Corrigé de la deuxième session d'examen de Mathématiques
Le 9 septembre 2002, 4h

QUESTION DE COURS ET APPLICATIONS (4 points)

1. Voir le résumé de cours numéro 7 (0,5 points énoncé + 1 point preuve).

2. On a $n^{-1} \leqslant a_n \leqslant n$, donc $n^{-\frac{1}{n}} \leqslant a_n^{\frac{1}{n}} \leqslant n^{\frac{1}{n}}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n^{\frac{1}{n}}|z|) = |z|$ pour $z \in \mathbb{C}$.

D'après le critère de Cauchy, si $|z| < 1$, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente et si $|z| > 1$, $\sum a_n z^n$ diverge. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est donc 1 (1 point).

3. Si $z \neq 0$, $\frac{|(n+1)5^{n+1}z^{n+1}|}{|n5^n z^n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 5|z|$. D'après le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de cette série entière est $R = \frac{1}{5}$ (0,5 points). La série entière $\sum 5^n z^n$ a même rayon de convergence $R = \frac{1}{5}$ que la série $\sum n5^n z^n$ et on a $G(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 5^n x^n = \frac{1}{1-5x}$ si $x \in]-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}[$.

Pour $x \in]-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}[$, G est dérivable et $G'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n5^n x^{n-1} = \frac{5}{(1-5x)^2}$. Alors :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n5^n x^n = xG'(x) = \frac{5x}{(1-5x)^2}, x \in]-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}[\quad \text{(1 point)}$$

EXERCICE 1 (4 points)

La fonction

$$f : t \in]1, +\infty[\to \left(\sqrt{1 + \frac{\sin t}{t^2}} - 1\right) \frac{1}{(\ln t)^\beta}$$

est continue sur $]1, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment $[a, b] \subset]1, +\infty[$. La convergence de I revient à la convergence des intégrales. $I_1 = \int_1^2 f(t)dt$ (à étudier pour la borne 1) et $I_2 = \int_2^{+\infty} f(t)dt$ (à étudier pour la borne $+\infty$). (0,75 points).

1. Étude de I_1 On a : $\frac{1}{(\ln t)^\beta} \sim \frac{1}{(t-1)^\beta}$ en 1 donc :

$$f(t) \sim \left(\sqrt{1 + \sin 1} - 1\right) \frac{1}{(t-1)^\beta} \quad \text{en 1.}$$

Puisque $f(t) \geqslant 0$ au voisinage de 1, le théorème des équivalents s'applique. I_1 est convergent si et seulement si $\int_1^2 \frac{dt}{(t-1)^\beta}$ converge, donc si $\beta < 1$.

2. Étude de I_2 On a : $|f(t)| \sim \frac{|\sin t|}{2t^2(\ln t)^\beta}$ *en* $+\infty$. On a : $\frac{|\sin t|}{2t^2(\ln t)^\beta} \leqslant \frac{1}{2t^2}$ pour $t \geqslant e$; l'intégrale de Ricmann $\int_2^\infty \frac{dt}{t^2}$ converge, donc d'après le théorème de comparaison d'abord, ensuite, celui des équivalents (toutes les fonctions en question sont positives), l'intégrale $\int_2^\infty |f(t)|dt$ est convergente, I_2 est absolument convergente, donc convergente (1,5 points).
On conclut que I converge si et seulement si $\beta < 1$ (0,25 points).

EXERCICE 2 (8 points)

a. Calculons le polynôme caractéristique P de f_α, pour $\alpha \in \mathbb{R}$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2\alpha & 6 & \alpha \\ 0 & 5-\lambda & 0 & 3 \\ -3 & 2\alpha & 5-\lambda & 4 \\ 0 & -6 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & 2\alpha & 6 & \alpha \\ 0 & 5-\lambda & 0 & 3 \\ -3 & 2\alpha & 5-\lambda & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & \alpha & 6 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & \alpha & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$P(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-2)^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1 point). Le polynôme caractéristique de f_α est scindé, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, donc f_α trigonalisable, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (0,5 points). L'endomorphisme f_α est diagonalisable si et seulement si les sous-espaces propres E_{-1} et E_2 associés aux valeurs propres - 1 et 2 d'ordre de multiplicité deux vérifient $\dim E_{-1} = 2$ et $\dim E_2 = 2$.
On a $\dim E_1 = \dim(f_\alpha + i_4) = 4 - \mathrm{rg}(A_\alpha + I_4)$ et $\dim E_2 = 4 - \mathrm{rg}(A_\alpha + 2I_4)$. ($i_4$ est l'application identité de E et I_4 la matrice identité d'ordre 4).

