

Comptes rendus de
l'Académie des sciences.
Série 1, Mathématique

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1990-01.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter utilisation.commerciale@bnf.fr.

Un complexe de formes différentielles sur les variétés de contact

Michel RUMIN

Résumé – On construit sur les variétés de contact un complexe de formes différentielles « modulo formes de contact ». On l'utilise pour donner, dans le cas C.R. strictement pseudoconvexe, compact et en dimension ≥ 5 , un critère d'annulation du premier nombre de Betti sous une condition portant sur la courbure pseudohermitienne.

A complex of differential forms on contact manifolds

Abstract – We construct on contact manifolds a complex of differential forms "modulo contact forms". We use it to give, in the compact strictly pseudoconvex C.R. case dimension ≥ 5 , a vanishing theorem for the first Betti number under an assumption on the pseudohermitian curvature tensor.

En géométrie riemannienne, on sait, par un théorème de S. Bochner [1], que si une variété compacte M possède une métrique de courbure de Ricci > 0 , alors son premier nombre de Betti b_1 est nul. Cela s'obtient en comparant le laplacien issu du complexe de De Rham de M , à celui provenant de la connexion de Levi-Civita de la métrique. On se propose ici de donner un analogue de cette méthode en géométrie pseudohermitienne. Pour cela, nous commençons par construire un complexe de formes différentielles adapté à une structure de contact sur M . Nous nous plaçons ensuite dans le cas C.R. strictement pseudoconvexe pour disposer de la connexion pseudohermitienne de Webster [2], et dériver des formules de Weitzenböck.

Nous pouvons alors énoncer, en dimension ≥ 5 , un critère d'annulation de b_1 . La méthode utilisée ne s'étend pas en dimension 3. Dans ce cas, on considère un laplacien hypoelliptique d'ordre 4.

1. DESCRIPTION DU COMPLEXE UTILISÉ. – Soit M une variété compacte de dimension $2n+1$ munie d'un champ d'hyperplans de contact Q .

Si θ est une forme de contact, on note $I^* = \{ \alpha \in \Lambda^* T^* M \text{ tel que } \alpha = \theta \wedge \beta + d\theta \wedge \gamma \}$ l'idéal différentiel engendré par θ , et $J^* = \{ \alpha \in \Lambda^* T^* M \text{ tel que } \theta \wedge \alpha = 0 \text{ et } d\theta \wedge \alpha = 0 \}$.

Les idéaux I^* et J^* sont indépendants du choix de θ et stables par la différentielle extérieure d . On considère alors les complexes induits par le complexe de De Rham sur $\Lambda^* T^* M / I^*$ et J^* . Notons d_Q les opérateurs induits par la différentielle extérieure d . On relie ces complexes de la façon suivante :

PROPOSITION. – Il existe un opérateur différentiel $D : \Lambda^n T^* M / I^n \rightarrow J^{n+1}$ tel que :

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow C^\infty(M) \xrightarrow{d_Q} \Lambda^1 T^* M / I^1 \xrightarrow{d_Q} \dots \xrightarrow{d_Q} \Lambda^n T^* M / I^n \xrightarrow{D} J^{n+1} \xrightarrow{d_Q} J^{n+2} \xrightarrow{d_Q} \dots \xrightarrow{d_Q} J^{2n+1} \rightarrow 0$$

soit une résolution. La cohomologie de ce complexe coïncide donc avec la cohomologie de De Rham de M .

La construction de D utilise le lemme suivant :

LEMME. – Soit $\alpha \in \Lambda^n T^* M / \{ \text{formes divisibles par } \theta \}$. Il existe un unique relèvement $\hat{\alpha}$ de α dans $\Lambda^n T^* M$ tel que $d\hat{\alpha} \in J^{n+1}$. On note alors $D' \alpha = d\hat{\alpha}$.

Note présentée par Mikaël GROMOV.

