S2 PeiP — Orsay 2015-2016
Mathématiques

Feuille d'exercices n°4
Applications linéaires et matrices

Exercice 1 - *Exemples d'applications linéaires du plan.*

Soient $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = (x, y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

1. Rappeler l'expression de $f(\overrightarrow{v})$ où f est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ associée à la matrice A dans la base canonique.

On considère dans $\mathbb{R}^2$ la lettre L constituée des deux segments de droite $(0,0)$ à $(1,0)$ et $(0,0)$ à $(0,2)$, et le triangle T passant par les points $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,2)$.

2. Déterminer l'image de la lettre L, puis du triangle T, par les applications linéaires associées aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Quelles matrices sont associées à des similitudes directes, c'est-à-dire à des applications du type $f_\lambda : z = x + iy \mapsto \lambda z$ dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ avec $\lambda = a + ib = re^{i\theta}$?

Exercice 2 - *Application linéaire associée à une matrice.*

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

et on note $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire $X \mapsto AX$ associée (X écrit en colonne). Soit $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Où se trouvent les vecteurs $f(\overrightarrow{e_1})$, $f(\overrightarrow{e_2})$, $f(\overrightarrow{e_3})$ dans A ?

2. Calculer $f(x, y, z)$ de deux manières « différentes » :

- en utilisant que $(x, y, z) = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$ et la linéarité de f ;
- ou par calcul direct de AX avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Exercice 3 - *Une application linéaire utile.*

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (-\frac{x}{2} + y, -\frac{x}{2} + z).$$

1. Pourquoi f est-elle une application linéaire ?

2. Donner la matrice de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ quand on munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leur base canonique.

3. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ l'image par f des trois axes $(0x)$, $(0y)$ et $(0z)$ de $\mathbb{R}^3$, l'image des arêtes du cube $C = [0, 1]^3$ de $\mathbb{R}^3$, l'image d'une figure quelconque située dans un plan vertical $x = c$.

4. Voyez-vous une utilité à cette application f ?

5. Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$.

Exercice 4 - *Produit scalaire et produit vectoriel.*

Soient $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On rappelle que le produit scalaire de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ est

$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \,,$$

tandis que le produit vectoriel est

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

On suppose que $\overrightarrow{a}$ est fixé et on considère les applications

$$S_a : \overrightarrow{b} \mapsto \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle \quad \text{et} \quad V_a : \overrightarrow{b} \mapsto \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}.$$

Montrer que S_a et V_a sont des applications linéaires et donner leur matrice dans les bases canoniques.

Exercice 5 - *Matrices de projections orthogonales.*

Dans $\mathbb{R}^2$, on note D_θ la droite engendrée par $\overrightarrow{u}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$.

Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la projection orthogonale sur D_θ, soit en s'aidant d'une figure, soit en utilisant une formule vue en cours.

Exercice 6 - *Application linéaire déterminée par l'image d'une base.*

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les deux vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (2, 1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (1, 1)$.

1. Vérifiez que $B = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{e_2} = (0, 1)$ dans la base B.

Soit p l'unique application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $p(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{v_1}$ et $p(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{0}$.

2. Quelle est la matrice M de p dans la base B ? Que représente géométriquement p ? Que vaut $p \circ p$ et M^2 ?

3. Calculer $p(\overrightarrow{e_1})$ et $p(\overrightarrow{e_2})$ à l'aide de la question 1. En déduire la matrice N de p dans la base canonique $B_2 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Que vaut N^2 ?

4. Retrouver directement N à l'aide d'une formule du cours.

Exercice 7 - *Différentes matrices d'une même application linéaire.*

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y - z, x - y + 2z).$$

1. f est-elle une application linéaire ?

2. Donner la matrice de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ quand on munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leur base canonique B_3 et B_2.

3. Montrer qu'il existe des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(\overrightarrow{v_1}) = (0, 0)$, $f(\overrightarrow{v_2}) = (1, 0)$ et $f(\overrightarrow{v_3}) = (0, 1)$ (avec $\overrightarrow{v_1} \neq \overrightarrow{0}$). Vérifier que $B_3' = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer $\mathrm{Mat}_{B_3', B_2}(f)$.

4. Vérifier que $B_2' = ((1, 1), (1, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, puis déterminer $\mathrm{Mat}_{B_3, B_2'}(f)$.

Exercice 8 - *Produit de matrices.*

1. Calculer, lorsque cela est possible, le produit AB, pour :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les carrés de toutes les matrices de la question 2 de l'exercice 1. Interpréter géométriquement les résultats lorsque c'est possible.