$$\mathcal{A}_\alpha + I_4 = \begin{vmatrix} -3 & 2\alpha & 6 & \alpha \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ -3 & 2\alpha & 6 & \alpha \\ 0 & -6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

On a $rg(A_\alpha + I_4) \leqslant 2$ ($L_3 = L_1$ et $L_4 = -L_2$) et $\begin{vmatrix} -3 & \alpha \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$ donc $\mathrm{rg}(A_\alpha + I_4) = 2$ et $\dim E_{-1} = 2$.

$$\mathcal{A}_\alpha - 2I_4 = \begin{vmatrix} -6 & 2\alpha & 6 & \alpha \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ -3 & 2\alpha & 3 & \alpha \\ 0 & -6 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

On a : $\mathrm{rg}(A_\alpha - 2I_4) \leqslant 3$ ($L_4 = -2L_2$ et $C_1 = -C_3$), $\begin{vmatrix} 2\alpha & 6 & \alpha \\ 3 & 0 & 3 \\ 2\alpha & 3 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & \alpha \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = 9\alpha, \begin{vmatrix} 6 & \alpha \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$
Si $\alpha \neq 0$, $\mathrm{rg}(A_\alpha - 2I_4) = 3$, $\dim E_2 = 1$ et f_α n'est pas diagonalisable.
Si $\alpha = 0$, $\mathrm{rg}(A_\alpha - 2I_4) = 2$, $\dim E_2 = 2, \dim E_{-1} = 2$ et f_0 est diagonalisable.

On conclut que f_α est diagonalisable si et seulement si $\alpha = 0$ (1 point).

b. Si A_3 est semblable à C alors il existe une base $\mathcal{B}' = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ de $\mathbb{R}^4$ telle que $f_3(b_1) = ab_1$, $f_3(b_2) = bb_2 + b_1$, $f_3(b_3) = cb_3$, $f_3(b_4) = d, b_4$. Si l'on pose $a = b = 2$, (b_1) est une base de E_2, et si $c = d = -1$, (b_3, b_4) est une base de E_{-1}.

Cherchons donc des bases de E_{-1} et de E_2. Posons $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$$u \in E_1 \Leftrightarrow (A_3 + I_4)U = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3t & = -6y - 6z \\ 3t & = -6y. \end{cases} \begin{cases} x = 2z \\ t = 2y \end{cases}.$$

$$u = (2z, y, z, -2y) = z(2,0,1,0) + y(0,1,0,-2), z, y \in \mathbb{R}.$$

Posons $b_3 = (2,0,1,0)$ et $b_4 = (0,1,0-2)$, alors les deux vecteurs non colinéaires b_3 et b_4 de E_{-1} constituent une base de E_{-1}.

$$u \in E_2 \Leftrightarrow (A_3 - 2I_4)U = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6y + 6z + 3t & = 6x \\ 3y + 3t & = 0 \\ 6y + 3z + 3t & = 3x \end{cases} \begin{cases} z = x \\ y = t = 0 \\ \end{cases}.$$

$u = (x, 0, x, 0) = x(1, 0, 1, 0)$. Posons $b_1 = (1, 0, 1, 0)$, alors le vecteur b_1 non nul de E_2 constitue une base de E_2.

