction Lebesgue-intégrable $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ est la quantité :

$$\|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|\, dx.$$

La collection de toutes les fonctions Lebesgue-intégrables munie de cette norme constitue un espace noté :

$$L^1(\mathbb{R}^d),$$

dont il s'agit maintenant de préciser rigoureusement la définition. En fait, on sait déjà par la Propositon 5.4 que :

$$\big\|f\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f = 0 \ \text{ presque partout},$$

et cette propriété reflète la pratique intuitive que nous avons déjà implicitement adoptée de ne pas distinguer deux fonctions qui coïncident en presque tout point. Avec cela en tête, nous pouvons fournir le concept rigoureux attendu.

Définition 9.2. L'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des classes d'équivalence de fonction mesurables

$$f\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$$

Lebesgue-intégrables :

$$\big\|f\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} \big|f\big| < \infty,$$

où deux telles fonctions f_1 et f_2 sont équivalentes :

$$f_1 \sim f_2$$

si et seulement si elles sont égales en presque tout point $x \in \mathbb{R}^d$.

Toutefois, il est fréquemment admis de considérer qu'un élément $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est une fonction intégrable spécifique, même si en toute rigueur, on devrait parler de la classe d'équivalence d'une telle f.

Bien entendu, la norme $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ ne dépend pas du choix d'un représentant dans une classe d'équivalence. De plus, $L^1(\mathbb{R}^d)$ hérite la propriété d'être un espace vectoriel. Les propriétés élémentaires de $L^1(\mathbb{R}^d)$ sont résumées dans l'énoncé suivant.

Proposition 9.3. *Si f et g sont deux fonctions appartenant à $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, alors :*

(i) $\|\lambda\, f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = |\lambda|\, \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$;

(ii) $\|f + g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$;

(iii) $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0$ *si et seulement si* $f = 0$ *presque partout ;*

(iv) $d(f, g) := \|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ *définit une métrique sur* $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Pour ce qui concerne **(iv)**, il s'agit de vérifier que $d(f,g)$ satisfait les trois axiomes d'une métrique, ce qui est manifestement aisé. □

Définition 9.4. Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V muni d'une métrique $d(\cdot,\cdot)$ est dit *complet* lorsque toute suite de Cauchy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de points $x_n \in V$ admet une limite $x_\infty \in V$ *qui appartient encore à* V, à savoir plus précisément toute cauchycité :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \geqslant 1 \quad \Big(n,\, m \,\geqslant N(\varepsilon) \implies d\big(x_n, x_m\big) \,\leqslant\, \varepsilon\Big),$$

implique convergence interne à l'espace :

$$\exists\, x_\infty \in V \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty.$$

Notre objectif principal est de montrer maintenant que la Théorie de l'intégration de Lebesgue *complète* celle de Riemann, en un sens qui est simultanément fort et signifiant mathématiquement.

Théorème 9.5. [Riesz-Fischer] *Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $L^1\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big)$ muni de la métrique dérivée de sa norme :*

$$d\big(f,g\big) \,:=\, \int_{\mathbb{R}^d} \big|f-g\big| \,=\, \|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

est complet.

Démonstration. Étant donné une suite de Cauchy quelconque $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ dans $L^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \geqslant 1 \quad \Big(n,\, m \,\geqslant N(\varepsilon) \implies \big\|f_n - f_m\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \,\leqslant\, \varepsilon\Big),$$

il s'agit donc d'établir qu'il existe une fonction mesurable intégrable — *a posteriori* unique — :

$$f_\infty \in L^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}),$$

laquelle est donc encore d'intégrale finie, telle que :

$$0 \,=\, \lim_{n\to\infty} \big\|f_n - f_\infty\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Le plan de la démonstration consiste à extraire une sous-suite appropriée $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ qui convergera presque partout *ponctuellement* vers une certaine fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et à faire voir ensuite que cette sous-suite converge aussi vers f en norme L^1, ce qui produira la fonction $f_\infty := f$ recherchée.

Or dans des circonstances idéales, on pourrait espérer que la suite complète $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ elle-même converge presque partout vers une limite $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, mais malheureusement, une telle convergence n'a pas toujours lieu pour les suites de Cauchy quelconques dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, voir à ce sujet l'Exercice 14. Cependant, il va se trouver que si la convergence au sens de Cauchy est *assez rapide* en norme $L^1(\mathbb{R}^d)$, alors la convergence ponctuelle presque partout va devenir garantie.

Ce sera donc pour accélérer la convergence au sens de Cauchy que nous devons extraire une certaine sous-suite $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

Plus précisément, pour $k = 1, 2, 3, \dots$, choisissons successivement des $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ de plus en plus petits auxquels sont associés des entiers :

$$N\big(\tfrac{1}{2}\big),\; N\big(\tfrac{1}{2^2}\big),\; N\big(\tfrac{1}{2^3}\big),\; \dots\dots,\; N\big(\tfrac{1}{2^k}\big),\; \dots\dots,$$

garantissant que :

$$n,\, m \geqslant N\big(\tfrac{1}{2^k}\big) \implies \big\|f_n - f_m\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \tfrac{1}{2^k},$$

et introduisons la sous-suite d'entiers :

$$n_k := \mathsf{max}\Big(N\big(\tfrac{1}{2^1}\big),\ \dots,\ N\big(\tfrac{1}{2^k}\big)\Big),$$

qui est manifestement croissante :

$$1 \leqslant n_k \leqslant n_{k+1}.$$

Grâce à ce choix, on produit donc une sous-suite $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ qui satisfait :

$$\big\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \tfrac{1}{2^k} \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant 1).$$

