

Sur les solitons de Kähler-Ricci dans les variétés de Fano toriques

DELGOVE François

sous la direction de
PALI Nefton

17 septembre 2015

Remerciements

Avant de commencer, je tiens à remercier Nefton Pali, qui a bien voulu encadrer ce mémoire de M2 et me faire découvrir la géométrie kählérienne et les solitons de Kähler-Ricci. Je remercie aussi Hugues Auvray pour sa relecture attentive et ses corrections et suggestions pertinentes.

Introduction

Un problème célèbre en géométrie riemannienne est *la recherche de métrique d'Einstein*. Une telle métrique g est une métrique riemannienne qui est proportionnelle à son tenseur de Ricci, noté Ric , c'est-à-dire qu'il existe un réel λ appelé constante d'Einstein tel que

$$Ric = \lambda g.$$

Cette équation est importante car elle est reliée à *l'équation d'Einstein* :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu},$$

qui décrit en relativité générale comment la matière et l'énergie modifient la géométrie de l'espace-temps. Dans ce mémoire, nous nous placerons du point de vue de la géométrie complexe et nous travaillerons en particulier sur des variétés kählériennes compactes, ainsi toute métrique g induit une $(1, 1)$ -forme réelle ω que l'on appelle *forme de Kähler* et on peut s'intéresser à une équation similaire :

$$Ric(\omega) = \lambda\omega,$$

où $Ric(\omega)$ est la *forme de Ricci associée à ω* . Une métrique vérifiant une telle équation sera appelée dans ce cas *métrique de Kähler-Einstein*.

Pour étudier cette équation, il existe un lien entre ces métriques et la convergence du *flot de Kähler-Ricci*. Ce dernier consiste en une famille ω_t de métriques kählériennes dépendant d'un paramètre de temps t variant dans un intervalle de \mathbb{R} de la forme $[0, T[$ où $T \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ vérifiant

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega = -Ric(\omega), \quad \omega|_{t=0} = \omega_0,$$

où ω_0 est une forme de Kähler fixée au départ. On peut montrer qu'il existe une solution maximale à cette équation définie sur un intervalle $[0, T_{max}[$ où $T_{max} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. L'idée maintenant est de déterminer T_{max} et d'étudier la limite de ω_t quand t tend vers T_{max} . Ici, les résultats ne sont pas généraux et dépendent d'un invariant cohomologie de la variété kählérienne compacte M sous laquelle nous travaillons : *la première classe de Chern $c_1(M)$* . Nous pouvons la définir comme la classe de cohomologie (réelle) de la forme de Kähler $Ric(\omega)$ (pour une forme de Kähler sur M quelconque, on montre qu'elle ne dépend pas d'un tel choix). Ce qui sera important, c'est le "signe" de $c_1(M)$.

En effet, si $c_1(M) < 0$ alors on peut montrer que $T_{max} = +\infty$ et que la solution maximal $\omega(t)$ de l'équation du flot de Ricci (modulo renormalisation) converge vers une métrique de Kähler-Einstein. Par contre le cas où $c_1(M) > 0$ est plus difficile, en effet, on peut montrer qu'il existe des variétés compactes M dont la première classe de Chern est positive (on dit que c'est *une variété de Fano*) qui n'admettent pas de métriques de Kähler-Einstein. Nous introduisons donc la notion de *soliton de Kähler-Ricci*. On dit que (X, g) est un soliton de Kähler-Ricci sur M si

- X est un champ de vecteurs holomorphe (complexe) sur M ,
- g est une métrique kählérienne sur M

telle que

$$\text{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \mathcal{L}_X(\omega_g),$$

où on a posé :

- ω_g est la forme de Kähler associée g ,
- $\text{Ric}(\omega_g)$ est la forme de Ricci associée ω_g ,
- $\mathcal{L}_X(\omega_g)$ est la dérivée de Lie de ω_g dans la direction de X .

On remarque immédiatement que cette équation généralise bien celle de Kähler-Einstein, en effet il suffit de prendre $X = 0$ pour la retrouver. L'objectif final de ce mémoire est alors de montrer l'existence de solitons de Kähler-Ricci sur des variétés compactes de Fano "particulières". Plus précisément, nous avons en vue le théorème suivant :

Théorème 0.1 *Il existe un soliton de Kähler-Ricci, qui est unique modulo les automorphismes holomorphes, sur toute variété compacte torique kählérienne de Fano.*

Le mémoire sera divisé en plusieurs parties. La première partie aura pour objectif de définir la notion de variétés toriques et de montrer quelques propriétés intéressantes qui réapparaîtront à la fin dans la démonstration du théorème d'existence de solitons de Kähler-Ricci. La deuxième et la troisième partie auront pour objectif de définir les notions de géométrie kählérienne nécessaire à la compréhension du mémoire. La quatrième partie et la cinquième partie introduisent et étudient la notion essentielle de flot de Kähler-Ricci et démontrent les résultats de convergence énoncés plus haut. Finalement la sixième partie et dernière partie étudie les solitons de Kähler-Ricci.

Table des matières

1	Géométrie symplectique	7
1.1	Variété symplectique	7
1.1.1	Définitions générales	7
1.1.2	Champ de vecteurs hamiltoniens	8
1.2	Action d'un groupe de Lie sur une variété symplectique	9
1.2.1	Action symplectique	10
1.2.2	Action hamiltonienne	11
1.2.3	Propriétés de l'application moment	12
1.3	Variété torique symplectique	15
1.4	Réduction symplectique	17
1.5	Classification des variétés toriques symplectiques compactes	20
1.5.1	Polytope de Delzant	20
1.5.2	Théorème de classification des variétés toriques	20
1.5.3	Construction de M_Δ	21
2	Géométrie kählérienne	29
2.1	Étude des variétés presque complexes et complexes	29
2.1.1	Structure presque complexe et complexe	29
2.1.2	Fibré tangent d'une variété presque complexe	31
2.1.3	Fibré cotangent d'une variété presque complexe	32
2.1.4	Objets holomorphes sur une variété complexe	33
2.2	Étude des variétés kählériennes	35
2.2.1	Définitions générales	35
2.2.2	Expressions en coordonnées locales	37
2.2.3	Réduction kählérienne	38
2.3	Variété torique kählérienne	39
2.3.1	Définitions générales	39
2.3.2	Potentiels de Kähler pour les variétés toriques kählériennes	41
2.3.3	Formule de Guillemin	44
3	Résultats sur les connexions	48
3.1	Rappels sur les fibrés vectoriels holomorphes	48
3.1.1	Définitions générales	48
3.1.2	Exemples importants	50
3.1.3	Fibrés en droites	52
3.1.4	Structure holomorphe sur un fibré vectoriel	52
3.2	Courbure d'une connexion	54
3.2.1	Notions de connexions et de courbures	54
3.2.2	Structure hermitienne et connexion de Chern	56
3.2.3	Première classe de Chern d'un fibré vectoriel	60
3.2.4	Première classe de Chern d'une variété kählérienne	62
3.2.5	Connexion de Levi-Civita pour les variétés kählériennes	63

4	Le Tenseur de Ricci	66
4.1	Rappels de géométrie riemannienne	66
4.1.1	Résultats généraux sur les connexions	66
4.1.2	Connexion de Levi-Civita	68
4.1.3	Tenseur de courbure	69
4.1.4	Tenseur de Ricci	70
4.2	Tenseur de Ricci dans le cas kählérien et conséquences	71
4.2.1	Définitions et propriétés	71
4.2.2	Expressions en coordonnées locales	72
4.2.3	Lien entre tenseur de Ricci et première classe de Chern	75
4.2.4	Coordonnées normales	76
4.2.5	Dérivées covariantes	77
4.2.6	Formules de commutations des dérivés covariantes	79
4.2.7	Notions de convergences	80
4.2.8	Théorème d'Arzelà-Ascoli	80
4.2.9	Théorème d'intégration par parties	81
4.2.10	Principe du maximum	84
5	Étude du flot de Kähler-Ricci	86
5.1	Le flot de Kähler-Ricci	86
5.1.1	Définitions	87
5.1.2	Évolution de la courbure scalaire	89
5.1.3	Évolution de la trace	92
5.2	Existence et unicité de solutions maximales	94
5.2.1	L'équation de Monge-Ampère parabolique	95
5.2.2	Estimations pour le potentiel et la forme volume	98
5.2.3	Borne uniforme pour la métrique	101
5.2.4	Théorème d'existence et d'unicité de solutions maximales	104
5.3	Convergence du flot de Kähler-Ricci	104
5.3.1	Étude dans le cas où $c_1(M) < 0$	106
5.3.2	Étude dans le cas où $c_1(M) = 0$	111
5.3.3	Étude dans le cas où $c_1(M) > 0$	111
6	Étude des Solitons de Kähler-Ricci	112
6.1	Les solitons de Kähler-Ricci	112
6.1.1	L'équation des solitons de Kähler-Ricci	112
6.1.2	Les théorèmes d'existences et d'unicités	113
6.1.3	Étude de l'équation des solitons de Kähler-Ricci	113
6.2	L'invariant de Futaki pour les solitons de Kähler-Ricci	118
6.2.1	Une première définition de l'invariant de Futaki	118
6.2.2	Une autre formulation de l'invariant de Futaki	128
6.2.3	Étude de l'invariant de Futaki	134
6.3	Les solitons de Kähler-Ricci sur les variétés toriques de Fano	140
6.3.1	Rappel sur les variétés toriques	140

6.3.2	Les champs de vecteurs holomorphes sur une variété kählérienne torique de Fano	142
6.3.3	Une métrique K_0 -invariante sur une variété kählérienne torique de Fano	144
6.3.4	Étude des solitons de Kähler-Ricci dans le cas des variétés torique de Fano	151
6.4	Existence des solitons de Kähler-Ricci dans le cas torique	156
6.4.1	La méthode de la continuité	157
6.4.2	Existence d'une solution au temps $t = 0$	160
6.4.3	Caractère ouvert de l'ensemble des solutions	160
6.4.4	Caractère fermé de l'ensemble des solutions	161
6.4.5	Démonstration de l'estimation à priori	162
A	Annexe : Étude du linéarisé de l'application F définie dans la section 6.4.3	173
A.1	Espaces d'Hölder	173
A.1.1	Cas de \mathbb{R}^n	173
A.1.2	Cas d'une variété riemannienne compacte	174
A.2	Opérateurs Elliptiques	175
A.3	Adjoint formel d'un opérateur	177
A.4	Inversibilité de $L_{(\varphi_{t_0}, t_0)}$	178
A.5	Le cas où $t = 0$	181
A.6	Regularisation de l'équation (A.1)	182
B	Annexe : Solution de l'équation 6.35 pour $t = 0$	183
B.1	Introduction	183
B.2	Conditions nécessaires	184
B.3	Méthode de la continuité	186
B.3.1	Caractère ouvert de S	188
B.3.2	Caractère fermé de S	190

1 Géométrie symplectique

1.1 Variété symplectique

1.1.1 Définitions générales

Dans cette partie, nous allons juste rappeler les notions de *variétés symplectiques* et de *symplectomorphismes*.

Définition 1.1 On dit que le couple (M, ω) est une variété symplectique si :

- (1) M est une variété différentielle
- (2) $\omega \in \Gamma(\wedge^2 T^*M)$ est une 2-forme fermée non-dégénérée.

Remarque. Pour tout $x \in M$, $T_x M$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée ω_x . Matriciellement, la forme ω_x est représentée par une matrice antisymétrique inversible donc

$$0 \neq \det(\omega_x) = \det(-\omega_x) = (-1)^{\dim T_x M} \det(\omega_x).$$

Cela implique que la dimension de $T_x M$ doit être paire. Or le supremum des dimension de $T_x M$ est égal à la dimension de M donc M est obligatoirement une variété différentielle de dimension paire.

L'exemple le plus simple mais qui nous servira dans la section 1.5.3 est *l'espace vectoriel symplectique standard de dimension $2n$* : $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ où \mathbb{R}^{2n} est l'espace vectoriel réel canonique de dimension $2n$ muni de la forme bilinéaire ω définie par :

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

de plus, si $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ sont les coordonnées dans \mathbb{R}^{2n} alors

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i.$$

Terminons par la définition de *morphismes symplectiques* et de *symplectomorphismes* :

Définition 1.2 Soient (M, ω) et (N, η) deux variétés symplectiques. Une application différentiable $f : (M, \omega) \rightarrow (N, \eta)$ est un morphisme symplectique si

$$f^* \eta = \omega.$$

Remarque. Comme ω est non dégénérée, $d_x f$ est alors un isomorphisme linéaire pour tout $x \in M$ et donc f est un difféomorphisme local.

De plus, si f est un difféomorphisme (global) alors on dit que f est un *symplectomorphisme* (ou *difféomorphisme symplectique*). On peut alors définir $Symp(M, \omega)$ comme le groupe (pour la composition usuelle des applications) des symplectomorphismes de (M, ω) . Terminons en disant que deux variétés symplectiques sont *symplectomorphes* s'il existe un symplectomorphisme entre elles.

1.1.2 Champ de vecteurs hamiltoniens

Dans cette partie, nous allons définir les notions de *champs de vecteurs hamiltoniens et localement hamiltoniens*. Pour cela, on considère une variété symplectique (M, ω) .

L'idée va être d'exploiter le fait que ω soit non-dégénérée, cette propriété va induire un isomorphisme entre le fibré tangent et cotangent de M (comme dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie où un produit scalaire induit un isomorphisme entre l'espace vectoriel et son dual), cela va nous donner un lien entre les fonctions lisses de M et les champs de vecteurs de M par l'intermédiaire de leur application tangente.

Plus précisément, l'isomorphisme (de fibrés vectoriels) entre TM et T^*M est donné par

$$\omega^\flat : \begin{cases} TM & \longrightarrow T^*M \\ X \in T_x M & \longmapsto (Y \mapsto \omega_x(Y, X) \in T_x^* M) \end{cases} .$$

Maintenant, si $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ alors $df \in T^*M$, donc l'isomorphisme précédent nous donne l'existence et l'unicité d'un champ de vecteurs X_f vérifiant

$$\omega(Y, X_f(x)) = df_x(Y) \quad \forall Y \in T_x M,$$

ce qui nous conduit à la définition suivante :

Définition 1.3 Soit $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, On appelle *champ de vecteurs hamiltonien associé à f* , et on le note X_f , l'unique champ de vecteurs sur M vérifiant :

$$\omega(Y, X_f(x)) = df_x(Y) \quad \forall Y \in T_x M.$$

Remarque. La condition précédente peut encore se ré-écrire, en utilisant le produit intérieur, de la façon suivante :

$$i_{X_f}(\omega) = -df.$$

Les champs de vecteurs pour lesquels il existe une application $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ vérifiant la relation précédente seront importants pour la suite, ce qui nous conduit à la définition suivante :

Définition 1.4 Soit $X \in \Gamma(TM)$. On dit que X est *hamiltonien* si $i_X \omega$ est exacte i.e.

$$\exists f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}), \quad i_X \omega = df.$$

On dit que X est *localement hamiltonien* si $i_X \omega$ est fermée i.e.

$$d(i_X \omega) = 0.$$

On note $\mathcal{H}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs hamiltoniens et $\mathcal{H}_{loc}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs localement hamiltoniens.

Remarque. La définition 1.4 est compatible avec la définition 1.3.

Nous avons alors la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}(M) \xrightarrow{\iota} \mathcal{H}_{loc}(M) \xrightarrow{\pi} H_{DR}^1(M) \longrightarrow 0,$$

où ι est l'inclusion de $\mathcal{H}(M)$ dans $\mathcal{H}_{loc}(M)$ et π est l'application qui à $X \in \mathcal{H}_{loc}(M)$ associe la classe de cohomologie de De Rham de $\omega^b(X)$. En particulier, on voit que tous les champs de vecteurs localement hamiltoniens sont hamiltoniens si $H_{DR}^1(M)$ est nul i.e. par exemple si M est contractile.

Terminons avec une autre caractérisation du fait d'être localement hamiltonien :

Lemme 1.5 *Soit $X \in \Gamma(TM)$. Le champ de vecteurs X est localement hamiltonien si et seulement si le flot $(\phi_t)_{t \in I}$ de X préserve la forme symplectique ω de M i.e. $\phi_t^* \omega = \omega$ pour tout $t \in I$.*

Démonstration. On utilise la formule de Cartan qui nous dit que

$$\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d,$$

et donc comme ω est fermée alors

$$\mathcal{L}_X \omega = d(i_X \omega).$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} d \circ i_X \omega = 0 &\iff \mathcal{L}_X \omega = 0 \\ &\iff \left. \frac{d}{dt} \phi_t^* \omega \right|_{t=0} = 0 && \text{(par définition de la dérivée de Lie,} \\ &&& \text{on a que } \left. \frac{d}{dt} \phi_t^* \omega \right|_{t=0} = \mathcal{L}_X \omega) \\ &\iff \phi_t^* \omega = \phi_0^* \omega = \omega, \quad \forall t \in I && \text{(car } \phi_0 = \text{id).} \end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière équivalence, on remarque le sens direct vient du fait que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \phi_t^* \omega = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \phi_{t_0+s}^* \omega = \phi_{t_0}^* \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \phi_t^* \omega = \phi_{t_0}^* \mathcal{L}_X \omega.$$

□

1.2 Action d'un groupe de Lie sur une variété symplectique

Dans cette partie, on fixe une variété symplectique (M, ω) et un groupe de Lie G , d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , qui agit sur M par l'application :

$$\phi : \begin{array}{l|l} G \times M & \longrightarrow M \\ (g, x) & \longmapsto g \cdot x \end{array} .$$

Remarque. On rappelle que si G agit sur M alors on définit le *stabilisateur* d'un point $x \in M$ par

$$G_x = \{g \in G, g \cdot x = x\}.$$

Alors on dit que l'action de G est *effective* (ou *fidèle*) si

$$\bigcap_{x \in M} G_x = \{1\},$$

et que l'action de G est *libre* si

$$\forall x \in M, G_x = \{1\}.$$

De plus, on rappelle aussi que ϕ induit un morphisme de groupe entre G et $Diff(M)$ par

$$\phi : \begin{cases} G & \longrightarrow & Diff(M) \\ g & \longmapsto & \phi(g, \cdot) \end{cases}.$$

En particulier, l'action est effective si et seulement si ρ est injective.

1.2.1 Action symplectique

Commençons par la définition d'une *action symplectique* :

Définition 1.6 *On dit que ϕ est une action symplectique si*

$$\phi(g, \cdot)^* \omega = \omega, \quad \forall g \in G,$$

autrement dit si ϕ est un morphisme de groupe entre G et le groupe des symplectomorphismes $Symp(M)$ de M .

Pour définir la notion d'action hamiltonienne, nous avons besoin de la notion de *champs de vecteurs fondamentaux*.

Soit $\xi \in \mathfrak{g}$. On peut associer à ξ un champ de vecteurs X_ξ , dit *champ de vecteurs fondamental associé à ξ* (pour l'action de ϕ) par la formule :

$$X_\xi : \begin{cases} M & \longrightarrow & TM \\ x & \longmapsto & \frac{d}{dt} \phi(\exp(-t\xi), x)|_{t=0} \end{cases}.$$

Remarque. Une propriété importante qui découle de la définition est que X_ξ est le champ de vecteurs sur M dont le flot est donné par $(t, x) \mapsto \phi(\exp(-t\xi), x)$.