Cherchons un vecteur $b_2 = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $f_3(b_2) = 2b_2 + b_1$ soit :

$$(A_3 - 2I_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{cases} -6x & + & 6y & + & 6z & + & 3t & = & 1 \\ & & & & 3z & + & 3t & = & 0 \\ -3x & + & 6y & + & 3z & + & 3t & = & 1. \end{cases}$$

Le vecteur $b_2 = \left(0, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right)$ est solution de ce système. Montrons que $\mathcal{B}' = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ est bien une base de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \neq 0$$

donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$ telle que $M_{\mathcal{B}'}(f_3) = C$, donc $A = M_{\mathcal{B}}(f_3)$ est bien semblable à C (1,5 points).

La matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice des coordonnées, dans la base canonique, des vecteurs b_1, b_2, b_3, b_4. On calcule (par la méthode de Gauss-Jordan, en résolvant un système linéaire ou à l'aide des déterminants).

$$P^{-1} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \text{(0,5 points)}$$

Calculons $\mathcal{C}^n$, pour $n \geqslant 1$. On a $\mathcal{C} = D + N$, où :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad N = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

N est nilpotente, $N^2 = 0, DN = ND$.

Alors, pour $n \geqslant 1$,$C^n = D^n + nD^{n-1}N = \begin{vmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{vmatrix}$ et :

$$A_3^n = PC^nP^{-1} \begin{vmatrix} -2^n + 2(-1)^n & 6n2^{n-1} & 2^{n+1} - 2(-1)^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & 2^{n+1} - (-1)^n & 0 & 2^n - (-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & 6n2^{n-1} & 2^{n+1} - (-1)^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & -2^{n+1} + 2(-1)^n & 0 & -2^n + 2(-1)^n \end{vmatrix} \text{(1 point)}.$$

c. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$. Alors, $X_{n+1} = A_3 X_n$ et $X_n = A_3^n X_0, n \geqslant 1$ (par récurrence sur n). D'où :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix} = A_3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \\ (-1)^n \\ 2^n \\ -2(-1)^n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{(0,5 points)}$$

Alors,

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{(-1)^n}{2^n} = (-\frac{1}{2})^n, \quad n \in N \ .$$

La série géométrique $\sum(-\frac{1}{2})^n$ est absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}. \text{ (0,5 points)}$$

d. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, le système (1) s'écrit :

$$X' = A_3 X = (PCP^{-1})X$$

soit : $(P^{-1}X)' = P^{-1}X' = C(P^{-1}X)$.

En posant : $P^{-1}X = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$, on a $Y' = CY$, soit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & 2y_1 + y_2 \\ y_2' & = & 2y_2 \\ y_3' & = & -y_3 \\ y_4' & = & -y_4 \end{array} \right.$$

dont la solution est :

$$Y' = CY, \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y_1(t) & = & (c_2 t + c_1)e^{2t} \\ y_2(t) & = & c_2 e^{2t} \\ y_3(t) & = & c_3 e^{-t} \\ y_4(t) & = & c_4 e^{-t} \end{array} \right. \quad (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{R}^4, t \in \mathbb{R}$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & (c_1 + c_2 t)e^{2t} + 2c_3 e^{-t} \\ x_2(t) & = & \frac{1}{3}c_2 e^{2t} + c_4 e^{-t} \\ x_3(t) & = & (c_1 + c_2 t)e^{2t} + c_3 e^{-t} \\ x_4(t) & = & -\frac{1}{3}c_2 e^{2t} - 2c_4 e^{-t} \end{array} \right. \quad (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{R}^4, t \in \mathbb{R} \quad \text{(1 point)}$$

Une base de l'espace vectoriel des solutions est :

$$\left(e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{2t}\begin{pmatrix} t \\ 1/3 \\ t \\ -1/3 \end{pmatrix}, e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right),$$

soit,

$$\left(e^{2t}b_1, e^{2t}(tb_1+b_2), e^{-t}b_3, e^{-t}b_4\right)$$

(0,5 points).

EXERCICE 3 (7 points)

a. Si $z=0$, $u_n(0)=0$ pour $n\geqslant 1$, $\sum u_n(0)$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)=0$. Si $x>0$, $e^{x/n}-1>0$ et $(e^{x/n}-1)_{n\geqslant 1}$ tend vers 1 en décroissant. Si $x<0$, $e^{x/n}-1<0$, $\left(e^{x/n}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 1 en croissant et $(1-e^{x/n})_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 en décroissant.

