Université de Lille
Licence de Mathématiques 2ème année

Année 2019-2020

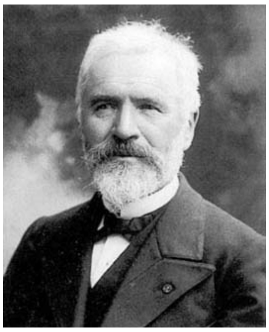
M31 – Algèbre linéaire

rédigé par Anne Moreau

anne.moreau@univ-lille.fr
http://math.univ-lille1.fr/~amoreau/

L'algèbre linéaire est la branche des mathématiques qui s'intéresse aux espaces vectoriels et aux transformations linéaires, formalisation générale de la théorie des systèmes d'équations linéaires. Ce n'est qu'au XIXe siècle que l'algèbre linéaire devient une branche des mathématiques à part entière. Carl Friedrich Gauss trouve une méthode générique pour la résolution des systèmes d'équations linéaires et Camille Jordan résout le problème de la réduction d'endomorphisme.

***Johann Carl Friedrich Gauss**, né le 30 avril 1777 à Brunswick et mort le 23 février 1855 à Göttingen, est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Doté d'un grand génie, il a apporté de très importantes contributions à ces trois sciences. Surnommé «le prince des mathématiciens», il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.*



***Marie Ennemond Camille Jordan**, né le 5 janvier 1838 à Lyon et mort le 22 janvier 1922 à Paris, est un mathématicien français, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent* Cours d'analyse.

Table des matières

1

Groupes

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la notion de *groupe*. Nous étudierons tout particulièrement le *groupe symétrique* (ou *groupe des permuations*) qui nous sera utile pour la définition du déterminant au chapitre 2.

1. Généralités sur les groupes

Définition 1 – Groupe

- On dit qu'un ensemble G muni d'une *loi de composition interne* $*$, c'est-à-dire une application
$$*\colon G \times G \to G,$$
est un ***groupe*** si :
  (i) la loi $*$ est *associative*, c'est-à-dire :
$$\forall\,(g,h,k) \in G^3, \quad g*(h*k) = (g*h)*k,$$
  (ii) G admet un *élément neutre* pour la loi $*$, c'est-à-dire :
$$\exists\, e \in G \ \mid\ \forall\, g \in G, \quad g*e = e*g = g,$$
  (iii) tout élément de G admet un *symétrique* pour la loi $*$, c'est-à-dire :
$$\forall\, g \in G,\ \exists\, h \in G \ \mid\ g*h = h*g = e.$$
- Si de plus $*$ est *commutative*, c'est-à-dire :
$$\forall\, g,h \in G, \quad g*h = h*g,$$
on dit que G est un ***groupe abélien*** (ou ***groupe commutatif***).
- Si $(G,*)$ est un groupe fini, on appelle ***ordre de*** G le cardinal de G.

Exercice de cours 1. *Donner des exemples variés de groupes.*

Exercice de cours 2 (unicité de l'élément neutre et du symétrique d'un élément). *Soit $(G,*)$ un groupe.*

1. *Montrer que G admet un unique élément neutre. On le note en général e, 1 ou 1_G (on le note parfois 0 si le groupe est abélien et si la loi est notée $+$).*
2. *Montrer que tout élément de G admet un unique symétrique. On note en général g^{-1} le symétrique d'un élément g de G (on le note parfois $-g$ si le groupe est abélien et si la loi est notée $+$).*

⚠ Pour montrer qu'un ensemble E est un groupe pour un loi $*$, il faut d'abord vérifier que la loi $*$ est interne dans E.

Exercice de cours 3 (le groupe linéaire d'ordre n). *Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ muni de la multiplication $\times$ des matrices est un groupe.*
2. *Quel est son élément neutre ? Quel est le symétrique d'une matrice inversible $A \in GL_n(\mathbb{K})$? Pour quelle(s) valeur(s) de n le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ est-il abélien ?*

Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ est appelé le **groupe linéaire d'ordre** n *(d'où la notation GL...).*

De la même façon, on montre que l'ensemble $GL(E)$ des automorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni de la composition $\circ$ des endomorphismes est un groupe, appelé le ***groupe linéaire de*** E.

2. Sous-groupes

On s'intéresse aux sous-ensembles d'un groupe donné qui sont encore des groupes pour la loi induite.

Définition 2 – sous-groupe

Soient $(G, *)$ un groupe et H un sous-ensemble de G. On dit que H est un ***sous-groupe*** de G si :

(i) $\forall (x, y) \in H^2$, $x * y \in H$,

(ii) $e \in H$, où e est l'élément neutre de G,

(iii) $\forall x \in H$, $x^{-1} \in H$, où x^{-1} désigne le symétrique de x dans G.

Exemple 1.

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $n\mathbb{Z} = \{na\,;\, a \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe du groupe abélien $(\mathbb{Z}, +)$.*
2. *L'ensemble $\mathbb{U}$ des complexes de modules 1 est un sous-groupe du groupe abélien $(\mathbb{C}^*, \times)$.*

Exercice de cours 4. *Vérifier ces assertions.*

Proposition 3 – caractérisation des sous-groupes

Soient $(G, *)$ un groupe et H un sous-ensemble de G. Pour que H soit un sous-groupe de G il faut et il suffit que l'on ait :

(i) H est stable pour $*$,

(ii) H est un groupe pour la loi induite par la loi de G.

On remarquera l'analogie avec la notion de *sous-espace vectoriel* relative à la notion d'*espace vectoriel*.

Exercice de cours 5. *Démontrer cette proposition.*

Exercice de cours 6. *Soient $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans G définie par :*

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)\,.$$

1. *Montrer que $(G, *)$ est un groupe non commutatif.*
2. *Montrer que $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un sous-groupe de G.*

Nous allons rencontrer d'autres sous-groupes intéressants dans la suite du cours : le *groupe alterné* $\mathfrak{A}_n$, sous-groupe du *groupe symétrique* $\mathfrak{S}_n$ (voir la section 4 de ce chapitre), le *groupe spécial linéaire* $SL_n(\mathbb{K})$, sous groupe du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$ (voir l'exercice 2 de la fiche d'exercices n°1), etc.

3. Morphismes de groupes

On s'intéresse maintenant aux applications entre deux groupes qui «préservent» la structure de groupe.

Définition 4 – morphisme de groupes

Soient $(G, *)$ et $(G', \top)$ deux groupes, et $f\colon G \to G'$ une application.

- On dit que f est un ***morphisme de groupes*** si :
$$\forall\,(g, h) \in G^2, \quad f(g * h) = f(g) \top f(h).$$
- Si de plus f est bijective, on dit que f est un ***isomorphisme de groupes***.
- Si $G = G'$ et $* = \top$ et si f est un morphisme de groupes, on dit que f est un ***endomorphisme de groupes***.
- Si $G = G'$, $* = \top$ et si f est un isomorphisme de groupes, on dit que f est un ***automorphisme de groupes***.

On remarquera l'analogie avec les *applications linéaires* entre espaces vectoriels.

Proposition 5 – propriétés des morphismes de groupes

Soient $(G, *)$ et $(G', \top)$ deux groupes, et $f\colon G \to G'$ un morphisme de groupes. Alors :

1. $f(e) = e'$, si e est le neutre de G et e' celui de G',

2. $\forall\, x \in G$, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, si x^{-1} désigne le symétrique de x dans G, et $f(x)^{-1}$ celui de $f(x)$ dans G'.

En pratique, on vérifiera qu'un morphisme de groupes «envoie le neutre sur le neutre» (propriétés **1** de la proposition) : cela permet de vérifier la cohérence du résultat.

Exercice de cours 7. *Démontrer cette proposition.*

Définition 6 – noyau et image d'un morphisme de groupes

Soient $(G, *)$ et $(G', \top)$ deux groupes, et $f\colon G \to G'$ un morphisme de groupes.

- On appelle ***noyau de*** f, et on note $\operatorname{Ker} f$, l'ensemble :
$$\operatorname{Ker} f = \{x \in G \mid f(x) = e'\} = f^{-1}(\{e'\}),$$
où e' est l'élément neutre de G'.
- On appelle ***image de*** f, et on note $\operatorname{Im} f$, l'ensemble :
$$\operatorname{Im} f = \{y \in G' \,;\, \exists\, x \in G \mid y = f(x)\} = f(G).$$

Proposition 7 – le noyau et l'image d'un morphisme de groupes sont des sous-groupes

Si $f\colon (G, *) \to (G', \top)$ est un morphisme de groupes, alors $\operatorname{Ker} f$ est sous-groupe de G et $\operatorname{Im} f$ est un sous-groupe de $\operatorname{Im} f$.

Là encore, on remarquera l'analogie avec les propriétés du noyau et de l'image d'une application linéaire entre espaces vectoriels.

Exercice de cours 8. *Démontrer cette proposition.*

Exercice de cours 9. *Vérifier que l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ qui à un complexe $z \in \mathbb{C}^*$ associe son module $|z| \in \mathbb{R}_+^*$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans le groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$. Quel est son noyau ? Retrouver ainsi que l'ensemble $\mathbb{U}$ des complexes de module 1 est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.*

4. Le groupe symétrique

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Une ***permutation*** de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ est une bijection de cet ensemble. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$.

Exercice de cours 10. *Montrer :* $\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_n) = n!$.

Proposition-Définition 8 – L'ensemble des permutations est un groupe

L'ensemble $\mathfrak{S}_n$ muni de la loi de composition $\circ$ est un groupe, appelé le ***groupe symétrique d'ordre*** n (ou ***groupes des permutations de*** $\{1, \ldots, n\}$).

Exercice de cours 11. *Démontrer cette proposition.*

Une permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ sera notée : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(1) & \cdots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Définition 9 – transposition

Pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ tel que $i < j$, on appelle ***transposition associée à*** (i, j), et on note $\tau_{i,j}$ ou simplement (i, j), la permutation de $\{1, \ldots, n\}$ qui échange i et j, c'est-à-dire :

$$\tau_{i,j}(i) = j, \quad \tau_{i,j}(j) = i, \quad \tau_{i,j}(k) = k \text{ pour tout } k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}.$$

L'ensemble $\{i, j\}$ est appelé le ***support*** de la transposition $\tau_{i,j}$.

Exemple 2. *Pour $n = 5$, on a* $\tau_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note σ^k la composée $\underbrace{\sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{k \text{ fois}}$, avec la convention $\sigma^0 = \mathrm{Id}_{\{1,\ldots,n\}}$.

Exercice de cours 12.

1. *Combien y a-t-il de transpostions dans $\mathfrak{S}_n$?*
2. *Soit $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ tel que $i < j$. Que vaut $\tau_{i,j}^2$? En déduire le symétrique (ou inverse) de $\tau_{i,j}$ dans $\mathfrak{S}_n$.*
3. *Pour quelles valeurs de n le groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est-il commutatif ?*
(Indication : pour $n \geqslant 3$, comparer $\tau_{1,2} \circ \tau_{2,3}$ et $\tau_{2,3} \circ \tau_{1,2}$.)

Théorème 10 – les transpositions engendrent le groupe $\mathfrak{S}_n$

Les transpositions de $\{1, \ldots, n\}$ engendrent le groupe $\mathfrak{S}_n$. Autrement dit, toute permutation de $\{1, \ldots, n\}$ s'écrit comme la composée (d'au moins une façon) de transpositions.

Exercice de cours 13. *Démontrer ce théorème par récurrence sur n.*
(Indication : pour le passage «$n \to n+1$», on distinguera le cas où $\sigma(n+1) = n+1$ du cas $\sigma(n+1) \neq n+1$ pour une permutation donnée σ de $\{1, \ldots, n+1\}$ que l'on cherche à décomposer en un *produit*, i.e, la composée, de transpositions.)

La démonstration précédente (exercice 13) fournit un algorithme permettant de décomposer une permutation quelconque en un produit de transpositions : on remet les éléments de $1, \dots, n$ dans l'ordre en mettant à sa place à chaque étape l'un d'entre eux.