Le lemme suivant permettra de chercher une condition nécessaire et suffisante pour que tout champ de vecteurs fondamental soit hamiltonien.

Lemme 1.7 *Soit ϕ est une action symplectique. Tout champ de vecteurs fondamental X_ξ (pour l'action de ϕ) est localement hamiltonien i.e. pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, le flot de X_ξ préserve la forme symplectique de ω de M .*

Démonstration. D'après la remarque précédente, le flot de X_ξ est donné par $\phi_t : x \mapsto \phi(\exp(-t\xi), x)$ or cette application préserve la forme symplectique car l'action ϕ est symplectique, on conclut alors grâce au lemme 1.5. \square

1.2.2 Action hamiltonienne

Passons à la définition d'une *action hamiltonienne* :

Définition 1.8 *On dit que ϕ est une action hamiltonienne s'il existe une application $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ vérifiant*

- (1) ϕ est une action symplectique.
- (2) Pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, le champ de vecteurs fondamental X_ξ est hamiltonien i.e.

$$\forall \xi \in \mathfrak{g}, \exists \mu^\xi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}), \quad i_{X_\xi} \omega = d\mu^\xi.$$

- (3) L'application

$$\Theta : \begin{array}{l} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \\ \xi \longmapsto \mu^\xi \end{array}$$

est un morphisme d'algèbre de Lie (où $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ est munie du crochet de Poisson).

On pose alors

$$\mu : \begin{array}{l} M \longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ p \longmapsto (\xi \mapsto \mu^\xi(p)) \end{array},$$

L'application μ est appelée *application moment* de l'action de G par ϕ .

Remarque. L'hypothèse (3) de la définition précédente est nécessaire car sans elle l'application $X, Y \mapsto \{\theta(X), \theta(Y)\} - \theta([X, Y])$ n'est que localement constante, on demande donc que cette constante soit nulle. On pourra consulter [3] pour plus de détails.

Remarque. On peut montrer que les actions hamiltoniennes sont définies à partir de l'application moment de la façon suivante :

Définition 1.9 *On dit que ϕ est une action hamiltonienne s'il existe une application $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ vérifiant*

- (1) ϕ est une action symplectique.
- (2) Pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, si on pose $\mu^\xi := p \mapsto \langle \mu(p), \xi \rangle$ alors

$$d\mu^\xi = i_{X_\xi} \omega,$$

i.e μ^ξ est l'application hamiltonienne du champ de vecteurs fondamental associé à ξ .

- (3) L'application μ est G -équivariante i.e.

$$\langle \mu(g \cdot m), \xi \rangle = \langle Ad_g^* \mu(m), \xi \rangle,$$

où Ad^* est l'action coadjointe de G sur \mathfrak{g}^* .

Pour plus de simplicité et de concision dans les énoncés qui suivent, nous introduisons la notion de G -espace. On dit que (M, ω, G, μ) est un G -espace si

- (M, ω) est une variété symplectique,
- G un groupe de Lie agissant de manière hamiltonienne sur M et d'application moment μ .

1.2.3 Propriétés de l'application moment

Dans cette partie, nous allons énoncer quelques propriétés de l'application moment qui nous seront utiles par la suite. Pour cela, nous fixons (M, ω, G, μ) est un G -espace et nous noterons ϕ l'action de G sur M , \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G et n la dimension de \mathfrak{g} comme \mathbb{R} -espace vectoriel.

Nous allons commencer par étudier l'application :

$$X : \begin{cases} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ \xi & \longmapsto & X_\xi \end{cases} .$$

Proposition 1.10 *L'application X est \mathbb{R} -linéaire et donc définit en particulier un tenseur*

$$X \in \Gamma(TM) \otimes \mathfrak{g}^* .$$

De plus, ce tenseur a alors pour expression :

$$X = \sum_{i=1}^n X_{\xi_i} \otimes (\xi_i)^* ,$$

où $(\xi_i)_{i=1, \dots, n}$ est une base de \mathfrak{g} .

Démonstration. Nous devons montrer que

$$\forall (\xi, \tilde{\xi}, \lambda) \in \mathfrak{g}^2 \times \mathbb{R}, \quad X_{\tilde{\xi} + \lambda\xi} = X_{\tilde{\xi}} + \lambda \cdot X_\xi .$$

Commençons par rappeler que

$$X_\xi(x) = \frac{d}{dt} \phi(\exp(-t\xi), x)|_{t=0},$$

il faut donc montrer que

$$\frac{d}{dt} \phi(\exp(-t(\tilde{\xi} + \lambda\xi)), x)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \phi(\exp(-t\tilde{\xi}), x)|_{t=0} + \lambda \frac{d}{dt} \phi(\exp(-t\xi), x)|_{t=0} .$$

Autrement dit, en posant pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$:

$$\Omega_\xi : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & M \\ t & \longmapsto & \phi(\exp(-t\xi), x) \end{cases} ,$$

nous devons montrer que pour tout $x \in M$:

$$\frac{d}{dt} \Omega_{\tilde{\xi} + \lambda\xi} |_{t=0} = \frac{d}{dt} \Omega_{\tilde{\xi}} |_{t=0} + \lambda \cdot \frac{d}{dt} \Omega_\xi |_{t=0},$$

i.e.

$$d_0 \Omega_{\tilde{\xi} + \lambda\xi}(1) = d_0 \Omega_{\tilde{\xi}}(1) + \lambda \cdot d_0 \Omega_\xi(1) .$$

Pour le calcul, on va poser :

$$\Theta := \Theta_X : \left\{ \begin{array}{l} G \longrightarrow M \\ y \longmapsto \phi(y, x) \end{array} \right. ,$$

ainsi que pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$:

$$\tau_\xi : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{g} \\ t \longmapsto t \cdot \xi \end{array} \right. ,$$

ainsi on a que

$$\Omega_\xi = \Theta \circ \exp \circ \tau_\xi.$$

Avant de passer au calcul, nous rappelons que l'application tangente de l'exponentielle d'un groupe de Lie en 0 est égale à l'identité (avec les identifications usuelles) i.e.

$$d_0 \exp = \text{id}_{\mathfrak{g}},$$

et que comme τ_ξ est linéaire, nous avons

$$d_0 \tau_\xi(1) = \tau_\xi(1) = \xi.$$

Maintenant, passons au calcul :

$$\begin{aligned} d_0 \Omega_{\tilde{\xi} + \lambda \cdot \xi}(1) &= d_e \Theta \circ d_0 \exp \circ d_0 \tau_{\tilde{\xi} + \lambda \cdot \xi}(1) \\ &= d_e \Theta \circ d_0 \tau_{\tilde{\xi} + \lambda \cdot \xi}(1) \\ &= d_e \Theta(\tilde{\xi} + \lambda \cdot \xi) \\ &= d_e \Theta(\tilde{\xi}) + d_e \Theta(\lambda \cdot \xi) \\ &= d_e \Theta \circ d_0 \tau_{\tilde{\xi}}(1) + \lambda \cdot d_e \Theta \circ d_0 \tau_\xi(1) \\ &= d_e \Theta \circ d_0 \exp \circ d_0 \tau_{\tilde{\xi}}(1) + \lambda \cdot d_e \Theta \circ d_0 \exp \circ d_0 \tau_\xi(1) \\ &= d_0 \Omega_{\tilde{\xi}}(1) + \lambda \cdot d_0 \Omega_\xi(1). \end{aligned}$$

Ainsi, X est \mathbb{R} -linéaire. De plus, d'après les propriétés du produit tensoriel, il définit donc un tenseur

$$X \in \Gamma(TM) \otimes \mathfrak{g}^*.$$

De plus, ce tenseur a alors pour expression :

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \otimes \xi_i^*,$$

où $(\xi_i)_{i=1, \dots, n}$ est une base de \mathfrak{g} et $X_i = X(\xi_i) = X_{\xi_i}$, ce qui permet de conclure. \square

Une conséquence de cette proposition est que la famille de sections X_{ξ_i} engendre un sous-fibré de TM . La question est de déterminer le rang de ce sous-fibré. Plus

particulièrement, nous allons chercher une condition sous laquelle X va être injective i.e. la famille de sections X_{ξ_i} engendre un sous-fibré de rang n . Une condition suffisante va être que l'action ϕ est libre. Avant de démontrer ce fait, nous allons devoir étudier plus en détails l'application moment.

Pour cela, on remarque que l'application moment μ est une application de M dans \mathfrak{g}^* et donc son application tangente $T_p\mu$ en un point $p \in M$ est une application \mathbb{R} -linéaire de T_pM dans \mathfrak{g}^* . Nous allons déterminer l'image et le noyau de cette application linéaire.

Proposition 1.11 *Soit $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ l'application moment d'une action hamiltonienne d'un groupe G , d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Alors, pour tout $p \in M$, nous avons*

$$\ker d_p\mu = (T_p(G \cdot p))^{\omega|_p} := \{v \in T_pM / \omega|_p(v, u) = 0 \quad \forall u \in T_p(G \cdot p)\},$$

et

$$\text{im } d_p\mu = \mathfrak{g}_p^\circ := \{\varphi \in \mathfrak{g}^* / \langle \varphi, \xi \rangle = 0 \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}_p\},$$

où $G \cdot p$ est l'orbite de p sous l'action de G et \mathfrak{g}_p est l'algèbre de Lie du stabilisateur G_p de p sous l'action de G .

Démonstration. Le résultat découle directement du résultat de géométrie différentielle

$$T_p(G \cdot p) = \{X_\xi|_p / \xi \in \mathfrak{g}\} = \text{Vect}(X_{\xi_1}|_p, \dots, X_{\xi_n}|_p),$$

(voir [23] pour une démonstration) et du fait suivant

$$\langle d_x\mu(Y), \xi \rangle = -i_{X_\xi}\omega(Y) = \omega(Y, X_\xi), \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}, \quad \forall x \in M, \quad \forall Y \in T_xM.$$

□

Corollaire 1.12 *Si ϕ est une action libre alors pour tout $p \in M$ on a que $d_p\mu$ est surjective i.e tous les points de M sont des points réguliers de l'application μ .*

Démonstration. En effet, on a

$$\begin{aligned} \phi \text{ est libre} &\iff \forall p \in M \quad G_p = 0 \\ &\implies \forall p \in M \quad \mathfrak{g}_p = 0 \\ &\implies \forall p \in M \quad \mathfrak{g}_p^\circ = \mathfrak{g}^* \\ &\implies \forall p \in M, \quad d_p\mu \text{ est surjective.} \end{aligned}$$

□

Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 1.13 *Si ϕ est une action libre alors le sous-fibré engendré par la famille de sections $(X_{\xi_i})_{i=1, \dots, n}$ est de rang n i.e. X est injective.*

Démonstration. Nous allons montrer que X est injective. Soit $\xi \in \mathfrak{g}$ tel que $X(\xi) = 0$ i.e.

$$\forall p \in M, \quad X_\xi|_p = 0 \in T_p M,$$

d'où

$$i_{X_\xi} \omega|_p = 0 \in T_p^* M.$$

Or $i_{X_\xi} \omega|_p = d_p \mu$, nous avons donc $d_p \mu : T_p M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ est l'application nulle, ce qui contredit le fait que $T_p \mu$ soit surjective, d'après le corollaire 1.12. \square

1.3 Variété torique symplectique

Les actions hamiltoniennes qui vont nous intéresser par la suite sont celles données par l'action du tore \mathbb{T}^d de dimension d sur une variété symplectique de dimension $2d$. Cela nous conduit à la définition de *variété torique symplectique* :

Définition 1.14 *Un triplet (M, ω, μ) est une variété torique symplectique de dimension $2d$ si (M, ω) est une variété symplectique de dimension $2d$ munie d'une action hamiltonienne et effective du tore \mathbb{T}^d de dimension d et d'application moment μ .*

Avant de donner quelques exemples de variétés toriques, nous allons donner une autre caractérisation des actions hamiltoniennes du tore. En effet, en voyant \mathbb{T}^d comme un produit de d -copies de la sphère \mathbb{S}_1 i.e. $\mathbb{T}^d = \mathbb{S}_1 \times \cdots \times \mathbb{S}_1$, nous voyons que \mathbb{T}^d est un groupe de Lie abélien donc la représentation adjointe et co-adjointe de \mathbb{T}^d est triviale. Ce fait combiné au fait que l'algèbre de Lie de \mathbb{T}^d est (isomorphe à) \mathbb{R}^d nous donne la caractérisation suivante pour les actions hamiltoniennes du tore :

Lemme 1.15 *Soit une action symplectique effective du tore \mathbb{T}^d sur (M, ω) . Alors cette action est hamiltonienne si et seulement s'il existe une application $\mu : M \rightarrow (\mathbb{R}^d)^*$ (où \mathbb{R}^d est considéré comme l'algèbre de Lie de \mathbb{T}^d) satisfaisant :*

- *Pour toute base $(\xi_i)_{i=1, \dots, d}$ de \mathbb{R}^d , l'application $\mu^{X_{\xi_i}} : x \mapsto \langle \mu(x), \xi_i \rangle$ est une application hamiltonienne associée au champs de vecteurs fondamental X_{ξ_i} invariante par l'action de \mathbb{T}^d sur M .*

De plus, dans ce cas, μ sera alors l'application moment de cette action.

Démonstration. Comme dit plus haut, \mathbb{T}^d étant abélien, on a que la représentation co-adjointe de \mathbb{T}^d est triviale donc si μ est l'application moment d'une action du tore, elle va vérifier

$$\langle \mu(g \cdot m), \xi \rangle = \langle \mu(m), \xi \rangle,$$

qui peut encore s'écrire

$$\mu^\xi(g \cdot m) = \mu^\xi(m), \quad \forall (g, m) \in G \times M,$$

i.e. μ^ξ est G -invariante pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et donc a fortiori pour toute base de \mathbb{R}^d . Ce qui montre que la condition est nécessaire.

Pour montrer que la condition est suffisante, il suffit de remarquer que par linéarité on a

$$\langle \mu(x), \xi \rangle = \sum_{j=1}^d \lambda_j \langle \mu(x), \xi_j \rangle,$$

ce qui nous donne que

$$\mu^\xi = \sum_{j=1}^d \lambda_j \mu^{\xi_j}.$$

Pour conclure, il faut donc montrer que μ^ξ est G -invariante, ce qui est le cas puisque les μ^{ξ_j} le sont, et que μ^ξ est la fonction hamiltonienne du champ de vecteurs fondamental X_ξ , ce qui résulte de la suite d'égalités suivante :

$$d\mu^\xi = \sum_{j=1}^d \lambda_j d\mu^{\xi_j} = \sum_{j=1}^d \lambda_j i_{X_{\xi_j}} \omega = i_{(\sum_{j=1}^d \lambda_j X_{\xi_j})} \omega = i_{X_\xi} \omega$$

(la dernière égalité résulte de la proposition 1.10). □

Cette proposition nous permet de définir facilement des actions hamiltoniennes du tore. L'exemple le plus simple que nous pouvons construire, mais qui nous servira à construire toutes les variétés toriques compactes dans la section suivante, est donné dans la proposition suivante :

Proposition 1.16 *Considérons l'espace vectoriel réel \mathbb{R}^{2d} de dimension $2d$ muni de sa forme symplectique ω usuelle :*

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix},$$

Alors en utilisant l'isomorphisme usuel entre \mathbb{R}^{2d} et \mathbb{C}^d donné par

$$f : \begin{array}{l} (\mathbb{R}^{2d}) \longrightarrow \mathbb{C}^d \\ (x_j, z_j)_{1 \leq j \leq d} \longmapsto (x_j + i y_j)_{1 \leq j \leq d} \end{array}.$$

et celui entre \mathbb{T}^d et $(\mathbb{S}_1)^d$, nous avons que l'action naturelle de \mathbb{T}^d sur \mathbb{R}^{2d} donnée par

$$\phi : \begin{array}{l} (\mathbb{S}_1)^d \times \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d \\ (t_1, \dots, t_d) \times (z_1, \dots, z_d) \longmapsto (t_1 \cdot z_1, \dots, t_d \cdot z_d) \end{array},$$

est hamiltonienne d'application moment

$$\mu : \begin{array}{l} \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (z_1, \dots, z_d) \longmapsto \frac{1}{2}(|z_1|^2, \dots, |z_d|^2) \end{array}.$$

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $d = 1$ i.e. l'action de \mathbb{S}^1 sur \mathbb{C} définie par

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{S}_1 \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t \times z & \longmapsto & t \cdot z \end{cases} .$$

Commençons par vérifier que cette action est bien symplectique i.e.

$$\phi(t, \cdot)^* \omega = \omega, \forall t \in \mathbb{S}_1.$$

On sait que ω s'écrit en coordonnées locales sous la forme

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} dz \wedge d\bar{z},$$

et donc pour tout $t \in \mathbb{S}_1$, on a

$$\phi(t, \cdot)^* \omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} d\phi(t, \cdot) \wedge \overline{d\phi(t, \cdot)} = \frac{\sqrt{-1}}{2} t \cdot \bar{t} dz \wedge d\bar{z} = \frac{\sqrt{-1}}{2} |t|^2 dz \wedge d\bar{z} = \frac{\sqrt{-1}}{2} dz \wedge d\bar{z} = \omega.$$

Ainsi, on a bien que ϕ est une action symplectique.

Maintenant, nous allons utiliser le lemme précédent pour montrer que l'action est hamiltonienne i.e. il suffit de chercher une application hamiltonienne pour le champ de vecteurs fondamental associé i qui est un générateur de l'algèbre de Lie $T_1\mathbb{S}_1 = i \cdot \mathbb{R}$ de \mathbb{S}_1 .

De plus, on sait que l'application exponentielle de groupe de Lie pour \mathbb{S}_1 est donnée par l'exponentielle complexe usuelle :

$$\exp : \begin{cases} T_1\mathbb{S}_1 & \longrightarrow & \mathbb{S}_1 \\ i \cdot x & \longmapsto & \exp(i \cdot x) \end{cases} .$$

Un calcul simple nous donne alors que le champ de vecteurs fondamental associé à i est

$$X_i : x \mapsto i \cdot x,$$

et un second calcul nous donne bien que μ a pour expression

$$\mu : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{2}|z|^2 \end{cases} .$$

□

1.4 Réduction symplectique

Lemme 1.17 *Soit G un groupe de Lie compact tel que (M, ω, G, μ) soit un G -espace.*

Alors pour toute valeur régulière $c \in M$ de μ invariante sous la représentation co-adjointe de G , $\mu^{-1}(c)$ est une sous variété G -invariante de M .

De plus, si l'action de G est libre, $M//_c G := \mu^{-1}(c)/G$ est alors une variété symplectique (dite quotient symplectique de M par G) de dimension égale à $(\dim M - 2 \dim G)$ telle que si on note $\tilde{\omega}$ la forme symplectique sur $M//_c G$ alors elle vérifie

$$i^* \omega = \pi^* \tilde{\omega},$$

où $i : \mu^{-1}(c) \rightarrow M$ est l'inclusion et $\pi : \mu^{-1}(c) \rightarrow M//_c G$ est la projection canonique.