Quitte à augmenter légèrement n_k en posant plutôt par exemple :

$$n_k := k + \mathsf{max}\Big(N\big(\tfrac{1}{2^1}\big),\ \dots,\ N\big(\tfrac{1}{2^k}\big)\Big),$$

on peut supposer la croissance stricte :

$$n_k < n_{k+1},$$

ce qui est certainement avisé pour avoir une vraie sous-suite.

Introduisons ensuite une série de fonctions dont la convergence sera établie ultérieurement :

$$f(x) := f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \big(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\big), \tag{9.6}$$

ainsi que la série majorante associée, *via* l'inégalité triangulaire infinie :

$$F(x) := \big|f_{n_1}(x)\big| + \sum_{k=1}^{\infty} \big|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\big|. \tag{9.7}$$

Introduisons aussi, pour tout entier $K \geqslant 1$, les *sommes partielles* d'ordre K :

$$\begin{aligned} S_K(f)(x) &= f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{K} \big(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\big) \\ &= f_{n_{K+1}}(x), \end{aligned}$$

qui se contractent par téléscopie, et aussi les majorantes de ces sommes partielles :

$$F_K(x) = \big|f_{n_1}(x)\big| + \sum_{k=1}^{K} \big|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\big|,$$

lesquelles ne se simplifient en général *pas*.

En tout cas, l'inégalité triangulaire donne au moins :

$$\begin{aligned}\big\|S_K(f)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \big\|F_K\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &= \big\|f_{n_1}\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \sum_{k=1}^{K} \big\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \big\|f_{n_1}\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} \\ &\leqslant \big\|f_{n_1}\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= \big\|f_{n_1}\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + 1 \\ &< \infty,\end{aligned}$$

ce dernier majorant étant uniforme, *i.e.* indépendant de $K \geqslant 1$.

Considérons maintenant la suite de fonctions :

$$\big(F_K\big)_{K=1}^{\infty},$$

qui est manifestement positive croissante :

$$0 \leqslant F_K \leqslant F_{K+1},$$

et qui tend par définition vers la fonction :

$$F(x) = \lim_{K \to \infty} F_K(x),$$

à valeurs dans $[0, +\infty]$. On peut alors appliquer le Théorème 5.8 de convergence monotone qui nous donne :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} F &= \lim_{K\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} F_K \\ &\leqslant \big\|f_{n_1}\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + 1 \\ &< \infty,\end{aligned}$$

ce qui fait voir que F est Lebesgue-intégrable — information fort agréable !

Immédiatement, de l'inégalité :

$$|f| \leqslant F,$$

on tire que :

$$f \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Ensuite, en se référant au Théorème 5.9, on déduit aussi que la série (9.7) ci-dessus qui définit f converge ponctuellement presque partout vers une fonction mesurable presque partout finie, et donc en revenant à (9.6), f elle-même est bien définie, mesurable, presque partout finie.

Dit autrement, les sommes partielles de cette série (9.6) :

$$S_{k-1}(f)(x) = f_{n_k}(x)$$

convergent presque partout ponctuellement vers :

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \qquad \text{(pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d\text{)}.$$

Nous affirmons alors que cette fonction f est la fonction $f_\infty \in L^1(\mathbb{R}^d)$ recherchée vers laquelle converge la suite de Cauchy $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ dont nous sommes partis.

En effet, pour établir d'abord la convergence dans L^1 de notre sous-suite :

$$f_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{dans} \ \ L^1(\mathbb{R}^d),$$

à savoir pour vérifier que :

$$0 \overset{?}{=} \lim_{k\to\infty} \big\| f - f_{n_k} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

on remarque que l'inégalité valable par construction presque partout :

$$\begin{aligned} \big| f - f_{n_k} \big| &\leqslant |f| + \big| f_{n_k} \big| \\ &= |f| + \big| S_{k-1}(f) \big| \\ &\leqslant |f| + |F| \\ &\leqslant 2\,F, \end{aligned}$$

assure la domination uniforme :

$$\begin{aligned} \big\| f - f_{n_k} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant 2\,\|F\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

et alors grâce au Théorème 6.6 de convergence dominée, on conclut que la sous-suite $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge en norme L^1 vers la fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$:

$$0 = \lim_{k\to\infty} \big\| f - f_{n_k} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Mais il s'agit en fait d'établir la convergence vers f de la suite *entière* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, pas seulement d'une sous-suite !