Exemple 3. *Soit*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 7 & 4 & 8 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

On écrit (en encadrant à chaque étape les éléments à échanger) :

$$\begin{array}{cccccccc l}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\
 & & & & & & & & \big\downarrow \sigma \\
6 & 3 & 7 & 4 & \boxed{8} & 1 & 5 & \boxed{2} & \\
 & & & & & & & & \big\downarrow \tau_{2,8} \\
6 & 3 & \boxed{7} & 4 & 2 & 1 & \boxed{5} & 8 & \\
 & & & & & & & & \big\downarrow \tau_{5,7} \\
\boxed{6} & 3 & 5 & 4 & 2 & \boxed{1} & 7 & 8 & \\
 & & & & & & & & \big\downarrow \tau_{1,6} \\
1 & 3 & \boxed{5} & 4 & \boxed{2} & 6 & 7 & 8 & \\
 & & & & & & & & \big\downarrow \tau_{2,5} \\
1 & \boxed{3} & \boxed{2} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\
 & & & & & & & & \big\downarrow \tau_{2,3} \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 &
\end{array}$$

On a donc : $\tau_{2,3} \circ \tau_{2,5} \circ \tau_{1,6} \circ \tau_{5,7} \circ \tau_{2,8} \circ \sigma = \mathrm{Id}_{\{1,\dots,8\}}$, *d'où*

$$\sigma = \tau_{2,8}^{-1} \circ \tau_{5,7}^{-1} \circ \tau_{1,6}^{-1} \circ \tau_{2,5}^{-1} \circ \tau_{2,3}^{-1} \circ \mathrm{Id}_{\{1,\dots,8\}} = \tau_{2,8} \circ \tau_{5,7} \circ \tau_{1,6} \circ \tau_{2,5} \circ \tau_{2,3},$$

puisque $\tau_{i,j}^{-1} = \tau_{i,j}$ *pour tout* $(i,j) \in \{1, \dots, 8\}^2$.

⚠ L'ordre est important dans la décomposition ! En effet, deux transpositions ne commutent pas en général (voir l'exercice 12).

Définition 11 – inversion et signature d'une permutation

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- On dit qu'un couple $(\sigma(i), \sigma(j))$ est une ***inversion de*** σ si $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(i)$.
- On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ, et on appelle ***signature de*** σ, le nombre, noté $\varepsilon(\sigma)$, défini par :
$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}.$$
- On dit que σ est ***paire*** (resp. ***impaire***) si $\varepsilon(\sigma) = 1$ (resp. $\varepsilon(\sigma) = -1$).

Exercice de cours 14. *Soit* σ *comme dans l'exemple 3. Calculer le nombre d'inversions de* σ*. La permutation* σ *est-elle paire ou impaire ?*

Avec cette définition, la signature n'est pas toujours très aisée à calculer en pratique. La proposition suivante permettra d'obtenir des propriétés remarquables de la signature, et nous verrons d'autres façons de la calculer.

Proposition 12 – une autre expression de la signature

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a :
$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

Exercice de cours 15. *Démontrer cette proposition.*

Théorème 13 – La signature est un morphisme de groupes

L'application signature $\varepsilon \colon \mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ sur le groupe $\{-1, 1\}$.

Exercice de cours 16. *Démontrer ce théorème.*

Définition 14 – groupe alterné

Le noyau de ε est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ (voir la proposition 7) donc un groupe, appelé le ***groupe alterné d'ordre*** n, et noté $\mathfrak{A}_n$.

Exercice de cours 17. *Décrire les groupes $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{A}_3$. Écrire la table de composition de $\mathfrak{S}_3$.*

Proposition 15 – toute transposition est impaire

Toute transposition de $\{1, \dots, n\}$ est impaire.

Exercice de cours 18. *Démontrer cette proposition.*

Grâce aux théorèmes 10 et 13, on en déduit une méthode pratique pour calculer la signature :

Corollaire 16

Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_N$ des transpositions de $\mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma = t_1 \circ \cdots \circ t_N$. Alors
$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^N.$$

Exemple 4. *Avec σ comme dans l'exemple 3, on obtient que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^5 = -1$.*

⚠ Bien que la décomposition d'une permutation en un produit de transpositions ne soit pas unique, l'expression de la signature donnée par le corollaire précédente n'en dépend pas !

Définition 17 – cycle

Soit $p \in \{2, \dots, n\}$.

- On appelle p-***cycle*** de $\{1, \dots, n\}$ toute permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ telle qu'il existe $x_1, \dots, x_p \in \{1, \dots, n\}$, deux à deux distincts, vérifiant :

$$\begin{cases} \sigma(x_1) = x_2, \quad \sigma(x_2) = x_3, \quad \dots, \quad \sigma(x_{p-1}) = x_p, \quad \sigma(x_p) = x_1, \\ \forall\, k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{x_1, \dots, x_p\}, \quad \sigma(k) = k. \end{cases}$$

- L'ensemble $\{x_1, \dots, x_p\}$ est appelé le ***support de*** σ, et on note $\sigma = (x_1, \dots, x_p)$.
- Une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ est appelée un ***cycle*** s'il existe $p \in \{2, \dots, n\}$ tel que σ soit un p-cycle.

Par exemple, toute transposition est un 2-cycle. La notation (i, j) pour la transposition $\tau_{i,j}$ est donc en cohérence avec la définition ci-dessus.

Exemple 5. *La permutation* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ *est le* 3*-cylce* $(2, 5, 3)$.

⚠ L'ordre des éléments $x_1, \dots, x_p$ dans la définition ci-dessus est important.

Par exemple, $(2, 5, 3) \neq (2, 3, 5)$. En revanche, $(2, 5, 3) = (5, 3, 2)$. Plus généralement, on a :

$$(x_1, \dots, x_p) = (x_2, \dots, x_p, x_1) = \dots = (x_p, x_1, \dots, x_{p-1}).$$

Nous admettons le théorème suivant dont la démonstration est un peu délicate. Toutefois, son énoncé est très intuitif comme nous allons le voir sur un exemple. Le point clé est d'observer que deux cycles à supports disjoints commutent.

Théorème 18 – toute permutation est décomposable en un produit de cycles à supports disjoints

Toute permutation de $\{1, \dots, n\}$ est décomposable en un produit de cycles à supports deux à deux disjoints, de façon unique à ordre près des cycles.

Exemple 6. *On a* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 9 & 1 & 5 & 8 & 2 & 7 & 10 & 3 \end{pmatrix} = (1, 4) \circ (2, 6, 8, 7) \circ (3, 9, 10)$.
Schématiquement :

$$1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 1$$

$$2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longrightarrow 7 \longrightarrow 2$$

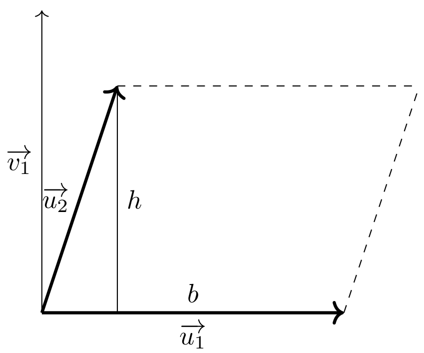
$$3 \longrightarrow 9 \longrightarrow 10 \longrightarrow 3$$

2
Déterminants

1. Introduction

Le *déterminant* d'une matrice carrée peut être vu comme une généralisation (ou une formalisation) des notions d'aire et de volume, qui tient compte de l'*orientation*. Nous tentons ici de motiver sa définition dans le cas des matrices carrées d'ordre 2.

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormée, où $\overrightarrow{i} = (1,0)$ et $\overrightarrow{j} = (0,1)$, que l'on convient d'appeler *directe*. Les termes *orthonormée* et *directe* seront définis de manière rigoureuse au deuxième semestre. Ici, *orthonormée* est à comprendre au sens de la géométrie du lycée. Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (x_1, y_1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ écrit dans la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On appelle *parallélogramme engendré* par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ l'ensemble $\{\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2}\ ;\ (\alpha_1, \alpha_2) \in [0,1]^2\}$.



Calculons l'aire $\mathscr{A}$ de ce parallélogramme. On sait qu'elle est égale à la longueur b d'un côté (par exemple $\|\overrightarrow{u_1}\|$), multipliée par la hauteur h correspondante : $\mathscr{A} = b \times h$. Pour obtenir $\mathscr{A}$ en fonction des coordonnées de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$, il suffit d'introduire le vecteur $\overrightarrow{v_1} = (-y_1, x_1)$. Ce vecteur est en effet orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$ et de même norme, de sorte que

$$|\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{u_2}| = h \times \|\overrightarrow{u_1}\| = h \times b = \mathscr{A},$$

où $\cdot$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$. On a donc

$$\mathscr{A} = |x_1 y_2 - y_1 x_2|.$$

Comme nous le verrons au cours de ce chapitre, pour $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4$, le ***déterminant*** de la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, noté $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$, est défini par :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

En particulier, $|\det(A)|$ représente l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ de A. Le déterminant possède de plus un signe : il est strictement positif si les vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ forment aussi une base *directe*, strictement négatif s'ils forment une base *indirecte*, et nul si ces vecteurs sont liés. Nous donnerons une définition rigoureuse de l'*orientation* (le choix d'une base directe de référence) à la fin de ce chapitre.

On peut de même introduire le déterminant d'une matrice carrée réelle d'ordre 3 de sorte que sa valeur absolue soit le volume du *parallélépipède* engendré par les vecteurs colonnes d'une telle matrice.

Dans ce chapitre, nous allons définir le déterminant d'une matrice carré d'ordre quelconque. Il sera bon de garder à l'esprit cet exemple introductif pour mieux comprendre les propriétés du déterminant et la façon dont il est construit.

Dans tout le chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Formes multilinéaires alternées

Définition 19 – forme multilinéaire

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle ***forme*** p***-linéaire*** (ou ***multilinéaire***) sur E toute application

$$\varphi\colon \underbrace{E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}} \to \mathbb{K}$$

linéaire par rapport à chacune des variables, c'est-à-dire :

$\forall\, i \in \{1, \dots, p\},\ \forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p,\ \forall y_i \in E,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},$

$\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i + y_i, x_{i+1}, \dots, x_p) = \lambda\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_p) + \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_p).$

Exemple 7.

1. *Pour* $p = 1$*, la notion de forme* p*-linéaire sur* E *coïncide avec la notion de* **forme linéaire** *sur* E*, c'est-à-dire une application linéaire de* E *dans* $\mathbb{K}$*.*
   Par exemple, l'application trace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *dans* $\mathbb{K}$ *qui à une matrice* $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *associe sa trace,*
   $$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i},$$
   est une forme linéaire.
2. *Le produit scalaire canonique sur* $\mathbb{R}^2$*,*
   $$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & x_1x_2 + y_1y_2, \end{array}$$
   est une forme 2*-linéaire (on dit plutôt* **bilinéaire***) sur* $\mathbb{R}^2$*.*
3. *L'application*
   $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & x_1y_2 - y_1x_2 \end{array}$$
   est une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$*.*

On note $\mathscr{L}_p(E; \mathbb{K})$ l'ensemble des formes p-linéaires sur E.

Exercice de cours 19. *Vérifier que l'ensemble* $\mathscr{L}_p(E; \mathbb{K})$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

Définition 20 – forme alternée

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une forme p-linéaire $\varphi\colon E^p \to \mathbb{K}$ est dite ***alternée*** si pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$ tel que $i \neq j$, et pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ tel que $x_i = x_j$, on a :

$$\varphi(x_1, \dots, x_p) = 0.$$

Autrement dit, φ est alternée si $\varphi(x_1, \dots, x_p)$ est nul pour tout p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ comportant au moins une répétition.

On note $\Lambda_p(E; \mathbb{K})$ l'ensemble des formes p-linéaires alternées sur E.

Exercice de cours 20. *Vérifier que l'ensemble $\Lambda_p(E;\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Proposition 21 – les formes multilinéaires alternées sont *symétriques*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une forme p-linéaire $\varphi\colon E^p \to \mathbb{K}$ est alternée si et seulement si

$$\forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_p,\ \forall\,(x_1,\dots,x_p) \in E^p, \quad \varphi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1,\dots,x_p).$$

Remarque 1. *Une forme p-linéaire sur E vérifiant la relation ci-dessus est dite* **symétrique**.

Exercice de cours 21. *Démontrer cette proposition en utilisant le fait que les transpositions de $\{1,\dots,p\}$ engendrent $\mathfrak{S}_p$ (voir le théorème 10).*

Corollaire 22 – Une forme multilinéaire alternée s'annule sur les familles liées

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

(i) Si $\varphi\colon E^p \to \mathbb{K}$ est une forme p-linéaire alternée et si $(x_1,\dots,x_p) \in E^p$ est une famille liée, alors $\varphi(x_1,\dots,x_p) = 0$.