Démonstration. Comme la démonstration est longue et n'apporte aucune information supplémentaire utile par la suite, on renvoie à [22] par exemple. \square

Lemme 1.18 Soit un groupe de Lie compact G tel que (M, ω, G, μ) soit un G -espace et soit N un sous-groupe de Lie fermé de G .

Alors l'action de N induite par celle de G nous donne que (M, ω, N, μ_N) est un N -espace tel que l'application moment μ_N est définie par

$$\mu_N = i^* \circ \mu$$

où i^* est l'application adjointe de l'inclusion $i : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{g}$ de l'algèbre de Lie \mathfrak{n} de N dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G .

De plus, si N est un sous-groupe distingué de G alors pour tout $\tilde{c} \in \mathfrak{g}^*$ invariant sous l'action co-adjointe de G tel que N agisse librement sur $\mu_N^{-1}(c)$ où $c = i^*(\tilde{c})$, alors nous avons que l'action G/N induite par celle de G sur $M//_c N$ est hamiltonienne d'application moment $(\mu - \tilde{c})|_{\mu^{-1}(c)}$.

Démonstration. Nous définissons l'action de G/N sur $M//_c N$ par

$$\theta : \begin{array}{l} G/N \times M//_c N \longrightarrow M//_c N \\ ([g], [z]) \longmapsto [g \cdot z] \end{array} .$$

Il faut montrer que cette application est bien définie i.e. $g \cdot z \in \mu_N^{-1}(c)$ et que $[g \cdot z]$ ne dépend que de la classe de g et de la classe de z . Commençons par montrer que $g \cdot z \in \mu_N^{-1}(c)$. Pour cela, on utilise le fait que

$$z \in \mu_N^{-1}(c) \iff \langle \mu(z) - \tilde{c}, \xi \rangle = 0, \quad \forall \xi \in \mathfrak{n}.$$

On a alors la suite d'égalités suivante :

$$\begin{aligned} \langle \mu(g \cdot z) - \tilde{c}, \xi \rangle &= \langle \text{Ad}_g^*(\mu(z)) - \text{Ad}_g^* \tilde{c}, \xi \rangle \\ &= \langle \mu(z) - \tilde{c}, \text{Ad}_{g^{-1}} \xi \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc $g \cdot z$ appartient bien à $\mu_N^{-1}(c)$. Maintenant, pour montrer que $[g \cdot z]$ ne dépend que de la classe de $[g]$ et de $[z]$. Pour cela, on utilise le fait que N est un sous-groupe distingué. En effet, si on prend $\tilde{g} := gh$ un représentant de gN et $\tilde{z} := \tilde{h} \cdot z$ un élément de l'orbite de Nz alors $[g \cdot z] = [(gh) \cdot (\tilde{h} \cdot z)] = [\tilde{g} \cdot \tilde{z}]$, il suffit de prendre

$k = g \cdot (h\tilde{h})^{-1}g^{-1}$ qui appartient bien à N car N est distingué et de remarquer que $k((gh) \cdot (\tilde{h} \cdot z)) = g \cdot z$.

Comme $\langle \mu(z) - \tilde{c}, \xi \rangle = 0$ pour tout $\xi \in \mathfrak{n}$ et pour tout $z \in \mu_N^{-1}(c)$ on a que $\nu := (\mu - \tilde{c})|_{\mu_N^{-1}(c)}$ est à valeur dans l'annulateur \mathfrak{n}° de \mathfrak{n} dans \mathfrak{g}^* . De plus, comme on a un isomorphisme entre \mathfrak{n}° et $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$, on peut voir ν comme un morphisme de $\mu_N^{-1}(c)$ à valeurs dans $(\mathfrak{g}/\mathfrak{n})^*$.

Nous voulons passer au quotient l'application ν afin d'obtenir une application $\nu : M//_c N \rightarrow (\mathfrak{g}/\mathfrak{n})^*$. Il faut donc montrer que pour tout $g \in N$, on a $\nu(g \cdot z) = \nu(z)$. Pour cela, on remarque que pour tout $g \in N$, on la suite d'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \langle \nu(g \cdot z), \xi \rangle &= \langle \mu(g \cdot z) - \tilde{c}, \xi \rangle \\ &= \langle (Ad_g^*(\mu(z) - \tilde{c})), \xi \rangle \\ &= \langle (\mu(z) - \tilde{c}), Ad_{g^{-1}}(\xi) \rangle \\ &= \langle \nu(z), Ad_{g^{-1}}(\xi) \rangle \\ &= \langle \nu(z), \xi \rangle. \end{aligned}$$

On conclut en montrant que ν est l'application moment associée à la forme $\tilde{\omega}$ définie dans la proposition 1.17 i.e

$$\langle d\nu, [\xi] \rangle = -\omega(\cdot, X_{[\xi]}),$$

ce qui est une conséquence directe de la formule vérifiée par $\tilde{\omega}$ et par ω (voir proposition 1.17) : $i^*\omega = \pi^*\tilde{\omega}$. \square

Remarque. Comme la projection canonique $u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ est surjective, on a que son adjoint $u^* : (\mathfrak{g}/\mathfrak{n})^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ est injective. On peut alors remarquer (voir la preuve juste au-dessus) que le plongement affine $l = u^* + \tilde{c}$ nous donne le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mu_N^{-1}(c) & \xrightarrow{\mu} & (i^*)^{-1}(c) \subset \mathfrak{g}^* \\ q \downarrow & & \uparrow l \\ M & \xrightarrow{\nu} & (\mathfrak{g}/\mathfrak{n})^*. \end{array}$$

où q est la projection canonique. De plus, comme l est injective et que q est surjective, l'application moment est l'unique application $\nu : M \rightarrow (\mathfrak{g}/\mathfrak{n})^*$ rendant le diagramme précédent commutatif.

Notre principale utilisation de la réduction symplectique sera dans la section suivante pour la construction de variétés symplectiques pour *le théorème de classification des variétés toriques compactes*.

1.5 Classification des variétés toriques symplectiques compactes

1.5.1 Polytope de Delzant

Définition 1.19 Un polytope Δ dans $(\mathbb{R}^n)^*$ est défini comme l'intersection de demi-espaces :

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* / \langle x, v_i \rangle \geq \lambda_i, \quad i \in \{1, \dots, d\}\},$$

où $d > n$, $v_i \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, on définit l'ensemble

$$\sigma_i := \Delta \cap \{x \in (\mathbb{R}^n)^* / \langle x, v_i \rangle = \lambda_i\},$$

et on dit que σ_i est une face de Δ . On dit aussi que v_i est alors un vecteur normal à σ_i .

Nous terminons cette section avec la définition d'un polytope de Delzant :

Définition 1.20 Un polytope Δ de $(\mathbb{R}^n)^*$ est un polytope de Delzant rationnel s'il vérifie :

- (i) Pour tout sommet p du polytope Δ , p appartient à exactement n faces $\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_n}$, dont les vecteurs normaux v_{i_1}, \dots, v_{i_n} forment une base de \mathbb{R}^n .
- (ii) Pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, $v_i \in \mathbb{Z}^n$.

De plus, si Δ vérifie la condition suivante :

- (iii) Pour tout sommet p , les vecteurs normaux sortants $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\}$ des faces $\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_n}$ contenant p peuvent être choisis pour former une \mathbb{Z} -base de \mathbb{Z}^n ,

alors on dit que Δ est un polytope entier de Delzant.

1.5.2 Théorème de classification des variétés toriques

Nous avons le théorème de Delzant suivant qui permet de classer les variétés toriques modulo symplectomorphismes :

Théorème 1.21 Il existe une bijection entre les variétés toriques symplectiques et les polytopes de Delzant donnée par

$$\left| \begin{array}{ccc} \{\text{variétés compactes toriques et symplectiques}\} / \sim & \xrightarrow{\sim} & \{\text{polytopes de Delzant entiers}\} \\ (M, \omega, \mu) & \longmapsto & \mu(M) \end{array} \right. .$$

où \sim est la relation d'équivalence "modulo symplectomorphismes".

1.5.3 Construction de M_Δ

Dans cette partie, nous allons nous donner un polytope de Delzant Δ et construire la variété torique $(M_\Delta, \omega_\Delta, \mu_\Delta)$ telle que $\mu_\Delta(M_\Delta) = \Delta$ i.e. nous allons montrer la surjectivité de l'application décrite dans le théorème 1.21. L'idée va être d'obtenir M_Δ comme le quotient symplectique de l'espace vectoriel symplectique standard de dimension $2d$ par l'action naturelle d'un sous-groupe N de dimension $(d-n)$ du tore $T^d = \mathbb{R}^d/2\pi\mathbb{Z}^d$.

Fixons un polytope de Delzant Δ de $(\mathbb{R}^n)^*$ défini comme l'intersection de demi-espaces :

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* / \langle x, u_i \rangle \geq \lambda_i, \quad i \in \{1, \dots, d\}\},$$

où $d > n$, $u_i \in \mathbb{Z}^n$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Nous pouvons voir \mathbb{Z}^d comme le groupe libre abélien engendré par les d faces σ_i de Δ et donc voir \mathbb{R}^d comme l'espace vectoriel obtenu en tensorisant : $\mathbb{R}^d = \mathbb{Z}^d \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Nous pouvons donc considérer l'espace vectoriel symplectique standard $\mathbb{R}^{2d} = \mathbb{Z}^d \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}^2$.

De plus, sur l'espace \mathbb{R}^{2d} vu comme $\mathbb{Z}^d \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}^2$, nous pouvons définir l'action hamiltonienne naturelle (voir la proposition 1.16 de la section 1.3) du tore \mathbb{T}^d définie de la façon suivante :

$$[a_1, \dots, a_d] \cdot \sum_{j=1}^d \sigma_j \otimes (r_j, \theta_j) = \sum_{j=1}^d \sigma_j \otimes (r_j, \theta_j + a_j),$$

où $[a_1, \dots, a_d]$ est la classe de $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^d$ modulo $2\pi\mathbb{Z}^d$ et où $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ est muni des coordonnées polaires (r, θ) . L'application moment est alors donnée par :

$$\mu : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & (\mathbb{R}^d)^* \\ \sum_{j=1}^d \sigma_j \otimes (r_j, \theta_j) & \longmapsto & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d r_j^2 \cdot \sigma_j^* \end{array} \right.$$

où les σ_j^* forment la base duale de celle des σ_j .

Terminons les notations en introduisant le morphisme de groupe $u : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ défini par :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^d & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n \\ \sum_{i=1}^d k_i \cdot \sigma_i & \longmapsto & \sum_{j=1}^d k_j \cdot u_j \end{array} \right.$$

Ce morphisme est correctement défini grâce à la propriété (ii) de la définition 1.20 des polytopes de Delzant. On note aussi $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ le morphisme d'espaces vectoriels induit par le précédent, il est donné par :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \sum_{i=1}^d \lambda_i \cdot \sigma_i & \longmapsto & \sum_{j=1}^d \lambda_j \cdot u_j \end{array} \right.$$

Grâce à la propriété (i) de la définition 1.20 des polytopes de Delzant, on obtient que ce dernier morphisme est surjectif. Enfin par passage au quotient, nous obtenons un morphisme induit entre les tores \mathbb{T}^d et \mathbb{T}^n , que noterons encore $u : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^n$. De plus, comme le précédent est surjectif, celui-ci sera aussi surjectif. On notera alors

$$N := \ker(u : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^n),$$

et

$$\mathfrak{n} := \ker(u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n).$$

Par la suite, nous aurons besoin de deux propriétés de l'application u que nous énonçons maintenant :

Lemme 1.22 *A partir de l'application $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$, nous pouvons définir son application adjointe $u^* : (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow (\mathbb{R}^d)^*$ qui aura pour expression :*

$$u^* : \begin{cases} (\mathbb{R}^n)^* & \longrightarrow & (\mathbb{R}^d)^* \\ x & \longmapsto & \sum_{j=1}^d \langle x, u_j \rangle \sigma_j^* \end{cases}.$$

De plus, on a que l'annulateur \mathfrak{n}° de \mathfrak{n} dans $(\mathbb{R}^d)^*$ est égal à $\text{im } u^*$:

Démonstration. On rappelle que u^* est l'application définie par

$$u^* : \begin{cases} (\mathbb{R}^n)^* & \longrightarrow & (\mathbb{R}^d)^* \\ x & \longmapsto & x \circ u \end{cases},$$

et que

$$\mathfrak{n}^\circ = \{x \in (\mathbb{R}^d)^* / x|_{\mathfrak{n}} \equiv 0\}.$$

Maintenant, comme \mathbb{R}^d est engendré par la famille $(\sigma_i)_{i=1, \dots, d}$ alors $(\mathbb{R}^d)^*$ est engendré par la base duale $(\sigma_i^*)_{i=1, \dots, d}$, ainsi

$$u^*(x) = \sum_{i=1}^d x_i \sigma_i^*.$$

or pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, on a, par définition de la base duale, que

$$x_i = \langle u^*(x), \sigma_i \rangle = x \circ u(\sigma_i) = \langle x, u_i \rangle.$$

Maintenant, pour montrer que $\mathfrak{n}^\circ = \text{im } u^*$ on raisonne par double inclusion. Si $y \in \text{im}(u^*)$ alors il existe $x \in (\mathbb{R}^n)^*$ tel que $y = x \circ u$ et donc pour tout $n \in \mathfrak{n}$, nous avons

$$y(n) = x \circ u(n) = x(u(n)) = x(0) = 0,$$

d'où $\text{im } u^* \subset \mathfrak{n}^\circ$. Pour l'inclusion réciproque, prenons $y \in \mathfrak{n}^\circ$ alors s'il existe $x \in (\mathbb{R}^n)^*$ tel que $y = x \circ u$ alors $y(\Theta) = x \circ u(\theta)$ où $\theta \in u^{-1}(\Theta)$. Pour que cette application soit bien définie, il faut avoir $u^{-1}(\Theta) \neq \emptyset$, ce qui est le cas car u surjectif, et

que $y(\Theta)$ ne dépend pas du choix de θ dans $u^{-1}(\Theta)$, ce qui est le cas puisque si θ_1 et θ_2 appartiennent à $u^{-1}(\Theta)$ alors $\theta_1 - \theta_2$ appartient à \mathfrak{n} d'où $x \circ u(\theta_1) = x \circ u(\theta_2)$. L'application ainsi construite prouve que $y \in \text{im } u^*$, ce qui donne l'inclusion réciproque. \square

Nous pouvons passer maintenant à la construction de notre variété M_Δ . Pour cela, on considère l'action de N sur \mathbb{R}^{2d} obtenue par restriction de celle de \mathbb{T}^d sur \mathbb{R}^{2d} . Par le lemme 1.18, l'action de N est encore hamiltonienne avec comme application moment $\mu_N = i^* \circ \mu$ où $i^* : (\mathbb{R}^d)^* \rightarrow \mathfrak{n}^*$ obtenu comme l'adjoint de l'inclusion $i : \mathfrak{n} \hookrightarrow \mathbb{R}^d$. On considère maintenant l'ensemble de niveau $\mu_N^{-1}(c)$ où $c := i^*(-\lambda)$ avec $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_d) := \sum_{i=1}^d \lambda_i \sigma_i^*$.

Commençons par remarquer que :

$$\mu_N^{-1}(c) = \{v \in \mathbb{R}^{2d} / \exists x \in (\mathbb{R}^n)^*, \mu(v) + \lambda = u^*(x)\}.$$

En effet, on a la suite d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned} v \in \mu_N^{-1}(c) &\iff \mu_N(v) = c = i^*(-\lambda) \\ &\iff \mu_N(v) - i^*(-\lambda) = 0 \\ &\iff (\mu - \lambda)|_{\mathfrak{n}} = 0 \\ &\iff \mu - \lambda \in \mathfrak{n}^\circ \\ &\iff \mu - \lambda \in \text{im } u^* \quad \text{grâce au lemme 1.22.} \\ &\iff \exists x \in (\mathbb{R}^n)^*, \mu(v) + \lambda = u^*(x) \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant l'expression de l'adjoint u^* (que nous avons calculé dans le lemme 1.22) et en l'exprimant coordonnée par coordonnée, on obtient que si

$$v = \sum_{j=1}^d \sigma_j \otimes (r_j, \theta_j),$$

alors

$$v \in \mu_N^{-1}(c) \iff \exists x \in (\mathbb{R}^n)^*, \quad \forall j = 1, \dots, d \quad l_j(x) := \langle x, u_j \rangle - \lambda_j = \frac{r_j^2}{2}.$$

En posant $l := (l_1, \dots, l_n)$, on obtient que

$$v \in \mu_N^{-1}(c) \iff \mu(v) \in \text{im } l.$$

De plus, l'élément $x \in (\mathbb{R}^n)^*$ est entièrement déterminé par v . En effet, on a que

$$\forall j \in \{1, \dots, d\}, \quad \langle x, u_j \rangle = \lambda_j + \frac{r_j^2}{2}.$$

et la famille des $\{u_j / j = 1, \dots, d\}$ engendre l'espace \mathbb{R}^n . Et comme, on a que

$$\forall j \in \{1, \dots, d\}, \quad \langle x, u_j \rangle = \lambda_j + \frac{r_j^2}{2} \geq \lambda_j,$$

on a que $x \in \Delta$. On peut donc définir l'application suivante :

$$\nu : \begin{cases} \mu_N^{-1}(c) & \longrightarrow \Delta \\ v & \longmapsto x \end{cases} .$$

Proposition 1.23 *L'application ν vérifie les deux propriétés suivantes :*

- (i) $\nu(v) = x \in \Delta$ appartient à l'intérieur de Δ (c'est-à-dire le complémentaire des faces) si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, on a $r_i \neq 0$.
- (ii) ν est surjectif,
- (iii) $\forall v \in \mu_N^{-1}(c)$, $l(\nu(v)) = \mu(v)$,
- (iv) $\forall v \in \nu^{-1}(x)$, $\mathbb{T}^d \cdot v = \nu^{-1}(x)$.

Démonstration.

- (i) Si pour un $j \in \{1, \dots, d\}$, on a $r_j = 0$ alors $l_j(x) = 0$ et donc $\langle x, u_j \rangle = \lambda_j$ d'où $x \in \sigma_j$. Pour la réciproque, on peut remonter le raisonnement précédent.
- (ii) Soit $x \in \Delta$. On a donc

$$\forall j \in \{1, \dots, d\}, \quad \langle x, u_j \rangle \geq \lambda_j,$$

on peut donc écrire que

$$\forall j \in \{1, \dots, d\}, \quad \langle x, u_j \rangle = \lambda_j + \varepsilon_j,$$

avec $\varepsilon_j > 0$. En posant $r_j := 2\sqrt{\varepsilon_j}$, on obtient que

$$\forall j \in \{1, \dots, d\}, \quad \langle x, u_j \rangle = \lambda_j + \frac{r_j^2}{2}.$$

Et donc on a que

$$\forall j \in \{1, \dots, d\}, \quad r_j = \sqrt{2\langle x, u_j \rangle - \lambda_j}.$$

Ainsi l'élément $v = \sum_{j=1}^d \sigma_j \otimes (r_j, 0)$ convient.

