Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Un complexe de formes différentielles sur les variétés de contact

Michel RUMIN

Résumé – On construit sur les variétés de contact un complexe de formes différentielles « modulo formes de contact ». On l'utilise pour donner, dans le cas C.R. strictement pseudoconvexe, compact et en dimension $\geqq 5$, un critère d'annulation du premier nombre de Betti sous une condition portant sur la courbure pseudohermitienne.

A complex of differential forms on contact manifolds

Abstract – *We construct on contact manifolds a complex of differential forms "modulo contact forms". We use it to give, in the compact strictly pseudoconvex C.R. case dimension $\geqq 5$, a vanishing theorem for the first Betti number under an assumption on the pseudohermitian curvature tensor.*

En géométrie riemannienne, on sait, par un théorème de S. Bochner [1], que si une variété compacte M possède une métrique de courbure de Ricci >0, alors son premier nombre de Betti b_1 est nul. Cela s'obtient en comparant le laplacien issu du complexe de De Rham de M, à celui provenant de la connexion de Levi-Civita de la métrique. On se propose ici de donner un analogue de cette méthode en géométrie pseudohermitienne. Pour cela, nous commençons par construire un complexe de formes différentielles adapté à une structure de contact sur M. Nous nous plaçons ensuite dans le cas C.R. strictement pseudoconvexe pour disposer de la connexion pseudohermitienne de Webster [2], et dériver des formules de Weitzenböck.

Nous pouvons alors énoncer, en dimension $\geqq 5$, un critère d'annulation de b_1. La méthode utilisée ne s'étend pas en dimension 3. Dans ce cas, on considère un laplacien hypoelliptique d'ordre 4.

1. DESCRIPTION DU COMPLEXE UTILISÉ. – Soit M une variété compacte de dimension $2n+1$ munie d'un champ d'hyperplans de contact Q.

Si θ est une forme de contact, on note $\mathrm{I}^* = \{\alpha \in \Lambda^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}$ tel que $\alpha = \theta \wedge \beta + d\theta \wedge \gamma\}$ l'idéal différentiel engendré par θ, et $\mathrm{J}^* = \{\alpha \in \Lambda^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}$ tel que $\theta \wedge \alpha = 0$ et $d\theta \wedge \alpha = 0\}$.

Les idéaux I^* et J^* sont indépendants du choix de θ et stables par la différentielle extérieure d. On considère alors les complexes induits par le complexe de De Rham sur $\Lambda^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}/\mathrm{I}^*$ et J^*. Notons d_{Q} les opérateurs induits par la différentielle extérieure d. On relie ces complexes de la façon suivante :

PROPOSITION. – *Il existe un opérateur différentiel* $\mathrm{D} : \Lambda^n \mathrm{T}^* \mathrm{M}/\mathrm{I}^n \to \mathrm{J}^{n+1}$ *tel que :*

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}) \xrightarrow{d_{\mathrm{Q}}} \Lambda^1 \mathrm{T}^* \mathrm{M}/\mathrm{I}^1 \xrightarrow{d_{\mathrm{Q}}} \ldots \xrightarrow{d_{\mathrm{Q}}} \Lambda^n \mathrm{T}^* \mathrm{M}/\mathrm{I}^n \xrightarrow{\mathrm{D}} \mathrm{J}^{n+1} \xrightarrow{d_{\mathrm{Q}}} \mathrm{J}^{n+2} \xrightarrow{d_{\mathrm{Q}}} \ldots \xrightarrow{d_{\mathrm{Q}}} \mathrm{J}^{2n+1} \to 0$$

soit une résolution. La cohomologie de ce complexe coïncide donc avec la cohomologie de De Rham de M.

La construction de D utilise le lemme suivant :

LEMME. – *Soit* $\alpha \in \Lambda^n \mathrm{T}^* \mathrm{M}/\{$formes divisibles par $\theta\}$. *Il existe un unique relèvement* $\hat{\alpha}$ *de* α *dans* $\Lambda^n \mathrm{T}^* \mathrm{M}$ *tel que* $d\hat{\alpha} \in \mathrm{J}^{n+1}$. *On note alors* $\mathrm{D}'\alpha = d\hat{\alpha}$.

