Université Paris Sud — S3 MIAS 2002-2003
Centre d'Orsay — Mathématiques

Examen de Mathématiques

Le 30/01/2003 - 13h30-17h30 - Barème indicatif - Documents écrits et calculettes interdits

QUESTION DE COURS (3 points)

Soient E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in L(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ une racine d'ordre de multiplicité α du polynôme caractéristique de f et E_λ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier la réponse par une preuve ou un contre-exemple.

1. On a $dim(E_\lambda) \leq \alpha$.

2. On note i_E l'application identité de E. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une racine d'ordre de multiplicité n du polynôme caractéristique de f et $f \neq \lambda i_E$, alors $1 \leq dim(E_\lambda) < n$.

EXERCICE 1 (3 points)

Soit γ un nombre réel, on considère l'intégrale :

$$I = \int_0^{1/2} \frac{\ln(1 + t \sin t)}{(t|\ln t|)^\gamma} \, dt$$

1a. Pour quelles valeurs de γ l'intégrale I est-elle convergente ?

1b. Calculer $\lim_{x \to 0} \int_{x^2}^{x} \frac{\ln(1 + t\sin t)}{(t \ln t)^2} \, dt$ et $\lim_{x \to 0} \int_{x^4}^{1/4} \frac{\ln(1 + t\sin t)}{(t \ln t)^4} \, dt$.

EXERCICE 2 (4 points)

2a. Montrer qu'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R telle que

$$\frac{1}{x^2 + 4} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \text{lorsque } x \in]-R, +R[.$$

La série $\sum a_n z^n$ est-elle convergente, lorsque $z \in \mathbb{C}$, $|z| = R$?

2b. Déterminer le rayon de convergence R' de la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} z^n$ et étudier sa convergence lorsque $z \in \mathbb{C}$, $|z| = R'$. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$, lorsque $x \in]-R', R'[$.

EXERCICE 3 (8 points)

Soient α et β deux paramètres réels. Soit $f_{\alpha,\beta}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, dans la base canonique $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, est

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \alpha + \beta & 0 & 1 - \beta \\ 2 + \alpha & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

3a. Pour quelles valeurs des paramètres réels α et β l'endomorphisme $f_{\alpha,\beta}$ est-il trigonalisable ? est-il diagonalisable ? (On remarquera que $\alpha + 1$ est valeurs propre de $f_{\alpha,\beta}$ et qu'il y a trois cas à étudier).

Dans les trois questions suivantes, **on suppose** $\alpha = \beta = 0$.

3b. Montrer qu'il existe une matrice P d'ordre trois et à coefficients réels telle que la matrice $D = P^{-1} A_{0,0} P$ soit diagonale. Calculer P et P^{-1}. T.S.V.P.

3c. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par récurrence par

$$u_0=-1, u_1=1, u_2=5,\ u_{n+3}=2u_n+u_{n+1}-2u_{n+2},\ n\in\mathbb{N}. \text{ On pose } X_n=\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix}, n\in\mathbb{N}.$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, exprimer X_n en fonction de $A_{0,0}$, X_0 et n, puis calculer u_n en fonction de n.

3d. On considère le système différentiel linéaire $X'=A_{0,0}X$, où $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, est une fonction vectorielle continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

(i) Déterminer une base de l'ensemble des solutions de ce système.

(ii) Déterminer toutes les solutions du système différentiel $X'=A_{0,0}X+B$, où $B=\begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 0 \\ 2e^{-t} \end{bmatrix}$.

3e. On suppose $\alpha=-3,\ \beta=0$. Montrer que la matrice $A_{-3,0}$ est semblable à la matrice

$$M=\begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des nombres réels que l'on déterminera.}$$

Donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme $f_{-3,0}$ est M.

EXERCICE 4 (8 points)

Soit s un réel strictement positif, pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x)=\dfrac{\ln(1+n^s x^2)}{n^s}$.

4a. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$.

4b. Montrer que si $s>1$ la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $u=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. La fonction u est-elle paire ? croissante ?

Dans toute la suite, on suppose $s>1$.

4c. La série $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément vers u sur $\mathbb{R}$? converge-t-elle uniformément vers u sur tout segment de $\mathbb{R}$? La fonction u est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

4d. Montrer que la fonction u est continûment dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (on pourra d'abord le prouver sur un segment $[a,b]\subset\mathbb{R}^{*+}$).

4e. Dans cette question, **on suppose** $s>2$. Montrer qu'alors la fonction u est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer la fonction u' comme la somme d'une série de fonctions.

4f. Dans cette question, **on suppose** $1<s\leq 2$.

(i) Montrer que si u est dérivable en zéro, alors $u'(0)=0$.

(ii) Montrer que $u(n^{-s/2})\geq(\ln 2)\sum_{k=n}^{\infty}k^{-s}$, puis que $\sum_{k=n}^{\infty}k^{-s}\geq((s-1)n^{s-1})^{-1},\ n\in\mathbb{N}^*$.

(iii) Montrer que la suite $\left(n^{s/2}u(n^{-s/2})\right)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers zéro. En déduire que la fonction u n'est pas dérivable en zéro.