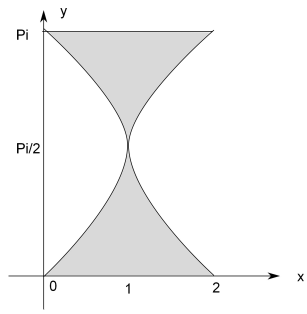
S2 PeiP Orsay 2014-2015
Mathématiques

Corrigé du contrôle n°1 du 10 février 2015

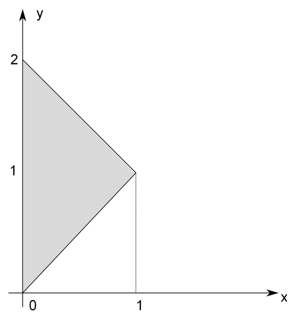
Exercice 1 -
On a $\sin y \leq 2 - \sin y$ car $\sin y \leq 1$, avec égalité pour $y = \pi/2$ ici. On peut alors représenter D.
On a par Fubini en tranches

$$\begin{aligned}\text{Aire}(D) &= \iint_D dxdy = \int_0^\pi \Big(\int_{\sin y}^{2-\sin y} dx\Big)dy \\ &= \int_0^\pi (2 - 2\sin y)dy = 2\pi - 4.\end{aligned}$$



Exercice 2 -
1.
D_1 est un triangle. On a par Fubini en piles

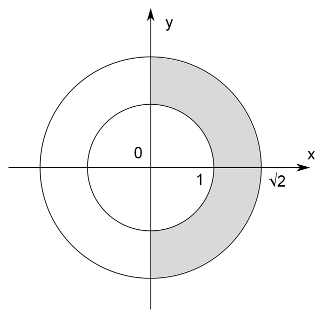
$$\begin{aligned}I_1 &= \iint_{D_1} x^2\, dxdy = \int_{x=0}^1 \Big(\int_x^{2-x} x^2 dy\Big)dx \\ &= \int_0^1 x^2(2-2x)dx = \Big[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2}\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$



2.

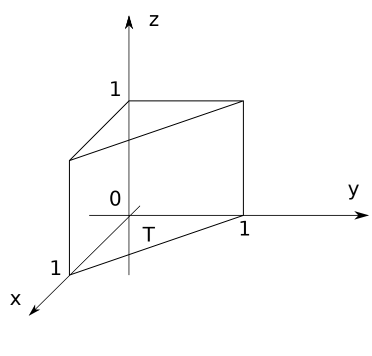
D_2 est une demi-couronne. On a en passant en coordonnées polaires

$$\begin{aligned}I_2 &= \iint_{D_2} \frac{x}{x^2+y^2}\, dxdy = \int_{r=1}^{\sqrt{2}} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r\cos\theta}{r^2}\, rdrd\theta \\ &= (\sqrt{2}-1)[\sin\theta]_{-\pi 2}^{\pi/2} = 2(\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$



3.
D_3 est un cylindre droit de hauteur 1 et de base triangulaire $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y \leq 1,\ x, y \geq 0\}$. Par Fubini en tranches horizontales

$$\begin{aligned}I_3 &= \iiint_{D_3} z\, dxdydz = \int_{z=0}^1 \Big(\int_T zdxdy\Big)dz \\ &= \Big(\int_0^1 zdz\Big) \times \text{Aire}(T) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$



Exercice 3 - 1. Si on pose $f(u) = u - \sin u$, on a $f'(u) = 1 - \cos u \geq 0$ et donc f est croissante. D'où $f(u) \geq f(0) = 0$ pour $u \geq 0$.

Pour $g(u) = \cos u - 1 + \frac{u^2}{2}$, on a $g'(u) = u - \sin u \geq 0$, d'où g est croissante et $g(u) \geq 0$.

2. En posant $u = xy$, on a $u \geq 0$ sur $D = [0,1] \times [0,1]$, d'où $1 - \frac{x^2y^2}{2} \leq \cos(xy) \leq 1$. En intégrant sur D, on obtient

$$\iint_D (1 - \frac{x^2y^2}{2}) dxdy \leq I = \iint_D \cos(xy) dxdy \leq \iint_D dxdy\,,$$

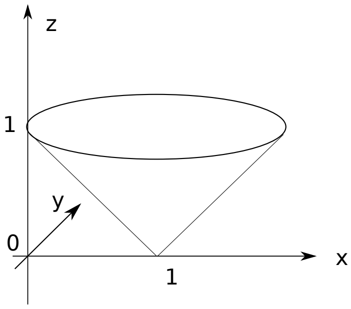
c'est-à-dire

$$1 - \frac{1}{2}\Big(\int_0^1 x^2dx\Big)\Big(\int_0^1 y^2dy\Big) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18} \leq I \leq 1\,.$$

Exercice 4 - Pour $z \in [0,1]$, la tranche horizontale D_z de D est un disque de centre $(x,y) = (1,0)$ et de rayon z. D est donc un cône de sommet $(1,0,0)$ et de base D_1 (cône à l'envers posé sur sa pointe).

Par Fubini en tranches horizontales, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(D) &= \iiint_D dxdydz = \int_0^1 \Big(\int_{D_z} dxdy\Big) dz \\ &= \int_0^1 \mathrm{Aire}(D_z) dz = \int_0^1 \pi z^2 dz \\ &= \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$



Exercice 5 - • On a $(S_1) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \boxed{x} + y - 2z = 1 \\ -x + y = -1 \\ x - y + mz = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y - 2z = 1 \\ 2y - 2z = 0 \\ -2y + (m+2)z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y - 2z = 1 \\ \boxed{y} - z = 0 \\ mz = 1 \end{cases}$$

- Si le paramètre $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$, alors le système (S_1) possède une unique solution

$$y = z = \frac{1}{m} \quad \text{et} \quad x = 1 - y + 2z = 1 + \frac{1}{m}\,.$$

- Si $\mathbf{m} = \mathbf{0}$, le système (S_1) ne possède pas de solution.

• On a $(S_2) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \boxed{x} + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + 2y + 3z = 0 \\ -y - 2z = 1 \\ -2y - 4z = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + 2y - 3z = 0 \\ \boxed{-y} - 2z = 1 \\ 0 = m - 2 \end{cases}$$

- Par conséquent, si le paramètre $\mathbf{m} \neq \mathbf{2}$, le système (S_2) n'a pas de solution.
- Si $\mathbf{m} = \mathbf{2}$, (S_2) a une infinité de solutions paramétrées par z

$$x = 2 + z\,,\ y = -1 - 2z\,,\ z \text{ quelconque.}$$