- (iii) Direct par définition des différentes applications qui apparaissent.
- (iv) Soit $v = \sum_{j=1}^d \sigma_j \otimes (r_j, \theta_j) \in \nu^{-1}(x)$ et soit $[a_1, \dots, a_d] \in \mathbb{T}^d$. On a alors que

$$[a_1, \dots, a_d] \cdot v = \sum_{j=1}^d \sigma_j \otimes (r_j, \theta_j + a_j),$$

donc $\mu([a_1, \dots, a_d] \cdot v) = \mu(v) = l(x) \in \text{im } l$ d'où $[a_1, \dots, a_d] \cdot v \in \mu_N^{-1}(c)$ et plus particulièrement $[a_1, \dots, a_d] \cdot v \in \nu^{-1}(x)$. Ce qui nous donne l'inclusion $\mathbb{T}^d \cdot v \subset \nu^{-1}(x)$. Montrons maintenant l'inclusion réciproque. Soient deux éléments

$v = \sum_{i=1}^d \sigma_i \otimes (r_j, \theta_j)$ et $\tilde{v} = \sum_{i=1}^d \sigma_i \otimes (\tilde{r}_j, \tilde{\theta}_j)$ appartenant à $\nu^{-1}(x)$. On a alors que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\frac{(r_j)^2}{2} = \mu(v)_j = l_j(\nu(v)) = l_j(x) = l_j(\nu(\tilde{v})) = \mu(\tilde{v})_j = \frac{(\tilde{r}_j)^2}{2},$$

d'où

$$r_j = \tilde{r}_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Ainsi, en posant pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $a_j = \tilde{\theta}_j - \theta_j$, on obtient

$$\tilde{v} = \sum_{j=1}^d \sigma_j \otimes (r_j, \theta_j + a_j) = [a_1, \dots, a_d] \cdot v.$$

On obtient donc l'autre inclusion $\nu^{-1}(x) \subset \mathbb{T}^d \cdot v$. Ce qui permet de conclure. \square

Proposition 1.24 *L'ensemble de niveau $\mu^{-1}(c)$ est compact. En particulier, μ est propre.*

Démonstration. Pour commencer, comme μ^{-1} est continue alors $\mu^{-1}(c)$ est fermé comme image réciproque d'un singleton (donc d'un fermé) par une application continue. De plus, pour tout élément $v = \sum_{j=1}^d \sigma_j \otimes (r_j, \theta_j) \in \mu^{-1}(c)$, on a :

$$\frac{1}{2} (r_1^2, \dots, r_d^2) = \mu(x) = c = i^*(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_d).$$

Cela signifie que $\mu^{-1}(c)$ est borné. Donc nous obtenons que $\mu^{-1}(c)$ est un fermé borné et comme nous sommes dans \mathbb{R}^d qui est un espace vectoriel de dimension finie, $\mu^{-1}(c)$ est compact.

Comme l'image réciproque de tout singleton est compact, nous avons que μ est bien propre. \square

Corollaire 1.25 *L'ensemble de niveau $\mu_N^{-1}(c)$ est compact.*

Démonstration. En effet, d'après la proposition 1.23, on a que

$$\mu(\mu_N^{-1}(c)) = l(\Delta).$$

On conclut grâce au fait que μ est propre (proposition 1.24) et que $l(\Delta)$ est compact comme image d'un compact par une application continue. \square

Nous allons maintenant étudier l'action de \mathbb{T}^d et de N sur $\mu_N^{-1}(c)$. Pour cela nous notons $(\mathbb{T}^d)_z$ (respectivement N_z) le stabilisateur de z sous l'action de \mathbb{T}^d (respectivement de N). Commençons par la propriété suivante :

Proposition 1.26 *Nous avons que $\Delta^\circ = \{\nu(v) / v \in \mu_N^{-1}(c), (\mathbb{T}^d)_v = \{0\}\}$*

Démonstration. Nous allons étudier le stabilisateur de v sous l'action de \mathbb{T}^d dans le cas où $\mu(v) \in \Delta^\circ$ ou que $\mu(v) \notin \Delta^\circ$.

Commençons par le cas où $\mu(v) \in \Delta^\circ$. En effet, dans ce cas, nous savons grâce à la proposition 1.23 que

$$v = \sum_{j=1}^d \sigma_j \otimes (r_j, \theta_j), \quad r_j \neq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, d\}.$$

Soit $[a_1, \dots, a_d] \in \mathbb{T}^d$. Supposons que

$$[a_1, \dots, a_d] \cdot v = v,$$

nous avons alors que

$$\forall j \in \{1, \dots, d\}, \quad \theta_j = \theta_j + a_j,$$

cela signifie que

$$\forall j \in \{1, \dots, d\}, \quad a_j = 0.$$

Nous avons alors que

$$[a_1, \dots, a_d] = [0, \dots, 0].$$

Traitons maintenant le cas où $\mu(v) \notin \Delta^\circ$. Cela signifie que $\nu(v)$ appartient à k faces $\sigma_{j_1}, \dots, \sigma_{j_k}$, grâce à la proposition 1.23, cela nous donne que

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad r_{j_k} = 0.$$

Quitte à renuméroter, on peut supposer que $j_i = i$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. En faisant un raisonnement similaire au cas précédent, nous avons alors que

$$(\mathbb{T}^d)_v = \{[a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0] \mid a_i \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}.$$

□

Nous allons montrer que l'action de N est libre. Dans ce cas, nous pourrions utiliser le lemme 1.17 et obtenir que $M = \mu^{-1}(c)/N$ est une variété symplectique

Proposition 1.27 *L'action de N sur $\mu_N^{-1}(c)$ est libre i.e.*

$$\forall v \in \mu_N^{-1}(c), \quad N_v = \{0\}.$$

Démonstration. Commençons par remarquer que nous avons

$$N_v = (\mathbb{T}^d)_z \cap N.$$

En premier lieu, traitons le cas où $\mu(v)$ est un sommet de Δ . Grâce à la propriété (i) de la définition 1.20 des polytopes de Delzant, nous obtenons qu'il existe un ensemble d'indice $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ tel que v appartienne aux faces $\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_n}$. Quitte à renuméroter, on peut supposer $I = \{1, \dots, n\}$ et nous avons alors montré dans la démonstration de la proposition 1.26 que

$$(\mathbb{T}^d)_v = \{[a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0] \mid a_i \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}.$$

Posons alors

$$(\mathbb{R}^d)_v := \pi^{-1}((\mathbb{T}^d)_v) \subset \mathbb{R}^d \text{ où } \pi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d \text{ est la projection canonique,}$$

et

$$(\mathbb{Z}^d)_v := (\mathbb{R}^d)_v \cap \mathbb{Z}^d.$$

Or en considérant $u|_{(\mathbb{R}^d)_z} : (\mathbb{R}^d)_z \rightarrow \mathbb{R}^n$ envoie les vecteurs $\{\sigma_i / i = 1, \dots, n\}$ sur la \mathbb{Z} -base $\{v_i / i = 1, \dots, n\}$ (par la propriété (iii) de la définition 1.20 des polytopes de Delzant), nous obtenons que $u : (\mathbb{T}^d)_z \rightarrow \mathbb{T}^n$ est bijective. Ainsi, comme $N = \ker(u)$, nous obtenons que $N \cap (\mathbb{T}^d)_z = \{0\}$.

Pour le cas général, si $\mu(v)$ appartient à une face, il suffit de remarquer que son stabilisateur va être inclus dans le stabilisateur d'un sommet appartenant à cette face. \square

Comme dit précédemment, nous avons alors que $M := \mu_N^{-1}(c)/N$ est une variété symplectique compacte de dimension $2d - 2(d - n) = 2n$. En effet, comme N agit librement sur $\mu_N^{-1}(c)$, c est une valeur régulière de μ_N et donc $\mu_N^{-1}(c)$ est une sous-variété fermée de \mathbb{R}^{2d} et donc le quotient $M := \mu_N^{-1}(c)/N$ est une variété symplectique compacte de dimension $2n$ par le lemme 1.17. Maintenant, on conclut grâce au point (iii) de la proposition 1.23 et à la remarque qui suit la démonstration du lemme 1.18 que ν induit une application moment ayant pour image Δ pour l'action naturelle du tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{T}^d/N$ sur $M = \mu_N^{-1}(c)/N$.

Grâce à cette construction, nous pouvons obtenir un résultat intéressant qui nous donne un système de coordonnées sur

$$M^\circ = \{p \in M / (\mathbb{T}^n)_p = \{0\}\},$$

donné par l'application moment μ .

Proposition 1.28 *Soit (M, ω, μ) une variété torique symplectique. On note Δ le polytope de Delzant, et Δ° l'intérieur de ce polytope. En posant*

$$M^\circ = \{p \in M / (\mathbb{T}^n)_p = \{0\}\},$$

nous avons alors

$$M^\circ \simeq \Delta^\circ \times \mathbb{T}^n.$$

Démonstration. Par la proposition 1.24, nous savons que μ est une application propre. De plus comme l'action de \mathbb{T}^n restreint à M° est libre, on a grâce à la proposition 1.12 que μ est une submersion. Terminons en remarquant que μ est surjective grâce à la proposition 1.23. En résumé, μ est une submersion surjective et propre donc d'après le *théorème de fibration d'Ehresmann*, μ est une fibration. Ainsi, pour tout $x \in \Delta^\circ$, il existe un voisinage ouvert $U \subset \Delta^\circ$ de x tel qu'on ait le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(U) & \xrightarrow{\sim} & U \times \mu^{-1}(x) \\ & \searrow \mu & \downarrow \text{pr}_1 \\ & & U. \end{array}$$

En particulier, comme $x \in \Delta^\circ$, on a grâce à la proposition 1.23 que $\mu^{-1}(c) \simeq \mathbb{T}^n$.
Donc μ est une fibration de fibre \mathbb{T}^n . On conclut alors en remarquant que μ est
trivialisable car Δ° est convexe donc contractile. \square

2 Géométrie kählérienne

Commençons par rappeler la définition d'une *variété complexe* :

Définition 2.1 Soit M une variété différentielle réelle de dimension (réelle) $2n$.

Une carte complexe de M est un couple (U, ψ) où U est un ouvert de M et ψ un difféomorphisme de U dans un ouvert de \mathbb{C}^n .

Si (U_1, ψ_1) et (U_2, ψ_2) sont deux cartes complexes alors on définit la fonction de transition par $\psi_{1,2} := \psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi(U_1 \cap U_2) \rightarrow \psi(U_2 \cap U_1)$. On dit alors que M est une variété complexe de dimension complexe n s'il existe un atlas $\{U_i, \psi_i\}_{i \in I}$ de cartes complexes tel que les fonctions de transitions sont des fonctions holomorphes entre ouverts de \mathbb{C}^n .

Maintenant, si M est une variété complexe munie d'un atlas $\{U_i, \psi_i\}_{i \in I}$ de cartes complexes, alors on dit alors qu'une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ est *holomorphe* si pour tout $i \in I$, on a que $f \circ \psi_i^{-1} : \psi(U_i) \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe. En particulier, nous voyons directement que si on écrit $\psi_i = (z_1, \dots, z_n)$ alors les z_i sont des fonctions holomorphes. On dit alors que les z_i forment un *système de coordonnées holomorphes*. De plus, si (w_1, \dots, w_n) est un autre système de coordonnées holomorphes alors, comme les fonctions de transitions sont holomorphes, nous obtenons que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la fonction w_i est holomorphe par rapport à z_1, \dots, z_n .

Une autre manière de définir la notion de variété complexe passe par la notion de *structure presque complexe*. C'est ce point de vue que nous allons introduire maintenant, et nous verrons grâce au théorème 2.5 sous quelles conditions les deux points de vue coïncident.

2.1 Étude des variétés presque complexes et complexes

2.1.1 Structure presque complexe et complexe

Commençons par introduire la notion de *structure presque complexe* :

Définition 2.2 Soit M une variété différentielle réelle de dimension $2n$.

Une structure presque complexe sur M est la donnée d'un endomorphisme $J : TM \rightarrow TM$ sur le fibré tangent réel de M vérifiant $J|_p^2 = -\text{id}_{T_p M}$ pour tout $p \in M$. On dit alors que le couple (M, J) est une *variété presque complexe*.

Remarque. De manière équivalente, cela revient à demander l'existence d'une structure d'espace vectoriel complexe sur $T_p M$ pour tout $p \in M$. En effet, $J|_p$ permet de définir une structure d'espace vectoriel complexe sur V par la formule suivante :

$$(a + i \cdot b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot J(v), \quad \forall (a, b, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times T_p M.$$

Et réciproquement si $T_p M$ est un espace vectoriel complexe pour tout $p \in M$, en définissant $J|_p$ comme la multiplication par i pour tout $p \in M$, nous obtenons bien

une structure presque complexe sur M .

Les exemples les plus importants de variétés presque complexes sont donnés par les variétés complexes. En effet, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.3 *Si M est une variété complexe alors il existe une structure presque complexe naturelle sur M .*

Démonstration. Soit $\psi : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{C}^n$ une carte holomorphe de M . Comme ψ est en particulier un difféomorphisme, nous obtenons que l'application tangente $d\psi$ induit un isomorphisme :

$$T_p M \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n \quad \forall p \in U.$$

Maintenant, grâce à ce isomorphisme, nous pouvons définir la structure presque complexe J par

$$J(v) = i \cdot v, \quad \forall v \in T_p M.$$

Pour que ceci soit correcte, il faut s'assurer que cette application J ne dépend pas de l'identification choisie entre $T_p M$ et \mathbb{C}^n i.e. indépendante de la carte holomorphe choisie. Or, ceci est une conséquence directe du fait que les changements de cartes sont holomorphes i.e. leur différentielle est \mathbb{C} -linéaire.

De plus, si nous prenons des coordonnées locales (z_1, \dots, z_n) dans M et que nous écrivons $z_j = x_j + i \cdot y_j$ où x_j et y_j sont des fonctions réelles, nous obtenons que $(\frac{\partial}{\partial x_i})_{i=1, \dots, n} \cup (\frac{\partial}{\partial y_i})_{i=1, \dots, n}$ est une base de $T_p M$ et que J est alors défini par

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

□

Par contre, la réciproque n'est pas vraie. Une structure presque complexe n'induit pas toujours une structure de variété complexe. Ce qui nous conduit à la définition suivante :

Définition 2.4 *Soit M une variété différentielle réelle munie d'une structure presque complexe J .*

On dit que J est une structure intégrable sur M si J est induit par une structure complexe (au sens de la proposition 2.3).

On dit aussi que (M, J) est une variété complexe, ou que J est une structure complexe sur M .

Terminons cette section en donnant une condition nécessaire et suffisante pour qu'une structure presque complexe soit complexe. Il s'agit du *Théorème de Newlander-Nirenberg*, que nous énonçons sans démonstration.

Pour cela, on introduit le *tenseur de Nijenhuis* N^J défini par

$$N^J(X, Y) := [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY].$$

Théorème 2.5 *Soit M une variété différentielle réelle munie d'une structure presque complexe J . Une condition nécessaire est suffisante pour que J soit une structure intégrable est que le tenseur de Nijenhuis N^J est nul.*

Démonstration. Comme la démonstration n'apporte aucune information utile pour ce mémoire, on renvoie à [16]. \square

2.1.2 Fibré tangent d'une variété presque complexe

Si (M, J) est une variété presque complexe de dimension (réelle) $2n$, nous avons

$$J|_p = -id_{T_p M}, \quad \forall p \in M,$$

ainsi pour tout $p \in M$, $J|_p$ admet $X^2 + 1$ comme polynôme caractéristique et donc i et $-i$ comme valeurs propres. Cela induit la décomposition suivante :

$$T_p^{\mathbb{C}} M := T_p M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T_p^{1,0} M \oplus T_p^{0,1} M,$$

où $T^{0,1} M$ et $T^{1,0} M$ sont respectivement l'espace propre associé à i et $-i$, et comme cette décomposition est vraie pour tout $p \in M$, nous obtenons une décomposition du fibré

$$T^{\mathbb{C}} M := TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^{1,0} M \oplus T^{0,1} M.$$

De plus, en remarquant si $u \in T_p M$ alors

$$u = \frac{1}{2}(u - iJu) + \frac{1}{2}(u + iJu),$$

et que

$$\frac{1}{2}(u - iJu) \in T_p^{1,0} M, \quad \frac{1}{2}(u + iJu) \in T_p^{0,1} M,$$

Nous obtenons que $T^{1,0} M$ est engendré par les $(u - iJu)$ pour $u \in TM$ et $T^{0,1} M$ par les $(u + iJu)$ pour $u \in TM$.

De plus, si M est une variété complexe de dimension (complexe) n alors $T^{1,0} M$ et $T^{0,1} M$ sont appelés respectivement *fibré tangent holomorphe et anti-holomorphe* de $T^{\mathbb{C}} M$. De plus si $z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_n = x_n + iy_n$ sont des coordonnées locales holomorphes de M , alors en posant pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right),$$

nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 2.6 *Soit M une variété complexe. Le sous fibré $T^{1,0} M$ (respectivement $T^{0,1} M$) est engendré localement par les sections $\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}$ (respectivement par les sections $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}$).*

\square

2.1.3 Fibré cotangent d'une variété presque complexe

Soit (M, J) une variété presque complexe, on peut définir l'action de J sur le fibré cotangent T^*M par

$$J : \begin{cases} T^*M & \longrightarrow & T^*M \\ \alpha & \longmapsto & \alpha \circ J^{-1} \end{cases} .$$

Comme $J^{-1} = -J$, on peut aussi définir

$$J\alpha = -\alpha \circ J.$$

En remarquant que

$$J \circ J(\alpha) = \alpha \circ J^{-1} \circ J^{-1} = -\alpha, \quad \forall \alpha \in T^*M,$$

nous obtenons que

$$J^2 = -\text{id}_{T^*M}.$$

Ainsi, nous obtenons aussi une décomposition du complexifié du fibré cotangent

$$T^*M_{\mathbb{C}} := T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^{*0,1}M \oplus T^{*1,0}M,$$

où les sous-fibrés $T^{*1,0}M$ et $T^{*0,1}M$ sont respectivement les espaces propres de J associés à la valeur propre i et $-i$. De plus, comme dans le cas du fibré tangent, on a que $T^{*1,0}M$ est engendré par la famille $\{\alpha + iJ\alpha / \alpha \in T^*M\}$ et que $T^{*0,1}M$ est engendré par la famille $\{\alpha - iJ\alpha / \alpha \in T^*M\}$.

Le lemme suivant fait le lien entre la décomposition du fibré tangent et celui du fibré cotangent.