(ii) Si $p > \dim E$, alors la seule forme p-linéaire alternée sur E est l'application nulle.

Exercice de cours 22. *Démontrer cette proposition.*

3. Définition du déterminant

On s'intéresse désormais à l'espace $\Lambda_n(E;\mathbb{K})$, c'est-à-dire au cas des formes n-linéaires alternées, où n est la dimension de l'espace vectoriel E.

Exercice de cours 23. L'objectif de cet exercice est de démontrer que l'espace $\Lambda_n(E;\mathbb{K})$ est de dimension 1, et d'en déterminer une base.

On fixe une base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de E.

1. *Soit $\mathscr{F} = (v_1,\dots,v_n) \in E^n$. On note $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$. Autrement dit, pour chaque $j \in \{1,\dots,n\}$,*

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

Soit $\varphi\colon E^p \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée sur E.

1.1 *Montrer, en utilisant le caractère n-linéaire de φ :*

$$\varphi(\mathscr{F}) = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\{1,\dots,n\}^2} a_{i_1,1}\dots a_{i_n,n}\varphi(e_{i_1},\dots,e_{i_n}).$$

1.2 *En déduire, en utilisant cette fois le caractère alterné de φ :*

$$\varphi(\mathscr{F}) = \left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}\right)\varphi(e_1,\dots,e_n).$$

2. *Réciproquement, soit $\psi\colon E^p \to \mathbb{K}$ l'application définie par :*

$$\forall\, \mathscr{F} = (v_1,\dots,v_n) \in E^n, \quad \psi(\mathscr{F}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n},$$

où les $a_{i,j}$ sont définis comme précédemment, c'est-à-dire $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$. Montrer :

$$\psi \in \Lambda_n(E;\mathbb{K}) \quad \textit{et} \quad \psi \neq 0.$$

(On pourra observer que $\psi(\mathscr{B}) = 1$.)

3. *En déduire que $\Lambda_n(E;\mathbb{K})$ est de dimension un, et préciser une base.*

L'exercice précédent démontre le théorème suivant :

Théorème-Définition 23 – définition du determinant

- L'ensemble $\Lambda_n(E;\mathbb{K})$ des formes n-linéaires alternées sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension un.
- Pour toute base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, on note $\det_{\mathscr{B}} \colon E^n \to \mathbb{K}$ l'application définie par :
$$\forall\, \mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n) \in E^n, \quad \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(1),n},$$
où $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ est la matrice de la famille $\mathscr{F}$ écrite dans la base $\mathscr{B}$.
L'élément $\det_{\mathscr{B}}$ est appelé le ***déterminant de*** $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n)$ ***dans la base*** $\mathscr{B}$.
- Pour toute base $\mathscr{B}$ de E, $(\det_{\mathscr{B}})$ est une base de $\Lambda_n(E;\mathbb{K})$.

⚠ Écrire $\det(\mathscr{F})$ n'a pas de sens : il faut préciser la base $\mathscr{B}$ dans laquelle on écrit les vecteurs de $\mathscr{F}$!

Remarque 2. *On a vu au cours de l'exercice 23 que* $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

Proposition 24 – propriétés du déterminant

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

(i) Pour tout $\mathscr{F} \in E^n$, $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{F}) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$. En particulier (avec $\mathscr{F} = \mathscr{B}'$),
$$\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \left(\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\right)^{-1}.$$

(ii) Soit $\mathscr{F} \in E^n$. Alors, $\mathscr{F}$ est liée si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = 0$.

Exercice de cours 24. *Démontrer cette proposition.*

4. Déterminant d'un endomorphisme

Nous avons défini le déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base $\mathscr{B}$ de E. Nous allons maintenant définir le déterminant d'un endomorphisme de E indépendamment d'une base de E. On souhaiterait définir le déterminant d'un endomorphisme f de E comme étant le déterminant de la famille $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ où $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est n'importe quelle base de E.
Problème : la quantité $\det_{\mathscr{B}}(f(B))$, pour $\mathscr{B}$ une base E, dépend à priori de $\mathscr{B}$. Nous allons montrer que ce n'est pas le cas.

Exercice de cours 25 (déterminant d'un endomorphisme). *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Le but de cet exercice est de définir le déterminant de f à l'aide des propriétés de l'espace $\Lambda_n(E;\mathbb{K})$.*

1. *Soit $\varphi \in \Lambda_n(E;\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ une forme n-linéaire alternée non nulle.*

1.1 *Vérifier que l'application*
$$\Phi_{\varphi,f} \colon \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n) & \longmapsto & \varphi(f(v_1), \dots, f(v_n)) \end{array}$$
est une forme n-linéaire alternée.

1.2 *En déduire qu'il existe $\alpha = \alpha_f \in \mathbb{K}$ tel que*
$$\Phi_{\varphi,f} = \alpha\varphi.$$

2. *Montrer que α ne dépend pas de $\varphi \in \Lambda_n(E;\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, autrement dit que si $\psi \in \Lambda_n(E;\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ alors*
$$\Phi_{\psi,f} = \alpha\psi.$$
Cet élément α est appelé le **déterminant** *de f, et on le note* $\det(f)$.

3. *Démontrer que pour tout* $\mathscr{F} = (v_1, \ldots, v_n) \in E^n$ *et toute base* $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *de* E*, on a :*

$$\det_{\mathscr{B}}(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = \det(f) \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n).$$

En particulier, montrer :

$$\det(f) = \det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B})) = \det_{\mathscr{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

On résume dans la proposition-définition suivante les résultats obtenus au cours de l'exercice précédent.

Proposition-Définition 25 – déterminant d'un endomorphisme

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$.

- Il existe un unique élément $\alpha \in K$ tel que pour tout $\varphi \in \Lambda_n(E;\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et tout $\mathscr{F} = (v_1, \ldots, v_n) \in E^n$,
$$\varphi(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = \alpha\varphi(v_1, \ldots, v_n).$$
Cet élément α est appelé le ***déterminant*** de f, et on le note $\det(f)$.
- Pour tout $\mathscr{F} = (v_1, \ldots, v_n) \in E^n$ et toute base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, on a :
$$\det_{\mathscr{B}}(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = \det(f) \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n).$$
En particulier (avec $\mathscr{F} = \mathscr{B}$),
$$\det(f) = \det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B})) = \det_{\mathscr{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

Proposition 26 – propriétés du déterminant d'un endomorphisme

Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. On a :

(i) $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$,

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\det(\alpha f) = \alpha^n \det(f)$,

(iii) $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$,

(iv) $\boxed{f \in GL(E) \iff \det(f) \neq 0}$, où $GL(E)$ est le groupe des automorphismes de E,

(v) si $f \in GL(E)$, alors $\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$.

Exercice de cours 26. *Démontrer ces propriétés.*

5. Déterminant d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 27 – déterminant d'une matrice carrée

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle ***déterminant de*** A, et on note $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$, l'élément de $\mathbb{K}$ défini par :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n}.$$

Autrement dit, en notant $C_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \ldots, C_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix}$ les colonnes de A,

$$\det(A) = \det_{\mathscr{B}}(C_1, \ldots, C_n),$$

où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

On dit que $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ est un ***déterminant d'ordre*** n.

EXEMPLE 8. ***1.*** *Pour tout* $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$, *on a* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ *puisque* $\mathfrak{S}_2 = \{\mathrm{Id}_{\{1,2\}}, \tau_{1,2}\}$.

On retrouve ainsi la formule pour un déterminant d'ordre 2 vu en introduction.

2. *Si* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & a_{n,n} \end{pmatrix}$ *est une matrice triangulaire supérieure, alors*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

EXERCICE DE COURS 27. *Vérifier les assertions des exemples précédents.*

On admet le résultat suivant qui généralise l'exemple 8 (2), et on utilisera librement son énoncé.

Proposition 28 – déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Soient $k_1, \ldots, k_p \in \mathbb{N}^*$ tels que $k_1 + \ldots + k_p = n$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice *triangulaire par blocs* de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix},$$

où les matrices carrées $A_1, \ldots, A_p$ sont d'ordre $k_1, \ldots, k_p$ respectivement. Alors

$$\det(A) = \det(A_1) \times \cdots \times \det(A_p).$$

EXEMPLE 9. *Calculer :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -8 & 12 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Proposition 29 – propriétés du déterminant d'une matrice carrée

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) $\det(I_n) = 1$,

(ii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$, $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$,

(iii) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,

(iv) $\boxed{A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0}$,

(v) si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$,

(vi) $\det({}^tA) = \det(A)$.

REMARQUE 3. *Par récurrence, à l'aide de la propriété (iii), on montre aisément que pour tout* $k \in \mathbb{N}$,

$$\det(A^k) = \det(A)^k.$$

Nous allons démontrer la proposition précédente sur les propriétés du déterminant d'une matrice à l'aide des propriétés du déterminant d'un endomorphisme. Pour cela, nous allons étudier le lien entre les deux notions.

6. Lien entre déterminant d'une matrice et déterminant d'un endomorphisme

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Rappelons que la ***matrice de f dans la base $\mathscr{B}$***, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, est la matrice de la famille $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \ldots & f(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} = \left(\begin{array}{ccc} \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_1))} & \ldots & \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_n))} \end{array}\right).$$

D'après la définition de $\det(f)$, on a :

$$\boxed{\det(f) = \det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B})) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)).}$$

En particulier, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et si f est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors $\det A = \det f$.

Exercice de cours 28.

1. *Vérifier les propriétés (i)–(v) à l'aide des propriétés du determinant d'un endomorphisme et de la remarque précédente.*
2. *Démontrer la propriété (vi).*

Comme observé ci-dessus, si $f \in \mathscr{L}(E)$ et si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors :

$$\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)).$$

On sait par ailleurs que $\det(f)$ ne dépend pas du choix d'une base de E, autrement dit, $\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f))$ si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E. On peut réinterpréter ce résultat à l'aide de la formule de changement de base pour les endomorphismes.

Rappel (cours de mathématiques fondamentales de première année) : soient $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E, et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E. La relation entre $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ s'écrit de la façon suivante (***formule de changement de base pour un endomorphisme***) :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \, P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'},$$

où $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ (resp. $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$) est la ***matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$*** (resp. la ***matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$***), i.e.,

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \qquad (\text{resp. } P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})).$$

En posant $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, on retient :

$$\boxed{A' = P^{-1}AP.}$$

Compte tenu de la formule de changement de base ci-dessus et la propriété (iii) de la proposition 29, si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E, alors

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)) &= \det\left(P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right) \\ &= \det(P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}) \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)) \det(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait que $\det P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = (\det P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1}$, d'où

$$\det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)).$$

Nous n'avons pas défini le déterminant de f de cette façon car, pour démontrer la formule $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ pour $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, nous avons eu besoin de la notion de déterminant pour un endomorphisme et de ses propriétés.

7. Calcul du déterminant d'une matrice carrée

7.1. Développement par rapport à une rangée. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^n$, et $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A. Par n-linéarité du déterminant (linéarité par rapport à la $j$ème colonne), on a :

$$\det(A) = \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i, C_{j+1}, \ldots, C_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j},$$

où

$$A_{i,j} = \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \ldots, C_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

En utilisant maintenant le caractère alterné du déterminant, on obtient :

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Définition 30 – mineur et cofacteur

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Pour $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, on appelle ***mineur de la place*** (i,j) ***dans*** A le déterminant $\Delta_{i,j}$ d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant dans A la $i$ème ligne et la $j$ème colonne :

$$\Delta_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

2. Pour $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, on appelle ***cofacteur de la place*** (i,j) ***dans*** A, et on note $A_{i,j}$, le produit de $(-1)^{i+j}$ par le mineur de la place (i,j) dans A :

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}.$$

D'après l'étude précédente, on obtient :

Proposition 31 – développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

1. $\forall\, j \in \{1, \ldots, n\},\ \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ (développement de $\det(A)$ par rapport à la $j$ème colonne) ;
2. $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\},\ \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ (développement de $\det(A)$ par rapport à la $i$ème ligne).

