S2 PeiP — Orsay 2014-2015
Mathématiques

Contrôle n°1 du 10 février 2015
Durée 1 heure 30 min

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 - Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq y \leq \pi\,,\ \sin y \leq x \leq 2 - \sin y\}$.
Représenter D et calculer son aire.

Exercice 2 - Représenter les domaines d'intégration et calculer les intégrales suivantes :
1. $I_1 = \iint_{D_1} x^2\, dxdy$ avec $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ 0 \leq x \leq y\,,\ x+y \leq 2\}$.
2. $I_2 = \iint_{D_2} \dfrac{x}{x^2+y^2}\, dxdy$ avec $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\,,\ x \geq 0\}$.
3. $I_3 = \iiint_{D_3} z\, dxdydz$ avec $D_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ x+y \leq 1\,,\ x,y,z \in [0,1]\}$.

Exercice 3 - 1. Montrer que pour $u \geq 0$, on a $\sin u \leq u$, puis que $\cos u \geq 1 - \frac{u^2}{2}$ (en étudiant par exemple les variations de fonctions adéquates).
2. En déduire que

$$\frac{17}{18} \leq \iint_{[0,1]\times[0,1]} \cos(xy)dxdy \leq 1\,.$$

Exercice 4 - Représenter et calculer le volume du domaine

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ (x-1)^2 + y^2 \leq z^2\,,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Exercice 5 - Résoudre les systèmes suivants, en discutant suivant la valeur du **paramètre** réel m :

$$(S_1)\begin{cases} x+y-2z = 1 \\ -x+y = -1 \\ x-y+mz = 2 \end{cases}, \quad (S_2)\begin{cases} x+2y+3z = 0 \\ 2x+3y+4z = 1 \\ 3x+4y+5z = m \end{cases}$$