Note présentée par Mikaël GROMOV.

0764-4442/90/03100401 $ 2.00 © Académie des Sciences

Démonstration. — Si $\bar{\alpha}$ est un relèvement quelconque de α, on cherche un β tel que $\hat{\alpha}=\bar{\alpha}+\theta \wedge \beta$ vérifie $\theta \wedge d\hat{\alpha}=0$, c'est-à-dire $\theta \wedge d\bar{\alpha}+\theta \wedge d\theta \wedge \beta=0$.

Ceci est possible de façon unique (modulo θ) car la multiplication extérieure par $d\theta$, $L=d\theta \wedge$ induit un isomorphisme de $\Lambda^{n-1} T^* M/\{$formes divisibles par $\theta\}$ sur $\Lambda^{n+1} T^* M/\{$formes divisibles par $\theta\}$.

On a bien $d\hat{\alpha} \in J^{n+1}$, car on a aussi : $d\theta \wedge d\hat{\alpha}=d(\theta \wedge d\hat{\alpha})=0$. ■

Soit maintenant $\overline{d\theta \wedge \beta}$ la projection de $d\theta \wedge \beta$ dans $\Lambda^n T^* M/\{$formes divisibles par $\theta\}$. On a : $d(d\theta \wedge \beta-\theta \wedge d\beta)=0 \in J^{n+1}$ et alors $D'(\overline{d\theta \wedge \beta})=0$. D' passe donc au quotient en $D : \Lambda^n T^* M/I^n \to J^{n+1}$. On note que D est d'ordre 2 en dérivées suivant Q.

2. Le cas de D sur le groupe de Heisenberg H_3 de dimension 3, formule asymptotique pour l'holonomie. — L'algèbre de Lie de H_3 est engendrée par X, Y et Z avec $[X, Y]=Z$.

On note h_λ la famille de dilatations telle que $h_\lambda(X)=\lambda . X$, $h_\lambda(Y)=\lambda . Y$ et $h_\lambda(T)=\lambda^2 . T$. Soit γ un lacet partout tangent à Q, le champ de plans engendré par X et Y. Notons $\gamma_\lambda=h_\lambda . \gamma$ les lacets homothétiques, et $\hat{\gamma}_\lambda$ leur projection sur H_3/centre (H_3) identifié à $\mathbf{R}^2$. Soit enfin, $\alpha \in \Lambda^1 T^* M/I^1 \approx \Lambda^1 Q^*$.

On a une formule d'holonomie asymptotique lorsque $\lambda \to 0$:

$$\int_{\gamma_\lambda} \alpha \approx (D\alpha)(Z, X) . V_X+(D\alpha)(Z, Y) . V_Y$$

à l'ordre 3 en λ, et où

$$V=(V_X, V_Y)=\iint_S OM\, dS$$

est le vecteur moment dipolaire associé à $\hat{\gamma}_\lambda$, avec $\partial S=\hat{\gamma}_\lambda$.

3. Formules de Weitzenböck pseudohermitiennes. — Dans la suite de cette Note, on se place au niveau des 1-formes, et dans le cas où le champ de contact Q possède une structure C.R. intégrable strictement pseudoconvexe. On a alors sur Q une structure complexe induisant la décomposition de $Q \otimes \mathbb{C}$ en $Q^{1,0}+Q^{0,1}$ avec la condition $[Q^{1,0}, Q^{1,0}] \subset Q^{1,0}$. Le choix d'une forme de contact θ détermine une métrique hermitienne définie positive h sur $Q^{1,0}$ par $h=-i . d\theta(.,\bar{.})$, ainsi qu'une connexion pseudohermitienne notée ∇, ou connexion de Webster [2]. Nous allons l'utiliser pour écrire des *formules de Weitzenböck* en dimension $\geqq 5$ ($n \geqq 2$). Pour cela, on décompose le complexe suivant les types en notant que :

$$\Lambda^1 T^* M/I^1 \otimes \mathbb{C} \approx \Lambda^1 \mathbf{Q}^* \otimes \mathbb{C}=\Lambda^{1,0} Q^*+\Lambda^{0,1} Q^*$$

et, $d\theta_{|Q}$ étant de type (1,1),

$$\Lambda^2 T^* M/I^2 \otimes \mathbb{C} \approx \Lambda^{2,0} \mathbf{Q}^*+\Lambda^{0,2} \mathbf{Q}^*/(d\theta_{|Q}).$$