Exercice de cours 29. *Calculer le déterminant suivant en développant par rapport à une ligne ou une colonne :*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Remarque 4.

1. *Il est souvent utile de développer un déterminant par rapport une ligne ou une colonne qui comporte peu de termes non nuls.*
2. *Pour le calcul numérique des déterminants, il existe des méthodes nettement plus rapides que celle consistant à développer par rapport à une ligne ou une colonne. En général, l'utilisation des opérations élémentaires est la méthode la plus efficace (voir le paragraphe 7.3). Pour n petit (par exemple $n = 3$), développer par rapport à une ligne ou une colonne peut s'avérer toutefois commode lorsqu'il y a beaucoup de zéros.*
   Pour $n = 2$, le mieux est d'apprendre par cœur la formule donnée dans l'exemple 8 !

7.2. Comatrice.

Définition 32 – comatrice

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle ***comatrice de*** A la matrice carrée d'ordre n, notée $\mathrm{com}(A)$, définie par :

$$\mathrm{com}(A) = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n},$$

où $A_{i,j}$ est le cofacteur de la place (i, j) de A.

On admet le théorème suivant (pas difficile mais un peu technique à démontrer) :

Théorème 33 – relation entre la comatrice et le déterminant

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$A\, {}^t\mathrm{com}(A) = {}^t\mathrm{com}(A) A = \det(A)\, I_n.$$

Corollaire 34 – expression de l'inverse d'une matrice à l'aide de sa comatrice

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^t\mathrm{com}(A).$$

Exercice de cours 30. *Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. Si $ad - bc \neq 0$, vérifier que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible et que*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Remarque 5. *La formule précédente, donnant A^{-1} à l'aide de $\mathrm{com}(A)$, est en pratique quasiment inutilisable dès que $n \geqslant 3$. En effet, l'application de cette formule nécessite a priori le calcul d'un déterminant d'ordre n ($\det A$) et de n^2 déterminants d'ordre $n-1$ (les cofacteurs de A). La formule présente en revanche un intérêt théorique : on dispose d'une formule générale pour l'inverse d'une matrice inversible.*

7.3. Opérations élémentaires.

Rappels : effectuer une opération élémentaire sur une matrice correspond à la multiplication (à droite ou à gauche) par certaines matrices inversibles. Explicitons ici ces matrices.

Soient $\lambda, \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, avec $i \neq j$, et introduisons les matrices suivantes :

$$P_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & & i\text{-ème col.} & & & j\text{-ème col.} & & & \\ & & & \downarrow & & & \downarrow & & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & \cdots & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \vdots & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i} \,,$$

$$D_i(\alpha) = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & & i\text{-ème col.} & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = I_n + (\alpha - 1)E_{i,i},$$

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & i\text{-ème col.} & & j\text{-ème col.} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & \cdots & \lambda & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = I_n + \lambda E_{i,j} \,.$$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A et $L_1, \dots, L_n$ ses lignes.

- Effectuer l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$ (resp. $C_i \leftrightarrow C_j$) revient à multiplier à gauche (resp. à droite) par la matrice $P_{i,j}$;
- Effectuer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \alpha L_i$ (resp. $C_i \leftarrow \alpha C_i$) revient à multiplier à gauche (resp. à droite) par la matrice $D_i(\alpha)$;
- Effectuer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (resp. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$) revient à multiplier à gauche (resp. à droite) par la matrice $T_{i,j}(\lambda)$.

Exercice de cours 31.

1. *Vérifier ces assertions.*

2. *Vérifier que les matrices d'opérations élémentaires sont inversibles, déterminer leurs inverses et établir :*

$$\det(P_{i,j}) = -1; \qquad \det(D_i(\alpha)) = \alpha; \qquad \det(T_{i,j}(\lambda)) = 1.$$

De ces observations, on déduit un calcul pratique du déterminant : à partir d'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on effectue à l'aide de la méthode du pivot de Gauss des opérations élémentaires jusqu'à obtenir une matrice triangulaire (supérieure par exemple). On calcule facilement le déterminant de cette dernière : c'est le produit de ses coefficients diagonaux (voir l'exemple 8). D'autre part, on connaît le déterminant de chacune des matrices correspondant aux opérations élémentaires. De plus, comme le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants, on obtient le déterminant de A...

***Johann Carl Friedrich Gauss**, né le 30 avril 1777 à Brunswick et mort le 23 février 1855 à Göttingen, est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Doté d'un grand génie, il a apporté de très importantes contributions à ces trois sciences. Surnommé «le prince des mathématiciens», il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.*

⚠ Effectuer les opérations élémentaires «$L_i \leftrightarrow L_j$» ou «$L_i \leftarrow \lambda L_j$» change le déterminant (voir l'exercice précédent). En pratique, on évite ces opérations, sources d'erreurs, et on privilégie les opérations élémentaires du type «$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$» qui ne change pas le déterminant.

Exercice de cours 32. *Calculer le déterminant de la matrice de l'exercice 29 à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes.*

8. Application : orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie

On suppose dans cette section que $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$. Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de E. Comme $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \neq 0$ et comme $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou bien $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0$ ou bien $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') < 0$.

Définition 35 – bases de même sens, et bases de sens contraire

Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de E :
- on dit que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ ***sont de même sens*** si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0$;
- on dit que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ ***sont de sens contraire*** si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') < 0$.

Exercice de cours 33. *Notons $\mathcal{R}$ la relation définie sur l'ensemble des bases de E par :*

$$\forall \mathscr{B}, \mathscr{B}' \text{ bases de } E, \quad \mathscr{B} \mathcal{R} \mathscr{B}' \iff \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, et qu'il y a seulement deux classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$.

L'exercice précédent justifie la définition suivante.

Définition 36 – orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie

- On appelle ***orientation*** de E le choix, parmi l'ensemble des bases de E, de l'une des deux classes d'équivalence modulo la relation «est de même sens que». Les classes de cette base sont alors dites ***directes***, les autres bases (celles de l'autre classe) sont dites ***indirectes***.
- On dit alors que E est un $\mathbb{R}$***-espace vectoriel orienté***.

En général, dans $\mathbb{R}^n$, on convient que la base canonique est directe.

Retour sur le cas $n = 2$ de l'introduction : tout ce qui précède montre que le déterminant de deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ de l'espace $\mathbb{R}^2$, orienté par le choix de sa base canonique, contient plusieurs informations intéressantes :

— il détecte si la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est libre ;

— il donne l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ (celui-ci est nul si et seulement si la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est liée) ;

— si la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est libre (c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$), il indique par son signe si cette base et directe ou indirecte.

Par exemple, avec $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, on a $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -10$, où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On en déduit que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est libre (ce qui était évident !), que l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ vaut $|-10| = 10$ et que la base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est indirecte.

Ceci se généralise bien entendu aux dimensions supérieures...

3

Réduction des endomorphismes (1er niveau) : diagonalisation et polynômes d'endomorphismes

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Certaines notions (espaces stables, valeurs propres, vecteurs propres, par exemple) sont valables en dimension infinie mais nous n'aborderons pas cet aspect dans ce cours.

La *réduction des endomorphismes* d'un espace vectoriel a pour objectif de trouver, étant donné un endomorphisme de cet espace, des bases dans lesquelles la matrice de l'endomorphisme à une forme simple, par exemple diagonale, triangulaire, diagonale par blocs, etc. Cela permet entre autres de simplifier des calculs. La réduction d'un endomorphisme consiste essentiellement à trouver une décomposition de l'espace vectoriel ambiant en une somme directe de *sous-espaces stables* sur lesquels l'endomorphisme induit est plus simple.

Nous commençons donc par quelques rappels sur la notion de sous-espace stable par un endomorphisme.

1. Préambule sur les sous-espaces stables

Rappels : soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel (en abrégé sev) de E. On dit que F est ***sous-espace stable par*** u si $u(F) \subset F$, c'est-à-dire :

$$\forall\, x \in F, \quad u(x) \in F.$$

Si F est stable par u, on peut définir l'***endomorphisme induit par*** u ***sur*** F, noté u_F :

$$u_F : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x). \end{array}$$

⚠ L'endomorphisme induit u_F est la double restriction de l'endomorphisme initial u avec à la fois un nouvel ensemble de départ et un nouvel ensemble d'arrivée.

On rappelle que tout sev de E admet (au moins) un supplémentaire dans E. Il existe donc un sev G de E tel que $E = F \oplus G$.

⚠ On rappelle qu'un tel supplémentaire n'est pas unique en général !

Exercice de cours 34. *Soient G un supplémentaire de F dans E, et $\mathscr{B}_F$, $\mathscr{B}_G$ des bases de F et G respectivement.*

1. *Supposons que F soit stable par u. Quelle est l'allure de la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ obtenue par «concaténation» des familles libres $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$?*
2. *Réciproquement, supposons qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ soit de la forme suivante, où $p \in \{1, \dots, n\}$:*

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u(e_1) & \dots & u(e_p) & u(e_{p+1}) & \dots & u(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u).$$

Que peut-on dire du sev de E engendré par $e_1, \dots, e_p$? Comment interpréter la matrice A ?

Les sous-espaces stables par un endomorphisme les plus simples sont les *droites stables* par cet endomorphisme. Si D est une droite stable par u de base (x), c'est-à-dire que $D = \mathbb{K}x$, cela signifie que $u(x)$ est un multiple de x. Le cas le plus favorable est lorsque E est somme directe de droites stables pour u : il existe alors une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. C'est le cas auquel nous allons principalement nous intéresser dans ce chapitre. Nous étudierons le cas plus général au chapitre suivant.

⚠ Il se peut qu'un endomorphisme ne possède aucune droite stable, ou que l'espace ambiant ne soit pas somme directe de droites stables !

Exercice de cours 35.

1. *Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et h_α l'***homothétie de** E **de rapport** α*, c'est-à-dire que h_α est l'endomorphisme de E défini par :*
$$\forall\, x \in E, \quad h_\alpha(x) = \alpha x.$$
Quelles sont les droites stables par h_α ?
2. *Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et r_θ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice*
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
On dit que R_θ est une **matrice de rotation** *et que r_θ est la* **rotation de** $\mathbb{R}^2$ **d'angle** θ (les rotations seront étudiées plus en détail au second semestre).
Pour quelles valeurs de θ l'endomorphisme r_θ admet-il des droites stables ? (On attend une réponse intuitive, purement géométrique, sans calcul.)
3. *Soient D et P une droite et un plan de $\mathbb{R}^3$ tels que $\mathbb{R}^3 = D \oplus P$. On note p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D. Quelles sont les droites stables par p ? Quels sont les plans stables par p ?* (Là encore, on attend une réponse intuitive, purement géométrique, sans calcul.)
4. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice*
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que f possède une et une seule droite stable.

2. Éléments propres

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 37 – éléments propres pour un endomorphisme

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une ***valeur propre de*** f si :
$$\exists\, x \in E \setminus \{0_E\}, \quad f(x) = \lambda x.$$
Soit $x \in E$. On dit que x est un ***vecteur propre de*** f si :
$$x \neq 0_E \quad \text{et} \quad (\exists\, \lambda \in \mathbb{K},\ f(x) = \lambda x).$$

On appelle ***spectre de f sur*** $\mathbb{K}$, et on note $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(f)$, l'ensemble des valeurs propres de f.

⚠ L'hypothèse $x \neq 0_E$ dans la définition est essentielle. Le vecteur 0_E vérifie toujours $f(0_E) = \lambda 0_E$ pour n'importe quel $\lambda \in \mathbb{K}$.

Par définition, $\boxed{\text{un vecteur propre n'est jamais nul.}}$

Définition 38 – éléments propres pour une matrice carrée

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une ***valeur propre de*** A si :

$$\exists\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}, \quad AX = \lambda X.$$

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On dit que X est un ***vecteur propre de*** A si :

$$X \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \quad \text{et} \quad (\exists\, \lambda \in \mathbb{K},\ AX = \lambda X).$$

On appelle ***spectre de*** A ***sur*** $\mathbb{K}$, et on note $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A.

⚠ L'ensemble $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A)$ dépend de l'espace $\mathbb{K}$. Par exemple, considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}).$$

On a $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$ mais $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A) = \{i, -i\}$.

