S2 PeiP — Orsay 2015-2016
Mathématiques

Travaux pratiques de math sur Scilab. Feuille 1.

Calcul matriciel, systèmes linéaires

Quelques rappels. - Pour rentrer la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dans Scilab, on tape `A = [1 2 ; 3 4]`.

- Le « `;` » est le symbole de changement de ligne, et la « `,` » celui du changement de colonne (optionnel ici). Attention, le séparateur décimal pour les nombres est le « `.` » !

- La commande « `'` » échange les lignes et les colonnes d'une matrice.

- La commande « `*` » multiplie deux matrices (compatibles) entre elles.

Exercice 1 - *Résolution de quelques systèmes linéaires : la commande* `A\Y`.

1. Pour résoudre avec Scilab le système linéaire

$$\begin{cases} x - 2y + 10z = 23 \\ 2x + 3y + 4z = 7 \\ x - y + 5z = 12 \end{cases}$$

a) On entre dans Scilab la matrice A associée au système et le second membre Y en colonne.

b) On vérifie que A est inversible, à l'aide par exemple de la commande `rank(A)` qui calcule le rang de A.

c) On utilise enfin la commande `A\Y` pour obtenir la solution. On peut vérifier que cela a marché avec `A*ans` (ans=answer reprend le résultat du calcul précédent.)

Il se trouve que la commande `A\Y` « marche » aussi dans des situations où A n'est pas inversible, mais ne donne pas toujours une solution X de $AX = Y$! Voici un premier exemple.

2. On considère le système $AX = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & -3 & 8 \end{pmatrix}$.

a) Trouver une solution du système. Quel est le rang de A ? Le système a-t-il toujours une solution quelque soit le second membre ?

b) Déterminer le noyau de A avec la fonction `kernel(A)`. Quel est l'ensemble des solutions du système ?

c) En essayant plusieurs second membres, comprenez-vous quelle est « la » solution que la commande `A\Y` choisit ?

3. On reprend la discussion avec des systèmes $AX = Y$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ et $Y \in \mathbb{R}^3$ est à fixer.

a) Ce système peut-il toujours avoir des solutions quelque soit Y ? Essayez d'en trouver une avec la commande `A\Y` (en vérifiant le résultat) lorsque

$$Y = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Calculer le rang de la matrice `[A,Y]` pour ces Y. Pouvez-vous expliquer pourquoi ce calcul permet de savoir si le système $AX = Y$ est compatible ?

c) On note `X=A\Y` la « solution » donnée par Scilab. Vérifier sur des exemples que le vecteur $Z = Y - AX$ est orthogonal à l'image de A. Le produit scalaire de deux vecteurs colonnes U et V se calcule avec `U'*V`, et on peut extraire la j-ème colonne d'une matrice A avec la commande `A(:,j)`.

On verra en cours que le vecteur AX est le plus proche possible de Y parmi ceux de l'image de A. Ce vecteur X s'appelle la solution aux *moindres carrés* de l'équation $AX = Y$.

Exercice 2 - *Un exemple d'analyse entrée-sortie en économie.*

On considère l'économie d'Israël en 1958.[1] Les trois secteurs industriels considérés sont

$$I_1 : \text{agriculture}\,, \; I_2 : \text{biens manufacturés et } I_3 : \text{énergie}.$$

Production et demande sont mesurées en millions de livres israéliennes. On donne le vecteur C de demande des consommateurs, et ceux de demande interne de chaque secteur I_j par unité produite :

$$C = \begin{pmatrix} 13.2 \\ 17.6 \\ 1.8 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0.293 \\ 0.014 \\ 0.044 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.207 \\ 0.01 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.017 \\ 0.216 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire le tableau d'entrée-sortie de cette économie (voir cours). Pourquoi les premières composantes de C_2 et C_3 sont-elles nulles (à l'époque) ? Pensez-vous qu'elles le soient encore aujourd'hui ? (Pensez aux bio-carburants par exemple.) Cette économie est-elle productive (voir cours) ?

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ le vecteur de production. Quelle équation doit satisfaire X pour que la production satisfasse la demande des consommateurs ?

3. Poser et résoudre cette équation. La matrice identité de taille $n \times n$ se code `eye(n,n)` en Scilab. Pouvez-vous expliquer pourquoi chaque secteur doit produire plus que la demande des consommateurs ?

4. De manière générale, si la demande des consommateurs en biens manufacturés augmente d'un million de livres, de combien doit augmenter la production de chaque secteur ? Mêmes questions avec une augmentation de consommation d'énergie ou de produits agricoles. On rappelle que la commande `inv(A)` calcule l'inverse de A si elle est inversible.

---

1. W. Leontief, *Input-Output Economics*, Oxford University Press, 1966.