Or comme $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ est par hypothèse de Cauchy :

$$n,\, m \geqslant N\big(\tfrac{\varepsilon}{2}\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \big\| f_n - f_m \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2},$$

en choisissant un entier de la sous-suite $n_k \gg 1$ assez grand pour que grâce à ce que nous venons de voir :

$$\big\| f_{n_k} - f \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2},$$

un entier satisfaisant aussi, quitte à l'augmenter, $n_k \geqslant N(\frac{\varepsilon}{2})$, on peut intercaler ce f_{n_k} dans une inégalité triangulaire terminale :

$$\begin{aligned} \big\| f_n - f \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \big\| f_n - f_{n_k} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \big\| f_{n_k} - f \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

valable pour tout $n \geqslant N(\frac{\varepsilon}{2})$, qui conclut la démonstration de ce grand théorème de complétude très souvent utilisée en Analyse. □

Puisque toute suite qui converge en norme L^1 est une suite de Cauchy dans cette norme, les arguments de la démonstration précédente ont fait voir un énoncé suivant qui s'avère très souvent utile.

Théorème 9.8. *Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de fonctions appartenant à $L^1(\mathbb{R}^d)$ qui converge en norme L^1 vers une certaine fonction $f_\infty \in L^1(\mathbb{R}^d)$:*

$$0 = \lim_{n\to\infty} \big\| f_n - f_\infty \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

alors il existe une sous-suite :

$$\big(f_{n_k}\big)_{k=1}^{\infty}$$

qui converge ponctuellement vers f_∞ :

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \,=\, f_\infty(x)$$

en presque tout point $x \in \mathbb{R}^d$.

Définition 9.9. On dit qu'une famille $\mathscr{G}$ de fonctions g appartenant à $L^1(\mathbb{R}^d)$ est *dense* dans $\big(L^1(\mathbb{R}^d),\, \|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\big)$ lorsque :

$$\forall\, f \in L^1(\mathbb{R}^d) \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, g \in \mathscr{G} \quad \big\|f - g\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

Naturellement, nous sommes déjà familiers avec certaines familles de fonctions qui sont denses dans des espaces fonctionnels : par exemple, le théorème de Weierstrass montre que les polynômes sont denses dans l'espace des fonctions continues $\mathscr{C}^0\big([0,1],\, \|\cdot\|_{\mathscr{C}^0([0,1])}\big)$ munies de la norme de la convergence uniforme.

Le théorème qui suit décrit d'autres familles denses qui s'avéreront très utiles lorsqu'il s'agira d'établir des propriétés et des identités satisfaites par les fonctions intégrables quelconques. Dans un tel objectif, le principe général c'est que le résultat est souvent plus facile à démontrer pour une classe restreinte de fonctions, telles que par exemple les fonctions étagées, et ensuite, un argument de densité ou de passage à la limite permet d'obtenir le résultat général.

Théorème 9.10. *Dans l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ des fonctions Lebesgue-intégrables sur $\mathbb{R}^d$, les trois familles suivantes de fonctions sont denses :*

(i) *les fonctions étagées ;*

(ii) *les fonctions en escalier ;*

(iii) *les fonctions continues à support compact.*

Démonstration. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. On peut supposer que f est à valeurs réelles, en traitant séparément $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$. Si donc $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, en écrivant $f = f^+ - f^-$ avec $f^- \geqslant 0$ et $f^+ \geqslant 0$, on peut aussi supposer que $f \geqslant 0$.

Maintenant, pour ce qui concerne **(i)**, un théorème du chapitre qui précède garantit l'existence d'une suite $(\varphi_k)_{k=1}^\infty$ de fonctions étagées positives $\varphi_k \geqslant 0$ qui tendent ponctuellement vers f en tout point. Mais alors le Théorème 5.8 de convergence monotone donne :

$$0 \,=\, \lim_{k\to\infty} \big\|f - \varphi_k\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

ce qui montre bien qu'il existe des fonctions étagées arbitrairement proches de f en norme L^1 !

Quant à **(ii)**, grâce à **(i)** obtenue à l'instant, il suffit d'approximer les fonctions étagées par des fonctions en escalier. Or par définition, les fonctions étagées sont combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices d'ensembles mesurables de mesure finie. Donc il suffit de faire voir que la fonction indicatrice $\mathbf{1}_E$ d'un unique ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ est approximable par des escaliers.

Si $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, il s'agit de trouver une fonction en escalier ψ telle que :

$$\big\|\mathbf{1}_E - \psi\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

Mais il se trouve que nous avons déjà effectué cette tâche sans nous en rendre compte. En effet, un théorème du chapitre qui précède a fait voir qu'il existe une famille finie de rectangles fermés presque disjoints $R_1, \dots, R_J$ tels que :

$$m\bigg(E\Delta\bigcup_{j=1}^J R_j\bigg)\leqslant\varepsilon.$$

Mais alors en passant aux intérieurs des rectangles (leurs bords étant de mesure nulle), les deux fonctions :

$$\mathbf{1}_E \qquad\text{et}\qquad \psi := \sum_{j=1}^J \mathbf{1}_{\mathrm{Int}\,R_j}$$

diffèrent seulement sur un ensemble de mesure $\leqslant\varepsilon$, sont égales à 0 ou à 1 en tout point, ce qui assure que :

$$\big\|\mathbf{1}_E-\psi\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant\varepsilon.$$

Enfin pour obtenir **(iii)**, grâce à **(ii)** obtenu à l'instant, en jonglant avec des $\varepsilon>0$ pour embrasser des combinaisons linéaires finies comme on a déjà réussi maintes fois à le faire, on se ramène (exercice du poignet) à démontrer que la fonction indicatrice d'un unique rectangle fermé borné :

$$\mathbf{1}_R=\prod_{1\leqslant i\leqslant d}\mathbf{1}_{[a_i,b_i]}\qquad\qquad(-\infty<a_i<b_i<\infty),$$

est approximable, en norme $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ à $\varepsilon>0$ arbitrairement petit près, par des fonctions continues à support compact.