Exercice de cours 36. *Dans les notations de l'exercice 35, quelles sont les valeurs propres réelles de* h_α *?* r_θ *? de* p *? de* f *?*

Remarque 6. *Soit* $\mathscr{B}$ *une base de* E *et supposons que* $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. *Alors*

— *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$, λ *est une valeur propre de* f *si et seulement si* λ *est une valeur propre de* A,

— *pour tout* $x \in E$, x *est un vecteur propre de* f *si et seulement si* $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ *est un vecteur propre de* A.

En particulier, cela vaut si f *est l'endomorphisme de* $\mathbb{K}^n$ *canoniquement associé à la matrice* A, *c'est-à-dire que* $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, *où* $\mathscr{B}$ *est la base canonique de* $\mathbb{K}^n$.

Exercice de cours 37. *Vérifier ces assertions.*

Proposition 39 – une caractérisation des valeurs propres

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. On a :

$$\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(f) \iff \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\} \iff f - \lambda \mathrm{Id}_E \text{ est non injectif.}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A) \iff \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n) \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} &\iff A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K}) \\ &\iff \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n. \end{aligned}$$

En particulier, $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff 0 \notin \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A)$.

Exercice de cours 38. *Démontrer cette proposition.*

La démonstration précédente montre que pour $\lambda \in \mathbb{K}$, le sev $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ de E est formé des vecteurs propres de f associés à λ et du vecteur nul. De même, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, le sev $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est formé des vecteurs propres de A associés à λ et du vecteur colonne nul.

Définition 40 – sous-espace propre

1. Le sev $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est appelé le ***sous-espace propre (en abrégé sep) pour*** f ***associé à la valeur propre*** λ.
2. Le sev $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)$ est appelé le ***sous-espace propre (en abrégé sep) pour*** A ***associé à la valeur propre*** λ.

Exercice de cours 39. *Soit* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Montrer que le sep* $\mathrm{Ker}(f-\lambda \mathrm{Id}_E)$ *est stable par* f. *Que vaut l'endomorphisme induit par* f *sur* $\mathrm{Ker}(f-\lambda \mathrm{Id}_E)$ *?*

Exercice de cours 40. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(matrice dont tous les coefficients valent 1). Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A.

Proposition 41 – les sous-espaces d'un endomorphisme sont en somme directe

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ des valeurs propres deux à deux distinctes de f. Alors les sep $\mathrm{Ker}(f-\lambda_1 \mathrm{Id}_E), \ldots, \mathrm{Ker}(f-\lambda_N \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe dans E.

Exercice de cours 41.

1. *Démontrer la proposition pour* $N = 2$ *(le cas* $N = 1$ *est évident).*
2. *Démontrer la proposition par récurrence sur* N.

⚠ Bien que les sep de f soient en somme directe dans E, cette somme n'est pas nécessairement égale à E : voir l'exemple 4 de l'exercice 35.

Exercice de cours 42. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Vérifier que l'application*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & ((X+\alpha)P)' \end{array}$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. *Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de* f.

3. Polynôme caractéristique

Comme dans la section précédente, on fixe $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

D'après la proposition 39, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A) \iff A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K})$, ou encore, grâce la proposition 29 (iv),

$$\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A) \iff \det(A-\lambda I_n) = 0.$$

De même, d'après la proposition 39, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(f) \iff f-\lambda \mathrm{Id}_E \notin GL(E)$, ou encore, grâce à la proposition 26 (iv),

$$\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(f) \iff \det(f-\lambda \mathrm{Id}_E) = 0.$$

Rappelons en effet que pour tout endomorphisme u de E,

$$u \text{ injectif} \iff u \text{ surjectif} \iff u \text{ bijectif}, \quad \text{i.e.,} \quad u \in GL(E).$$

Compte tenu de ces remarques, il est naturel d'introduire les applications :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto & \det(A-\lambda I_n) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto & \det(f-\lambda \mathrm{Id}_E). \end{array}$$

Rappel : comme l'ensemble des scalaires $\mathbb{K}$ est infini, on peut identifier polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et fonction polynomiale de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ (voir le cours d'algèbre de première année). Autrement dit, on identifie un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ avec la fonction polynomiale $\widetilde{P}: \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto & P(\lambda). \end{array}$

Proposition-Définition 42 – polynôme caractéristique d'une matrice et d'un endomorphisme

1. L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto & \det(A - \lambda I_n) \end{array}$ est un polynôme, appelé le ***polynôme caractéristique de*** A, et noté χ_A.

2. L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto & \det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \end{array}$ est un polynôme, appelé le ***polynôme caractéristique de*** f, et noté χ_f.

Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, où $\mathscr{B}$ est une base de E, alors $\chi_f = \chi_A$. En particulier, si f est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, alors $\chi_f = \chi_A$.

Exercice de cours 43. *Justifier cette assertion.*

Compte tenu de la remarque précédente, on énoncera la plupart des résultats pour les matrices ou les endomorphismes seulement.

Exercice de cours 44.

1. *Démontrer cette proposition.*

2. *Que vaut χ_{h_α}, où h_α est l'homothétie de E de rapport $\alpha \in \mathbb{K}$?*

D'après la discussion précédente, le résultat suivant est clair :

Proposition 43 – les zéros du polynôme caractéristique d'une matrice sont les valeurs propres.

On a :

$$\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A) \iff \chi_A(\lambda) = 0.$$

► *Le polynôme caractéristique permet donc de résoudre un problème géométrique (rechercher des droites stables) en un problème algébrique (trouver les racines d'un polynôme).*

Exercice de cours 45. *Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 10 \\ -9 & -22 & -22 \\ 9 & 18 & 17 \end{pmatrix}.$$

Proposition 44 – le polynôme caractéristique est de degré n

On a :

$$\chi_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + \det(A).$$

En particulier, χ_A est de degré n et donc le spectre d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (ou d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n) a au plus n éléments.

Exercice de cours 46. *Démontrer cette proposition pour $n = 2, 3$. La démonstration dans le cas général utilise l'expression du déterminant à l'aide du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ vue au chapitre précédent (on l'admet pour le moment).*

Rappel : soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$. On rappelle que A est dite **semblable** à B, et on note $A \sim B$, s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 45 – deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Soient A et B deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Alors : $\chi_A = \chi_B$.

EXERCICE DE COURS 47. *Démontrer cette proposition.*

⚠ La réciproque est fausse. Par exemple les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables mais ont le même polynôme caractéristique.

Définition 46 – ordre de multiplicité d'une valeur propre

Soit λ_0 une valeur propre de A (resp. f). On appelle ***ordre de multiplicité de*** λ_0 l'ordre de multiplicité de λ_0 en tant que zéro du polynôme caractéristique χ_A (resp. χ_f).

Par exemple, dans l'exercice 45, -1 est de multiplicité 1 (on dit que -1 est une valeur propre ***simple***) et 2 est de multiplicité 2 (on dit que 2 est une valeur propre ***double***).

REMARQUE 7. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *alors toute matrice de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *(et tout endomorphisme de* E*) admet au moins une valeur propre puisque, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, son polynôme caractéristique étant non constant il admet au moins une racine.*

⚠ Ceci n'est plus valable sur $\mathbb{R}$ comme nous l'avons vu avec les matrices de rotations.

Jean Le Rond d'Alembert *est un mathématicien, physicien, philosophe et encyclopédiste français, né le 16 novembre 1717 à Paris où il est mort le 29 octobre 1783.*

Proposition 47 – la dimension d'un sep est majorée par la multiplicité de la valeur propre associée

Soient $\lambda_0 \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A)$, α_0 l'ordre de multiplicité de λ_0 et d_0 la dimension du sep $\mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I_n)$ associé à λ_0. Alors on a :

$$1 \leqslant d_0 \leqslant \alpha_0.$$

(*On a un résultat analogue pour les endomorphismes.*)

EXERCICE DE COURS 48. *Démontrer cette proposition pour les endomophismes (le cas matricielle s'en déduit).*
Indication : utiliser le fait que $\mathrm{Ker}(f - \lambda_0 \mathrm{Id}_E)$ est un sev stable par f, en choisir une base puis utiliser le théorème de la base incomplète pour calculer le polynôme caractéristique.

Une conséquence de cette proposition est que pour toute valeur propre simple de A (resp. f), la dimension du sep associé vaut 1.

4. Diagonalisabilité

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 48 – diagonalisation

1. On dit que f est ***diagonalisable*** s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ soit diagonale.
2. On dit que A est ***diagonalisable*** s'il existe une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que A soit semblable à D. Autrement dit, A ***diagonalisable*** si et seulement si :
$$\exists\, P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \exists\, D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K}), \quad A = PDP^{-1},$$
où $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 8. ***1.*** *Si f est diagonalisable et si $\mathscr{B}$ est une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale, alors $\mathscr{B}$ est formée de vecteurs propres pour f et les éléments diagonaux de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ sont les valeurs propres de f (avec multiplicités).*

Une telle base $\mathscr{B}$ de E n'est pas unique en général ! Penser au cas où f est l'identité de E.

2. *Si A est diagonalisable et si $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonale telle que $A = PDP^{-1}$ pour une certaine matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres de A (avec multiplicités).*

Une telle matrice P n'est pas unique en général ! Penser au cas où A est la matrice I_n.

Exercice de cours 49. *Vérifier que f est diagonalisable si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base de E l'est.*

Exercice de cours 50. *Donner des exemples variés de matrices et d'endomorphismes diagonalisables et non diagonalisables.*

Si A est diagonalisable, ***diagonaliser*** $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ c'est déterminer P, D, (éventuellement P^{-1}) telles que
$$P \in GL_n(\mathbb{K}),\ D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K}), \quad A = PDP^{-1}.$$

Remarque 9. *S'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, alors*
$$f \text{ diagonalisable} \iff A \text{ diagonalisable}.$$
En particulier, si f est l'endomorphisme $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, alors :
$$f \text{ diagonalisable} \iff A \text{ diagonalisable}.$$

Proposition 49 – propriétés équivalentes de la diagonalisabilité

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est diagonalisable,

(i) $\boxed{\text{il existe une base de } E \text{ formée de vecteurs propres pour } f}$,

(i) la somme (directe) des sep pour f est égale à E,

(i) la somme des dimensions des sep pour f est à égale $n = \dim E$.

Exercice de cours 51. *Démontrer cette proposition.*

Exercice de cours 52 (les projections sont diagonalisables). *Soient F et G deux sev de E, supplémentaires dans E, c'est-à-dire que $E = F \oplus G$. On note p la projection vectorielle de E sur F parallèlement à G. Montrer que p est diagonalisable.*

Rappelons qu'un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit ***scindé sur*** $\mathbb{K}$ si P est ou bien constant ou bien un produit de polynômes de degré 1. Par exemple, les polynômes suivants sont scindés sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$: 4, $X-1$, $(X-1)^2(X-2)$, X^2-1, X^2+X-2. Le polynôme X^2+1 est scindé sur $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de d'Alembert-Gauss qui affirme que *tout polynôme non constant, à coefficients complexes, admet au moins une racine complexe*, peut se formuler ainsi : *tout polynôme à coefficients complexes est scindé sur* $\mathbb{C}$.

Théorème 50 – une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité

L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si :

— χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$,

— pour chaque valeur propre λ de f, la dimension de $\mathrm{Ker}(f-\lambda \mathrm{Id}_E)$ est égale à l'ordre de multiplicité de λ.

(*On a un résultat analogue pour les matrices.*)

Exercice de cours 53. *Démontrer ce théorème.*

Exercice de cours 54.

1. *La matrice de l'exercice 45 est-elle diagonalisable ?*

2. *Montrer que la matrice*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

est diagonalisable et diagonaliser A.

Corollaire 51 – une condition suffisante de diagonalisabilité

Si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors f est diagonalisable.
(*On a un résultat analogue pour les matrices.*)

⚠ Cette condition est suffisante mais non nécessaire. Penser à l'identité, aux homothéties, aux projections, etc. qui sont diagonalisables mais ne satisfont pas au critère ci-dessus en général !

Exercice de cours 55. *Démontrer ce corollaire.*

Exercice de cours 56. *Soit*

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & 1\\ 1 & & & 0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C}).$$

Montrer que A est diagonalisable, et diagonaliser A. (On pourra résoudre directement, pour $\lambda\in\mathbb{C}$ et $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X\neq 0$, l'équation $AX=\lambda X$.)