Démonstration. — Si $\bar{\alpha}$ est un relèvement quelconque de α , on cherche un β tel que $\hat{\alpha} = \bar{\alpha} + \theta \wedge \beta$ vérifie $\theta \wedge d\hat{\alpha} = 0$, c'est-à-dire $\theta \wedge d\bar{\alpha} + \theta \wedge d\theta \wedge \beta = 0$.

Ceci est possible de façon unique (modulo θ) car la multiplication extérieure par $d\theta$, $L = d\theta \wedge$ induit un isomorphisme de $\Lambda^{n-1} T^* M / \{\text{formes divisibles par } \theta\}$ sur $\Lambda^{n+1} T^* M / \{\text{formes divisibles par } \theta\}$.

On a bien $d\hat{\alpha} \in J^{n+1}$, car on a aussi : $d\theta \wedge d\hat{\alpha} = d(\theta \wedge d\hat{\alpha}) = 0$. ■

Soit maintenant $\overline{d\theta \wedge \beta}$ la projection de $d\theta \wedge \beta$ dans $\Lambda^n T^* M / \{\text{formes divisibles par } \theta\}$. On a : $d(d\theta \wedge \beta - \theta \wedge d\beta) = 0 \in J^{n+1}$ et alors $D'(d\theta \wedge \beta) = 0$. D' passe donc au quotient en $D : \Lambda^n T^* M / I^n \rightarrow J^{n+1}$. On note que D est d'ordre 2 en dérivées suivant Q .

2. LE CAS DE D SUR LE GROUPE DE HEISENBERG H_3 DE DIMENSION 3, FORMULE ASYMPTOTIQUE POUR L'HOLONOMIE. — L'algèbre de Lie de H_3 est engendrée par X, Y et Z avec $[X, Y] = Z$.

On note h_λ la famille de dilatations telle que $h_\lambda(X) = \lambda \cdot X$, $h_\lambda(Y) = \lambda \cdot Y$ et $h_\lambda(Z) = \lambda^2 \cdot Z$. Soit γ un lacet partout tangent à Q , le champ de plans engendré par X et Y . Notons $\gamma_\lambda = h_\lambda \cdot \gamma$ les lacets homothétiques, et $\hat{\gamma}_\lambda$ leur projection sur $H_3/\text{centre}(H_3)$ identifié à \mathbb{R}^2 . Soit enfin, $\alpha \in \Lambda^1 T^* M / I^1 \approx \Lambda^1 Q^*$.

On a une formule d'holonomie asymptotique lorsque $\lambda \rightarrow 0$:

$$\int_{\gamma_\lambda} \alpha \approx (D\alpha)(Z, X) \cdot V_X + (D\alpha)(Z, Y) \cdot V_Y$$

à l'ordre 3 en λ , et où

$$V = (V_X, V_Y) = \iint_S OM \, dS$$

est le vecteur moment dipolaire associé à $\hat{\gamma}_\lambda$, avec $\partial S = \hat{\gamma}_\lambda$.

3. FORMULES DE WEITZENBÖCK PSEUDOHERMITIENNES. — Dans la suite de cette Note, on se place au niveau des 1-formes, et dans le cas où le champ de contact Q possède une structure C.R. intégrable strictement pseudoconvexe. On a alors sur Q une structure complexe induisant la décomposition de $Q \otimes \mathbb{C}$ en $Q^{1,0} + Q^{0,1}$ avec la condition $[Q^{1,0}, Q^{1,0}] \subset Q^{1,0}$. Le choix d'une forme de contact θ détermine une métrique hermitienne définie positive h sur $Q^{1,0}$ par $h = -i \cdot d\theta(\cdot, \bar{\cdot})$, ainsi qu'une connexion pseudohermitienne notée ∇ , ou connexion de Webster [2]. Nous allons l'utiliser pour écrire des *formules de Weitzenböck* en dimension ≥ 5 ($n \geq 2$). Pour cela, on décompose le complexe suivant les types en notant que :

$$\Lambda^1 T^* M / I^1 \otimes \mathbb{C} \approx \Lambda^1 Q^* \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{1,0} Q^* + \Lambda^{0,1} Q^*$$

et, $d\theta|_Q$ étant de type (1,1),

$$\Lambda^2 T^* M / I^2 \otimes \mathbb{C} \approx \Lambda^{2,0} Q^* + \Lambda^{0,2} Q^* / (d\theta|_Q).$$