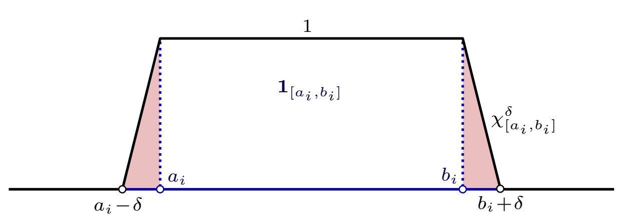
Tous les apprentis-menuisiers de Licence 3 en Mathématiques Fondamentales et Appliquées savent déjà comment raboter les arêtes d'un gratte-ciel en modifiant peu son volume.

Avec $\delta>0$ très petit, gonflons plutôt légèrement le rectangle R en :

$$R^\delta := \prod_{1\leqslant i\leqslant d}\big[a_i-\delta,\,b_i+\delta\big],$$

ce qui ne change que très peu son volume :

$$\big|R^\delta\big|=\prod_{1\leqslant i\leqslant d}\big(b_i-a_i+2\delta\big)=\prod_{1\leqslant i\leqslant d}\big(b_i-a_i\big)+\mathrm{O}(\delta)=|R|+\mathrm{O}(\delta).$$



Dans chaque i-ème dimension, introduisons ensuite la fonction continue affine par morceaux simplette :

$$\chi^\delta_{[a_i,b_i]}(x)\in\mathscr{C}^0_c\big(\mathbb{R},[0,1]\big),$$

dont le graphe vient d'être représenté, égale à 1 sur $[a_i,b_i]$, et nulle hors de $[a_i-\delta,b_i+\delta]$. Alors la fonction-produit :

$$\chi^\delta_R(x):=\prod_{1\leqslant i\leqslant d}\chi^\delta_{[a_i,b_i]}(x),$$

est à support compact dans $\mathbb{R}^d$, est continue, et puisque $0 \leqslant \chi_R^\delta \leqslant 1$ avec $\chi_R^\delta \equiv 1$ sur R, la différence :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \left|\mathbf{1}_R(x) - \chi_R^\delta(x)\right| dx \ &\leqslant \ \int_{R^\delta \backslash R} 1 \\ &= \ \left|R^\delta\right| - |R| \\ &= \ \mathrm{O}(\delta),\end{aligned}$$

peut effectivement être rendue $\leqslant \varepsilon$ pour $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ suffisamment petit. □

Nous pouvons maintenant dévoiler une propriété troublante — et pourtant mathématiquement vraie ! — de l'ensemble $L^1(\mathbb{R}^d)$ des fonctions intégrables. Nous venons de voir que dans l'espace vectoriel normé (complet) :

$$\Big(L^1(\mathbb{R}^d),\ \|\cdot\|_{L^1}\Big),$$

l'ensemble des fonctions en escalier est dense. Toutefois, cet ensemble n'est certainement pas dénombrable, puisqu'une seule combinaison linéaire avec un seul coefficient $\lambda \in \mathbb{R}$ donne déjà une famille de cardinal égal à celui de $\mathbb{R}$, non dénombrable. Mais en approximant ces $\lambda \in \mathbb{R}$ par des rationnels $\lambda_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$, tout va devenir possible ! Commençons alors par conceptualiser l'objectif.

Définition 9.11. [Espace séparable] Un espace vectoriel normé $\big(E, \|\cdot\|_E\big)$ — pas nécessairement complet — est dit *séparable* s'il existe une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ — dénombrable ! — de vecteurs $f_n \in E$ qui est *dense :*

$$\forall\, g \,\in\, E \quad \forall\, \varepsilon \,>\, 0 \quad \exists\, f_{\mathrm{N}(\varepsilon)} \,\in\, \big(f_n\big)_{n=1}^\infty \quad \text{telle que} \quad \big\|g - f_{\mathrm{N}(\varepsilon)}\big\|_E \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Théorème 9.12. [Séparabilité de L^1] *Dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, il existe une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions f_n intégrables qui est* dense.

Le phénomène est troublant en ceci qu'un espace de fonctions aussi vaste et aussi complexe que celui des fonctions mesurables intégrables aurait pu sembler, au moment où on a dépensé tant d'efforts à le construire, ne jamais pouvoir être « capturé » comme l'adhérence d'une suite dénombrable.

