Math S2 PeiP
Chapitre 3
Systèmes linéaires et méthode du pivot de Gauss–Jordan

Michel Rumin

1 Présentation et systèmes modèles

L'objectif de ce chapitre est de donner une méthode générale de résolution de systèmes d'équations linéaires. En voici des exemples :

$$(S_1)\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 1\\ 2x_1+x_2+x_3 &= -1\\ x_1-x_2+2x_3 &= 1\end{cases}, \quad (S_2)\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 &= 1\\ 2x_1+3x_2-x_3 &= 2\end{cases}, \quad (S_3)\begin{cases} x_1+2x_2 &= 1\\ x_1+3x_2 &= 2\\ x_1+4x_2 &= a\end{cases}.$$

avec a paramètre (donnée variable) dans (S_3).

Le problème est de déterminer si ce type de systèmes a des solutions, et si oui, comment toutes les obtenir.

1.1 Systèmes linéaires généraux

Pour fixer les notations en général, on s'intéresse aux systèmes linéaires (S) à **n équations** et **p inconnues** : x_1, x_2, $\cdots$, x_p. Ils se présentent sous la forme

$$(S)\ \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1p}x_p &= y_1 \quad (L_1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2p}x_p &= y_2 \quad (L_2)\\ \cdots & \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ip}x_p &= y_i \quad (L_i)\\ \cdots & \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{np}x_p &= y_n \quad (L_n)\end{cases},$$

où les nombres a_{ij} sont les **coefficients** (donnés) du système, et les variables y_1, $\cdots$, y_n constituent le **second membre**, a priori connu, du système.

Il est important de se souvenir de la convention d'indexation des coefficients du système, car c'est celle adoptée dans tout le calcul matriciel, Scilab, etc. :

a_{ij} désigne le j-ème coefficient, celui de l'inconnue x_j, dans la i-ème équation L_i. Autrement dit, le premier indice i est celui de la ligne et le second j de la colonne.

Exemple simple. Pour résoudre un **petit** système 2x2

$$(S)\begin{cases} x+2y &= -1 \quad L_1 \\ 2x+3y &= 1 \quad L_2 \end{cases},$$

il n'est pas du tout nécessaire d'introduire une technique très générale. Il suffit par exemple d'exprimer y à l'aide de x dans L_2, ce qui donne

$$y = \frac{1}{3}(1-2x),$$

et de **substituer** cette valeur dans L_1, pour obtenir

$$x+2y = x + \frac{2}{3}(1-2x) = \frac{-x}{3} + \frac{2}{3} = -1 \Rightarrow x = 5 \text{ et } y = -3.$$

C'est l'unique solution de (S).

Par contre, pour des systèmes plus grands (et la programmation), il est essentiel d'utiliser une méthode, pour ne pas *tourner en rond* avec les substitutions. Nous allons présenter un algorithme d'élimination qui transforme tout système en un système équivalent se résolvant simplement.

1.2 Systèmes triangulaires

Définition 1.1. Un système linéaire (S) est dit **triangulaire** si
— le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues : $n = p$.
— Les coefficients a_{ij} sont nuls sous la diagonale : $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = & y_1 \quad L_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = & y_2 \quad L_2 \\ \qquad\qquad \ddots \qquad \vdots & \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = & y_n \quad L_n \end{cases}$$

Exemple. Soit a un **paramètre réel**, c'est-à-dire une **donnée variable** du problème (pas une inconnue). Le système

$$(S)\begin{cases} x+y+z = & 0 \\ ay-2z = & 1 \\ z = & 2 \end{cases} \quad \text{est triangulaire.}$$

On le résout en partant de la dernière équation, et en remontant de proche en proche. On obtient

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x+y+z= & 0 & \\ ay= & 2z+1= & 5 \\ z= & 2 & \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{5}{a}-2 \\ y=-\dfrac{5}{a} \\ z=2 \end{array}\right. \quad \mathbf{si\ a \neq 0}.$$

Le système triangulaire (S) a donc une **unique solution** si le paramètre $a \neq 0$, et **n'en a pas** si $a = 0$ (deuxième ligne incompatible $0.y = 5$).