On pose alors, pour $f \in C^\infty(M) \otimes \mathbb{C}$ et $\alpha \in \Lambda^1 T^* M / I^1 \otimes \mathbb{C}$:

$$d_1 f = (d_Q f)^{1,0}, \quad d_2 \alpha = (d_Q(\alpha^{1,0}))^{2,0}, \quad d_3 \alpha = (d_Q(\alpha^{1,0}))^{1,1},$$

ainsi que :

$$\bar{d}_1 f = (d_Q f)^{0,1}, \quad \bar{d}_2 \alpha = (d_Q(\alpha^{0,1}))^{0,2}, \quad \bar{d}_3 \alpha = (d_Q(\alpha^{0,1}))^{1,1}$$

les opérateurs conjugués. La condition d'intégrabilité de la structure C.R. nous assure que l'on a :

$$d_Q|_{\Lambda^1 T^* M / I^1 \otimes \mathbb{C}} = d_2 + \bar{d}_2 + d_3 + \bar{d}_3.$$

La métrique h induit des produits hermitiens sur $\Lambda^1 T^* M / I^1 \otimes \mathbb{C}$ et $\Lambda^2 T^* M / I^2 \otimes \mathbb{C}$. Notons alors $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \bar{\delta}_3$ les adjoints L^2 respectifs de $d_1, d_2, d_3, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3$.

Enfin, on procède de même sur les 2-tenseurs en notant, pour $\alpha \in \Lambda^1 T^* M / I^1 \otimes \mathbb{C}$:

$$\nabla_+ \alpha = (\nabla(\alpha^{1,0}))^{2,0} \quad \text{et} \quad \nabla_- \alpha = (\nabla(\alpha^{1,0}))^{1,1},$$

∇_+^* et ∇_-^* leurs adjoints.

En travaillant dans un système de coordonnées normales [3], on trouve :

- (1) $(n-1)/n \cdot d_1 \bar{\delta}_1 + \delta_3 \bar{d}_3 = (\text{Trace } R)_1$
- (2) $d_1 \delta_1 + \delta_2 d_2 = (n-1)/n \cdot \nabla_+^* \nabla_+ + 1/n \cdot \nabla_-^* \nabla_- + 1/n \cdot (\text{Trace } R)_2$
- (3) $1/n \cdot d_1 \delta_1 + \delta_3 d_3 = \nabla_-^* \nabla_-$

où $(\text{Trace } R)_1 =$ torsion de Webster et $(\text{Trace } R)_2 =$ courbure de Ricci pseudohermitienne sont des traces du tenseur de courbure R de ∇ [2].

4. APPLICATIONS. — On étudie d'abord la *régularité hypoelliptique du complexe* d_Q .

En reportant $\delta_1 = \delta_Q - \bar{\delta}_1$ dans (2) et utilisant (1), on obtient, en posant

$$P := d_1 \delta_Q + \delta_2 d_2 + n/(n-1) \cdot \delta_3 \bar{d}_3,$$

$$P = (n-1)/n \cdot \nabla_+^* \nabla_+ + 1/n \cdot \nabla_-^* \nabla_- + 1/n \cdot (\text{Trace } R)_2 + n/(n-1) \cdot (\text{Trace } R)_1.$$