Alors, pour $x\in\mathbb{R}^*$, $\sum u_n(x)$ est une série alternée telle que $(|u_n(x)|)_{n\geqslant 1}$ tend vers zéro en décroissant, donc $\sum u_n(x)$ converge et on a

$$|R_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| = |e^{x/(n+1)}-1|, \quad n\geqslant 1$$

(valable aussi pour x = 0) (2,5 points)

b. Si $x\in\mathbb{R}^*, |u_n(x)| = |e^{z/n}-1| \sim \frac{|x|}{n}$, la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum |u_n(x)|$ diverge et $\sum u_n(x)$ n'est pas absolument convergente (0,5 points).

c. Il suffit de considérer des segments de la forme $[-a,a], a>0$.

$$\sup_{|x|\leqslant a} |R_n(x)| \leqslant \sup_{|x|\leqslant a} |e^{x/n+1}-1| = \max(e^{a/(n+1)}-1, 1-e^{-a/(n+1)}) = a_{n+1}$$

(car la fonction $x\in\mathbb{R}\mapsto e^{x/n+1}-1$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et négative pour $x<0$).

On a $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=0$, donc la suite des restes $(R_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers 0 sur $[-a,a]$ et $\sum u_n$ converge uniformément sur $[-a,a]$ (1 point).

d. Les fonctions u_n ne sont pas bornées sur $\mathbb{R}$ $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n(x)| = +\infty\right)$ donc la série $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$ et ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ (la convergence uniforme de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}$ implique la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vers la fonction nulle) (1 point).

e. Pour $n\geqslant 1$, u_n est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $u_n'(x) = \frac{(-1)}{n}e^{x/n} = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{u_n(x)}{n}, x\in\mathbb{R}$. Montrons la convergence uniforme de la série $\sum \frac{u_n}{n}$ sur tout segment de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, sur tout segment $[-a,a], a>0$.

Pour $x\in\mathbb{R}^*$, comme dans la question 3a, on vérifie que $\sum \frac{u_n(x)}{n}$ est une série alternée telle que $(\frac{|u_n(x)|}{n})_{n\geqslant 1}$ tend vers zéro en décroissant, donc la série converge et on a :

$$|R_n'(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{u_k(x)}{k}| \leqslant \frac{|u_{n+1}(x)|}{n+1} = \frac{|e^{x/(n+1)}-1|}{n+1} \leqslant \frac{a_{n+1}}{n+1} \quad \text{si} \quad |x|\leqslant a$$

donc

$$\mathop{sup}_{|x|\leqslant a} |R_n'(x)| \leqslant \frac{a_{n+1}}{n+1} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{n+1} = 0,$$

ce qui montre la convergence uniforme sur $[-a,a]$ de la série $\sum \frac{u_n}{n}$. La série numérique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, donc on peut conclure que la série $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$. Comme $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de dérivation (T-4' du résumé) et on conclut que $u=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ (et $u'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x), x\in\mathbb{R}$) (1,5 points).

f. Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $a > 0$ tel que $|x| \leqslant a$, la série $\sum u_n$ est uniformément convergent sur $[-a, a]$ d'après le théorème d'intégration la série $\sum(\int_0^s u_n(t)dt)$ est uniformément convergente sur $[-a, a]$ et pour $s \in [-a, a]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^s u_n(t)dt = \int_0^s u(t)dt$. Calculons :

$$\int_0^s u_n(t)dt = (-1)^n \int_0^s (e^{t/n} - 1)dt = (-1)^n \left[ne^{t/n} - t\right]_0^s = (-1)^n ne^{s/n} - n - s = (-1)^n v_n(s)$$

La série $\sum(-1)^n v_n$ est uniformément convergente sur $[-a, a]$, en particulier $\sum(-1)^n v(x)$ converge et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n(x) = \int_0^x u(t)dt$ (1 point).