Définition 1.2. On dit qu'un système triangulaire est de Cramer si **tous** ses coefficients diagonaux a_{ii} sont non nuls.

Lorsque qu'un système triangulaire est de Cramer, il n'y a aucune obstruction à le résoudre de proche en proche en partant de la dernière équation. On a

$$\begin{aligned} (L_n) \ &: a_{nn}x_n = y_n \Leftrightarrow x_n = \frac{y_n}{a_{nn}} \text{ car } a_{nn} \neq 0\,, \\ \Rightarrow (L_{n-1}) \ &: a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = y_{n-1} \Leftrightarrow x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}}\big(y_{n-1} - \frac{a_{n-1,n}}{a_{nn}}y_n\big) \\ &\text{car } a_{n-1,n-1} \neq 0, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Proposition 1.3. *Un système triangulaire de Cramer possède une unique solution.*

1.3 Systèmes échelonnés

Définition 1.4. On dit qu'un système linéaire (S) de n équations et p inconnues est **échelonné** si
- — chaque ligne de coefficients a_{ij} non nulle commence par davantage de zéros que la précédente,
- — si la i-ème ligne de coefficients a_{ij} est nulle, alors les lignes suivantes le sont aussi.

Le **premier** coefficient non nul a_{ij_i} d'une ligne i donnée s'appelle un **pivot** du système.

Par exemple • les systèmes triangulaires de Cramer sont échelonnés, et les coefficients diagonaux a_{ii} (tous non nuls par hypothèse) sont des pivots.

• Les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases}\boxed{x} & - & y & + & z & = & 1\\ & & \boxed{2y} & + & z & = & 2\end{cases},\quad (S_2)\begin{cases}\boxed{x} & + & y & + & z & = & 0\\ & & & & \boxed{z} & = & 1\end{cases},$$

$$(S_3)\begin{cases}\boxed{x} & + & 2y & = & 0\\ & & \boxed{3y} & = & 1\\ & & 0 & = & a\end{cases},$$

sont échelonnés. Les coefficients et inconnues pivots sont encadrés.

• Par contre, le système

$$\begin{cases}x & + & 2y & + & 3z & + & t & = & 1\\ & & & & z & - & t & = & 2\\ & & & & 2z & + & t & = & 3\end{cases}$$

n'est pas échelonné, à cause de la présence d'un coefficient en z dans la 3-ème équation.

1.4 Résolution des systèmes échelonnés

Les systèmes échelonnés possèdent deux sortes d'inconnues.

Définition 1.5. — Les inconnues x_{j_i} correspondant aux coefficients pivots a_{ij_i} d'un système échelonné s'appellent les **inconnues principales**.
— Les autres inconnues s'appellent les **inconnues non principales** (ou secondaires ou libres).

Par exemple • toutes les inconnues des systèmes triangulaires de Cramer sont principales.

• Dans les exemples précédents :
— (S_1) : inconnues principales x et y, inconnue non principale z,
— (S_2) : inconnues principales x et z, inconnue non principale y,
— (S_3) : x et y principales.

Équations de compatibilité. Dans un système échelonné général, il peut apparaître des lignes d'équations du type

$$\begin{cases}0 & = & y_i & (L_i)\\ 0 & = & y_{i+1} & (L_{i+1})\\ & & \cdots & \\ 0 & = & y_n & (L_n)\end{cases}.$$

Ces équations ne portent pas sur les **inconnues** x_i mais sur les **données** y_i du second membre. Elles sont des **contraintes** sur les données pour que le système puisse avoir des solutions. Elles s'appellent les **équations de compatibilité** de (S). Si elles sont satisfaites (ou si il n'y en a pas), on dit que le système est **compatible**.

Par exemple le système (S_3) ci-dessus n'a pas de solution si le paramètre a n'est pas nul.

La technique de résolution est alors la suivante.

Pour résoudre un système échelonné compatible, il suffit de passer de passer les inconnues non principales dans le second membre. Ces inconnues non principales ne peuvent être déterminées, elles sont libres, et deviennent des paramètres. Le système devient alors un système triangulaire de Cramer par rapport aux inconnues principales, dont les solutions sont déterminées par la valeur des inconnues non principales.