Lemme 2.7 *Soit (M, J) une variété presque complexe. On a alors*

$$T^{*1,0}M = \{\alpha \in T^*M / \alpha(Z) = 0, \quad \forall Z \in T^{0,1}M\}$$

et

$$T^{*0,1}M = \{\alpha \in T^*M / \alpha(Z) = 0, \quad \forall Z \in T^{1,0}M\}$$

Démonstration. Faisons la démonstration pour le fibré $T^{*0,1}M$. Il suffit de montrer que

$$\forall (u, \omega) \in TM \times T^*M, \quad (\omega - iJ\omega)(u - iJu) = 0.$$

En développant par linéarité et utilisant la définition de J , le résultat en découle trivialement. \square

De plus, en notant $\Lambda^{p,0}M$ et $\Lambda^{0,p}M$ les p -ième puissances extérieures de $T^{1,0}M$ et $T^{0,1}M$ respectivement, de plus on notera $\Lambda^{p,q}M = \Lambda^{p,0}M \otimes \Lambda^{0,q}M$. Nous obtenons grâce aux propriétés de la puissance extérieur que

$$\Lambda_{\mathbb{C}}^k M \simeq \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}M.$$

Les sections de $\Lambda^{p,q}M$ sont appelées formes différentielles de type (p, q) et on notera l'espace des formes différentielles de type (p, q) par $\Omega^{p,q}M$. En particulier, nous avons aussi la décomposition suivante :

$$\Lambda^k \Omega_{\mathbb{C}}(M) = \sum_{p+q=k} \Omega^{p,q}(M),$$

où $\Omega_{\mathbb{C}}(M)$ est le complexifié de l'espace des formes différentielles réelles $\Omega(\mathbb{C})$ et $\Omega_{p,q}(M) = \Lambda^p \Omega^{1,0} \otimes \Lambda^q \Omega^{0,1}$.

De plus, si M est une variété complexe de dimension (complexe) n alors $T^{*1,0}M$ et $T^{*0,1}M$ sont appelés respectivement *fibré cotangent holomorphe* et *anti-holomorphe* de $T_{\mathbb{C}}^*M$. De plus si $z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_n = x_n + iy_n$ sont des coordonnées locales holomorphes de M , alors en étendant par \mathbb{C} -linéarité la dérivée extérieure et en posant pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$dz_j := dx_j + idy_j$$

et

$$d\bar{z}_j := dx_j - idy_j$$

nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 2.8 *Soit M une variété complexe. Le sous fibré $\Lambda^{1,0}M$ (respectivement $\Lambda^{0,1}M$) est engendré localement par les sections dz_1, \dots, dz_n (respectivement par les sections $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n$). Et de plus, une base de $\Lambda^{p,q}M$ est donnée par*

$$\{dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}, \quad i_1 < \dots < i_p, \quad j_1 < \dots < j_q\}$$

□

Par la suite, on notera pour $I = (i_1, \dots, i_p)$ tel que $i_1 < \dots < i_p$

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p},$$

et

$$d\bar{z}_I = d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_p},$$

2.1.4 Objets holomorphes sur une variété complexe

Dans cette partie, nous allons étudier plus en détails, les champs de vecteurs et les formes différentielles d'une variété complexe (M, J) de dimension (réelle) $2n$.

Nous avons vu dans la proposition 2.8 que l'ensemble

$$\{dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}, \quad i_1 < \dots < i_p, \quad j_1 < \dots < j_q\}$$

était générateur de $\Omega^{p,q}(M)$. Ainsi, comme $d(dz_I) = 0$, nous obtenons que si

$$\alpha = \sum_{I,J} d\alpha_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

où les $\alpha_{I,J}$ sont des fonctions réelles lisses. Ainsi, $d\alpha_{I,J}$ appartient à $\Omega(M)$ et nous pouvons décomposer $d\alpha_{I,J}$ en parties de type $(0, 1)$ et de type $(1, 0)$, et obtenir que $d\alpha$ est la somme d'une forme de type $(p, q+1)$ et d'une forme de type $(p+1, q)$.

Définition 2.9 Pour toute forme différentielle α de type (p, q) sur une variété complexe M , on définit $\bar{\partial}\alpha$ comme la composante $(p, q + 1)$ de $d\alpha$ et $\partial\alpha$ comme la composante $(p + 1, q)$ de $d\alpha$.

On obtient ainsi deux applications :

$$\partial : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p+1,q}(M)$$

et

$$\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(M).$$

De la définition, il résulte les propriétés suivantes que nous résumons dans la proposition suivante :

Proposition 2.10 Les opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ vérifient la règle de Leibniz i.e.

$$\bar{\partial}(\alpha \wedge \beta) = \bar{\partial}(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{d^\circ\alpha} \alpha \wedge \bar{\partial},$$

et

$$\partial(\alpha \wedge \beta) = \partial(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{d^\circ\alpha} \alpha \wedge \partial.$$

De plus, on a

$$\partial + \bar{\partial} = d,$$

et

$$\bar{\partial}^2 = \partial^2 = \bar{\partial}\partial + \partial\bar{\partial} = 0.$$

□

Maintenant, nous allons interpréter la notion de fonctions holomorphes à l'aide des formes différentielles.

Proposition 2.11 Soit $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction lisse. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) La fonction f est holomorphe
- (2) $Z(f) = 0, \forall Z \in T^{0,1}M$.
- (3) df est une forme différentielle de type $(1, 0)$.

Démonstration. Cela découle directement de la définition de $T^{0,1}M$ et de celle des $(1, 0)$ -formes. □

La définition suivante étend la notion d'holomorphie aux champs de vecteurs et aux formes différentielles.

Définition 2.12 Un champ de vecteurs appartenant à $\Gamma(T^{1,0}M)$ est dit holomorphe si $Z(f)$ est holomorphe pour toute fonction f holomorphe localement définie sur M .

Une forme ω de type $(p, 0)$ est dite holomorphe si $\bar{\partial}\omega = 0$.

Un champ de vecteurs réel X appartenant à $\Gamma(TM)$ est dit holomorphe si sa composante $X - iJX$ dans $\Gamma(T^{1,0}M)$ est holomorphe.

Nous avons la caractérisation suivante des champs de vecteurs réels holomorphes.

Lemme 2.13 *Soit X un champ de vecteurs réels sur une variété complexe (M, J) . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) X est holomorphe.
- (2) $\mathcal{L}_X J = 0$.
- (3) Le flot de X est constitué de transformations holomorphes de M .

Démonstration. Cela est juste une ré-écriture de la définition d'un champ de vecteurs holomorphe. \square

En traduisant en coordonnées locales les propriétés suivantes, nous obtenons la caractérisation suivante :

Lemme 2.14 *Soit M une variété complexe. Alors $Z \in \Gamma(T^{1,0}M)$ est un champ de vecteurs holomorphes si et seulement si Z s'écrit localement $Z = \sum Z_i \partial / \partial z_i$ avec les Z_i des fonctions holomorphes. De même, $\omega \in \Omega^{1,0}$ est holomorphe si et seulement si elle s'écrit localement $\omega = \sum \omega_i \partial / \partial z_i$ avec ω_i holomorphe. \square*

Notons un lemme trivial dont nous aurons besoin par la suite :

Lemme 2.15 *Soit M une variété complexe. Si X est un champ de vecteurs holomorphes alors JX est aussi un champ de vecteurs holomorphes. \square*

Terminons cette section par le lemme $\partial\bar{\partial}$ local, en bidegré $(1, 1)$:

Lemme 2.16 *Soit $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^{1,1}(M) \cap \Omega_{\mathbb{R}}^2(M)$. On a alors l'équivalence entre*

- (i) ω est fermée i.e. $d\omega = 0$.
- (ii) Pour tout point x de M , il existe un voisinage et une fonction réelle u définie sur ce voisinage ouvert U de x telle que

$$\omega|_U = i\partial\bar{\partial}u.$$

Démonstration. Comme la démonstration est un peu longue et fait appel à des résultats de cohomologie, on renvoie à [9] par exemple. \square

2.2 Étude des variétés kählériennes

2.2.1 Définitions générales

Rappelons qu'une *métrique riemannienne* g sur une variété différentielle M est un tenseur qui à tout point p de M associe un produit scalaire (i.e. une forme bilinéaire symétrique définie positive) sur l'espace vectoriel réel $T_p M$. On dit alors que (M, g) est une *variété riemannienne*.

L'idée de cette partie est d'analyser les conditions sous lesquelles, une métrique riemannienne est compatible avec une structure presque complexe.

Définition 2.17 Soit g une métrique riemannienne sur une variété presque complexe (M, J) .

On dit que g est compatible avec la structure J si

$$g|_p(X, Y) = g|_p(J|_p X, J|_p Y), \quad \forall p \in M, \quad \forall (X, Y) \in (T_p M)^2.$$

Remarque. L'extension par \mathbb{C} -linéarité de g à $TM^{\mathbb{C}}$ vérifie

- $g(\overline{Z}, \overline{W}) = \overline{g(Z, W)}$, $\forall Z, W \in TM^{\mathbb{C}}$,
- $g(Z, \overline{Z}) > 0$,
- $g(Z, W) = 0$, $\forall Z, W \in T^{1,0}M \times T^{0,1}M$.

On peut montrer que réciproquement un tenseur symétrique sur $TM^{\mathbb{C}}$ vérifiant ces propriétés définit par restriction une métrique compatible avec J sur TM .

Si (M, g, J) est une variété presque complexe telle que g soit compatible avec J , on définit alors la forme de Kähler ω associée à la métrique g comme la 1-forme vérifiant $\omega(X, Y) := g(JX, Y)$ pour tous champs de vecteurs X et Y sur M . De plus, comme g est définie positive, nous obtenons que ω est non-dégénérée. Remarquons aussi que l'on peut retrouver la métrique à partir de sa forme de Kähler par la formule $g = \omega(\cdot, J\cdot)$.

Définition 2.18 Soit (M, J) une variété complexe de dimension n . Une métrique hermitienne h sur M est un tenseur qui à tout point p de M associe un produit scalaire hermitien (i.e. une forme hermitienne définie positive) sur l'espace vectoriel complexe $T_p M^{\mathbb{C}}$. On dit alors que (M, h) est une variété riemannienne. On dit alors que (M, h) (ou (M, h, J) si on veut préciser la structure complexe) est une variété hermitienne.

Si (M, J) est une variété complexe alors toute métrique riemannienne g compatible avec J définit une métrique hermitienne en posant $h := g - i\omega$. Réciproquement se donner une métrique hermitienne g est équivalent à se donner une métrique riemannienne g compatible en prenant $g := \operatorname{Re}(h)$ et la forme de Kähler associée g est alors $\omega = -\operatorname{Im}(h)$, on peut donc aussi parler de la forme de Kähler associée à une métrique hermitienne.

Définition 2.19 On dit que la variété riemannienne presque complexe (M, g, J) est une variété kählérienne si

- g est compatible avec J ,
- la structure presque complexe J est intégrable,
- la forme de Kähler associée ω est fermée.

On dit alors que g (ou h voire même ω) est une métrique kählérienne.

Remarque. Une définition équivalente est de dire qu'une variété kählérienne est une variété hermitienne telle que la forme de Kähler associée à la métrique est fermée.

En particulier, nous obtenons que (M, ω) est une variété symplectique. Nous obtenons ainsi une autre définition d'une variété kählérienne qui fait le lien avec la géométrie symplectique :

Définition 2.20 *Une variété kählérienne (M, g, J, ω) est une variété complexe riemannienne et symplectique vérifiant*

$$g(J\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, \cdot),$$

où g est la métrique riemannienne, J la structure complexe et ω la forme symplectique.

La motivation principale pour étudier les métriques est dû au fait que ω est fermée et que nous pouvons donc appliquer le $\partial\bar{\partial}$ -lemme (voir lemme 2.16 et on obtient que pour tout point x de M , il existe un voisinage et une fonction réelle u définie sur ce voisinage ouvert U de x telle que

$$\omega|_U = i\partial\bar{\partial}u.$$

La fonction u s'appelle un *potentiel de Kähler local*.

2.2.2 Expressions en coordonnées locales

Dans cette section, nous donnons quelques expressions en coordonnées locales. Si M est une variété complexe de dimension n munie d'une métrique hermitienne h alors si on prend $U, (z_1, \dots, z_n)$ des coordonnées locales alors on a

$$h|_U = \sum_{1 \leq j, k \leq n} h_{j\bar{k}} dz_j \otimes d\bar{z}_k,$$

où (h_{ij}) est une matrice hermitienne positive à coefficient \mathcal{C}^∞ . Ainsi, nous avons alors que

$$\begin{aligned} \omega|_U &= -\text{Im}(h)|_U = \frac{i}{2} (h - \bar{h})|_U \\ &= \frac{i}{2} \left(\sum_{1 \leq j, k \leq n} h_{j\bar{k}} dz_j \otimes d\bar{z}_k - \overline{\sum_{1 \leq j, k \leq n} h_{j\bar{k}} dz_j \otimes d\bar{z}_k} \right) \\ &= \frac{i}{2} \left(\sum_{1 \leq j, k \leq n} h_{j\bar{k}} dz_j \otimes d\bar{z}_k - \sum_{1 \leq j, k \leq n} \overline{h_{j\bar{k}}} d\bar{z}_j \otimes dz_k \right) \\ &= \frac{i}{2} \left(\sum_{1 \leq j, k \leq n} h_{j\bar{k}} dz_j \otimes d\bar{z}_k - \sum_{1 \leq j, k \leq n} h_{k\bar{j}} d\bar{z}_j \otimes dz_k \right) \\ &= \frac{i}{2} \sum_{1 \leq j, k \leq n} h_{j\bar{k}} (dz_j \otimes d\bar{z}_k - d\bar{z}_k \otimes dz_j), \end{aligned}$$

or on sait que

$$dz_j \wedge d\bar{z}_k = dz_j \otimes d\bar{z}_k - d\bar{z}_k \otimes dz_j$$

d'où

$$\omega|_U = \frac{i}{2} \sum_{1 \leq j, k \leq n} h_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k.$$

En particulier, on voit clairement que ω est alors une 2-forme réelle (car partie imaginaire d'une métrique hermitienne) positive (car (h_{ij}) est une matrice définie positive) de type $(1, 1)$ (au vu de l'expression locale).

Maintenant, si M est une variété kählérienne alors $d\omega = 0$. Or comme ω est réelle, $d\omega = 0$ est équivalent à $\partial\omega = 0$, ce qui se traduit en coordonnées locales par l'égalité :

$$\frac{\partial h_{j\bar{k}}}{\partial z_l} = \frac{\partial h_{l\bar{k}}}{\partial z_j}, \quad 1 \leq j, k, l \leq n.$$

De plus, un calcul simple nous donne que

$$\frac{\omega^{\wedge n}}{n!} = \det(h_{jk}) \bigwedge_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{i}{2} dz_j \wedge d\bar{z}_k \right) = \det(h_{j\bar{k}}) dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n,$$

où $z_n = x_n + iy_n$. Ainsi on a donc que la forme volume dV associée à la métrique hermitienne vaut

$$dV = \frac{\omega^{\wedge n}}{n!}.$$

Ce qui peut encore s'écrire si M est compacte sous la forme

$$\int_X \omega^{\wedge n} = n! \text{Vol}_\omega(X) > 0.$$

2.2.3 Réduction kählérienne

Au vu du lien qui existe entre variété kählérienne et variété symplectique, nous allons étendre les résultats 1.17 et 1.18 au cas des variétés kählériennes.

Théorème 2.21 *Soit (M, g, J, ω) une variété kählérienne munie d'une action d'un groupe de Lie compact G agissant par isométrie de manière libre et hamiltonienne dont on note l'application moment par $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ (où \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie de G).*

Alors $M//_c G$ est une variété kählérienne.

De plus, si la dimension de G est égale à la moitié de celle de M alors $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^$ est un G -fibré principal sur son image. Ainsi, nous obtenons une métrique \tilde{g} sur $\text{im } \mu$ telle que μ soit une submersion riemannienne de (M, g) sur $(\text{im } \mu, \tilde{g})$.*

De la même manière, si N est un sous-groupe normal de G alors le groupe quotient G/N agit de manière libre et hamiltonienne sur le $M//_c N$ et fait de l'application moment $\nu : M \rightarrow (\mathfrak{g}/\mathfrak{n})^$ un G/N -fibré principal au dessus de son image, et on peut aussi définir une unique métrique sur $\text{im } \nu$ telle que ν soit une submersion riemannienne. De plus, si on note $l := u^* + \tilde{c}$ l'application affine entre $\text{im } \nu$ et $\text{im } \mu$ induite par l'inclusion $u^* : (\mathfrak{g}/\mathfrak{n})^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$, alors on a $l^* \widetilde{g}_{red} = g_{red}$.*

Démonstration. Comme la démonstration est longue et n'apporte aucune information supplémentaire utile par la suite, on renvoie à [32] par exemple. \square

2.3 Variété torique kählérienne

2.3.1 Définitions générales

On va étendre la notion de variété symplectique et torique au cas des variétés kählériennes. Pour étendre cette définition, nous allons exploiter le fait que

$$\mathbb{T}^n = i\mathbb{R}/2i\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z} = \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^n.$$

Définition 2.22 *On dit que (M, g, J, ω, μ) est une variété torique kählérienne de dimension complexe n ou de dimension réelle $2n$ si*

- (M, g, J, ω) est une variété kählérienne compacte de dimension réelle $2n$.
- Il existe une action $\phi : \mathbb{T}^n \times M \rightarrow M$ hamiltonienne et effective du tore réel \mathbb{T}^n de dimension réelle n sur M .
- L'action ϕ s'étend en une action holomorphe et effective $\phi : \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^n \times M \rightarrow M$ du tore complexe $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^n$ de dimension n sur M telle qu'il existe une orbite libre ouverte et dense $M_0 \subset M$.

En particulier, une variété kählérienne torique (M, g, J, ω, μ) est une variété symplectique torique (M, ω, μ) . On a donc une application

$$X : \begin{array}{l|l} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \Gamma(TM) \\ \xi & \longmapsto X_{\xi} \end{array} .$$

où X_{ξ} est le champ de vecteurs sur M dont le flot est donné par $(t, x) \mapsto \phi(\exp(-t\xi), x)$. Or comme ϕ est maintenant une action holomorphe, nous obtenons que l'application $x \mapsto \phi(\exp(-t\xi), x)$ est holomorphe (pour tout t et pour tout ξ) et donc grâce à la condition (3) du lemme 2.13 et 2.15, nous obtenons que X_{ξ} et JX_{ξ} sont des champs de vecteurs réels holomorphes pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. En particulier, nous avons la proposition suivante qui nous servira dans la partie 2.3.2 :

Proposition 2.23 *Soit (M, g, J, ω, μ) une variété torique kählérienne telle que l'action du tore \mathbb{T}^n soit libre et soit (ξ_1, \dots, ξ_n) une base de \mathbb{R}^n . Alors la famille $X_{\xi_1}, \dots, X_{\xi_n}, JX_{\xi_1}, \dots, JX_{\xi_n}$ est une base de TM .*

Démonstration. Grâce au théorème 1.13, on sait que X engendre un sous-fibré de rang n . De même JX engendre un sous-fibré de rang n car J est un isomorphisme (son inverse est $-J$). Pour conclure, il suffit de montrer que

$$\langle X \rangle \cap \langle JX \rangle = \{0\},$$

où $\langle X \rangle$ et $\langle JX \rangle$ sont respectivement les sous-fibrés engendrés par $X_{\xi_1}, \dots, X_{\xi_n}$ et par $JX_{\xi_1}, \dots, JX_{\xi_n}$. Pour cela, nous allons montrer que $\langle X \rangle$ est orthogonal à $\langle JX \rangle$. Par linéarité, il suffit de le montrer pour les vecteurs de bases i.e.

$$g(X_{\xi_i}, JX_{\xi_j}) = 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2.$$

Cela résulte de la suite d'égalités suivante :

$$\begin{aligned} g(X_{\xi_i}, JX_{\xi_j}) &= \omega(X_{\xi_i}, X_{\xi_j}) && \text{(car } \omega \text{ et } J \text{ sont compatibles)} \\ &= \{\mu^{\xi_i}, \mu^{\xi_j}\} && \text{(par définition du crochet de Poisson} \\ &&& \text{et de l'action hamiltonienne)} \\ &= \mu^{[\xi_i, \xi_j]} && \text{(car } \mu \text{ est un morphisme d'algèbre de Lie)} \\ &= \mu^0 = 0 && \text{(car le tore réel } \mathbb{T}^n \text{ est abélien).} \end{aligned}$$

□

Par dualité, nous obtenons un corollaire important. Avant de l'énoncer, nous allons introduire quelques notations. Pour cela, on fixe une base (ξ_1, \dots, ξ_n) de $(\mathbb{R}^n)^*$. Maintenant, si $X \in \Gamma(TM) \otimes \mathbb{R}^{n*}$ et $\alpha \in \Gamma(T^*M) \otimes \mathbb{R}^n$ s'écrivent

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \otimes \xi_i \text{ et } \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes \xi_i^*,$$

alors on définit $JX \in \Gamma(TM) \otimes \mathbb{R}^{n*}$ et $J\alpha \in \Gamma(T^*M) \otimes \mathbb{R}^n$ comme

$$JX = \sum_{i=1}^n JX_i \otimes \xi_i \text{ et } J\alpha = \sum_{i=1}^n J\alpha_i \otimes \xi_i^*.$$

Corollaire 2.24 *Soit (M, g, J, ω, μ) une variété torique kählérienne telle que l'action du tore \mathbb{T}^n soit libre. Alors il existe un tenseur $\alpha \in \Gamma(T^*M) \otimes \mathbb{R}^n$ vérifiant*

- $\alpha(X) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$
- *Les composantes de α et de $J\alpha$ sont des formes différentielles fermées qui forment une base de T^*M .*

De plus, en écrivant localement sur un ouvert U de M que $\alpha = dt$ et $J\alpha = -dy$ où $y, t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, nous obtenons que $y + it$ est une carte holomorphe locale de M .

