

Feuille d'exercices n°1
INTÉGRALES MULTIPLES

Exercice 1 - *Intégrale et aire sous la courbe représentative.*

Soit a, b des réels positifs. Calculer et interpréter géométriquement les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^a bxdx \quad \text{et} \quad J = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Exercice 2 - *Dessins de domaines du plan.*

Représenter les domaines suivants du plan :

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \leq x + 1, 0 \leq y, y + 2x \leq 4\}, \\ D_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq -2, -1 \leq y \leq 1, y \geq x - 3\}, \\ D_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq 1, y \leq x^2 + 1, y \geq 2x, y \geq -2x\}, \\ D_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \leq \sqrt{3}x, x \leq \sqrt{3}y\}. \end{aligned}$$

Exercice 3 - *Découpages en tranches.*

Pour chaque domaine D de l'exercice précédent, et toutes les valeurs des paramètres réels a et b , déterminer les tranches verticales $D \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = a\}$ (vide ou pas ? extrémités ?). Déterminez de même les tranches horizontales $D \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = b\}$.

Exercice 4 - *Calculs d'aire et premières intégrales doubles.*

1. Calculer l'aire des domaines D_i de l'exercice 2 pour $i = 1, 2, 3$.
2. Calculer les intégrales doubles $\iint_{D_i} x dx dy$ pour ces mêmes domaines.
3. Donner les abscisses des centres de gravité des domaines précédents, supposés de densité constante (homogènes).

Exercice 5 - *Quelques intégrales doubles.*

Dessiner les domaines d'intégration et calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \iint_D (1 - x - y) dx dy$ pour $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 1\}$,
2. $I_2 = \iint_D \frac{xy^2}{1 + x^2} dx dy$ pour $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$,
3. $I_3 = \iint_D e^{y-x} dx dy$ pour $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y - x \leq 1, x \leq 0, y \geq 0\}$,
4. $I_4 = \iint_D \frac{2x}{1 + x^2 + y} dx dy$ pour $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

Exercice 6 - *Symétries dans une intégrale.*

Soit $f : R_a \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur le carré $R_a = [-a, a] \times [-a, a] \subset \mathbb{R}^2$.

1. Montrer, par exemple à l'aide de Fubini, que

$$\iint_{R_a} f(x, -y) dx dy = \iint_{R_a} f(x, y) dx dy.$$

Montrer de même que

$$\iint_{R_a} f(-x, y) dx dy = \iint_{R_a} f(x, y) dx dy \text{ et } \iint_{R_a} f(-x, -y) dx dy = \iint_{R_a} f(x, y) dx dy.$$

2. Montrer que $\iint_{R_a} f(x, y) dx dy = \iint_{R_a} f(y, x) dx dy$.

Indication. Comparer les sommes de Riemann des deux fonctions, ou utiliser que $(x, y) \mapsto (y, x)$ est une isométrie.

3. *Illustration.* Calculer

$$\iint_{R_{2016}} x^{20} y^{16} \sin(x^{20} y^{15}) dx dy \text{ et } \iint_{R_{2016}} (x - y)^{2015} e^{xy} dx dy.$$

Exercice 7 - Domaines en coordonnées polaires.

Pour chacun des domaines suivants $D_i \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ donner un domaine $U_i \subset \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\}$ tel que l'application $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ réalise une bijection de $U_i \setminus \{r = 0\}$ sur $D_i \setminus (0, 0)$:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}, \\ D_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x + y \geq 0\}, \\ D_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 2, y \leq \sqrt{3}x, x \leq \sqrt{3}y\}, \\ D_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq x \leq 1\}. \end{aligned}$$

Exercice 8 - Calculs d'intégrales en coordonnées polaires.

1. Calculer $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

2. Calculer l'aire des domaines D_i de l'exercice 7.

3. Calculer $\iint_D \frac{y^2}{x^2 + y^2} dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x, y \leq x\}$.

4. Calculer $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 - 2x \geq 0\}$. (Pour dessiner D , remarquer que $x^2 + y^2 - 2x = (x - 1)^2 + y^2 - 1$).

Exercice 9 - Disques et translations.

Pour a et b réels, on note $D(a, b)$ le disque de centre $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon 1.

1. Calculer $J_1 = \iint_{D(0,0)} x dx dy$, $J_2 = \iint_{D(0,0)} y dx dy$ et $J_3 = \iint_{D(0,0)} (x^2 + y^2) dx dy$.

2. En déduire, en utilisant une translation, un calcul de $I_{a,b} = \iint_{D(a,b)} (x^2 + y^2) dx dy$ en fonction de a, b et des intégrales précédentes. (Commentaire : cette expression intervient par exemple dans l'énergie cinétique du disque $D(a, b)$ en rotation autour de $(0, 0)$ (lancer de disque).)

Exercice 10 - Centre de gravité.

Calculer le centre de gravité (ou d'inertie) des domaines D suivants, supposés homogènes :

1. $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ où $a, b \in \mathbb{R}^*$.
2. $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ où $a, b \in \mathbb{R}^*$.
3. $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, |y| \geq ax\}$ où a est un réel > 0 .
4. $D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 9, (x - 1)^2 + y^2 \geq 1\}$.

Exercice 11 - Intégrales triples.

1. Représenter le domaine $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$, puis calculer l'intégrale

$$I = \iiint_D z \, dx \, dy \, dz.$$

2. Calculer en fonction du réel $\theta \geq 0$ l'intégrale suivante :

$$I(\theta) = \iiint_{[0, \theta] \times [0, \theta] \times [0, \theta]} \sin(x + y + z) \, dx \, dy \, dz.$$

Quel est le signe de $I(1)$?

Exercice 12 - Volumes.

1. Calculer le volume d'une pyramide P de hauteur h et de base rectangulaire de longueur ℓ et de largeur L .
2. Représenter $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -1 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1 + z^2\}$ et calculer son volume.
3. Calculer le centre de gravité de D , supposé de densité constante (homogène).

Exercice 13 - Coordonnées sphériques.

Utiliser un changement de variable pour calculer l'intégrale de f sur le domaine D avec

1. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ et $f(x, y, z) = xyz$,
2. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ et $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.