Démonstration. D'après le Théorème 9.10 **(ii)**, il existe une combinaison linéaire finie de fonctions indicatrices de rectangles compacts :

$$R \,=\, [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \,\subset\, \mathbb{R}^d \qquad\qquad (-\infty < a_i < b_i < \infty),$$

telle que :

$$\bigg\| g - \sum_{\text{finie}} \lambda \cdot \mathbf{1}_R \bigg\|_{L^1} \ \leqslant\ \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or puisque $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est dense, il existe des rationnels extrêmement proches $a_i' \approx a_i$, $b_i' \approx b_i$, $\lambda' \approx \lambda$ tels qu'avec les rectangles perturbés :

$$R' \,=\, [a_1', b_1'] \times \cdots \times [a_d', b_d'] \qquad\qquad (-\infty < a_i' < b_i' < \infty),$$

on maintient l'approximation :

$$\bigg\| \sum_{\text{finie}} \lambda \cdot \mathbf{1}_R - \sum_{\text{finie}} \lambda' \cdot \mathbf{1}_{R'} \bigg\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \ \leqslant\ \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où par inégalité triangulaire :

$$\Big\| g - \sum_{\text{finie}} \lambda' \cdot \mathbf{1}_{R'} \Big\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais l'ensemble des coefficients rationnels $\lambda' \in \mathbb{Q} + i\,\mathbb{Q}$, en nombre fini, et l'ensemble des coordonnées $a_i', b_i' \in \mathbb{Q}$, aussi en nombre fini, sont dénombrables, ce qui permet, par un procédé de renumérotation quelconque d'organiser :

$$\Big\{ \sum_{\text{finie}} \lambda' \cdot \mathbf{1}_{R'} \Big\} = \big(f_n\big)_{n=1}^{\infty}$$

comme une *suite* de fonctions, et ainsi, $\|g - f_{\mathrm{N}(\varepsilon)}\|_{L^1} \leqslant \varepsilon$, comme voulu. □

Les résultats de densité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ conduisent tout naturellement à une généralisation immédiate pour laquelle $\mathbb{R}^d$ est remplacé par un sous-ensemble mesurables $E \subset \mathbb{R}^d$. En fait, on peut introduire et définir $L^1(E)$ comme $L^1(\mathbb{R}^d)$, pour développer la théorie de manière entièrement similaire. À vrai dire, on peut aussi de manière alternative prolonger à 0 toute fonction f définie sur E en posant :

$$\widetilde{f} := \begin{cases} f & \text{sur } E, \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R}^d \backslash E, \end{cases}$$

puis déclarer que :

$$\big\| f \big\|_{L^1(E)} := \big\| \widetilde{f} \big\|_{L^1(E)}.$$

Les versions sur E des propositions et théorèmes de cette section sont alors parfaitement réalisées.

10. Propriétés d'invariance

Définition 10.1. Étant donné une fonction $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$, pour un vecteur fixe $h \in \mathbb{R}^d$, la fonction :

$$\tau_h(f)(x) := f(x-h)$$

est appelée la *translation de f par h.*

Comme en théorie de Riemann, l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ tout entier est invariante par translation.

Lemme 10.2. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\tau_h(f) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est aussi intégrable et de plus :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-h)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx.$$

Démonstration. L'argument est une illustration du principe de réduction à des fonctions simples, complémenté par la densité. En effet, lorsque :

$$f = \mathbf{1}_E$$

est la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$, on a :

$$\tau_h(f) = \mathbf{1}_{E_h},$$

où naturellement :

$$E_h = \big\{ x + h \colon\; x \in E \big\},$$

et comme on sait que la mesure de Lebesgue est invariante par translation :

$$m\big(E_h\big) = m(E),$$

le résultat est immédiat dans ce cas :

$$\int \tau_h(f) \,=\, m\big(E_h\big) = m(E) \,=\, \int f.$$

Ensuite par linéarité de l'intégrale, le résultat est encore valable pour toute fonction étagée.

Enfin, soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ une fonction intégrable quelconque à valeurs réelles positives, puisque l'on peut toujours se ramener à ce cas (exercice mental). Nous savons pour l'avoir utilisé il y a très peu de temps qu'il existe une suite croissante $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ de fonctions étagées positives :

$$0 \,\leqslant\, \varphi_k \,\leqslant\, \varphi_{k+1} \,\leqslant\, f = \lim_{k\to\infty} \varphi_k,$$

qui convergent ponctuellement vers la fonction f tout en lui restant inférieures, et le Théorème 5.8 de convergence monotone assure donc que :

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k.$$

Mais alors la suite des fonctions translatées :

$$\tau_h\big(\varphi_k\big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \tau_h(f)$$

converge (exercice mental) de manière monotone et bornée vers la translatée de f, et donc le Théorème de convergence monotone donne à nouveau

$$\begin{aligned}\int \tau_h(f) \,&=\, \lim_{k\to\infty} \int \tau_h\big(\varphi_k\big)\\ &= \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k\\ &= \int f,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait faire voir. □

En utilisant l'invariance par dilatation de la mesure de Lebesgue, on peut aussi établir l'énoncé élémentaire suivant, laissé en exercice.