On pose alors, pour $f \in C^\infty(M) \otimes \mathbb{C}$ et $\alpha \in \Lambda^1 T^* M/I^1 \otimes \mathbb{C}$:

$$d_1 f=(d_Q f)^{1,0}, \qquad d_2 \alpha=(d_Q(\alpha^{1,0}))^{2,0}, \qquad d_3 \alpha=(d_Q(\alpha^{1,0}))^{1,1},$$

ainsi que :

$$\bar{d}_1 f=(d_Q f)^{0,1}, \qquad \bar{d}_2 \alpha=(d_Q(\alpha^{0,1}))^{0,2}, \qquad \bar{d}_3 \alpha=(d_Q(\alpha^{0,1}))^{1,1}$$

les opérateurs conjugués. La condition d'intégrabilité de la structure C.R. nous assure que l'on a :

$$d_{Q \mid \Lambda^1 T^* M/I^1 \otimes \mathbb{C}}=d_2+\bar{d}_2+d_3+\bar{d}_3.$$

La métrique h induit des produits hermitiens sur $\Lambda^1 T^* M/I^1 \otimes \mathbb{C}$ et $\Lambda^2 T^* M/I^2 \otimes \mathbb{C}$. Notons alors δ_1, δ_2, δ_3, $\bar{\delta}_1$, $\bar{\delta}_2$, $\bar{\delta}_3$ les adjoints L^2 respectifs de d_1, d_2, d_3, $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$, $\bar{d}_3$.

Enfin, on procède de même sur les 2-tenseurs en notant, pour $\alpha \in \Lambda^1 T^* M/I^1 \otimes \mathbb{C}$:

$$\nabla_+ \alpha = (\nabla(\alpha^{1,0}))^{2,0} \quad \text{et} \quad \nabla_- \alpha = (\nabla(\alpha^{1,0}))^{1,1},$$

∇_+^* et ∇_-^* leurs adjoints.

En travaillant dans un système de coordonnées normales [3], on trouve :

$$(n-1)/n \,.\, d_1 \bar{\delta}_1 + \delta_3 \bar{d}_3 = (\text{Trace R})_1 \tag{1}$$

$$d_1 \delta_1 + \delta_2 d_2 = (n-1)/n \,.\, \nabla_+^* \nabla_+ + 1/n \,.\, \nabla_-^* \nabla_- + 1/n \,.\, (\text{Trace R})_2 \tag{2}$$

$$1/n \,.\, d_1 \delta_1 + \delta_3 d_3 = \nabla_-^* \nabla_- \tag{3}$$

où $(\text{Trace R})_1$ = torsion de Webster et $(\text{Trace R})_2$ = courbure de Ricci pseudohermitienne sont des traces du tenseur de courbure R de ∇ [2].

4. Applications. — On étudie d'abord la *régularité hypoelliptique du complexe* d_Q.

En reportant $\delta_1 = \delta_Q - \bar{\delta}_1$ dans (2) et utilisant (1), on obtient, en posant

$$P := d_1 \delta_Q + \delta_2 d_2 + n/(n-1) \,.\, \delta_3 \bar{d}_3,$$

$$P = (n-1)/n \,.\, \nabla_+^* \nabla_+ + 1/n \,.\, \nabla_-^* \nabla_- + 1/n \,.\, (\text{Trace R})_2 + n/(n-1) \,.\, (\text{Trace R})_1.$$

