S2 PeiP — Orsay 2015-2016
Mathématiques

Correction du contrôle n°2 du 17 mars 2016

Exercice 1 - On échelonne $(S) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \boxed{x} + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 4z = 1 \\ x + 4y + (m+5)z = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + 2y + 3z = 1 \\ y + z = 0 \\ 2y + (m+2)z = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + 2y + 3z = 1 \\ \boxed{y} + z = 0 \\ mz = m \end{cases}$$

• Si $\mathbf{m \neq 0}$, le système a une solution **unique** : $z = 1$, $y = -1$ et $x = 0$.

• Si $\mathbf{m = 0}$, le système a une **infinité** de solutions, paramétrées par z inconnue non principale : $y = -z$, $x = 1 - z$, z quelconque.

Exercice 2 -

1. Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E s'écrit $\overrightarrow{u} = a(1,1,1) + b(1,2,-1) + c(2,1,4)$.

Par définition, E est donc le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs

$$\overrightarrow{v_1} = (1,1,1)\,, \quad \overrightarrow{v_2} = (1,2,1)\,, \quad \overrightarrow{v_3} = (2,1,4).$$

2. On regarde si la famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est libre. On a $a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2} + b\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \boxed{a} + b + 2c = 0 \\ a + 2b + c = 0 \\ a - b + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a} + b + 2c = 0 \\ \boxed{b} - c = 0 \\ -2b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a} + b + 2c = 0 \\ \boxed{b} - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3c \\ b = c \text{ quelconque.} \end{cases}$$

La famille $\mathcal{F}$ est liée, avec par exemple $-3\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$. On a alors que $E = \text{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est le plan de base $B = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ (indépendants).

En particulier, on a $E \neq \mathbb{R}^3$ puisque $\dim E = 2 \neq 3$.

Exercice 3 -

1. On a $\overrightarrow{v_a} \in P$ ssi il existe des réels λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{v_a} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \boxed{\lambda_1} + \lambda_2 = 3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = a \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda_1} + \lambda_2 = 3 \\ \boxed{\lambda_2} = a - 3 \\ 2\lambda_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda_1} + \lambda_2 = 3 \\ \boxed{\lambda_2} = a - 3 \\ 0 = -2a + 4 \Leftrightarrow a = 2 \end{cases}$$

On a donc $\overrightarrow{v_a} \in P$ ssi $a = 2$, auquel cas $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_1 = 4 \Leftrightarrow \overrightarrow{v_2} = 4\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} = (4,-1)_B$ dans la base $B = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ de P.

2. La famille de 3 vecteurs $\mathcal{F}_a = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v_a})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi elle est libre, c'est-à-dire ssi $\overrightarrow{v_a} \notin P = \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \Leftrightarrow a \neq 2$ d'après 1.

On cherche des réels λ_1, λ_2 et λ_a tels que $\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\lambda_2\overrightarrow{u_2}+\lambda_a\overrightarrow{v_a}=\overrightarrow{v}=(1,4,7)\Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{r}\boxed{\lambda_1}+\lambda_2+3\lambda_a=1\\ \lambda_1+2\lambda_2+a\lambda_a=4\\ \lambda_1+3\lambda_2+\lambda_a=7\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{r}\boxed{\lambda_1}+\lambda_2+3\lambda_a=1\\ \boxed{\lambda_2}+(a-3)\lambda_a=3\\ 2\lambda_2-2\lambda_a=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{r}\boxed{\lambda_1}+\lambda_2+3\lambda_a=1\\ \boxed{\lambda_2}+(a-3)\lambda_a=3\\ (4-2a)\lambda_a=0\end{array}\right.$$

On a donc pour $a\neq 2$, $\lambda_a=0$, $\lambda_2=3$ et $\lambda_1=-2$, c'est-à-dire que

$$\overrightarrow{v}=-2\overrightarrow{u_1}+3\overrightarrow{u_2}+0\overrightarrow{v_a}=(-2,3,0)_{\mathcal{F}_a}$$

(On a en fait $\overrightarrow{v}\in P=\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ car la coordonnée de $\overrightarrow{v}$ suivant $\overrightarrow{v_a}$ est nulle.)

Exercice 4 -

1. On a $\overrightarrow{v}=(x,y,z,t)\in E\Leftrightarrow\boxed{x}+z+t=0\Leftrightarrow x=-z-t$ avec y, z, t trois inconnues non principales quelconques.

D'après le cours, on a donc $\dim E=3$ et

$$\overrightarrow{v}=(-z-t,y,z,t)=y(0,1,0,0)+z(-1,0,1,0)+t(-1,0,0,1).$$

Une base de E est $B=((0,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1))$.

2. On a $\overrightarrow{v}\in E\cap P$ si $\overrightarrow{v}=\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\lambda_2\overrightarrow{u_2}=\lambda_1(1,1,1,1)+\lambda_2(0,1,0,1)$ satisfait l'équation de E, c'est-à-dire

$$3\lambda_1+\lambda_2=0\Leftrightarrow\overrightarrow{v}=\lambda_1(\overrightarrow{u_1}-3\overrightarrow{u_2})=\lambda_1(1,-2,1,-2).$$

$E\cap P$ est donc la droite engendrée par $\overrightarrow{u_3}=(1,-2,1,-2)$.

3. Soit $\overrightarrow{v}\notin P$, par exemple $\overrightarrow{v}=(1,0,0,0)$. Alors la droite D engendrée par $\overrightarrow{v}$ est un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$. En effet, on a $\dim E+\dim D=3+1=4$ et $E\cap D=\{\overrightarrow{0}\}$.

Exercice 5 -

1. On a $f(X)=AX=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y\\x\end{pmatrix}$.

2. • La droite vectorielle D_0 d'équation $x+2y=0$ est engendrée par $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

Pour $\overrightarrow{v}=t\overrightarrow{u}\in D_0$, on a $f(\overrightarrow{v})=tf(\overrightarrow{u})=t\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ d'après 1. L'image $f(D_0)$ est donc la droite vectorielle engendrée par $f(\overrightarrow{u})=(3,2)$ ($\Leftrightarrow f(D_0)$ droite d'équation $2x-3y=0$).

• La droite affine D_1 d'équation $x+2y=1$, passe par le point $(1,0)$ et est de direction D_0. On a donc $\overrightarrow{v}\in D_1\Leftrightarrow\overrightarrow{v}=(1,0)+t\overrightarrow{u}$. D'où par linéarité,

$$f(\overrightarrow{v})=f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+tf\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3t\\1+2t\end{pmatrix}.$$

L'image $f(D_1)$ est donc la droite affine passant par $(2,1)=f(1,0)$ et de direction $f(D_0)=\mathrm{Vect}(f(\overrightarrow{u})=(3,2))$ ($\Leftrightarrow f(D_1)$ est la droite d'équation $2x-3y=1$).