Théorème 10.3. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors pour $\delta > 0$, la fonction :*

$$x \,\longmapsto\, f(\delta\, x)$$

appartient aussi à $L^1(\mathbb{R}^d)$ avec de plus :

$$\delta^d \int_{\mathbb{R}^d} f(\delta x)\, dx \,=\, \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx.$$

Enfin :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(-x)\, dx \,=\, \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx.$$ □

Conséquemment, pour tout $a > d$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{dx}{|x|^a} \,=\, \varepsilon^{-a+d} \int_{|x|\geqslant 1} \frac{dx}{|x|^a},$$

tandis que pour tout $a < d$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\int_{|x|\leqslant\varepsilon} \frac{dx}{|x|^a} \,=\, \varepsilon^{-a+d} \int_{|x|\leqslant 1} \frac{dx}{|x|^a}.$$

En fait, comme en théorie de Riemann — à laquelle se ramènent toutes ces considérations fort élémentaires ! —, lorsque $a > d$, on a la finitude :

$$\int_{|x|\geqslant 1} \frac{dx}{|x|^a} \,<\, \infty,$$

et lorsque $a < d$, la finitude :

$$\int_{|x|\leqslant 1} \frac{dx}{|x|^a}.$$

Plus important encore que tous ces enfantillages, nous allons maintenant examiner les propriétés de continuité des translatées $\tau_h(f)$ d'une fonction arbitraire $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ par des vecteurs $h \longrightarrow 0$ qui tendent vers zéro. Rappelons qu'en un point $x \in \mathbb{R}^d$, la convergence ponctuelle :

$$\tau_h(f)(x) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(x)$$

a lieu lorsque et seulement lorsque f est continue en x.

Mais hélas, comme nous l'avons fait savoir à plusieurs reprises, il est hors de question d'espèrer avoir une telle convergence ponctuelle pour les fonctions qui sont seulement intégrables au sens de Lebesgue, puisque ces fonctions présentent en général de très nombreux points de discontinuité. Pire encore, on peut montrer par un exemple (voir à ce sujet l'Exercice 18) que même après correction sur un ensemble de mesure nulle, une fonction intégrable peut avoir des points de discontinuité sur un ensemble de mesure strictement positive, et même parfois, en tout point !

Heureusement, il existe une propriété de continuité dont jouissent les fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, celle qui est en relation naturelle avec la norme L^1.

Théorème 10.4. *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a :*

$$0 \,=\, \lim_{h\to 0} \big\|\tau_h(f) - f\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration. Ce résultat est une conséquence relativement élémentaire de l'approximabilité des fonctions intégrables par des fonctions continues à support compact, déjà vue dans le Théorème 9.10.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g \in \mathscr{C}^0_c(\mathbb{R}^d)$ continue à support compact telle que :

$$\big\|f - g\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Mais alors, puisque g est continue à support compact, il est aisé de se convaincre que elle au moins, parce qu'elle est bien élevée, satisfait sans mal la propriété attendue (exercice ! exploiter la continuité uniforme de g) :

$$\exists\,\delta_\varepsilon > 0 \quad |h| \leqslant \delta_\varepsilon \implies \big\|\tau_h(g) - g\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Bien que cela puisse paraître quelque peu contre-intuitif, ce qui vaut pour g continue vaut alors pour f possiblement très discontinue, puisqu'une simple inégalité triangulaire précédée d'insertions astucieuses :

$$\begin{aligned}\big\|\tau_h(f)-f\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &= \big\|\tau_h(f)-\tau_h(g)+\tau_h(g)-g+g-f\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \big\|\tau_h(f)-\tau_h(g)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}+\big\|\tau_h(g)-g\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}+\big\|g-f\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\\ &= \big\|\tau_h(f-g)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}+\big\|\tau_h(g)-g\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}+\big\|g-f\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\\ &= \big\|f-g\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}+\big\|\tau_h(g)-g\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}+\big\|g-f\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon,\end{aligned}$$

le tout agrémenté de l'invariance de l'intégrale par translations donne effectivement la petitesse de la norme L^1 de la différence entre $\tau_h(f)$ et f, pourvu seulement que $|h|\leqslant\delta_\varepsilon$. $\square$

11. Exercices

Exercice 1. Établir rigoureusement l'affirmation laissée en exercice dans la démonstration du Théorème 6.6 de convergence dominée de Lebesgue.

Exercice 2. Montrer que si une fonction $f\in L^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ est Lebesgue-intégrable, alors :

$$0=\lim_{\delta\to 1}\big\|f(x)-f(\delta x)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Exercice 3. Soit une fonction :

$$f\in L^1\big(]-\pi,\,\pi]\big)$$

que l'on prolonge comme fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout intervalle I de longueur 2π, on a :

$$\int_I f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx.$$

Exercice 4. Avec $b>0$, à une fonction :

$$f\in L^1\big([0,b]\big),$$

on associe la fonction définie pour $0<x\leqslant b$ par :

$$g(x):=\int_x^b\frac{f(t)}{t}\,dt,$$

Montrer que g est Lebesgue-intégrable sur $[0,b]$ et que l'on a :

$$\int_0^b g(x)\,dx=\int_0^b f(t)\,dt.$$

Exercice 5. Soit un sous-ensemble fermé $F\subset\mathbb{R}$ dont le complémentaire est de mesure finie :

$$m\big(\mathbb{R}\backslash F\big)<\infty.$$

On note $\delta(\cdot)$ la fonction distance à F, définie par :

$$\delta(x):=\mathsf{dist}(x,F)=\inf\big\{|x-y|:\;y\in F\big\},$$

et on introduit la fonction définie par une intégrale :

$$I(x):=\int_{\mathbb{R}}\frac{\delta(y)}{|x-y|^2}\,dy.$$

(a) Montrer que δ est continue, et même mieux, montrer que δ satisfait la condition de 1-lipschitzianité :

$$\big|\delta(x)-\delta(y)\big|\leqslant|x-y|.$$

(b) Montrer que $I(x)=\infty$ pour tout $x\notin F$.