5. Polynômes d'endomorphismes et de matrices

Dans cette section, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est toujours supposé de dimension finie non nulle $n\in\mathbb{N}^*$. On fixe de nouveau $f\in\mathscr{L}(E)$ et $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Certaines notions sont valables si E est de dimension infinie (polynôme d'endomorphisme, polynôme annulateur, etc.).

Proposition-Définition 52 – polynôme d'endomorphisme, polynôme de matrice

Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_NX^N \in \mathbb{K}[X]$.

1. On note $P(f) = a_0\mathrm{Id}_E + a_1f + \cdots + a_Nf^N \in \mathscr{L}(E)$, et $P(f)$ est appelé un ***polynôme d'endomorphismes***.
2. On note $P(A) = a_0I_n + a_1A + \cdots + a_NA^N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $P(f)$ est appelé un ***polynôme de matrices***.

Autrement dit, pour obtenir $P(f)$ (ou $P(A)$) on remplace la constante 1 par Id_E (ou I_n), X par f (ou A), X^k par $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$ (ou A^k) pour $k \in \mathbb{N}^*$.

⚠ Ne pas confondre $1(f)$ qui vaut Id_E et $X(f)$ qui vaut f.

Exemple 10. *Si $P = 2 + 3X$, alors $P(f) = 2\mathrm{Id}_E + 3f$ et $P(A) = 2I_n + 3A$.*

Proposition 53 – propriétés des polynômes d'endomorphismes

Pour tous $\alpha \in \mathbb{K}$ et $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, on a :

1. $(\alpha P + Q)(f) = \alpha P(f) + Q(f)$,
2. $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$,
3. $1(f) = \mathrm{Id}_E$.

(*On a des propriétés analogues pour les matrices.*)

Remarque 10. *Les propriétés ci-dessus montrent que l'application $P \longmapsto P(f)$ est un* **morphisme d'algèbres unitaire** *de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$ (voir le cours d'algèbre de troisième année).*

Exercice de cours 57.

1. *Démontrer cette proposition.*
2. *Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f et g commutent. Montrer que tout polynôme en f commutent avec tout polynôme en g.*
   (De même, on montre que si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutent, alors tout polynôme en A commutent avec tout polynôme en B.)

Définition 54 – polynôme annulateur

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. On dit que P ***annule*** f (ou que P est un ***polynôme annulateur*** de f) si $P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
2. On dit que P ***annule*** A (ou que P est un ***polynôme annulateur*** de A) si $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.

Exemple 11. *On rappelle qu'un* **projecteur de** *E est un endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$, et qu'une* **symétrie de** *E est un endomorphisme s de E tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Ainsi a-t-on :*

— *l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur de E si et seulement si $X^2 - X$ annule f.*

— *l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie de E si et seulement si $X^2 - 1$ annule f.*

On rappelle aussi (voir l'exercice 5 de la fiche d'exercices n°0) que les projecteurs de E sont les projections vectorielles de E, et que symétries de E sont les symétries vectorielles de E.

Exercice de cours 58 (tout endomorphisme admet au moins un polynôme annulateur autre que 0). *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.*

1. *Justifier que la famille* $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \dots, f^{n^2})$ *est liée dans* $\mathscr{L}(E)$.

2. *En déduire que* f *admet au moins un polynôme annulateur autre que* 0.

Proposition 55 – polynôme d'endomorphismes et valeur propre

1. Soient $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(f)$ et $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$. On a alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$(P(f))(x) = P(\lambda)x.$$

2. Soient $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A)$ et $X \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$. On a alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(A)X = P(\lambda)X.$$

Exercice de cours 59. *Démontrer cette proposition.*

Corollaire 56 – le spectre est contenu dans l'ensemble des zéros de tout polynôme annulateur

Soit P un polynôme annulateur de f. Alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(f)$, on a $P(\lambda) = 0$. Autrement dit,

$$\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(f) \subset P^{-1}(\{0\}).$$

(*On a un résultat analogue pour les matrices.*)

Exercice de cours 60. *Démontrer ce corollaire.*

⚠ L'inclusion $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A) \subset P^{-1}(\{0\})$ est stricte en général si P un polynôme annulateur de la matrice A. Par exemple $P = X(X-1)$ annule la matrice I_n mais $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(I_n) = \{1\}$ tandis que $P^{-1}(\{0\}) = \{0,1\}$.

Théorème 57 – une nouvelle condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité

Pour que f soit diagonalisable il faut et il suffit qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples tel que $P(f) = 0$.
(*On a un résultat analogue pour les matrices.*)

Exercice de cours 61 (démonstration de la partie «condition nécessaire»). *Montrer que si* f *est diagonalisable, alors il existe un polynôme* $P \in \mathbb{K}[X]$ *scindé sur* $\mathbb{K}$ *et à racines simples tel que* $P(f) = 0$.

On admet pour le moment la partie «condition suffisante» (la plus intéressante !). Nous la démontrerons au chapitre suivant, comme conséquence du *théorème des noyaux.*

Exemple 12. ***1.*** *On retrouve ainsi que les projecteurs et les symétries de* E *sont diagonalisables. En effet, les polynômes* $X^2 - X = X(X-1)$ *et* $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ *sont scindés sur* $\mathbb{K}$ *et à racines simples (voir l'exemple 11).*

2. *Soit* $A \in \mathscr{M}_{10}(\mathbb{R})$ *telle que* $A^3 = 7A - 6I_{10}$. *Le polynôme* $X^3 - 7X + 6 = (X-1)(X-2)(X+3)$ *de* $\mathbb{R}[X]$ *est scindé sur* $\mathbb{R}$, *à racines simples et annule* A, *donc* A *est diagonalisable.*

3. *Considérons la matrice* A *de l'exercice 56. On vérifie sans peine que l'on a* $A^n = I_n$ *(considérer l'endomorphisme de* $\mathbb{K}^n$ *canoniquement associé à* A*), donc* $P = X^n - 1$ *est un polynôme annulateur de* A. *Il est scindé dans* $\mathbb{C}$ *et à racines simples :*

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \omega^k\right), \quad \text{où} \quad \omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right).$$

On retrouve ainsi que A *est diagonalisable.*

Ce théorème est un outil très efficace pour détecter si un endomorphisme ou une matrice est diagonalisable. Toutefois, il ne permet pas la diagonanlisation effective (trouver l'ensemble des valeurs propres et une base de vecteurs propres). Dans les exemples 1 et 3 ci-dessus, une analyse plus élémentaire nous a permis d'avoir une diagonalisation plus complète !

Voici une application de ce théorème.

Exercice de cours 62. *Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et F un sev de E stable par f. Montrer que si f est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par f sur F est diagonalisable aussi.*

6. Applications de la diagonalisation

Voici quelques applications de la diagonalisation.

6.1. Calcul des puissances d'une matrice carrée. Remarquons tout d'abord que les puissances d'une matrice diagonale sont très faciles à calculer.

Supposons que l'on ait à calculer les puissances d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

• Si A est diagonalisable, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Autrement dit, il *suffit* de diagonaliser A pour calculer les puissances de A.

• Si $A = \alpha I_n + N$, avec N nilpotente (i.e., $N^p = 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$), on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer les puissances de A (voir le cours d'algèbre de première année).

• Si A n'est ni diagonalisable ni de la forme précédente, nous verrons (dans certains cas) d'autres méthodes au chapitre suivant. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, nous verrons que la *décomposition de Dunford* permet de calculer les puissances de n'importe quelle matrice carrée par une méthode qui mélange un peu les deux précédentes : voir l'exercice de cours 86.

Exercice de cours 63. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que A est diagonalisable et diagonaliser A.*
2. *Calculer A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.* (Par convention $A^0 = I_n$.)
3. *Montrer que A est inversible, et calculer A^{-1}.*
4. *En déduire A^k, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.* (Par convention, si $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$, $A^k = (A^{-1})^{-k}$.)

Exercice de cours 64 (étude de trois suites récurrentes linéaires d'ordre 2 «imbriquées»). *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par : $u_0 = 0$, $v_0 = 22$, $w_0 = 22$ et*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n), \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + v_n + w_n), \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n). \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n, v_n et w_n en fonction de n, et d'étudier la convergence des trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. *Posons*

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad \text{et,} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}, \quad X_n=\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\\ w_n\end{pmatrix}.$$

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$X_{n+1}=AX_n.$$

En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$X_n=A^nX_0.$$

2. *Montrer que* A *est diagonalisable, et diagonaliser* A.

3. *Conclure en calculant* u_n, v_n *et* w_n *pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *et en étudiant la convergence des trois suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice de cours 65 (une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants). *On note* $\mathscr{U}$ *l'ensemble des suites réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *réelles telles que :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=\frac{1}{2}(u_{n+1}+u_n).$$

1. *Trouver une matrice* A *de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *telle que :*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{U} \iff \forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{pmatrix}u_{n+2}\\ u_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}.$$

2. *En déduire qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *appartient à* $\mathscr{U}$ *si et seulement si on a :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}u_1\\ u_0\end{pmatrix}.$$

3. *Montrer que* A *est diagonalisable et diagonaliser* A *dans* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

4. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{U}$. *Déduire de la question précédente, pour tout entier naturel* n, *une expression de* u_n *en fonction de* n *et des réels* u_0, u_1.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est-elle convergente ? Si oui, préciser sa limite en fonction de* u_0 *et* u_1.

L'exercice précédente se généralise aisément à l'ensemble $\mathscr{U}_{a,b}$ des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n,$$

où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ sont tels que $a^2+4b>0$.

6.2. Résolution de systèmes différentiels linéaires. On ne présente pas de théorie générale et on illustre seulement sur un exemple l'utilisation de la diagonalisation pour la résolution d'un système différentiel linéaire d'ordre un.

Exercice de cours 66. *On cherche dans cet exercice tous les couples* (f,g) *de fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$, *à valeurs réelles, vérifiant le système différentiel* $(\mathscr{S})$ *suivant :*

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\quad \begin{cases} f'(t)=4f(t)-g(t)\\ g'(t)=2f(t)+g(t).\end{cases}$$

1. *On pose* $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. *Montrer que* A *est diagonalisable. Trouver une matrice diagonale* $D\in\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ *et une matrice inversible* $P\in GL_2(\mathbb{R})$ *telles que*

$$A=PDP^{-1}.$$

2. *Résoudre le système différentiel suivant, où* u *et* v *sont deux fonctions dérivables :*

$$\begin{pmatrix}u'\\ v'\end{pmatrix}=D\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}.$$

3. *En déduire les solutions du système* $(\mathscr{S})$.

4

Réduction des endomorphismes (2ème niveau) : trigonalisation

Dans tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Nous allons étudier dans ce chapitre d'autres cas de réductions (autres que la diagonalisation). Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, nous verrons que tout endomorphisme possède une base dans laquelle sa matrice est triangulaire, et même triangulaire avec une forme particulière (diagonale par blocs de matrices triangulaires).

1. Trigonalisabilité

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E. On note $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieurs de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 58 – endomorphisme et matrice trigonalisables

1. On dit que f est ***trigonalisable*** (ou ***triangularisable***) s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ soit triangulaire.
2. On dit que A est ***trigonalisable*** (ou ***triangularisable***) s'il existe une matrice triangulaire $T \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ semblable à A, c'est-à-dire :
$$\exists\, T \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K}), \quad \exists\, P \in GL_n(\mathbb{K}), \quad A = PTP^{-1}.$$

Comme pour la diagonalisabilité, la base $\mathscr{B}$ et la matrice P dans la définition ci-dessus ne sont pas uniques.

Si A est trigonalisable, ***trigonaliser*** $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ c'est déterminer P, T, (éventuellement P^{-1}) telles que
$$P \in GL_n(\mathbb{K}),\ T \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K}), \quad A = PTP^{-1}.$$

Remarque 11. *S'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, alors*
$$f \textit{ trigonalisable} \iff A \textit{ trigonalisable.}$$

Compte tenu de la remarque, nous énoncerons, comme dans le chapitre précédent, bon nombre d'énoncés pour les matrices ou les endomorphismes seulement.

Exercice de cours 67. *Montrer que toute matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure.*

(Indication : considérer la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$.)

Théorème 59 – caractérisation de la trigonalisabilité

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est trigonalisable,

(ii) χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

(*On a un résultat similaire pour les endomorphismes.*)

Exercice de cours 68. *Démontrer ce théorème.*

Le corollaire suivant est crucial, et résulte du théorème de d'Alembert-Gauss.