Démonstration. D'après la proposition 2.23, nous avons une base TM donnée par la famille $(X_1, \dots, X_n, JX_1, \dots, JX_n)$. Nous pouvons construire par dualité la base $(X_1^*, \dots, X_n^*, (JX_1)^*, \dots, (JX_n)^*)$ qui est une base de 1 formes fermées de T^*M . On pose alors

$$\alpha = \sum_{i=1}^n X_i^* \otimes \xi_i^*.$$

Par définition, elle vérifie bien

$$\alpha(X) = \text{id}_{\mathbb{R}^n},$$

et on alors que

$$J\alpha = \sum_{i=1}^n (JX_i)^* \otimes \xi_i^*.$$

Comme X est holomorphe alors α est aussi holomorphe i.e. $\alpha + iJ\alpha$ est une 1-forme holomorphe. Ainsi en écrivant localement que $\alpha = dt$ et $J\alpha = -dy$ où $y, t : U \subset M \rightarrow \mathbb{C}^n$, ce qui est possible comme elles sont fermées, alors $y + it : U \subset M \rightarrow \mathbb{C}^n$ est une carte holomorphe sur U . □

2.3.2 Potentiels de Kähler pour les variétés toriques kählériennes

Dans cette section, nous considérons une variété torique kählérienne (M, g, J, ω, x) de dimension complexe n . En particulier, on a le tenseur défini dans la section 1.2.3 $X \in \Gamma(TM) \otimes \mathbb{R}^{n*}$ vérifiant $i_X\omega = -dx$. De plus, grâce à la proposition 2.23 et le corollaire 2.24, nous avons l'existence d'un tenseur $\alpha \in \Gamma(T^*M) \otimes \mathbb{R}^n$ vérifiant

- $\alpha(X) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$
- Les composantes de α et de $J\alpha$ sont des formes différentielles fermées qui forment une base de T^*M .

Maintenant, en remarquant que $i_X\omega$ et $J\alpha$ engendrent le même sous-fibré \mathcal{A} de rang n de T^*M : l'annulateur de l'espace tangent aux orbites de l'action du tore. Nous obtenons que

$$i_X\omega_i|_x = \sum_{k=1}^n F(x)_{i,k} \cdot (J\alpha)_k|_x \quad \forall x \in M, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

où $F(x)_{i,j} \in \mathbb{R}$. Nous obtenons ainsi une matrice $F(x) \in M_n(\mathbb{R})$ et donc une application $F : M \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ qui à un point $x \in M$ associe la matrice $F(x)$. De plus, $M_n(\mathbb{R}) \simeq \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n*})$ donc on peut voir $F(x)$ comme un tenseur appartenant à $\mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^{n*}$ s'exprimant

$$F(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n F_{i,k}(x) \xi_i^* \otimes \xi_k^*.$$

De plus, comme $J\alpha \in \Gamma(T^*M) \otimes \mathbb{R}^n \simeq \Gamma(T^*M \otimes (M \times \mathbb{R}^n))$, nous avons alors que $J\alpha|_x = \sum_{i=1}^n \alpha_i|_x \otimes \xi_i \in \mathcal{A}_x \otimes \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^n \simeq \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dont l'expression est alors

$$J\alpha|_x \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ Y \longmapsto \sum_{i=1}^n J\alpha_i|_x(Y) \cdot \xi_i \end{array} \right.$$

Ainsi $F(x) \circ \alpha|_x \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n*})$ et a pour expression

$$F(x) \circ \alpha|_x \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n*} \\ Y \longmapsto \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n F_{i,k}(x) J\alpha_i|_x(Y) \cdot (\xi_k)^* \end{array} \right.$$

or

$$i_X \omega_i|_x = \sum_{k=1}^n F(x)_{i,k} \cdot (J\alpha)_k|_x \quad \forall x \in M, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

nous obtenons que

$$(F(x) \circ J\alpha|_x)(Y) = \sum_{k=1}^n i_X \omega_k|_x(Y) \cdot \xi_k^*.$$

Donc, on peut définir une application

$$\langle F, J\alpha \rangle \left| \begin{array}{l} M \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n*} \\ (x, Y) \longmapsto (Z = \sum_{k=1}^n Z_i \xi_i \mapsto \sum_{k=1}^n i_X \omega_k|_x(Y) \cdot Z_i) \end{array} \right. ,$$

De plus, $\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes \mathbb{R}^n)$, en utilisant l'isomorphisme canonique entre \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^{n*} , nous obtenons que $\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes \mathbb{R}^{n*})$ tel que

$$i_X \omega|_x \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n*} \\ Y \longmapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i|_x(Y) \cdot (\xi_i)^* \end{array} \right. .$$

Nous obtenons alors que

$$i_X \omega = \langle F, J\alpha \rangle.$$

De même, nous construisons $G \in \text{Hom}(\mathbb{R}^{n*}, \mathbb{R}^n)$ tel que

$$J\alpha = \langle G, \alpha \rangle.$$

De plus, comme nous avons $\alpha(X) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$, nous obtenons que $J\alpha(JX) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ et donc que

$$F(x) = F(x) \circ J\alpha|_x(JX).$$

De plus, comme $\alpha = \langle F, J\alpha \rangle$, nous obtenons que

$$F(x) = (i_X \omega)|_x(JX|_x) = \omega|_x(X|_x, JX|_x) = g|_x(X|_x, X|_x).$$

Cela nous donne, en particulier, que pour tout $x \in M$, on a $F(x) \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ est symétrique et défini positif. De même, nous voyons que pour tout $x \in M$, on a $G(x) \in \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^{n*}$ est symétrique et défini positif.

De plus, comme nous avons que localement $dx = i_X \omega$ et $dy = J\alpha$, ainsi

$$\forall r \in \{1, \dots, n\}, \quad dx_r = \sum_{s=1}^n F_{rs} dy_s, \quad dy_r = \sum_{s=1}^n G_{rs} dx_s.$$

Maintenant, on sait qu'une forme différentielle s'écrivant $\sum_{s=1}^n G_{rs} dx_s$ est fermée si et seulement si la matrice (G_{rs}) est la matrice hessienne par rapport à la variable $x = (x_1, \dots, x_n)$ d'une fonction G . Ainsi, dans notre cas, nous avons l'existence d'une application $G : \mathbb{R}^{n*} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la matrice (G_{rs}) soit la hessienne de G . De plus, comme $dy_r = \sum_s^n G_{rs} dx_s$, nous avons $y_r = \partial G / \partial x_r$. De la même manière,

nous avons l'existence d'une fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par rapport à la variable $y = (y_1, \dots, y_n)$ telle que la matrice (F_{rs}) soit la hessienne de F , en particulier, nous avons aussi que $\mu_s = \partial F / \partial y_s$.

Remarquons que F et G sont reliées par la *transformation de Legendre* i.e.

$$F + G = \langle x, y \rangle = \sum_{r=1}^n x_r \frac{\partial G}{\partial x_r} = \sum_{r=1}^n y_r \frac{\partial F}{\partial y_r}.$$

En effet, si on considère la fonction

$$\Theta : \begin{cases} \mathbb{R}^{n^*} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto F(y) + G(x) - \langle x, y \rangle \end{cases},$$

nous voyons que

$$\begin{aligned} d_x(\Theta(\cdot, y)) &= d_x G - d_x(\langle \cdot, y \rangle) \\ &= \sum_{r=1}^n \frac{\partial G}{\partial x_r} dx_r - \sum_{r=1}^n y_r dx_r \\ &= \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial G}{\partial x_r} - y_r \right) dx_r, \end{aligned}$$

or nous venons de voir que

$$y_r = \partial G / \partial x_r,$$

ainsi nous avons

$$d_x(\Theta(\cdot, y)) = 0,$$

i.e. Θ est indépendant de la valeur de x . De même on montre que $d_y(\Theta(x, \cdot)) = 0$ et donc Θ est constant. Ainsi, quitte à rajouter une constante, on a que $F + G = \langle x, y \rangle$.

Terminons en remarquant que F est *un potentiel de Kähler* i.e

$$\omega = \sum_{r,s} F_{r,s} dy_s \wedge dt_r = i \partial \bar{\partial} F.$$

On dit alors que G est *le potentiel symplectique (ou de Kähler dual)*. Ce potentiel dual nous permet de paramétrer les métriques de Kähler sur les variétés toriques ayant une forme symplectique fixée. En effet, nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.25 *Soit G une fonction de \mathbb{R}^{n^*} dont la matrice hessienne (G_{rs}) est définie positive ayant pour inverse la matrice (F_{rs}) . Alors*

$$\sum_{r,s} (G_{rs} dx_r dx_s + F_{rs} dt_r dt_s)$$

est une métrique kählérienne ayant pour forme de Kähler

$$\omega = \sum_r dx_r \wedge dt_r,$$

dont l'application moment est x .

□

De plus, grâce au lemme 2.21, on a que l'application moment x induit une métrique g_{red} sur $\text{im } x$ telle que x soit une submersion riemannienne. Ainsi, nous obtenons que g_{red} est donnée par

$$g_{red} = \sum_{r,s} G_{rs} dx_r dx_s.$$

Terminons par la proposition suivante :

Proposition 2.26 *Soit $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ une variété kählérienne torique de dimension réelle $2d$. Notons \widetilde{M}_0 l'ouvert de \mathbb{T}^d où l'action est libre. Alors $\mu : \widetilde{M}_0 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^{d*}$ est un \mathbb{T}^d fibré principal.*

Maintenant, soit N un sous-groupe de \mathbb{T}^d de codimension n avec comme application moment $\mu_N = i^ \circ \mu$, où $i^* : \mathbb{R}^{d*} \rightarrow \mathfrak{n}^*$ est la projection canonique sur \mathfrak{n}^* et soit $\tilde{c} \in \mathbb{R}^{n*}$ tel que $c = i^*(\tilde{c})$ est une valeur régulière de μ_N et tel que l'action de N sur $\mu_N^{-1}(c)$ est localement libre. Alors $M = \mu_N^{-1}(c)/N$ est une variété kählérienne. De plus, en notant g la métrique sur g et $q : \mu_C^{-1}(c) \rightarrow M$ la projection canonique, alors l'action de \mathbb{T}^d sur \widetilde{M} préserve $\mu_N^{-1}(c)$ et donc induit une action hamiltonienne du tore quotient : $\mathbb{T}^n := \mathbb{T}^d/N$ sur M avec comme application moment ν défini par :*

$$\nu \circ q = \mu - \tilde{c}.$$

De plus, si on note Δ_0 l'image de ν restreint à M_0 , alors le quotient $\nu_C^{-1}(c) \cap \widetilde{M}_0$ par N et si pose $l := u^ - \tilde{c}$ où $u^* : (\mathfrak{g}/\mathfrak{n})^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ est l'adjoint de la projection canonique $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$, alors la métrique réduite g_{red} sur Δ_0 est le tiré-en-arrière de l de la métrique réduite sur U et donc si $\widetilde{G} : U \rightarrow \mathbb{R}$ est le potentiel dual de \widetilde{g} sur \widetilde{M}_0 alors $G = \widetilde{G} \circ l : \Delta_0 \rightarrow \mathbb{R}$ est le potentiel dual de g sur M_0 .*

Démonstration. Comme les actions coadjointes de \mathbb{T}^d et N sont triviales alors N est un sous-groupe distingué de \mathbb{T}^d alors toutes les assertions, excepté la dernière, sont conséquences du lemme 1.18. Il reste donc à établir que $G = l^* \widetilde{G}$ est le potentiel dual sur le quotient. Cela est une conséquence du lemme 2.21, en effet comme l est une fonction affine par rapport à la connexion (affine) plate D et \widetilde{D} sur Δ_0 et U , on a alors

$$Dd(l^* \widetilde{G}) = l^* \widetilde{D}d\widetilde{G} = l^* \widetilde{g}_{red} = g_{red}.$$

□

2.3.3 Formule de Guillemin

Nous avons vu précédemment que toute variété torique symplectique compacte peut être obtenue comme le quotient symplectique de l'espace vectoriel symplectique standard \mathbb{R}^{2d} . En utilisant l'isomorphisme entre \mathbb{R}^2 et \mathbb{C} , l'action du tore \mathbb{T}^d est donnée par

$$[a_1, \dots, a_d] \cdot (z_1, \dots, z_d) = (e^{ia_1} z_1, \dots, e^{ia_d} z_d),$$

où $[a_1, \dots, a_d] \in \mathbb{R}^d/2\pi\mathbb{Z}^d \simeq \mathbb{T}^d$ et $z_j = r_j e^{i\theta_j}$. Ainsi, \mathbb{R}^{2d} peut être équipé d'une métrique kählérienne, que l'on notera \widetilde{g} , plate compatible avec la forme symplectique

$\frac{i}{2} \sum dz_j \wedge d\bar{z}_j$ et induit (grâce au lemme 2.21) donc une métrique kählérienne canonique sur M appelée *métrique de Guillemin* que l'on notera g . De plus, toujours grâce au lemme 2.21, nous avons que cette métrique sur M induit une métrique réduite g_{red} sur l'intérieur Δ_0 du polytope de Delzant Δ de M . Dans cette section, nous allons donner des formules explicites pour le potentiel de Kähler et le potentiel dual pour la métrique réduite g_{red} .

Pour cela, commençons par rappeler (voir section 1.20) que pour toute variété torique (M, ω, ν) , nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mu_N^{-1}(c) & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{R}^{d*} \\ q \downarrow & & \uparrow l \\ M & \xrightarrow{\nu} & \Delta \subset \mathbb{R}^{n*}. \end{array}$$

où l'application l est définie par

$$l : \begin{cases} \mathbb{R}^{n*} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{d*} \\ x & \longmapsto & (l_1(x), \dots, l_d(x)) \end{cases},$$

où $l_j(x) = \langle u_j, x \rangle - \lambda_j$ avec $u_j \in \mathbb{Z}^{n*}$.

Nous allons donc étudier en particulier le sous-ensemble ouvert de \mathbb{C}^d où \mathbb{T}^d agit librement et l'ouvert M_0 de M correspondant. Nous allons pouvoir utiliser le lemme 2.21 pour calculer les différentes métriques intervenant. En effet, l'idée va être de calculer la métrique réduite \tilde{g}_{red} et le potentiel dual induit par μ sur $U \subset \mathbb{R}^{d*}$ provenant de la métrique plate sur $\mathbb{R}^{2d} \simeq \mathbb{C}^d$ et de les tirer en arrière par l pour obtenir la métrique réduite g_{red} et le potentiel dual G sur Δ_0 grâce à la proposition 2.26.

Comme \tilde{g} est la métrique plate sur $\mathbb{R}^{2d} \simeq \mathbb{C}^d$, on a que

$$\tilde{g} = \sum_{j=1}^d dz_j d\bar{z}_j,$$

on fait alors le changement de variable $z_j = r_j e^{i\theta_j}$, et on obtient donc

$$\tilde{g} = \sum_{j=1}^d (dr_j^2 + r_j^2 d\theta_j^2),$$

et comme $\mu_j = r_j^2/2$, nous avons finalement

$$\tilde{g} = \sum_{j=1}^d \frac{d\mu_j^2}{2\mu_j} + 2\mu_j d\theta_j^2.$$

On conclut alors que

$$\tilde{g}_{red} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \frac{d\mu_j^2}{\mu_j},$$

grâce au fait μ est une submersion riemannienne.