(c) Montrer que $I(x)<\infty$ pour presque tout $x\in F$. Certes, cela peut paraître surprenant, eu égard au fait que la condition de Lipschitz ne 'tue' qu'une puissance de $|x-y|$ dans l'intégrande de $I(x)$!
Indication: Étudier $\int_F I(x)\,dx$.

Exercice 6. Comme en théorie de Riemann (généralisée), l'intégrabilité d'une fonction positive f sur $\mathbb{R}$ n'implique *nullement* que $f(x)$ tende vers 0 lorsque $x \longrightarrow \infty$.

(a) Montrer qu'il existe une fonction réelle continue strictement positive f définie sur $\mathbb{R}$ telle que f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$, bien que :

$$\infty \,=\, \limsup_{x \to \infty} f(x).$$

(b) Toutefois, quand f est supposée uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable (au sens de Riemann ou de Lebesgue), montrer que :

$$0 \,=\, \lim_{x \to \infty} f(x).$$

Exercice 7. À une fonction mesurable $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, on associe son *graphe :*

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \colon \; y = f(x)\big\}.$$

Montrer que Γ est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, et que sa mesure est nulle :

$$m(\Gamma) = 0.$$

Exercice 8. Soit $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction mesurable Lebesgue-intégrable. Montrer, pour tout $n \geqslant 1$, que l'ensemble :

$$A_n \,:=\, f^{-1}\big([n, \infty]\big),$$

est de mesure finie, et qu'il satisfait :

$$0 \,=\, \lim_{n \to \infty} n \cdot m(A_n).$$

Exercice 9. Si $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction Lebesgue-intégrable, montrer que la fonction définie par :

$$F(x) \,:=\, \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

est uniformément continue.

Exercice 10. [Inégalité de Tchebychev] Soit $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable à valeurs positives. Pour $\alpha > 0$, on pose :

$$E_\alpha \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon \; f(x) > \alpha\big\}.$$

Montrer que :

$$m\big(E_\alpha\big) \,\leqslant\, \frac{1}{\alpha} \int f.$$

Exercice 11. Soit une fonction $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ mesurable à valeurs positives. Pour $k \geqslant 1$ entier, on pose :

$$E_{2^k} \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon \; f(x) > 2^k\big\},$$

ainsi que :

$$F_k \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon \; 2^k < f(x) \leqslant 2^{k+1}\big\},$$

(a) Lorsque f prend presque partout des valeurs $< \infty$, vérifier que :

$$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} F_k \,=\, \big\{f(x) > 0\big\},$$

cette réunion étant disjointe.

(b) Montrer que f est Lebesgue-intégrable si et seulement si :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \, m\big(F_k\big) \,<\, \infty,$$

si et seulement si :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \, m\big(E_{2^k}\big) \,<\, \infty.$$

(c) On introduit les deux fonctions :

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^a} & \text{pour } 0 < |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

et :

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^b} & \text{pour } |x| \geqslant 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Déduire de **(b)** que f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$ exactement lorsque $a < d$, et aussi, que g est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$ exactement lorsque $b > d$.

Exercice 12. Étudier :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Big(\cos\frac{1}{x}\Big)^n dx.$$

Exercice 13. Si $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction satisfaisant $\int_E f(x)\,dx \geqslant 0$ pour *tout* sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$, montrer que $f \geqslant 0$ presque partout ; avec $\int_E f = 0$, montrer $f = 0$ p.p.

Exercice 14. Montrer qu'il existe une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telles que :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \big\|f - f_n\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

bien que $f_n(x)$ ne tende vers $f(x)$ pour *aucun* $x \in \mathbb{R}^d$.
Indication: En dimension $d = 1$, choisir $f_n = \mathbf{1}_{I_n}$, où les $I_n \subset \mathbb{R}$ sont des intervalles appropriés dont les mesures $m(I_n) \longrightarrow 0$ tendent vers zéro.

Exercice 15. Trouver deux ensembles mesurables A et B tels que $A + B$ n'est *pas* mesurable.
Indication: Dans $\mathbb{R}^2$, prendre $A := \{0\} \times [0,1]$ et $B := \mathscr{N} \times \{0\}$, où $\mathscr{N} \subset [0,1]$ est le sous-ensemble *non* mesurable construit par Vitali.

Exercice 16. On se propose d'évaluer la mesure de la boule unité ouverte — ou fermée, cela reviendrait au même — de $\mathbb{R}^d$:

$$v_d := m\Big(\big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ |x| < 1\big\}\Big).$$

(a) En dimension $d = 2$, montrer que :

$$v_2 = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx,$$

puis en déduire que $v_2 = \pi$.
(b) Montrer que :

$$v_d = 2\, v_{d-1} \int_0^1 \big(1-x^2\big)^{\frac{d-1}{2}} dx.$$

(c) Avec la fonction $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t}\, dt$ d'Euler, obtenir le résultat :

$$v_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}.$$

Exercice 17. Soit $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Pour un d-uplet quelconque $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_d) \in (\mathbb{R}^*)^d$ de nombres réels non nuls, on pose :

$$f^\delta(x) := f\big(\delta_1 x_1, \dots, \delta_d x_d\big).$$

Montrer que la fonction f^δ est intégrable et qu'elle satisfait :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^\delta(x)\,dx = \frac{1}{|\delta_1 \cdots \delta_d|} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx.$$

Exercice 18. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{lorsque } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Soit une énumération $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ des nombres rationnels $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. On introduit la fonction définie par une série :

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, f\big(x - r_n\big).$$

(a) Montrer que F est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que la série qui définit F converge presque partout vers une valeur finie.