Corollaire 60 – toute matrice complexe est trigonalisable

1. Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors tout endomorphisme de E est trigonalisable.

Exercice de cours 69. *On suppose $n \geqslant 2$. Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. *Quelle est la dimension de* $\operatorname{Ker} A$ *? En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :*

$$\chi_A(X) = (-1)^n X^{n-1}(X-\lambda).$$

2. *À l'aide de la trace, déterminer la valeur de λ.*

3. *En déduire que A n'est pas diagonalisable, mais que A est trigonalisable. Trigonaliser A.*

2. Polynômes annulateurs

Nous approfondissons ici la notion de polynôme annulateur vue au chapitre précédent. Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2.1. Théorème de Cayley-Hamilton.

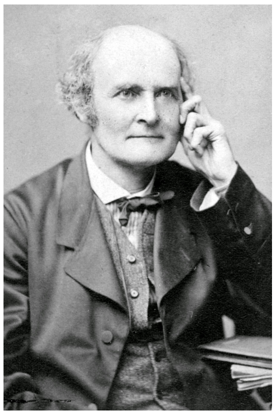
Théorème 61 – théorème de Cayley-Hamilton

1. On a $\chi_f(f) = 0$. Autrement dit, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f annule f.

2. On a $\chi_A(A) = 0$. Autrement dit, le polynôme caractéristique de la matrice A annule A.

*Sir **William Rowan Hamilton**, né le 4 août 1805 et mort le 2 septembre 1865, est un mathématicien, physicien et astronome irlandais (né et mort à Dublin). Il est connu pour sa découverte des quaternions, mais il contribua aussi au développement de l'optique, de la dynamique et de l'algèbre. Ses recherches se révélèrent importantes pour le développement de la mécanique quantique.*

Arthur Cayley*, né le 16 août 1821 et mort le 26 janvier 1895, est un mathématicien britannique. Il fait partie des fondateurs de l'école britannique moderne de mathématiques pures.*



Exercice de cours 70 (démonstration du théorème de Cayley-Hamilton). *L'objectif de cet exercice est démontrer le théorème de Cayley-Hamilton pour les endomorphismes. La démonstration pour les matrices en découle.*
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. *Soit* $x \in E \setminus \{0_E\}$. *Montrer que la famille* $\left(f^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ *est liée. Soit* p_x *le plus grand entier dans* $\mathbb{N}^*$ *tel que* $(x, f(x), \ldots, f^{p_x-1}(x))$ *soit libre.*
2. *On pose* $E_f(x) = \mathrm{Vect}(x, f(x), \ldots, f^{p_x-1}(x))$. *Montrer que* $E_f(x)$ *est un sev stable par* f*, et écrire la matrice de l'endomorphisme* g_x *induit par* f *sur* $E_f(x)$ *dans la base* $(x, f(x), \ldots, f^{p_x-1}(x))$.
3. *Que vaut* χ_{g_x} *?* (Indication : utiliser l'exercice 9 sur les matrices compagnons de la fiche d'exercices n°3.) *En déduire que* $\left(\chi_{g_x}(f)\right)(x) = 0_E$.
4. *Pourquoi a-t-on* $\chi_{g_x} | \chi_f$ *?* (Indication : utiliser l'exercice 6 sur les sev stables de la fiche d'exercices n°3.) *En déduire que* $\left(\chi_f(f)\right)(x) = 0_E$.
5. *Conclure.*

Exercice de cours 71 (utilisation des théorèmes de d'Alembert-Gauss et de Bézout). *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $P \in \mathbb{C}[X]$. *Montrer :*

$$P(A) \in GL_n(\mathbb{C}) \iff P \wedge \chi_A = 1.$$

Voici une application du théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice de cours 72 (caractérisation des endomorphismes nilpotents). On rappelle qu'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite ***nilpotente*** s'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^N = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *On suppose que le polynôme caractéristique de* A *est scindé (par exemple, si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*). Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) A *est nilpotente,*

(ii) $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A) = \{0\}$,

(iii) $\chi_A = (-1)^n X^n$,

(iv) A *est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte,*

(v) $A^n = 0$.

2.2. Théorème des noyaux.

Théorème 62 – théorème des noyaux

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $P_1, \ldots, P_N \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes premiers entre eux deux à deux, c'est-à-dire que pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, N\}^2$ tel que $i \neq j$, on a $P_i \wedge P_j = 1$. Alors les sev $\mathrm{Ker}\,(P_i(f))$, $i = 1, \ldots, N$, sont en somme directe et :

$$\bigoplus_{i=1}^{N} \mathrm{Ker}\,(P_i(f)) = \mathrm{Ker}\,(P(f)), \qquad \text{où} \qquad P = \prod_{i=1}^{N} P_i.$$

De plus, la projection de $\mathrm{Ker}\,(P(f))$ sur $\mathrm{Ker}\,(P_i(f))$ parallèlement à $\bigoplus\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant N \\ j \neq i}} \mathrm{Ker}\,(P_j(f))$ est un polynôme en f.

En particulier, si $P = \prod\limits_{i=1}^{N} P_i$, avec $P_i \wedge P_j = 1$ pour tout $i \neq j$, est un polynôme annulateur de E (par exemple si $P = \chi_f$), alors

$$\bigoplus_{i=1}^{N} \mathrm{Ker}\,(P_i(f)) = E.$$

Exercice de cours 73 (démonstration du théorème des noyaux). *L'objectif de cet exercice est démontrer le théorème des noyaux.*

1. *Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, $\mathrm{Ker}\, P_i(f) \subset \mathrm{Ker}\, P(f)$. En déduire :*

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{Ker}\, P_i(f) \subset \mathrm{Ker}\, P(f).$$

Il reste à montrer que la somme est directe et que l'inclusion est une égalité.

2. *On suppose dans cet question que $N = 2$. D'après l'hypothèse, il existe $V_1, V_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $V_1 P_1 + V_2 P_2 = 1$ (identité de Bézout).*

2.1 *Montrer à l'aide de l'identité de Bézout :*

$$\mathrm{Ker}\, P(f) \subset \mathrm{Ker}\, P_1(f) + \mathrm{Ker}\, P_2(f).$$

2.2 *Montrer que la somme $\mathrm{Ker}\, P_1(f) + \mathrm{Ker}\, P_2(f)$ est directe.*

2.3 *Montrer que la projection p_1 de $\mathrm{Ker}\, P(f)$ sur $\mathrm{Ker}\, P_1(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, P_2(f)$ est $p_1 = V_2(f) \circ P_2(f)$, et que la projection p_2 de $\mathrm{Ker}\, P(f)$ sur $\mathrm{Ker}\, P_2(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, P_1(f)$ est $p_2 = V_1(f) \circ P_1(f)$.*

3. *Cas général.*

3.1 *Posons pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$,*

$$Q_i = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant N \\ j \neq i}} P_j$$

de sorte que $P_i Q_i = P$.

3.2 *Montrer que les polynômes $Q_1, \ldots, Q_N$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. En déduire qu'il existe $U_1, \ldots, U_N \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{N} U_i Q_i = 1$ (identité de Bézout).*

3.3 *En reprenant les idées du cas $N = 2$, démontrer le théorème dans le cas général. Décrire, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, la projection de $\mathrm{Ker}\, P(f)$ sur $\mathrm{Ker}\, P_i(f)$ parallèlement à $\bigoplus\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant N \\ j \neq i}} \mathrm{Ker}\,(P_j(f))$.*

Exemple 13. *Considérons la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 & -5 \\ 2 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

On vérifie sans peine que

$$\chi_A(X) = (X^2+1)(X^2+4).$$

Le polynôme χ_A n'admet aucun zéro réel. En particulier, A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. Elle n'est pas non trigonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ car χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ (en revanche, elle est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ car χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.)

Nous allons voir que, grâce au théorème des noyaux, A est cependant semblable, dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, à une matrice diagonale par blocs. Posons $P_1 = X^2+1$ et $P_2 = X^2+4$ de sorte que $\chi_A = P_1P_2$ et $P_1 \wedge P_2 = 1$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A. Le théorème des noyaux donne :

$$\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker}\chi_f(f) = \operatorname{Ker}P_1(f) \oplus \operatorname{Ker}P_2(f).$$

Comme $\operatorname{Ker}P_1(f)$ et $\operatorname{Ker}P_2(f)$ sont des sev de $\mathbb{R}^4$ stables par f, nous allons chercher une base de $\mathbb{R}^4$ adaptée à cette décomposition.

En remarquant que, pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$, on a :

$$X \in \operatorname{Ker}P_1(f) \iff (A^2+I_4)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on vérifie aisément que $\operatorname{Ker}P_1(f)$ a pour base (V_1, V_2), où $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. De même, on vérifie que $\operatorname{Ker}P_2(f)$ a pour base (V_3, V_4), où $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. En notant $P = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_0}(V_1, V_2, V_3, V_4)$, où $\mathscr{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on obtient

$$A = PBP^{-1} \quad \text{où} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice de cours 74. *Vérifier les assertions de l'exemple précédent.*

Exercice de cours 75. *Démontrer le théorème 57, dont la démonstration avait été laissée de côté, à l'aide du théorème des noyaux.*

2.3. Polynôme minimal. Nous allons maintenant voir que l'ensemble des polynômes annulateurs d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée a une structure très particulière.

Nous traitons le cas des endomorphismes. Le cas des matrices est similaire. Nosons

$$I_f = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}\}$$

l'ensemble des polynômes annulateurs de f.

Exercice de cours 76 (structure de l'ensemble I_f).

1. *Vérifier :*

— $0_{\mathbb{K}[X]} \in I_f$,

— *si $(P, Q) \in (I_f)^2$, alors $P + Q \in I_f$,*

— *si* $U \in \mathbb{K}[X]$ *et* $P \in I_f$*, alors* $UP \in I_f$*.*

(On dit que I_f est un ***idéal*** de la $\mathbb{K}$***-algèbre*** $\mathbb{K}[X]$: voir le cours d'algèbre de troisième année.)

2. *Vérifier que* I_f *contient au moins un polynôme non nul. On peut donc poser*

$$d_0 = \min\{\deg P\ ;\ P \in I_f \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}\} \subset \mathbb{N},$$

et choisir un polynôme $P_0 \in I_f \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ *tel que* $\deg P_0 = d_0$*.*

3. *Soit* $P \in I_f$*. Montrer que* $P_0|P$*.* (Indication : effectuer la division euclidienne de P par P_0.)

4. *En déduire que*

$$I_f = \{UP_0\ ;\ U \in \mathbb{K}[X]\} = P_0\mathbb{K}[X].$$

On a ainsi montré : il existe un polynôme $P_0 \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad \big(P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)} \iff P_0|P\big).}$$

On peut choisir le polynôme P_0 de sorte que P_0 soit unitaire, c'est-à-dire tel que son terme dominant soit $X^{\deg P_0}$, et ceci définit P_0 de façon unique (à vérifier).

Proposition-Définition 63 – polynôme minimal d'un endomorphisme et d'une matrice

1. Il existe un unique polynôme unitaire, noté π_f, tel que

$$\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}\} = \pi_f\mathbb{K}[X],$$

et π_f est appelé le ***polynôme minimal de*** f.

2. Il existe un unique polynôme unitaire, noté π_A, tel que

$$\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}\} = \pi_A\mathbb{K}[X],$$

et π_A est appelé le ***polynôme minimal de*** A.

Exercice de cours 77.

1. *Quel est le polynôme minimal d'une homothétie de* E *?*

2. *Quel est le polynôme minimal d'une projection vectorielle de* E *?*

3. *Quel est le polynôme minimal d'une symétrie vectorielle de* E *?*

4. *Quel est le polynôme minimal de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *?*

5. *Quel est le polynôme minimal de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *?*

6. *Quel est le polynôme minimal d'une matrice nilpotente de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *?*

Théorème 64 – un critère de diagonalisabilité en terme du polynôme minimal

Pour que f soit diagonalisable il faut et il suffit que π_f soit scindé à racines simples.
(*On a un résultat analogue pour les matrices.*)

Exercice de cours 78. *Démontrer le théorème ci-dessus à l'aide du théorème 57.*

Proposition 65 – les polynômes minimal et caractéristique ont les mêmes diviseurs irréductibles

Pour tout polynôme irréductible P de $\mathbb{K}[X]$, on a :

$$P|\pi_f \iff P|\chi_f.$$

Autrement dit, π_f et χ_f ont les mêmes diviseurs irréductibles.
(*On a un résultat analogue pour les matrices.*)

En conséquence de la proposition,

$$\boxed{\pi_f^{-1}(\{0\}) = \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(f).}$$

Exercice de cours 79. *Démontrer cette proposition.*

Exercice de cours 80.