On traite les exemples précédents.

$$(S_1) \iff \begin{cases} x - y & = & 1 - z \\ y & = & 1 - \frac{z}{2} \\ z & & \text{quelconque} \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & 2 - \frac{3}{2}z \\ y & = & 1 - \frac{z}{2} \\ z & & \text{quelconque} \end{cases}$$

(S_1) possède donc **une infinité** de solutions paramétrée par l'inconnue non principale z.

- De la même façon, (S_2) a une infinité de solutions avec y quelconque, $x = -1 - y$ et $z = 1$.

- Enfin, (S_3) n'a pas de solution si $a \neq 0$, et possède une solution unique $y = 1/3$ et $x = -2/3$ si $a = 0$.

Proposition 1.6. — *Un système échelonné possède des solutions si et seulement si ses équations de compatibilité sont satisfaites.*
— *Une solution d'un système échelonné compatible est déterminée de manière unique par la donnée des valeurs des inconnues non principales.*

2 La méthode du pivot

2.1 Systèmes équivalents et transformations élémentaires

Définition 2.1. On dit que deux systèmes d'équations (S) et (S') sont **équivalents** s'ils ont même espace de solution.

Cela signifie que soit aucun des deux systèmes n'a de solution, soit que les deux systèmes ont des solutions et que ce sont les mêmes.

On peut transformer un système en un système équivalent en appliquant une suite de **transformations élémentaires** suivantes :

1. Intervertir deux équations $L_i \leftrightarrow L_j$.

2. Ajouter à une équation L_i un multiple d'une **autre équation** L_j. Autrement dit, on laisse toutes les équations inchangées, sauf la i-ème, $L_i \to L'_i = L_i + \lambda L_j$ avec $i \neq j$.
3. Multiplier une équation L_i par une nombre **non nul** : $L_i \to L'_i = \lambda L_i$ avec $\lambda \neq \mathbf{0}$.
4. Échanger l'ordre des inconnues dans les équations (par exemple faire passer les x_2 devant les x_1 dans les équations).

Toutes ces opérations donnent des systèmes (S) et (S') équivalents car on peut revenir au système initial. C'est clair pour 1, 4 et 3 ($L'_i \to L_i = L'_i/\lambda$ car $\lambda \neq 0$). Pour 2, partant de $L'_i = L_i + \lambda L_j$ et $L'_j = L_j$ (inchangée), on retrouve $L_i = L'_i - \lambda L'_j$.

Attention. Il est essentiel de réaliser ces opérations élémentaires de **manière séquentielle**, et non simultanément, pour avoir des systèmes équivalents et conserver l'espace des solutions. Par exemple, un système à trois équations

(S) : L_1, L_2, L_3 implique (S') : $L'_1 = L_1 - L_2$, $L'_2 = L_2 - L_3$ et $L'_3 = L_3 - L_1$,

mais (S') **n'implique pas** (S) en général car on ne peut retrouver les équations de départ à l'aide des L'_i. Ces nouvelles équations L'_i sont liées par la relation $L'_1 + L'_2 + L'_3 = 0$, on n'a plus que deux équations indépendantes !

2.2 L'algorithme du pivot de Gauss–Jordan

On peut discuter le résultat et la technique clé du chapitre.

Théorème 2.2. *Tout système linéaire (S) est équivalent à un système échelonné (S') obtenu par transformations élémentaires.*

En particulier (S) a des solutions si et seulement si les équations de compatibilité de (S') sont satisfaites, auquel cas, ces solutions sont uniquement déterminées (paramétrées) par la donnée des inconnues non principales de (S').