On a alors, pour M de dimension $\geqq 5$, et $\alpha \in \Lambda^1 T^* M/I^1 \otimes \mathbb{C}$:

$$\|\delta_Q \alpha\|^2 + n/(n-1) \,.\, \|d_Q \alpha\|^2 = ((P+\bar{P})\alpha, \alpha) + 1/(n-1) \,.\, (\|d_2 \alpha\|^2 + \|\bar{d}_2 \alpha\|^2)$$
$$+ n/(n-1) \,.\, (\|d_3 \alpha\|^2 + \|\bar{d}_3 \alpha\|^2) \geqq ((P+\bar{P})\alpha, \alpha)$$

d'où : $\|\delta_Q \alpha\|^2 + n/(n-1) \,.\, \|d_Q \alpha\|^2 \geqq 1/n \,.\, \|\nabla \alpha\|^2 + K \,.\, \|\alpha\|^2$, avec K constante réelle. Le système (d_Q, δ_Q) contrôle une dérivée suivant Q; il est alors hypoelliptique maximal [4], et on a :

Proposition. — *La cohomologie des* 1-*formes peut se représenter par des formes* d_Q *harmoniques, c'est-à-dire que l'on a :* $H^1_{D.R} \approx \mathscr{H}^1 = \{1$ *formes* α *avec* $d_Q \alpha = \delta_Q \alpha = 0\}$.

En utilisant ce résultat nous pouvons donner une *décomposition de Hodge de* $H^1_{D.R}$ par l'énoncé suivant :

Proposition. — *Si la torsion de Webster de la structure pseudohermitienne est nulle alors* $H^1(M) \otimes \mathbb{C} = H^{1,0} + H^{0,1}$ *où* $H^{1,0}$ *est l'ensemble des* (1,0)-*formes* d_Q-*harmoniques*.

Démonstration. — Soit α une 1-forme d_Q-harmonique; alors :

$$\delta_Q \alpha = 0 = \delta_1 \alpha + \bar{\delta}_1 \alpha \quad \text{et} \quad (d_Q \alpha)^{1,1} = 0 = d_3 \alpha + \bar{d}_3 \alpha.$$

Reportons ceci dans l'équation (1) pour obtenir :

$$(n-1)/n \,.\, \|\delta_1 \alpha\|^2 + \|d_3 \alpha\|^2 + ((\text{Trace R})_1 \alpha, \alpha) = 0. \tag{4}$$

Et l'on note que si $(\text{Trace R})_1 = 0$, alors $\delta_1 \alpha = 0 = \delta_Q(\alpha^{1,0})$ et $d_3 \alpha = 0 = (d_Q(\alpha^{1,0}))^{1,1}$, et comme l'on a aussi : $(d_Q(\alpha^{1,0}))^{2,0} = (d_Q \alpha)^{2,0} = 0$, $\alpha^{1,0}$ est d_Q-harmonique (et de même $\alpha^{0,1}$). ■

Remarque. — D'après [3], il existe sur M un choix de forme de contact θ tel que la torsion de Webster soit nulle si, et seulement si, il existe sur M un champ de vecteurs transverse à Q qui conserve Q et sa structure complexe J.

On énonce maintenant le critère d'annulation du premier nombre de Betti b_1 annoncé dans l'introduction.

Proposition. — *Si* $((\text{Trace R})_2\, \alpha, \alpha)_m > (n+1) \,.\, |((\text{Trace R})_1\, \alpha, \alpha)_m|$ *pour tout* $m \in M$ (*de* dim $\geqq 5$) *et tout* α, *alors* $b_1 = 0$.

Démonstration. — Soit α une 1-forme d_Q-harmonique.

En reportant $d_2\alpha=(d_Q\alpha)^{2,0}=0$ dans l'équation (2), on obtient :

(5) $$\|\delta_1\alpha\|^2=(n-1)/n.\|\nabla_+\alpha\|^2+1/n.\|\nabla_-\alpha\|^2+1/n.((\mathrm{Trace\ R})_2\alpha,\alpha)$$

Enfin, (3) s'écrit :

(6) $$1/n.\|\delta_1\alpha\|^2+\|d_3\alpha\|^2=\|\nabla_-\alpha\|^2.$$

On déduit alors en éliminant $\|\nabla_-\alpha\|^2$ et $\|\delta_1\alpha\|^2$ de (4), (5) et (6), que l'on a :