Pour le potentiel dual \tilde{G} associé \tilde{g}_{red} i.e. une fonction $G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \mu_s \partial \mu_r} = 0 \quad \forall r \neq s,$$

et

$$\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial^2 \mu_s} = \frac{1}{2\mu_s} \quad \forall s.$$

On obtient alors que

$$\tilde{G} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \mu_j \log \mu_j.$$

Maintenant, grâce à la proposition 2.26, on sait que $l^*(\tilde{g}_{red}) = g_{red}$ et $G = \tilde{G} \circ l$. Ainsi, en faisant le changement $\mu_j = l_j(x)$, on obtient que

$$g_{red} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \frac{dl_j^2}{l_j},$$

et

$$G = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d l_j(x) \log l_j(x).$$

On calcule le potentiel de Kähler F en utilisant la transformation de Legendre. En effet, la coordonnée duale y de l'application moment x est donnée par

$$y = \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d u_j \log l_j(x) + u_j.$$

Ainsi, le potentiel de Kähler est donné par

$$\begin{aligned} F = -G(x) + \langle x, y \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d ((\langle u_j, x \rangle - l_j(x)) \log l_j(x) + \langle u_j, x \rangle) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d (l_j(x) + \lambda_j + \lambda_j \log l_j(x)). \end{aligned}$$

De plus, comme le potentiel est défini à une constante additive près, on peut dire que

$$F = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d (l_j(x) + \lambda_j \log l_j(x)).$$

Résumons cela dans la proposition suivante :

Proposition 2.27 Soit (M, ω) une variété torique compacte d'application moment $\nu : M \rightarrow \Delta \subset \mathbb{R}^{n^*}$ où le polytope de Delzant est donné par

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^{n^*} : l_j(x) \geq 0, \quad j = 1, \dots, d\},$$

où $l_j(x) = \langle u_j, x \rangle - \lambda_j$ pour $u_j \in \mathbb{Z}^n$ et $\lambda_j \in \mathbb{R}$. En munissant M de la métrique de Guillemin g , on obtient que la métrique réduite sur Δ_0 est

$$g_{red} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{dl_i^2}{l_i},$$

et le potentiel dual et le potentiel de Kähler sont donnés respectivement par

$$G = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d l_j(x) \log l_j(x),$$

et

$$F = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \lambda_j \log l_j(x) + l_j(x).$$

□

3 Résultats sur les connexions

3.1 Rappels sur les fibrés vectoriels holomorphes

3.1.1 Définitions générales

Soit M une variété complexe et $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel complexe au-dessus de M (i.e. $\pi^{-1}(x)$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel pour tout $x \in E$). On dira alors que E est un *fibré vectoriel holomorphe* si les trivialisations de E sont des fonctions holomorphes. Plus précisément, on a la définition suivante :

Définition 3.1 *Soit M une variété complexe de dimension n . Un fibré vectoriel holomorphe sur M (ou de M) de rang r est la donnée de*

- (1) *Une variété complexe E*
- (2) *Une application holomorphe $\pi : E \rightarrow M$ telle que*
- (3) *pour tout $p \in M$, $E_p =: \pi^{-1}(p)$ est un espace vectoriel complexe de dimension r que l'on appellera fibre en p .*
- (4) *Il existe un recouvrement d'ouverts $\{U_i\}_{i \in I}$ de M et une famille de biholomorphismes $\{h_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times \mathbb{C}^r\}_{j \in I}$ telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} U_j \times \mathbb{C}^r & \xrightarrow{h_j^{-1}} & \pi^{-1}(U_j) \\ & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow \pi \\ & & U_j \end{array}$$

et telle que $h_j|_{E_p} : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbb{C}^r$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On dit que h_i est une trivialisations de E au-dessus de U_i .

Maintenant, si on prend deux trivialisations φ_i et φ_j , on peut alors définir l'application $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_r(\mathbb{C})$ définie par la formule $(h_i \circ h_j^{-1})(p, v) = (p, g_{ij}(p)v)$ pour $p \in U_i \cap U_j$, c'est alors une application holomorphe que nous appellerons *fonction de transition* de E relativement à φ_i et φ_j . On vérifie facilement que les fonctions de transition vérifient :

$$g_{UV}(x) \cdot g_{VU}(x) = 1 \quad \forall x \in U \cap V,$$

$$g_{UV}(x) \cdot g_{VW}(x) \cdot g_{WU}(x) = 1 \quad \forall x \in U \cap V \cap W.$$

Réciproquement la donnée des fonctions de transition permet de reconstruire le fibré vectoriel. Plus précisément si on se donne $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ un recouvrement de M et une famille de fonctions holomorphes $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL_k$ satisfaisant les deux formules précédentes, alors il existe un unique fibré vectoriel complexe $E \rightarrow M$ ayant pour fonctions de transition la famille $\{g_{\alpha\beta}\}$. Pour le voir il suffit de considérer

$$E = \bigsqcup (U_\alpha \times \mathbb{C}^k) / \sim,$$

où \sim est la relation d'équivalence identifiant (x, y) à $(x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot y)$. Et l'on munit E de la structure de variété lisse induite par les inclusions $U_\alpha \times \mathbb{C}^k \hookrightarrow E$. On peut résumer cela dans la proposition suivante :

Proposition 3.2 *Un fibré vectoriel complexe est entièrement déterminé par ses fonctions de transition.* \square

La seconde étape après avoir défini un nouvel objet, est de définir les applications entre ces nouveaux objets.

Définition 3.3 *Soient E et F deux fibrés vectoriels complexes sur M , une fonction holomorphe $f : E \rightarrow F$ est un morphisme de fibrés vectoriels complexes si $f(E_x) \subset F_x$ et $f_x = f|_{E_x} : E_x \rightarrow F_x$ est linéaire. De plus, on dira que f est un isomorphisme si pour tout $x \in M$, f_x est un isomorphisme, et dans ce cas on dira que E et F sont isomorphes. Et en dernier lieu, un fibré vectoriel complexe sera dit trivial s'il est isomorphe au fibré trivial $M \times \mathbb{C}^k \xrightarrow{pr_1} M$.*

Nous avons vu qu'un fibré vectoriel est entièrement déterminé par la donnée de ses fonctions de transition, nous allons maintenant chercher une condition sur les fonctions de transition pour que deux fibrés soient isomorphes. Partons de deux fibrés vectoriels $E \xrightarrow{\pi_1} M$ et $F \xrightarrow{\pi_2} M$, on peut toujours supposer que les fonctions de transition de E et de F sont données sur le même recouvrement (quitte à prendre un raffinement) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de M déterminés respectivement par les fonctions de transition $\{g_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \mathcal{A}}$ et $\{f_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \mathcal{A}}$, nous notons aussi $h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ les trivialisations associées à E et $k_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ celles associées à F . Si $\mu : E \rightarrow F$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels alors l'application $k_\alpha \circ \mu \circ h_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \mathbb{C}^r \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ est de la forme $(id_{U_\alpha}, \mu_\alpha)$ où $\mu_\alpha : U_\alpha \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{C})$ est une fonction holomorphe. Alors, la suite d'égalités

$$(k_\alpha \circ k_\beta^{-1}) \circ (k_\beta \circ \mu \circ h_\beta^{-1}) = k_\alpha \circ \mu \circ h_\beta^{-1} = (k_\alpha \circ \mu \circ h_\alpha^{-1}) \circ (h_\alpha \circ h_\beta^{-1}),$$

nous donne que

$$f_{\alpha,\beta} \mu_\beta = \mu_\alpha g_{\alpha,\beta}.$$

On peut alors résumer cela de la façon suivante :

Proposition 3.4 *Soient E et F deux fibrés vectoriels sur M donnés respectivement par les fonctions de transition $\{g_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \mathcal{A}}$ et $\{f_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \mathcal{A}}$. Alors E et F sont isomorphes si et seulement s'il existe une famille $\{\mu_\alpha : U_\alpha \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{C})\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de fonctions holomorphes telle que*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{A}, f_{\alpha,\beta} \mu_\beta = \mu_\alpha g_{\alpha,\beta}.$$

\square

Avant de passer aux exemples, on va donner deux définitions importantes.

Définition 3.5 Une section σ d'un fibré vectoriel E sur M au-dessus de M est une application lisse $\sigma : U \rightarrow E$ telle que $\sigma(x) \in E_x$ pour tout $x \in M$, autrement dit, telle que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\sigma} & E \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

Un repère local de E au-dessus de U est une collection $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ de sections de E au-dessus de M telle que $\{\sigma_1(x), \dots, \sigma_k(x)\}$ soit une base de E_x pour tout $x \in U$.

A partir d'une trivialisatation φ_U , on peut construire les sections

$$\sigma_i(x) = \varphi_U^{-1}(x, e_i),$$

où les e_i forment une base de \mathbb{C}^k . Et cette famille σ_i forme un repère local de E au-dessus de U .

3.1.2 Exemples importants

Passons maintenant aux exemples :

- L'exemple le plus simple possible de fibrés vectoriels mais qui sera très utile par la suite est donné par le *fibré trivial sur M de rang r* qui est donné par $M \times \mathbb{C}^r$ muni de la première projection $pr_1 : M \times \mathbb{C}^r \rightarrow M$.
- Comme nous avons vu dans la proposition 2.3, le fibré tangent d'une variété complexe est un fibré holomorphe.
- Terminons les exemples en donnant la construction du tiré-en-arrière d'un fibré par une application holomorphe. Soit $E \xrightarrow{p} M$ un fibré vectoriel de rang r et soit $f : F \rightarrow M$ une application holomorphe. Le tiré-en-arrière par f de E est le fibré vectoriel noté f^*M défini de la manière suivante. Posons

$$f^*M = \{(x, y) \in F \times E : f(x) = p(y)\}$$

muni de ses deux projections

$$\tilde{p} : \left\{ \begin{array}{l} f^*M \longrightarrow F \\ (x, y) \longmapsto x \end{array} \right. ,$$

et

$$\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{l} f^*M \longrightarrow E \\ (x, y) \longmapsto y \end{array} \right. .$$

Il existe alors une (unique) structure de variété sur f^*M telle que $f^*M \xrightarrow{\tilde{p}} F$ est un fibré vectoriel de rang r tel que \tilde{f} soit holomorphe, et que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
f^*M & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\
\tilde{p} \downarrow & & \downarrow p \\
F & \xrightarrow{f} & M
\end{array}$$

Pour cela, on commence par remarquer que la commutativité du diagramme est évidente, il reste alors à munir les fibres d'une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel et f^*M d'une structure de variété rendant \tilde{p} holomorphe. Déjà \tilde{f} induit une bijection évidente entre $\tilde{p}^{-1}(x) = \{x\} \times E_{f(x)}$ et $E_{f(x)}$, on peut alors munir les fibres $\tilde{p}^{-1}(x)$ d'une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel. Considérons alors un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de M et des trivialisations $\{h_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^r\}_{i \in I}$ au-dessus de U de M . Considérons alors l'ensemble $\{\tilde{h}_i : \tilde{p}^{-1}(f^{-1}(U_i)) \rightarrow f^{-1}(U_i) \times \mathbb{C}^r\}_{i \in I}$ où

$$\tilde{h}_i : \begin{cases} \tilde{p}^{-1}(f^{-1}(U_i)) & \longrightarrow & f^{-1}(U_i) \times \mathbb{C}^r \\ (x, y) & \longmapsto & (\tilde{p}(x), pr_2 \circ h_i(y)) \end{cases},$$

cette application est un homéomorphisme d'inverse

$$\tilde{h}_i^{-1} : \begin{cases} f^{-1}(U_i) \times \mathbb{C}^r & \longrightarrow & \tilde{p}^{-1}(f^{-1}(U_i)) \\ (x, y) & \longmapsto & (x, h_i^{-1}((f(x), y))) \end{cases}.$$

En effet, pour le voir on remarque que l'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
f^{-1}(U) \times \mathbb{C}^r & \xrightarrow{f \times id} & U \times \mathbb{C}^r & & \\
\tilde{h}_i \swarrow & & \searrow h_i & & \\
(f \circ \tilde{p})^{-1}(U) & \xrightarrow{\tilde{f}} & p^{-1}(U) & & \\
pr_1 \swarrow & & \searrow pr_1 & & \\
f^{-1}(U) & \xrightarrow{f} & U & & \\
\tilde{p} \downarrow & & \downarrow p & & \\
& & & &
\end{array}$$

On peut alors munir f^*M de l'atlas maximal contenant les cartes $(\tilde{p}(f^{-1}(U_i)), \tilde{h}_i)$. On vérifie alors facilement, toujours à l'aide du diagramme précédent, que les fonctions de transition sont bien holomorphes, ce qui munit bien f^*M d'une structure de variété complexe répondant au problème. Pour la suite, la construction ne sera pas utile, ce qui sera important sont les deux faits suivants :

- (1) les fonctions de transition de f^*M sont alors les tirés-en-arrière des fonctions de transition de M par f ,
- (2) $(f^*M)_x = M_{f(x)}$.

3.1.3 Fibrés en droites

Un *fibré en droites (complexe)* est un fibré vectoriel holomorphe de rang 1. Considérons donc un fibré en droites $L \xrightarrow{\pi} M$, par définition, on peut donc trouver un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de M et des trivialisations $\{\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Dans ce cas, les fonctions de transition $t_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{C}^*$ définissent des fonctions holomorphes qui ne s'annulent pas et satisfaisant

$$\begin{aligned} t_{\alpha\beta}(x) \cdot t_{\beta\alpha}(x) &= 1 \quad \forall x \in U \cap V, \\ t_{\alpha\beta}(x) \cdot t_{\beta\gamma}(x) \cdot t_{\gamma\alpha}(x) &= 1 \quad \forall x \in U \cap V \cap W. \end{aligned}$$

Nous avons vu dans la section précédente, à la proposition 3.2, qu'un fibré vectoriel (donc un fibré en droites) est entièrement déterminé par ses fonctions de transition. De plus, grâce à la proposition 3.4, il y a une bijection entre l'ensemble des fonctions de transition et l'ensemble des fibrés en droites, grâce à ces deux remarques nous allons définir sur ce dernier ensemble une structure de groupe. Pour cela, partons de deux fibrés en droites L et \tilde{L} , quitte à prendre un recouvrement plus fin, on peut toujours supposer que les fonctions de transition de L et de \tilde{L} sont données sur le même recouvrement $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de M , déterminés respectivement par les fonctions de transition $\{g_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \mathcal{A}}$ et $\{\tilde{g}_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \mathcal{A}}$, on définit le fibré $L \otimes \tilde{L}$ par les fonctions de transition $\{g_{\alpha,\beta} \cdot \tilde{g}_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \mathcal{A}}$. On définit aussi L^* par les fonctions de transition $\{g_{\alpha,\beta}^{-1}\}_{\alpha,\beta \in \mathcal{A}}$ et on vérifie alors facilement que $L \otimes L^*$ correspond à un fibré trivialisable, pour cela on notera L^* par $-L$ ou L^{-1} . Nous pouvons définir un groupe $\text{Pic}(M)$ en considérant l'ensemble des fibrés en droites modulo isomorphismes muni de ces deux lois, compatibles avec la relation d'équivalence, précédentes.

3.1.4 Structure holomorphe sur un fibré vectoriel

Pour tout fibré holomorphe $E \rightarrow M$, on peut définir le fibré des formes différentielles E -valuées. Pour cela, on pose

$$\Lambda^{p,q}(E) := \Lambda^{p,q}T^*M \otimes E.$$

De plus, on notera l'espace des sections de ce fibré par

$$\Omega^{p,q}(E) := \Gamma(\Lambda^{p,q}T^*M \otimes E).$$

On va définir le $\bar{\partial}$ -opérateur $\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(E) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(E)$ vérifiant :

- $\bar{\partial}^2 = 0$
- Pour tout $\alpha \in \Omega^{p,q}(E)$ et pour tout $\beta \in \Omega^{r,s}(E)$, on a la règle de Leibniz

$$\bar{\partial}(\alpha \wedge \beta) = \bar{\partial}\alpha \wedge \beta + (-1)^{d^\alpha} \alpha \wedge \bar{\partial}\beta.$$

Pour cela, si $\sigma \in \Lambda^{p,q}(E)$ telle que

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$$

dans un ouvert de trivialisations de E . Comme les σ_i sont des (p, q) formes, on définit

$$\bar{\partial}\sigma = (\bar{\partial}\sigma_1, \dots, \bar{\partial}\sigma_k).$$

Pour que cette définition soit correcte, il faut montrer que cette expression ne dépend pas de l'ouvert de trivialisations. Supposons que $\sigma = (\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_k)$ dans un autre ouvert de trivialisations. Donc, par les propriétés du fibré vectoriel, on a que

$$\tilde{\sigma}_j = \sum_{l=1}^k g_{jl}\sigma_l, \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}.$$

où les fonctions g_{jl} sont des applications holomorphes. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\tilde{\sigma}_j &= \bar{\partial}\left(\sum_{l=1}^k g_{il}\sigma_l\right) && \text{(par définition)} \\ &= \sum_{l=1}^k \bar{\partial}(g_{il}\sigma_l) && \text{(par linéarité de l'opérateur } \bar{\partial}\text{)} \\ &= \sum_{l=1}^k \bar{\partial}(g_{il}) \wedge \sigma_l + g_{il}\bar{\partial}\sigma_l. && \text{(par la règle de Leibniz)} \\ &= \sum_{l=1}^k g_{il}\bar{\partial}\sigma_l. && \text{(car les fonctions } g_{ij}\text{ sont holomorphes).} \end{aligned}$$

Ainsi dans l'intersection des deux ouverts de trivialisations, on obtient bien que les deux définitions coïncident, ce qui permet de conclure.

Par la suite, les opérateurs vérifiant les deux propriétés précédentes seront importants, ce qui nous conduit à la définition suivante :

Définition 3.6 *Une structure pseudo-holomorphe sur un fibré vectoriel complexe E est un opérateur $\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(E) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(E)$ satisfaisant la règle de Leibniz :*

$$\bar{\partial}(\alpha \wedge \beta) = \bar{\partial}\alpha \wedge \beta + (-1)^{d^\alpha} \alpha \wedge \bar{\partial}\beta, \quad \forall \alpha \in \Omega^{p,q}(M), \beta \in \Omega^{r,s}(E).$$

De plus, si $\bar{\partial}^2 = 0$, on dit alors que $\bar{\partial}$ est un opérateur holomorphe.

Remarquons qu'il existe une structure holomorphe naturelle sur un fibré vectoriel holomorphe donnée par le $\bar{\partial}$ -opérateur dont la construction donnée au début de cette section. Mais la réciproque est aussi vraie :

Proposition 3.7 *Un fibré vectoriel complexe E est holomorphe si et seulement s'il admet une structure holomorphe $\bar{\partial}$.*

Démonstration. Comme la démonstration est un peu longue et n'importe aucune information importante pour la suite, on renvoie à [20]. \square

3.2 Courbure d'une connexion

Soit M une variété complexe de dimension n et $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel complexe au dessus de M .

3.2.1 Notions de connexions et de courbures

Définition 3.8 Une connexion sur E est un opérateur différentiel \mathbb{C} -linéaire $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(E)$ satisfaisant la règle de Leibniz :

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla\sigma, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C}), \sigma \in \Gamma(E),$$

où $\Omega^1(E)$ est l'espace des 1-formes E -valuées i.e. $\Omega^1(E) := \Gamma(\Lambda^1 T^*M \otimes E)$.

Remarque. Grâce au lemme de tensorialité, on a la définition équivalente d'une connexion est qu'une connexion sur E est une application $\nabla : (\sigma, X) \in \Gamma(E) \times \Gamma(TM) \mapsto \nabla_X \sigma \in \Gamma(E)$ vérifiant

- L'application ∇ est \mathbb{C} -bilinéaire.
- Pour toute fonction $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$, on a $\nabla_{fX} \sigma = f\nabla_X \sigma$.
- Pour toute fonction $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$, on a $\nabla_X(f\sigma) = X(f)\sigma + f\nabla_X \sigma$.

On peut alors étendre la connexion au fibré $\Omega^p(E) := \Gamma(\Lambda^p T^*M \otimes E)$ des p -formes E -valuées sur M par

$$\nabla(\omega \otimes \sigma) = d\omega \otimes \sigma + (-1)^p \omega \wedge \nabla\sigma, \quad \forall \omega \otimes \sigma \in \Omega^p(E),$$

où le produit extérieur se comprend de la façon suivante :

$$\omega \wedge \nabla\sigma := \sum_{i=1}^n \omega \wedge e_i^* \otimes \nabla_{e_i} \sigma,$$

où $\{e_i\}$ est une base locale de TM .