Démonstration. La méthode consiste à éliminer progressivement le nombre d'inconnues dans les équations successives par la **méthode du pivot**. Le système initial est de la forme

$$(S)\left\{\begin{array}{rcll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & y_1 & L_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = & y_2 & L_2 \\ \cdots & & & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p & = & y_i & L_i \\ \cdots & & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & y_n & L_n \end{array}\right.$$

• Si $\boxed{a_{11} \neq 0}$, on garde L_1 et on l'utilise pour éliminer l'inconnue x_1 des équations L_2, $\cdots$, L_n par des transformations élémentaires de type 2,

$$L_2 \to L_2' = L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1\,,\ \ L_i \to L_i' = L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1\,,\ \ L_n \to L_n' = L_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} L_1\,.$$

Le nouveau système équivalent (S') est de la forme

$$(S') \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} \boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & y_1 & L_1 \\ & & a'_{22}x_2 & + & \cdots & + & a'_{2p}x_p & = & y'_2 & L'_2 \\ & & & & \cdots & & & & & \\ & & a'_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{ip}x_p & = & y'_i & L'_i \\ & & & & \cdots & & & & & \\ & & a'_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{np}x_p & = & y'_n & L'_n \end{array} \right.$$

L'inconnue x_1 est principale, on poursuit l'algorithme avec le sous-système d'équations L_2', $\cdots$, L_n', en essayant d'éliminer x_2 de L_3', etc.

• **Problème** : il peut se produire au démarrage que $\boxed{a_{11} = 0}$, auquel cas il ne peut pas servir de pivot. On peut alors chercher un coefficient $a_{i1} \neq 0$ dans la première colonne du système (S), et l'amener en haut à gauche à l'aide d'une permutation des lignes $L_1 \leftrightarrow L_i$ pour démarrer l'élimination. Si tous les coefficient a_{i1} de la colonne son nuls, il n'y a rien à faire par rapport à x_1, c'est une inconnue non principale, et on passe à l'inconnue x_2.

• L'algorithme s'arrête sur un système échelonné quand il n'y a plus d'inconnues à traiter dans les sous-systèmes.

□

Remarque 2.3. On note que l'algorithme présenté n'utilise que les transformations élémentaires de type 1 et 2 : intervertir deux équations et ajouter à une équation un multiple d'une autre équation. Formellement, on n'a donc pas besoin d'utiliser les transformations de type 3 (multiplier une ligne par nombre non nul) ou de type 4 (intervertir deux inconnues) pour échelonner un système. On peut cependant les utiliser. Cela permet plus de souplesse comme nous le verrons sur un exemple.

2.3 Quelques exemples

• On reprend les systèmes de l'introduction.

Pour la rédaction, il est pratique d'encadrer au fur et à mesure les inconnues qui servent de pivot, car alors les transformations élémentaires de type 2 utilisées sont déterminées.

On les rappelle ici dans le premier exemple.

$$(S_1)\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+x_3=-1 \\ x_1-x_2+2x_3=1 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{x_1} & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 & L_1 \\ & - & x_2 & - & x_3 & = & -3 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{x_1} & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 & L_1 \\ & & \boxed{-x_2} & - & x_3 & = & -3 & L_2 \\ & & & & \boxed{3x_3} & = & 6 & L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 & = & 1-x_2-x_3 & = & -2 \\ x_2 & = & 3-x_3 & = & 1 \\ x_3 & = & 2 \end{cases} .$$

Le système (S_1) a donc une unique solution $(x_1,x_2,x_3)=(-2,1,2)$. Notez que géométriquement (S_1) représente l'intersection de 3 plans dans $\mathbb{R}^3$.

• On passe à $(S_2) \iff$

$$\begin{cases} \boxed{x_1}+2x_2+x_3 & = & 1 \\ 2x_1+3x_2-x_3 & = & 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{x_1} & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & \boxed{-x_2} & & -3x_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_3 & & \text{quelconque} \\ x_2 & = & -3x_3 \\ x_1 & = & 1-2x_2-x_3=1+5x_3 \end{cases}$$

Le système (S_2) a une infinité de solutions paramétrées par l'inconnue non principale x_3. Notez que l'ensemble des solutions est une droite passant par le point $(1,0,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}=(5,-3,1)$, puisque

$$(x_1,x_2,x_3)=(1+5x_3,-3x_3,x_3)=(1,0,0)+x_3\overrightarrow{v} .$$

Ici (S_2) représente l'intersection de 2 plans de $\mathbb{R}^3$. Sauf accident (plans parallèles), ils se coupent bien suivant une droite.

