S2 PeiP — Orsay 2013-2014

Mathématiques

Contrôle n°1 du 11 février 2014

Durée 1 heure 30 min

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 - Soit $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y+x \leq 2\,,\ y-x \leq 2\,,\ y \geq x^2\}$.

1. Représenter D_1 et calculer son aire.

On considère $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y+x \leq 2\,,\ y-x \leq 2\,,\ 0 \leq y \leq x^2\}$.

2. Représenter D_2 et montrer que $\text{Aire}(D_1) + \text{Aire}(D_2) = 4$.

Exercice 2 - Représenter les domaines d'intégration et calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\iint_{D_1} (x-y)\,dxdy$ avec $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x+y \geq 0\,,\ x \leq 1\,,\ y \leq 1\}$.

2. $I_2 = \displaystyle\iint_{D_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ avec $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x^2+y^2 \leq 4\,,\ y \geq x\,,\ y \geq -x\}$.

3. $I_3 = \displaystyle\iiint_{D_3} \frac{xy}{z^2}\,dxdydz$ avec $D_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ x,y \in [0,1]\,,\ z \in [1,2]\}$.

Exercice 3 - On considère le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x \geq 0\,,\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

1. Représenter D et calculer les intégrales $I = \displaystyle\iint_D x\,dxdy$ et $J = \displaystyle\iint_D y\,dxdy$.

2. En déduire les coordonnées (x_G, y_G) du centre de gravité du domaine D supposé homogène (de densité constante).

Pour a et b paramètres réels donnés, on considère maintenant le domaine

$$D_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x \geq a\,,\ (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 1\}\,.$$

3. Déterminer, en s'aidant d'une translation, les intégrales

$$I_{a,b} = \iint_{D_{a,b}} x\,dxdy \quad \text{et} \quad J_{a,b} = \iint_{D_{a,b}} y\,dxdy\,.$$

Exercice 4 - Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ 0 \leq z \leq 1\,,\ -z \leq x \leq z\,,\ -z \leq y \leq z\}$.

1. Représenter D. (On peut considérer les tranches de hauteur z de D.)

2. Calculer le volume de D et $\displaystyle\iiint_D z\,dxdydz$.