On a alors, pour M de dimension ≥ 5 , et $\alpha \in \Lambda^1 T^* M / I^1 \otimes \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \|\delta_Q \alpha\|^2 + n/(n-1) \cdot \|d_Q \alpha\|^2 &= ((P + \bar{P}) \alpha, \alpha) + 1/(n-1) \cdot (\|d_2 \alpha\|^2 + \|\bar{d}_2 \alpha\|^2) \\ &\quad + n/(n-1) \cdot (\|d_3 \alpha\|^2 + \|\bar{d}_3 \alpha\|^2) \geq ((P + \bar{P}) \alpha, \alpha) \end{aligned}$$

d'où : $\|\delta_Q \alpha\|^2 + n/(n-1) \cdot \|d_Q \alpha\|^2 \geq 1/n \cdot \|\nabla \alpha\|^2 + K \cdot \|\alpha\|^2$, avec K constante réelle. Le système (d_Q, δ_Q) contrôle une dérivée suivant Q ; il est alors hypoelliptique maximal [4], et on a :

PROPOSITION. — *La cohomologie des 1-formes peut se représenter par des formes d_Q harmoniques, c'est-à-dire que l'on a : $H_{D,R}^1 \approx \mathcal{H}^1 = \{1 \text{ formes } \alpha \text{ avec } d_Q \alpha = \delta_Q \alpha = 0\}$.*

En utilisant ce résultat nous pouvons donner une *décomposition de Hodge* de $H_{D,R}^1$ par l'énoncé suivant :

PROPOSITION. — *Si la torsion de Webster de la structure pseudohermitienne est nulle alors $H^1(M) \otimes \mathbb{C} = H^{1,0} + H^{0,1}$ où $H^{1,0}$ est l'ensemble des (1,0)-formes d_Q -harmoniques.*

Démonstration. — Soit α une 1-forme d_Q -harmonique; alors :

$$\delta_Q \alpha = 0 = \delta_1 \alpha + \bar{\delta}_1 \alpha \quad \text{et} \quad (d_Q \alpha)^{1,1} = 0 = d_3 \alpha + \bar{d}_3 \alpha.$$

Reportons ceci dans l'équation (1) pour obtenir :

$$(4) \quad (n-1)/n \cdot \|\delta_1 \alpha\|^2 + \|d_3 \alpha\|^2 + ((\text{Trace } R)_1 \alpha, \alpha) = 0.$$

Et l'on note que si $(\text{Trace } R)_1 = 0$, alors $\delta_1 \alpha = 0 = \delta_Q(\alpha^{1,0})$ et $d_3 \alpha = 0 = (d_Q(\alpha^{1,0}))^{1,1}$, et comme l'on a aussi : $(d_Q(\alpha^{1,0}))^{2,0} = (d_Q \alpha)^{2,0} = 0$, $\alpha^{1,0}$ est d_Q -harmonique (et de même $\alpha^{0,1}$). ■

Remarque. — D'après [3], il existe sur M un choix de forme de contact θ tel que la torsion de Webster soit nulle si, et seulement si, il existe sur M un champ de vecteurs transverse à Q qui conserve Q et sa structure complexe J .

On énonce maintenant le critère d'annulation du premier nombre de Betti b_1 annoncé dans l'introduction.

PROPOSITION. — *Si $((\text{Trace } R)_2 \alpha, \alpha)_m > (n+1) \cdot |((\text{Trace } R)_1 \alpha, \alpha)_m|$ pour tout $m \in M$ (de $\dim \geq 5$) et tout α , alors $b_1 = 0$.*

Démonstration. — Soit α une 1-forme d_Q -harmonique.

En reportant $d_2 \alpha = (d_Q \alpha)^{2,0} = 0$ dans l'équation (2), on obtient :

$$(5) \quad \|\delta_1 \alpha\|^2 = (n-1)/n \cdot \|\nabla_+ \alpha\|^2 + 1/n \cdot \|\nabla_- \alpha\|^2 + 1/n \cdot ((\text{Trace } R)_2 \alpha, \alpha)$$

Enfin, (3) s'écrit :

$$(6) \quad 1/n \cdot \|\delta_1 \alpha\|^2 + \|d_3 \alpha\|^2 = \|\nabla_- \alpha\|^2.$$

On déduit alors en éliminant $\|\nabla_- \alpha\|^2$ et $\|\delta_1 \alpha\|^2$ de (4), (5) et (6), que l'on a :

$$(7) \quad 0 = (n-1) \cdot \|\nabla_+ \alpha\|^2 + (n+2) \cdot \|d_3 \alpha\|^2 + (((\text{Trace } R)_2 + (n+1) \cdot (\text{Trace } R)_1) \alpha, \alpha).$$