(c) Montrer que F est non bornée sur tout intervalle d'intérieur non vide.

(d) Montrer que toute fonction égale à F presque partout est non bornée dans tout intervalle d'intérieur non vide.

Exercice 19. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite paramétrée par $\mathbb{Z}$ de fonctions mesurables positives $f_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

(a) Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}} \bigg(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \bigg) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

(b) Soit une fonction mesurable positive $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, et soit sa 1-périodisation :

$$f(x) \,:=\, \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+x),$$

à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Montrer que :

$$\int_0^1 g(x)\,dx \,=\, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

(c) Montrer que si $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est mesurable intégrable, *i.e.* si $\int_{\mathbb{R}} f < \infty$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$0 \,=\, \lim_{|n|\to\infty} f(n+x).$$

(d) Toujours avec $f \geqslant 0$ intégrable, montrer qu'on n'a pas nécessairement :

$$0 \,=\, \lim_{|t|\to\infty} f(t).$$

Indication: Penser à des gratte-ciels fuyant vers l'infini en s'amaigrissant.

(e) Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble mesurable de mesure $m(E) < 1$. Établir le non-recouvrement :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \big(n + E\big) \,\not\supset\, \mathbb{R}.$$

Exercice 20. Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables intégrables $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ qui converge ponctuellement presque partout vers une certaine fonction-limite :

$$f_\infty(x) \,:=\, \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Montrer que :

$$\bigg(\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx \,=\, \int_{\mathbb{R}} f_\infty(x)\,dx \bigg) \;\Longrightarrow\; \bigg(0 \,=\, \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \big|f_n(x) - f_\infty(x)\big|\,dx \bigg).$$

Indication: Introduire $\big(f_\infty - f_n\big)^+ := \max\big(0, f_\infty - f_n\big)$.

Exercice 21. **(a)** Pour $n \geqslant 0$ entier, calculer $\int_0^1 x^n \log x \, dx$, et en déduire que :

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x-1} \, dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(b) Pour $n \geqslant 0$ entier, calculer $\int_0^1 x^{2n} (1-x) \, dx$, et en déduire la valeur de la série alternée :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

(c) Montrer que la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1 + 3^{2n} (x - 3^n)^2}$$

est intégrable, et calculer la valeur de son intégrale.

Exercice 22. Soit $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable intégrable d'intégrale $0 < \int_{\mathbb{R}} f \; (< \infty)$, soit $\alpha > 0$ un paramètre réel, et soit la suite numérique $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ définie par :

$$a_n \;:=\; \int_{\mathbb{R}} n \log \left(1 + \left(\frac{f(x)}{n} \right)^{\alpha} \right) dx \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

avec $a_n \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

(a) Lorsque $0 < \alpha < 1$, montrer, à l'aide du théorème de Fatou, que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Indication: Travailler sur $E_\delta := \{x \in \mathbb{R}^d \colon \; f(x) \geqslant \delta\}$ pour un $\delta > 0$ tel que $m(E_\delta) > 0$.

(b) Lorsque $\alpha = 1$, montrer que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f$.

(c) Lorsque $\alpha > 1$, montrer que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Indication: Établir l'inégalité $1 + x^\alpha \leqslant (1+x)^\alpha$ pour tout $x > 0$, et montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{\log(1+x^\alpha)}{x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 23. Étudier l'existence des trois limites suivantes, et les déterminer le cas échéant :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x\,(1+x^2)} \, dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n\,x \sin x}{1 + n^\alpha \, x^\alpha} \, dx \qquad\qquad (\text{discuter selon } \alpha \in \mathbb{R}),$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{\infty} \frac{n\,x^\alpha \arctan(nx)}{1 + n\,x^2} \, dx \qquad\qquad (\text{discuter selon } \alpha \in \mathbb{R}).$$

Exercice 24. **[Exemple de fonction intégrable nulle part bornée]** Soit $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ une énumération des nombres rationnels $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, *i.e.* une bijection $\mathbb{N}^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$. Avec :

$$\varphi(x) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \mathbf{1}_{]0,1]}(x),$$

on définit la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions :

$$f_n(x) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \, \varphi\big(x - r_k\big) \qquad\qquad (n \geqslant 1).$$

(a) Montrer que φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que, en tout point $x \in \mathbb{R}$, la suite numérique $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ converge vers une valeur appartenant à $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. On note $f(x)$ cette limite.

(c) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(d) Calculer $\int_{\mathbb{R}} f$.

(e) Montrer que $f(x) < \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

(f) Montrer que f est non-bornée sur tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

(g) Existe-t-il un ensemble mesurable de mesure strictement positive sur lequel f est bornée ?