(7) $$0=(n-1).\|\nabla_+\alpha\|^2+(n+2).\|d_3\alpha\|^2+(((\mathrm{Trace\ R})_2+(n+1).(\mathrm{Trace\ R})_1)\alpha,\alpha).$$

Ici, $((\mathrm{Trace\ R})_2\alpha,\alpha)_m$ est une forme hermitienne [2]. Par contre, $((\mathrm{Trace\ R})_1\alpha,\alpha)_m$ n'est pas hermitien, et en fait change de signe lorsque $\alpha\mapsto i.\alpha^{1,0}-i.\alpha^{0,1}$; c'est pourquoi l'on prend sa valeur absolue dans l'énoncé de la proposition. ■

Remarque. — Si $(\mathrm{Trace\ R})_2\geqq 0$ et $(\mathrm{Trace\ R})_1=0$, alors il résulte de (4) et (5) que toute 1-forme d_Q-harmonique est parallèle, et comme ∇ est métrique, on a :

$$b_1\leqq \dim Q=2n=\dim M-1.$$

5. Le cas de D en dimension 3. — Nous avons ici $D:\Lambda^1T^*M/I^1\approx\Lambda^1Q^*\to J^2$.

Si l'on a fait un choix de forme de contact θ, alors : $J^2\approx\theta\wedge(\Lambda^1Q^*)$, et on y a une métrique. On note alors D^* l'adjoint de D.

Le produit extérieur des formes passe au quotient en

$$\wedge:\Lambda^1T^*M/I^1\otimes J^2\to\Lambda^3T^*M,$$

et induit un opérateur

$$*:J^2\to\Lambda^1T^*M/I^1 \quad \text{par } \alpha\wedge *\beta=(\alpha,\beta)_m.\theta\wedge d\theta.$$

L'opérateur $(d_Q\delta_Q+D^*D)$ ne peut pas être hypoelliptique maximal [4] car $d_Q\delta_Q$ est d'ordre 2 et D^*D d'ordre 4; on choisit alors le laplacien $\Delta_Q=(d_Q\delta_Q)^2+D^*D$ et on vérifie que :

— Δ_Q est hypoelliptique maximal, et alors la cohomologie se représente par des formes Δ_Q-harmoniques;

— la condition de jauge est inchangée car $d_Q\delta_Q\alpha=0\Leftrightarrow\delta_Q\alpha=0$;

— on a toujours conservation des types par Δ_Q lorsque la torsion de Webster de ∇ est nulle, et alors $H^1_{D.R}(M)\otimes\mathbb{C}=H^{1,0}+H^{0,1}$, en particulier b_1 est pair;

— on a : $\Delta_Q=(d_Q\delta_Q+*D)^2$, avec $d_Q\delta_Q+*D$ d'ordre 2, autoadjoint, et hypoelliptique maximal mais non positif, car l'on a, pour $\alpha\in\Lambda^1T^*M/I^1$:

$$((d_Q\delta_Q+*D)\alpha,\alpha)=-\|\nabla^{2,0\ \text{et}\ 0,2}\alpha\|^2+3.\|\nabla^{1,1}\alpha\|^2+((\text{courbure})\alpha,\alpha).$$

On ne peut donc en déduire un critère d'annulation de $H^1_{D.R}(M)$.

Note remise le 12 janvier 1990, acceptée le 15 janvier 1990.

Références bibliographiques

[1] P. H. Bérard, Spectral geometry: direct and inverse problems, *Lecture Notes in Math.*, n° 1207, Springer Verlag, 1986.

[2] S. M. Webster, Pseudo-hermitian structures on a real hypersurface, *J. of Diff. Geometry*, 13, 1978, p. 25-41.

[3] J. M. Lee, Pseudo-Einstein structures on C.R. manifolds, *Amer. J. of Math.*, 110, 1988, p. 157-178.

[4] B. Helffer et J. Nourrigat, *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs*, Birkhäuser 1985, Progress in Math., 58.

E.N.S., Tour C, 1, *rue Maurice-Arnoux*, 92120 *Montrouge*.