1. *Reprendre les exemples de l'exercice de cours 77, et comparer pour chacun d'entre eux le polynôme minimal et le polynôme caractéristique. Vérifier la cohérence des énoncés ci-dessus sur ces exemples.*
2. *Quels sont le polynôme minimal et le polynôme caractéristique d'une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^2$?*

Théorème 66 – critère de trigonalisation

Pour que f soit trigonalisable il faut et il suffit que π_f soit scindé sur $\mathbb{K}$.
(*On a un résultat analogue pour les matrices.*)

Exercice de cours 81. *Démontrer ce théorème.*

Exercice de cours 82. *Soit*

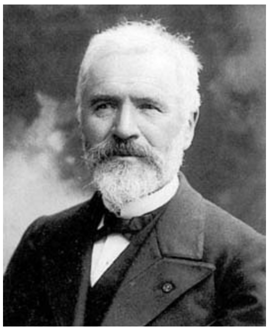
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

Calculer χ_A, les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
A-t-on $\chi_A = \pi_A$?

3. Décomposition de Dunford

***Nelson Dunford**, né le 12 décembre 1906 et mort le 7 septembre 1986, est un mathématicien américain, connu pour ses travaux en analyse fonctionnelle. Il a notamment donné son nom à la décomposition de Dunford, la propriété de Dunford-Pettis et le théorème de Dunford-Schwartz.*

La décomposition, dite «de Dunford», que nous allons étudier dans cette section, a été démontrée une première fois en 1870 par Camille Jordan, puis dans les années 1950 par Claude Chevalley dans le contexte de la théorie des groupes algébriques. Dans le monde francophone, elle est parfois attribuée à tort à Nelson Dunford, dont les travaux sont postérieurs à ceux de Chevalley !



***Marie Ennemond Camille Jordan**, né le 5 janvier 1838 à Lyon et mort le 22 janvier 1922 à Paris, est un mathématicien français, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent Cours d'analyse.*

***Claude Chevalley**, né le 11 février 1909 à Johannesburg en Afrique du Sud et mort le 28 juin 1984 à Paris, est un mathématicien français spécialiste de l'algèbre. Il l'est l'un des fondateurs du groupe Bourbaki.*

On fixe comme d'habitude $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème-Définition 67 – décomposition de Dunford

1. On suppose que $\boxed{\chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K}}$ (par exemple, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Alors il existe un unique couple $(d, \nu) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que :
- $f = d + \nu$,
- d est un endomorphisme diagonalisable,
- ν est un endomorphisme nilpotent,
- $d \circ \nu = \nu \circ d$.

De plus, d et ν sont des polynômes en f et $\chi_d = \chi_f$.
La relation $f = d + \nu$ s'appelle la ***décomposition de Dunford de*** f.

2. On suppose que $\boxed{\chi_A \text{ est scindé sur } \mathbb{K}}$ (par exemple, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Alors il existe un unique couple $(D, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que :
- $A = D + N$,
- D est une matrice diagonalisable,
- N est une matrice nilpotente,
- $DN = ND$.

De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_D = \chi_A$.
La relation $A = D + N$ s'appelle la ***décomposition de Dunford de*** A.

⚠ Si χ_A est scindé, alors A est trigonalisable, donc il existe une matrice triangulaire T et une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PTP^{-1}$. On peut écrire $T = D' + N'$ où D' est une matrice diagonale (donc diagonalisable) et N' une matrice triangulaire stricte (donc nilpotente), mais a priori $N \neq PN'P^{-1}$ car N' et D' ne commutent pas en général, même si $A = T$: voir l'exemple ci-dessous.

Exercice de cours 83. *Quelle est la décomposition de Dunford de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *?*

Exercice de cours 84 (démonstration de l'existence pour la décomposition de Dunford). *Comme χ_f est scindé, on peut écrire*

$$\chi_f = (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k},$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de f, de multiplicités $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ respectivement.
Posons pour $k \in \{1, \dots, p\}$,

$$C_k = \operatorname{Ker}\left((f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\alpha_k}\right).$$

Le sev C_k est appelé le **sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre** λ_k. *D'après le théorème des noyaux, on a :*

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} C_k.$$

1. *Soit $k \in \{1, \dots, p\}$.*

1.1 *Montrer que C_k est stable par f. On note f_k l'endomorphisme induit par f sur C_k.*

1.2 *On pose*

$$d_k = \lambda_k \mathrm{Id}_{C_k} \quad \text{et} \quad \nu_k = f_k - d_k.$$

Vérifier que ν_k est nilpotent, puis montrer qu'il existe une base de C_k dans laquelle la matrice de f_k est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{\alpha_k}(\mathbb{K}).$$

(Indication : appliquer d'abord l'exercice 72 à l'endomorphisme ν_k.)

2. *Posons pour tout $x \in E$,*

$$d(x) = \sum_{k=1}^{p} d_k(x_k) \quad \text{et} \quad \nu(x) = \sum_{k=1}^{p} \nu_k(x_k),$$

où, pour tout $k \in \{1, \dots, k\}$, x_k est la projection de x sur C_k parallèlement à $\bigoplus_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq k}} C_j$.

Montrer que les endomorphismes d et ν conviennent.

Exercice de cours 85 (démonstration de l'unicité pour la décomposition de Dunford). *Montrer qu'il y a unicité dans la décomposition de Dunford.*
(Indication : utiliser la diagonalisation simultanée d'une part (voir l'exercice 11 de la fiche d'exercices n°3), et les propriétés des endomorphismes nilpotents d'autre part.)

Corollaire 68 – décomposition de Dunford, expression matricielle

On suppose que $\boxed{\chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K}}$ (par exemple, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On note $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} = \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(f)$ et, pour $k \in \{1, \dots, p\}$, on note α_k la multiplicité de λ_k dans χ_f. Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$\begin{array}{c} \mathscr{M}_{\alpha_1}(\mathbb{K}) \ni \\ \\ \\ \mathscr{M}_{\alpha_p}(\mathbb{K}) \ni \end{array} \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \\ \hline \end{array} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{array}{|ccc} \hline \lambda_p & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{array} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f).$$

Ce corollaire est une conséquence directe de la démonstration de la partie «existence» de la décomposition de Dunford (voir l'exercice 84).

Remarque 12. *Comme application de la décomposition de Dunford, on peut calculer les puissances d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à l'aide des méthodes vues au paragraphe 6.1.*

Exercice de cours 86 (calcul de puissances d'une matrice). *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$. Trouver une matrice inversible $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $A = PJP^{-1}$, où*

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. *Montrer que A est inversible, et calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*

4. Réduction de Jordan

On rappelle qu'un endomorphisme f de E est dit ***nilpotent*** s'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^N = 0_{\mathscr{L}(E)}$, et qu'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite ***nilpotente*** s'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^N = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.

Nous allons voir dans cette dernière partie du cours que la réduction des endomorphismes nilpotents (ou des matrices nilpotentes) dont le polynôme caractéristique est scindé est particulièrement agréable.

Exercice de cours 87 (suite des noyaux itérés). *Soit ν un endomorphisme nilpotent de E. On note N le plus petit entier $\geqslant 1$ tel que $\nu^N = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Supposons $\nu \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, donc $N \geqslant 2$. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $F_k = \mathrm{Ker}(\nu^k)$. Vérifier qu'on a les inclusions*

$$\{0_E\} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots F_{N-1} \subset F_N = E,$$

et que toutes ces inclusions sont strictes.

La suite $(F_k)_{0 \leqslant k \leqslant N}$ est appelée la **suite des noyaux itérés de** ν.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{\huge 0} & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_k(\mathbb{K}).$$

Théorème 69 – structure des éléments nilpotents

Soit ν un endomorphisme nilpotent de E. On note N le plus petit entier $\geqslant 1$ tel que $\nu^N = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Supposons $\nu \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, donc $N \geqslant 2$. On reprend les notations de l'exercice précédent, et on pose pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$,

$$\gamma_k = \dim F_k - \dim F_{k-1}.$$

Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de ν dans cette base soit de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} J_N & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & 0 & \\ & & J_N & & & & & & & \\ & & & J_{N-1} & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & J_{N-1} & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & J_1 & & \\ & 0 & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & J_1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\nu),$$

que l'on peut écrire $J = \mathrm{diag}(\underbrace{J_N, \ldots, J_N}_{\gamma_N \text{ blocs}}, \underbrace{J_{N-1}, \ldots, J_{N-1}}_{\gamma_{N-1}-\gamma_N \text{ blocs}}, \ldots, \underbrace{J_1, \ldots, J_1}_{\gamma_1-\gamma_2 \text{ blocs}})$.

Une telle matrice J (avec des 0 ou des 1 sur la sur-diagonale, et des zéros partout ailleurs) est appelée une ***matrice de Jordan***.

Nous ne démontrerons pas ce théorème dans le cas général, mais nous allons construire explicitement une base $\mathscr{B}$ comme dans le théorème pour quelques exemples.

Exercice de cours 88. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. *Vérifier que $A^4 = 0$ et $A^3 \neq 0$. On note ν l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.*
2. *Dans les notations de l'exercice 87, décrire la suite $(F_k)_{0\leqslant k\leqslant N}$ des noyaux itérés de ν. Donner la dimension de chacun des sev F_k.*
3. *Montrer qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^4$ tel que $(x, \nu(x), \nu^2(x), \nu^3(x))$ forme une base de $\mathbb{R}^4$. Exhiber un tel vecteur x.*
4. *En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de ν est*
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
5. *Trouver une matrice inversible $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $A = PJP^{-1}$.*

Exercice de cours 89. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. *Vérifier que $A^3 = 0$ et $A^3 \neq 0$. On note ν l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.*
2. *Dans les notations de l'exercice 87, décrire la suite $(F_k)_{0\leqslant k\leqslant N}$ des noyaux itérés de ν. Donner la dimension de chacun des sev F_k.*

3. *Soit G_{N-1} un supplémentaire de F_{N-1} dans $F_N = \mathbb{R}^4$. Montrer que $\nu(G_{N-1}) \subset F_{N-1}$.*

4. *Trouver un supplémentaire G_{N-2} de F_{N-2} dans F_{N-1} tel que $\nu(G_{N-1}) \subset G_{N-2}$.*

5. *En procédant ainsi de suite, montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de ν est*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. *Trouver une matrice inversible $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $A = PJP^{-1}$.*

Exercice de cours 90. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. *Vérifier que $A^2 = 0$ et $A \neq 0$. On note ν l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.*

2. *Dans les notations de l'exercice 87, décrire la suite $(F_k)_{0 \leqslant k \leqslant N}$ des noyaux itérés de ν. Donner la dimension de chacun des sev F_k.*

3. *Soit G_{N-1} un supplémentaire de F_{N-1} dans $F_N = \mathbb{R}^4$. Montrer que $\nu(G_{N-1}) \subset F_{N-1}$.*

4. *En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de ν est*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. *Trouver une matrice inversible $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $A = PJP^{-1}$.*

Exercice de cours 91. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. *Vérifier que $A^2 = 0$ et $A \neq 0$. On note ν l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.*

2. *Dans les notations de l'exercice 87, décrire la suite $(F_k)_{0 \leqslant k \leqslant N}$ des noyaux itérés de ν. Donner la dimension de chacun des sev F_k.*

3. *Soit G_{N-1} un supplémentaire de F_{N-1} dans $F_N = \mathbb{R}^4$. Montrer que $\nu(G_{N-1}) \subset F_{N-1}$.*

4. *En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de ν est*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. *Trouver une matrice inversible $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $A = PJP^{-1}$.*

Remarque 13. *Les matrices des quatre exercices de cours précédents sont deux à deux non semblables, et toute matrice nilpotente de $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ est semblable à l'une d'entre elles.*