Ici, $((\text{Trace } R)_2 \alpha, \alpha)_m$ est une forme hermitienne [2]. Par contre, $((\text{Trace } R)_1 \alpha, \alpha)_m$ n'est pas hermitien, et en fait change de signe lorsque $\alpha \mapsto i \cdot \alpha^{1,0} - i \cdot \alpha^{0,1}$; c'est pourquoi l'on prend sa valeur absolue dans l'énoncé de la proposition. ■

Remarque. — Si $(\text{Trace } R)_2 \geq 0$ et $(\text{Trace } R)_1 = 0$, alors il résulte de (4) et (5) que toute 1-forme d_Q -harmonique est parallèle, et comme ∇ est métrique, on a :

$$b_1 \leq \dim Q = 2n = \dim M - 1.$$

5. LE CAS DE D EN DIMENSION 3. — Nous avons ici $D : \Lambda^1 T^* M / I^1 \approx \Lambda^1 Q^* \rightarrow J^2$.

Si l'on a fait un choix de forme de contact θ , alors : $J^2 \approx \theta \wedge (\Lambda^1 Q^*)$, et on y a une métrique. On note alors D^* l'adjoint de D .

Le produit extérieur des formes passe au quotient en

$$\wedge : \Lambda^1 T^* M / I^1 \otimes J^2 \rightarrow \Lambda^3 T^* M,$$

et induit un opérateur

$$\star : J^2 \rightarrow \Lambda^1 T^* M / I^1 \quad \text{par } \alpha \wedge \star \beta = (\alpha, \beta)_m \cdot \theta \wedge d\theta.$$

L'opérateur $(d_Q \delta_Q + D^* D)$ ne peut pas être hypoelliptique maximal [4] car $d_Q \delta_Q$ est d'ordre 2 et $D^* D$ d'ordre 4; on choisit alors le laplacien $\Delta_Q = (d_Q \delta_Q)^2 + D^* D$ et on vérifie que :

— Δ_Q est hypoelliptique maximal, et alors la cohomologie se représente par des formes Δ_Q -harmoniques;

— la condition de jauge est inchangée car $d_Q \delta_Q \alpha = 0 \Leftrightarrow \delta_Q \alpha = 0$;

— on a toujours conservation des types par Δ_Q lorsque la torsion de Webster de V est nulle, et alors $H_{D,R}^1(M) \otimes \mathbb{C} = H^{1,0} + H^{0,1}$, en particulier b_1 est pair;

— on a : $\Delta_Q = (d_Q \delta_Q + \star D)^2$, avec $d_Q \delta_Q + \star D$ d'ordre 2, autoadjoint, et hypoelliptique maximal mais non positif, car l'on a, pour $\alpha \in \Lambda^1 T^* M / I^1$:

$$((d_Q \delta_Q + \star D) \alpha, \alpha) = -\|\nabla^{2,0 \text{ et } 0,2} \alpha\|^2 + 3 \cdot \|\nabla^{1,1} \alpha\|^2 + ((\text{courbure}) \alpha, \alpha).$$

On ne peut donc en déduire un critère d'annulation de $H_{D,R}^1(M)$.

Note remise le 12 janvier 1990, acceptée le 15 janvier 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] P. H. BÉRARD, Spectral geometry: direct and inverse problems, *Lecture Notes in Math.*, n° 1207, Springer Verlag, 1986.

[2] S. M. WEBSTER, Pseudo-hermitian structures on a real hypersurface, *J. of Diff. Geometry*, 13, 1978, p. 25-41.

[3] J. M. LEE, Pseudo-Einstein structures on C.R. manifolds, *Amer. J. of Math.*, 110, 1988, p. 157-178.

[4] B. HELFFER et J. NOURRIGAT, *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs*, Birkhäuser 1985, Progress in Math., 58.