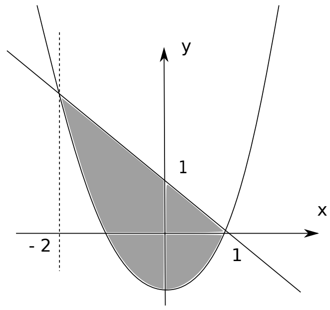
S2 PeiP
Mathématiques

Orsay 2015-2016

Corrigé du contrôle n°1 du 4 février 2016

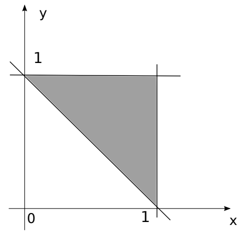
Exercice 1 -
La parabole $y = x^2 - 1$ coupe la droite $x + y = 1$ lorsque $x^2 - 1 = y = 1 - x$, c'est-à-dire $x = 1$ et $x = -2$. Pour $x \in [-2, 1]$ donné, la pile D_x est l'intervalle $y \in [x^2 - 1, 1 - x]$.
On calcule l'aire de D par Fubini en piles



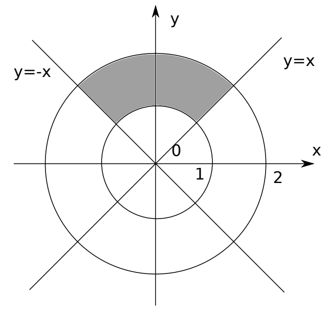
$$\begin{aligned}\text{Aire}(D) &= \int_{x=-2}^{1} \Big(\int_{y=x^2-1}^{1-x} dy\Big) dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2) dx \\ &= \big[2x - x^2/2 - x^3/3\big]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}\,.\end{aligned}$$

Exercice 2 - 1. D_1 est un triangle. Par Fubini, on trouve

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{x=0}^{1} \Big(\int_{y=1-x}^{1} xy dy\Big) dx = \int_0^1 x\big[y^2/2\big]_{1-x}^{1} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x(1 - (1-x)^2) dx = \int_0^1 x(x - x^2/2) dx \\ &= \big[x^3/3 - x^4/8\big]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24}\,.\end{aligned}$$



2.
D_2 est une portion de couronne, correspondant en coordonnées polaires à $(r, \theta) \in R = [1, 2] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. On a donc,



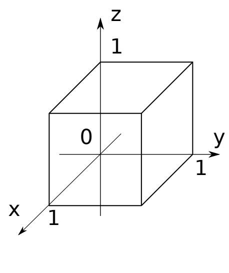
$$I_2 = \iint_R (r \sin\theta) r dr d\theta = \Big(\int_1^2 r^2 dr\Big)\Big(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin\theta d\theta\Big)$$

par Fubini et séparation des variables,

$$= (8/3 - 1/3)(\cos(\pi/4) - \cos(3\pi/4)) = \frac{7\sqrt{2}}{3}\,.$$

3. D_3 est un cube. De plus la fonction $e^{ax+by+cz} = e^{ax}e^{by}e^{cz}$ est à variables séparables. On a donc par Fubini

$$\begin{aligned}I_3 &= \int_0^1 \Big(\int_0^1 \Big(\int_0^1 e^{ax}e^{by}e^{cz} dx\Big) dy\Big) dz \\ &= \Big(\int_0^1 e^{ax} dx\Big)\Big(\int_0^1 e^{by} dy\Big)\Big(\int_0^1 e^{cz} dz\Big) \\ &= \frac{(e^a - 1)(e^b - 1)(e^c - 1)}{abc}\,.\end{aligned}$$



Exercice 3 - 1. Par Fubini sur le carré D_1 et séparation des variables, on trouve

$$\begin{aligned} I &= \Big(\int_{x=-1}^{1} x^2 dx\Big)\Big(\int_{y=-1}^{1} dy\Big) + \Big(\int_{x=-1}^{1} dx\Big)\Big(\int_{y=-1}^{1} y^2 dy\Big) \\ &= 2[x^3/3]_{-1}^{1} + 2[y^3/3]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}\,. \end{aligned}$$

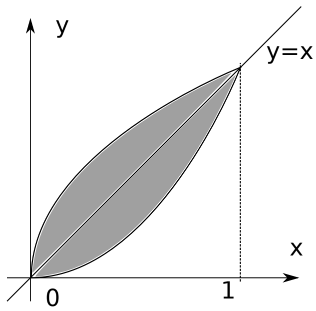
2. En passant en coordonnées polaires sur le disque D_2, on obtient

$$J = \int_{\theta=0}^{2\pi}\Big(\int_{r=0}^{1} r^2 r dr\Big) d\theta = \Big(\int_{r=0}^{1} r^3 dr\Big)\Big(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\Big) = \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}\,.$$

3. Le domaine D_3 est la carré plein D_1 privé (troué) du disque D_2. On a donc

$$K = I - J = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}\,.$$

Exercice 4 -



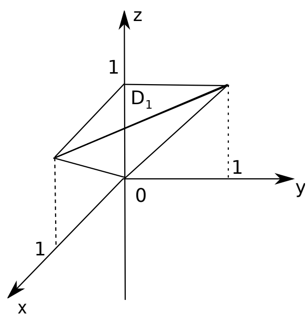
On a par définition de D, $(x, y) \in D \Leftrightarrow (y, x) \in D$. Le domaine D est donc inchangé par la symétrie $s(x, y) = (y, x)$, qui est la symétrie orthogonale par rapport à la diagonale $y = x$. Comme c'est une isométrie, le jacobien de s est 1, et d'après le cours, on a donc par changement de variables $s : (x', y') \mapsto (x, y) = s(x', y') = (y', x')$

$$\begin{aligned} I &= \iint_{s(D)=D} (x - y)^{2015}\, dxdy = \iint_D (y' - x')^{2015} dx'dy' \\ &= -\iint_D (x' - y')^{2015} dx'dy' = -I, \end{aligned}$$

car 2015 est impair. On a donc $2I = 0$, c'est-à-dire $I = 0$.

Exercice 5 -

Pour $z \in [0, 1]$ donné, la tranche D_z de D est le triangle $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq z\}$ d'aire $\frac{z^2}{2}$. Le domaine D est une pyramide de base D_1 et de sommet 0. Par Fubini en tranches avec la fonction 1, on a alors



$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(D) &= \iiint_D dxdydz = \int_0^1 \Big(\iint_{D_z} dxdy\Big) dz = \int_0^1 \mathrm{Aire}(D_z) dz \\ &= \int_0^1 \frac{z^2}{2} dz = \Big[\frac{z^3}{6}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}\,. \end{aligned}$$