• On a $(S_3) \iff$

$$\begin{cases} \boxed{x_1} & + & 2x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & = & 2 \\ x_1 & + & 4x_2 & = & a \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{x_1} & + & 2x_2 & = & 1 \\ & & x_2 & = & 2-1=1 \\ & & 2x_2 & = & a-1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{x_1} & + & 2x_2 & = & 1 \\ & & \boxed{x_2} & = & 1 \\ & & 0 & = & a-3 \end{cases}$$

Ainsi, (S_3) ne possède pas de solution si le **paramètre** $a\neq 3$. Si $a=3$, (S_3) est compatible et possède une solution unique $x_1=-1$ et $x_2=1$.

• Soit a un paramètre réel. On considère le système

$$(S)\begin{cases} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & 2 \end{cases} .$$

Ce système est déjà échelonné **si $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, mais ne l'est pas pour $\mathbf{a} = \mathbf{0}$**. La présence d'un paramètre devant une inconnue (apparemment) principale force à discuter sur la valeur du paramètre. Il est plus simple dans ce cas de commencer par intervertir les inconnues en choisissant des pivots qui ne contienne plus le paramètre.

Par exemple on a $(S) \iff$

$$\begin{cases} y + z + ax = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{y} + z + ax = 1 \\ \boxed{-2z} - ax = 1 \end{cases}$$

De cette manière, $a = 0$ n'apparaît plus comme un cas particulier à traiter séparément. Les inconnues y et z sont principales quelque soit a, et le système est toujours compatible avec une infinité de solutions paramétrées par x,

$$\begin{cases} y = 1 - ax - z = \dfrac{3}{2} - \dfrac{ax}{2} \\ z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{ax}{2} \\ x \text{ quelconque.} \end{cases}$$

Autant que possible pour les systèmes à paramètre, on évite d'utiliser des pivots contenant un paramètre. Si cela n'est pas possible, on traite à part les cas où les « pivots » s'annulent.

2.4 La notion de rang

La technique du pivot vue ici a de très nombreuses applications dans les calculs vectoriel et matriciel, comme nous le verrons dans les chapitres suivants. Un nombre entier en particulier y joue un rôle très important : le rang. En voici une première définition.

Définition 2.4. Le **rang** d'un système linéaire est le nombre d'inconnues principales d'un système échelonné équivalent.

Comme il y a plusieurs façons d'échelonner un système, conduisant en général à différents choix d'inconnues principales, il nous faudra comprendre pourquoi ce nombre est bien défini indépendemment des choix.

En attendant, nous pouvons constater son importance dans la discussion de l'existence ou non, et de l'unicité ou non des solutions d'un système.

Théorème 2.5. *Soit (S) un système linéaire à n équations, p inconnues et de rang r. Alors on a nécessairement $r \leq n$ et $r \leq p$, et un des cas suivants*

	$r = p$	$r < p$
$r = n$	*solution unique*	*infinité de solutions*
$r < n$	*au plus une solution*	*pas de solution ou une infinité*

Remarques 2.6.
1. Lorsque $r = n = p$, le système s'appelle un **système de Cramer**. Il possède une solution unique.
2. Dans le cas $r < p$, il y a des équations de compatibilité. Le système possède des solutions si et seulement si elles sont satisfaites.
3. On peut remarquer qu'il n'est pas nécessaire de résoudre le système pour connaître son rang, et connaître ainsi le nombre de solutions **sans** les calculer ! Il suffit d'échelonner le système et de compter les pivots.

Démonstration. Le rang r est le nombre d'inconnues principales. Comme il y a n inconnues en tout, on a $r \leq n$, et de plus $n - r$ est le nombre d'inconnues non principales.

De plus, il y a au plus une inconnue principale par équation d'un système échelonné. On a donc aussi $r \leq p$ et $p - r$ est le nombre d'équations de compatibilité.

Si $r = n$, il n'y a pas d'équations de compatibilité, le système possède donc au moins une solution.

Si de plus $r < p$, il y a une infinité de solution paramétrées par les $p - r$ inconnues principales. Si $r = p$, il n'y a pas d'inconnue non principale et la solution est unique. □

---

email : `michel.rumin@math.u-psud.fr`

page web : `http://www.math.u-psud.fr/~rumin/enseignement/enseignement.html`