S2 PeiP
Mathématiques

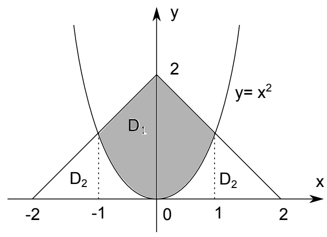
Orsay 2013-2014

Corrigé du contrôle n°1 du 11 février 2014

Exercice 1 -

1.
Par symétrie du domaine D_1 par rapport à l'axe des y et Fubini, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Aire}(D_1) &= \iint_{D_1} dxdy = 2\int_{x=0}^{1}(\int_{x^2}^{2-x} dy)dx \\ &= 2\int_0^1 (2-x-x^2)dx = 2(2-1/2-1/3) \\ &= \frac{7}{3}\,.\end{aligned}$$



2. Le triangle $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,\ y+x\le 2\,,\ y-x\le 2\,,\ y\ge 0\}$ se découpe suivant la courbe $y=x^2$ en $D_1\cup D_2$. On a donc

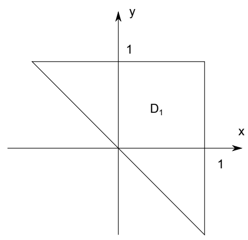
$$\mathrm{Aire}(D_1)+\mathrm{Aire}(D_2)=\mathrm{Aire}(T)=4.$$

Exercice 2 -

1.

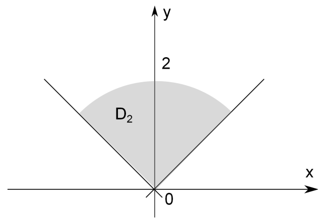
D_1 est un triangle symétrique par rapport à la diagonale $y=x$. On a donc par échange $x\leftrightarrow y$

$$I_1=\iint_{D_1}(x-y)\,dxdy=\iint_{D_1}(y-x)\,dxdy=-I_1 \Longrightarrow I_1=0\,.$$



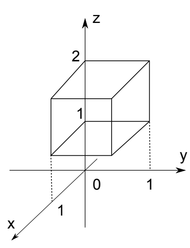
2.
D_2 est 1/4 de disque de rayon 2. En passant en coordonnées polaires et par séparation des variables, on trouve

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_{r=0}^{2}\int_{\theta=\pi/4}^{3\pi/4} e^r r dr d\theta = (\int_0^2 e^r r dr)(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta) \\ &= \frac{\pi}{2}(\left[re^r\right]_0^2 - \int_0^2 e^r dr) \\ &= \frac{\pi}{2}(e^2+1).\end{aligned}$$



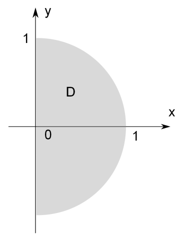
3.
D_3 est un cube de côté 1. Par séparation des variables on a

$$\begin{aligned}I_3 &= (\int_0^1 xdx)(\int_0^1 ydy)(\int_1^2 \frac{dz}{z^2}) \\ &= [\frac{x^2}{2}]_0^1\,[\frac{y^2}{2}]_0^1\,[\frac{-1}{z}]_1^2 \\ &= \frac{1}{8}.\end{aligned}$$



Exercice 3 -

1.



D est un demi-disque de centre $(0,0)$ de rayon 1 et symétrique par rapport à l'axe des x ($y \leftrightarrow -y$). On a alors

$$J = \iint_D y dxdy = \iint_D -y dxdy = -J \Rightarrow J = 0.$$

En passant en polaires, on a

$$\begin{aligned} I = \iint_D x dxdy &= \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r\cos\theta)\, r dr d\theta \\ &= (\int_0^1 r^2 dr)(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta) = \big[r^3/3\big]_0^1 \big[\sin\theta\big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2. On a par définition $x_G = \dfrac{I}{\text{Aire(D)}} = \dfrac{4}{3\pi}$ et $y_G = \dfrac{J}{\text{Aire(D)}} = 0.$

3. $D_{a,b}$ est un demi-disque de centre (a,b) de rayon 1. La translation

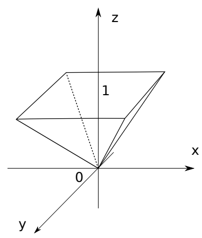
$$\tau : (x', y') \to (x = x' + a, y = y' + b)$$

est une isométrie et transporte D sur $D_{a,b}$. On a alors

$$\begin{aligned} I_{a,b} &= \iint_D (x'+a)dx'dy' = I + a\iint_D dx'dy' = I + a\text{Aire}(D) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{\pi a}{2}, \\ \text{et} \quad J_{a,b} &= \iint_D (y'+b)dx'dy' = J + b\iint_D dx'dy' = \frac{\pi b}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 4 -

1.



Pour chaque $z \in [0,1]$, la tranche D_z de hauteur z est le carré $x, y \in [-z, z]$ de côté $2z$.
D est une pyramide à l'envers de base carrée D_1 et de sommet en 0.

2. Par Fubini en tranches, on a

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) = \iiint_D dxdydz &= \int_0^1 (\iint_{D_z} dxdy)dz = \int_0^1 \text{Aire}(D_z)dz \\ &= \int_0^1 (2z)^2 dz = \big[\frac{4}{3}z^3\big]_0^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} \iiint_D z\, dxdydz &= \int_0^1 (\iint_{D_z} zdxdy)dz = \int_0^1 z\text{Aire}(D_z)dz \\ &= \int_0^1 4z^3 dz = \big[z^4\big]_0^1 = 1. \end{aligned}$$