Définissons maintenant l'opérateur de courbure $R^\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^2(E)$ par

$$R^\nabla : \begin{cases} \Gamma(E) & \longrightarrow & \Omega^2(E) \\ \sigma & \longmapsto & \nabla(\nabla\sigma) \end{cases}.$$

Lemme 3.9 l'opérateur de courbure R^∇ vérifie

$$\nabla(f\sigma) = f\nabla^2(\sigma), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \sigma \in \Gamma(E).$$

Démonstration. En effet, on a que

$$\begin{aligned} \nabla^2(f\sigma) &= \nabla(df \otimes \sigma + f\nabla\sigma) && \text{(par la règle de Leibniz)} \\ &= d^2 f \otimes \sigma - df \wedge \sigma + df \wedge \sigma + f\nabla^2\sigma && \text{(par la règle de Leibniz)} \\ &= f\nabla^2\sigma && \text{(car } d^2=0) \end{aligned}$$

□

On a alors la propriété importante suivante :

Proposition 3.10 *L'opérateur de courbure est une 2-forme $End(E)$ -valuée sur M i.e.*

$$R^\nabla \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes End(E)).$$

Démonstration. Comme R^∇ est \mathcal{C}^∞ -linéaire (voir le lemme 3.9), par le lemme de tensorialité, on obtient que

$$R^\nabla \in \Gamma(E^* \otimes \Lambda^2(T^*M) \otimes E),$$

on conclut alors en se souvenant que $End(E) \simeq E^* \otimes E$. \square

Pour terminer, donnons une expression en coordonnées locales de l'opérateur de courbure. Soit un repère local $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ de E i.e. $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ forment une base pour toute fibre au-dessus d'un ouvert $U \subset M$. On définit les 1-formes de connexion locales $\gamma_{ij} \in \Omega^1(U)$ par

$$\nabla \sigma_i = \sum_{j=1}^k \gamma_{ij} \otimes \sigma_j.$$

On définit aussi les 2-formes de courbure locales $R_{ij}^\nabla \in \Omega^2(U)$ par

$$R^\nabla(\sigma_i) = \sum_{j=1}^k R_{ij}^\nabla \otimes \sigma_j.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k R_{ij}^\nabla \otimes \sigma_j &= R^\nabla(\sigma_i) && \text{(par définition des formes de courbure)} \\ &= \nabla(\nabla(\sigma_i)) && \text{(par définition de l'opérateur de courbure)} \\ &= \nabla\left(\sum_{j=1}^k \gamma_{ij} \otimes \sigma_j\right) && \text{(par définition des formes de connexions)} \\ &= \sum_{j=1}^k \nabla(\gamma_{ij} \otimes \sigma_j) && \text{(par linéarité de la connexion)} \\ &= \sum_{j=1}^k \left(d\gamma_{ij} - \sum_{l=1}^k (\gamma_{il} \wedge \gamma_{lj})\right) \otimes \sigma_j && \text{(par la règle de Leibniz)} \end{aligned}$$

Ainsi, par unicité de la décomposition selon une base, on obtient que

$$R_{ij}^\nabla = d\gamma_{ij} - \sum_{l=1}^k (\gamma_{il} \wedge \gamma_{lj}), \quad 1 \leq i, j \leq k.$$

3.2.2 Structure hermitienne et connexion de Chern

Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel complexe de rang k au-dessus d'une variété complexe M .

Définition 3.11 Une structure hermitienne H sur E est un morphisme de fibrés vectoriels $H : E \otimes E \rightarrow \mathbb{C}$ tel que pour tout $x \in M$, $H|_x : E_x \otimes E_x \rightarrow \mathbb{C}$ soit une forme sesquilinéaire hermitienne i.e.

- (i) $H(\cdot, v)$ est \mathbb{C} -linéaire pour tout $v \in E_x$.
- (ii) $H(u, v) = \overline{H(v, u)}$, $\forall u, v \in E_x$.
- (iii) $H(u, u) > 0, \forall u \neq 0$.
- (iv) $H(u, v)$ est une fonction sur M lisse pour toutes sections lisses u et v de E .

Un fibré vectoriel muni d'une structure hermitienne est appelé fibré vectoriel hermitien.

Remarque. Les conditions précédentes nous disent qu'en particulier H est \mathbb{C} -anti-linéaire en la seconde variable. La troisième condition nous dit que H est non dégénéré. Ainsi, on peut voir H comme un isomorphisme \mathbb{C} -anti-linéaire $H : E \rightarrow E^*$.

Remarque. Tout fibré vectoriel complexe admet au moins une structure hermitienne. En effet, si le fibré est trivial (et donc pour les fibrés trivialisables), il suffit de prendre le produit scalaire hermitien usuel pour chaque fibre. Pour le cas général, on utilise le cas précédent que l'on globalise grâce à une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement de trivialisations du fibré.

Remarque. La notion de structure hermitienne est une généralisation à un fibré vectoriel complexe quelconque la notion de métrique hermitienne introduite dans la définition 2.18. En particulier, une métrique hermitienne sur le fibré tangent définit une structure hermitienne sur le fibré tangent.

Si Ω est un ouvert de trivialisations muni d'un repère de trivialisations e_1, \dots, e_r , on peut définir la matrice h_{ij} avec comme coefficients $C^\infty(\Omega)$ par

$$h_{ij}(x) := \langle e_i(x), e_j(x) \rangle, \quad \forall x \in \Omega.$$

On peut alors définir un accouplement sesquilinéaire naturel par

$$\{ \cdot, \cdot \} : \begin{cases} \Omega^p(E) \times \Omega^q(E) & \longrightarrow & \Omega^{p+q}(M) \\ (s, t) & \longmapsto & \{s, t\} \end{cases},$$

où $\{s, t\}$ est défini localement de la façon suivante : si on a que s et t s'écrivent localement comme

$$s = \sum_{i=1}^r \sigma_i \otimes e_i \quad \text{et} \quad t = \sum_{j=1}^r \tau_j \otimes e_j,$$

on pose

$$\{s, t\} = \sum_{1 \leq i, j \leq r} \sigma_i \wedge \bar{\tau}_j \langle e_i, e_j \rangle.$$

Définition 3.12 Une connexion D est compatible avec la structure hermitienne H (ou H -hermitienne) si on a

$$d\{s, t\} = \{Ds, t\} + (-1)^p \{s, Dt\}, \quad \forall s \in \Omega^p(E), t \in \Omega^q(E).$$

Nous avons alors la caractérisation suivante des connexions hermitiennes :

Proposition 3.13 Soit $(E, H) \rightarrow M$ un fibré vectoriel hermitien de rang k au-dessus d'une variété complexe M et soit une connexion ∇ sur E . Si U est un ouvert de trivialisations de E alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) La connexion ∇ est hermitienne.
- (ii) On a pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$

$$\overline{\gamma_{ij}} = -\gamma_{ji}.$$

où les γ_{ij} sont les 1-formes de coordonnées (pour l'ouvert de trivialisations U) de la connexion ∇ .

Démonstration. Soit U est un ouvert de trivialisations de E . Considérons un repère orthonormé e_1, \dots, e_r associé à cette trivialisations, cela signifie que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, ainsi si s et t s'écrivent localement comme

$$s = \sum_{i=1}^r \sigma_i \otimes e_i \quad \text{et} \quad t = \sum_{j=1}^r \tau_j \otimes e_j,$$

on a

$$\{s, t\} = \sum_{1 \leq i \leq r} \sigma_i \wedge \bar{\tau}_i.$$

De plus, un calcul simple nous donne que

$$\begin{aligned} d\{s, t\} &= d\left(\sum_{1 \leq i \leq r} \sigma_i \wedge \bar{\tau}_i\right) && \text{(par définition)} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq r} d(\sigma_i \wedge \bar{\tau}_i) && \text{(par linéarité)} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq r} d(\sigma_i) \wedge \bar{\tau}_i + \sum_{1 \leq i \leq r} (-1)^p \sigma_i \wedge d(\bar{\tau}_i) && \text{(par la règle de Leibniz)} \\ &= \{ds, t\} + (-1)^p \{s, dt\} && \text{(car le repère est orthonormé).} \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant les 1-formes de coordonnées et la règle de Leibniz, on obtient que

$$Ds = \sum_{1 \leq i \leq r} \left(d\sigma_i + \sum_{1 \leq j \leq r} \gamma_{ij} \wedge \sigma_j \right) \otimes e_i,$$

et donc

$$\begin{aligned}\{Ds, t\} &= \sum_{1 \leq i \leq r} (d\sigma_i + \sum_{1 \leq j \leq r} \gamma_{ij} \wedge \sigma_j) \wedge \bar{\tau}_i. \\ &= \{ds, t\} + \sum_{1 \leq i, j \leq r} \gamma_{ij} \wedge \sigma_j \wedge \bar{\tau}_i.\end{aligned}$$

(on utilise encore le fait que la base est orthonormée pour les calculs)
De même, on trouve que

$$\begin{aligned}\{s, Dt\} &= \sum_{1 \leq i \leq r} \sigma_i \wedge (d\bar{\tau}_i + \sum_{1 \leq j \leq r} \bar{\gamma}_{ij} \wedge \bar{\tau}_j). \\ &= \{s, dt\} + \sum_{1 \leq i, j \leq r} \sigma_i \wedge \bar{\gamma}_{ij} \wedge \bar{\tau}_j\end{aligned}$$

or la connexion ∇ est hermitienne si et seulement si

$$d\{s, t\} = \{Ds, t\} + (-1)^p \{s, Dt\}, \quad \forall s \in \Omega^p(E), t \in \Omega^q(E).$$

En combinant les 3 égalités précédentes, on obtient donc que la connexion ∇ est H -hermitienne si et seulement si

$$\sum_{1 \leq i, j \leq r} \gamma_{ij} \wedge \sigma_j \wedge \bar{\tau}_i + (-1)^p \sum_{1 \leq i, j \leq r} \sigma_i \wedge \bar{\gamma}_{ij} \wedge \bar{\tau}_j = 0.$$

Or comme s est une p -forme et γ_{ij} une 1-forme on a que

$$\sigma_i \wedge \bar{\gamma}_{ij} \wedge \bar{\tau}_i = (-1)^p \bar{\gamma}_{ij} \wedge \sigma_i \wedge \bar{\tau}_j$$

Ainsi notre connexion ∇ est hermitienne si et seulement si

$$\sum_{1 \leq i, j \leq r} (\gamma_{ij} + \bar{\gamma}_{ji}) \wedge \sigma_i \wedge \bar{\tau}_j = 0,$$

or cela doit être vrai pour toute forme différentielle donc ∇ est hermitienne si et seulement si on a pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$

$$\bar{\gamma}_{ij} = -\gamma_{ji}.$$

□

Supposons que M soit une variété complexe. On a alors les projections canoniques $\pi^{1,0} : \Lambda^1(E) \rightarrow \Lambda^{1,0}(E)$ et $\pi^{0,1} : \Lambda^1(E) \rightarrow \Lambda^{0,1}(E)$. Pour toute connexion ∇ sur E , on peut alors définir les opérateurs

$$\nabla^{1,0} := \pi^{1,0} \circ \nabla : \Omega^{p,q}(E) \rightarrow \Omega^{p+1,q},$$

et

$$\nabla^{0,1} := \pi^{0,1} \circ \nabla : \Omega^{p,q}(E) \rightarrow \Omega^{p,q+1},$$

satisfaisant la règle de Leibniz :

$$\nabla^{0,1}(\omega \otimes \sigma) = \partial\omega \otimes \sigma + (-1)^{p+q}\omega \wedge \nabla^{1,0}\sigma,$$

et

$$\nabla^{0,1}(\omega \otimes \sigma) = \bar{\partial}\omega \otimes \sigma + (-1)^{p+q}\omega \wedge \nabla^{0,1}\sigma,$$

pour tout $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$ et pour tout $\sigma \in \Gamma(E)$. En particulier, on obtient que $\nabla^{0,1}$ est une structure presque holomorphe sur E pour tout connexion ∇ . Le théorème suivant est alors une conséquence du théorème 3.7 :

Théorème 3.14 *Soit M une variété complexe et $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel complexe sur M . S'il existe une connexion ∇ sur E telle que la composante $(R^\nabla)^{0,2}$ de type $(0,2)$ de l'opérateur de courbure R^∇ est nulle alors E est un fibré holomorphe ayant pour structure holomorphe $\nabla^{0,1}$.*

Démonstration. Commençons donc par remarquer que

$$\begin{aligned} R^\nabla &= \nabla^2(\sigma) \\ &= (\nabla^{1,0} + \nabla^{0,1})^2(\sigma) \\ &= (\nabla^{1,0})^2(\sigma) + (\nabla^{0,1})^2(\sigma) + (\nabla^{1,0}\nabla^{0,1} + \nabla^{0,1}\nabla^{1,0})(\sigma). \end{aligned}$$

Ainsi, par unicité de la décomposition dans une somme directe, nous obtenons que la composante de type $(0,2)$ de l'opérateur de courbure R^∇ vaut

$$(R^\nabla)^{0,2} = (\nabla^{0,1})^2.$$

Or nous avons vu que $\nabla^{0,1}$ est un opérateur pseudo holomorphe, donc si $(R^\nabla)^{0,2}$ s'annule alors, nous obtenons que $\nabla^{0,1}$ est un opérateur holomorphe. Nous pouvons alors conclure grâce au théorème 3.7. \square

La réciproque est aussi vraie, grâce au théorème suivant :

Théorème 3.15 *Soit M une variété complexe et soit $(E, \bar{\partial}, H)$ un fibré vectoriel hermitien et holomorphe. Il existe alors une unique connexion H -hermitienne ∇ sur E vérifiant $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$. Cette connexion s'appelle la connexion de Chern (associée à $\bar{\partial}$ et à H).*

Démonstration. Il suffit de définir la composante de type $(1,0)$ de ∇ puisque la composante de type $(0,1)$ doit par hypothèse être égale à $\bar{\partial}$. On cherche donc un opérateur $\nabla^{0,1} : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(E)$ satisfaisant la règle de Leibniz

$$\nabla^{0,1}(f\sigma) = \partial f \otimes \sigma + f\nabla^{0,1}\sigma.$$

Pour cela, on remarque que le fait que H soit parallèle à ∇ peut se ré-écrire sous la forme

$$d(H(\sigma, \tau)) = H(\nabla\sigma, \tau) + H(\sigma, \nabla\tau).$$

Prenons maintenant la composante de type $(0, 1)$ de l'égalité précédente. Nous obtenons alors que

$$\partial(H(\sigma, \tau)) = H(\nabla^{0,1}\sigma, \tau) + H(\sigma, \nabla^{1,0}\tau), \quad \forall \sigma, \tau \in \Gamma(E).$$

Or nous savons que $\nabla^{1,0} = \bar{\partial}$ ainsi

$$H(\nabla^{0,1}\sigma, \tau) = \partial(H(\sigma, \tau)) - H(\sigma, \nabla^{1,0}\tau), \quad \forall \sigma, \tau \in \Gamma(E).$$

On peut alors conclure à l'existence et à l'unicité grâce au fait que H est non-dégénéré. \square

Remarque. En utilisant le fait que H peut-être vu comme un \mathbb{C} -anti-linéaire isomorphisme entre E et E^* , on obtient une expression de $\nabla^{1,0}$ et donc de ∇ :

$$\nabla^{1,0}\sigma = H^{-1}(\bar{\partial}H(\sigma)),$$

et donc

$$\nabla = \bar{\partial} + H^{-1} \circ \bar{\partial} \circ H.$$

Remarque. La courbure de la connexion de Chern est appelée *Courbure de Chern*.

Comme il existe toujours au moins une structure hermitienne sur un fibré complexe (voir la remarque qui suit la définition 3.11), en appliquant le théorème 3.15 avec le théorème 3.7, on obtient la réciproque du théorème 3.14 que nous pouvons reformuler ainsi :

Théorème 3.16 *Soit M une variété complexe et $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel complexe sur M . E est un fibré holomorphe ayant pour structure holomorphe $\nabla^{0,1}$ si et seulement s'il existe une connexion ∇ sur E telle que la composante $(R^\nabla)^{0,2}$ de type $(0, 2)$ de l'opérateur de courbure R^∇ est nulle. \square*

3.2.3 Première classe de Chern d'un fibré vectoriel

On va étudier dans cette section les fibrés en droites i.e. les fibrés vectoriels complexes de rang 1. Soit $L \rightarrow M$ un fibré en droites. Comme il est de rang 1, un repère local au dessus d'un ouvert de trivialisatation U est constitué d'une section locale σ au dessus d'un ouvert de trivialisatation U ne s'annulant en aucun point. De plus tout autre section τ s'écrit comme $\tau = \lambda\sigma$ où $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$.

Maintenant, si L est muni d'une connexion ∇ , nous avons défini les 1-formes de connexion associées à ∇ . Or leur nombre est égal au rang du fibré donc dans notre cas, il y a aura une seule forme $\gamma \in \Omega^1(U)$ vérifiant

$$\nabla(\sigma) = \gamma \otimes \sigma,$$

et donc

$$\nabla(\tau) = \nabla(\lambda\sigma) = (d\lambda + \lambda\gamma) \otimes \sigma.$$

De plus, l'expression de la courbure se simplifie aussi pour devenir

$$R^\nabla \sigma = R \otimes \sigma,$$

avec $R = d\gamma \in \Omega^2(U)$ (en effet $\gamma \wedge \gamma = 0$). En particulier, comme $\text{End}(L) \simeq \mathbb{C}$, l'opérateur de courbure R^∇ s'identifie à une 2-forme fermée.

Maintenant, si $\tilde{\nabla}$ est une autre connexion, elle s'écrit aussi localement sur U sous la forme

$$\nabla(\sigma) = \tilde{\gamma} \otimes \sigma,$$

avec $\tilde{\gamma} \in \Omega^1(U)$. En particulier, on obtient aussi que

$$\nabla(\tau) = \nabla(\lambda\sigma) = (d\lambda + \lambda\tilde{\gamma}) \otimes \sigma,$$

i.e.

$$(\nabla - \tilde{\nabla})(\tau) = \lambda\Gamma \otimes \sigma = \Gamma \otimes \lambda\sigma = \Gamma \otimes \tau,$$

avec $\Gamma = (\gamma - \tilde{\gamma}) \in \Omega^1(M)$. Et donc la courbure vaut

$$R^{\tilde{\nabla}} = d\tilde{\gamma} \otimes \sigma = (d\gamma + d\Gamma) \otimes \sigma = (R^\nabla + d\Gamma) \otimes \sigma.$$

On remarque donc que la classe de cohomologie de De Rham $[R^\nabla]_{DR} \in H^2(M, \mathbb{C})$ ne dépend pas du choix de la connexion ∇ . De plus, on a vu dans la partie précédente qu'en prenant une connexion hermitienne, on a que $R^\nabla = -\overline{R^\nabla}$ donc $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^\nabla \in H^2(M, \mathbb{R})$. On appelle cette classe de cohomologie : *la première classe de Chern de L* et on l'a noté $c_1(L)$.

Or nous avons une connexion hermitienne particulière dont on connaît une expression : la connexion de Chern. Nous allons exploiter cette connexion pour obtenir une autre expression de la première classe de Chern.

En effet, comme L est de rang 1, la structure hermitienne H est donc localement sur un ouvert de trivialisatation U , une fonction réelle strictement positive $H \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}_+^*)$. Quitte à prendre un raffinement, on peut supposer que les ouverts de trivialisatation sont simplement connexes ainsi que H s'écrit localement comme $H = e^{-\varphi}$ ainsi $\nabla\sigma$ s'écrit localement sur U (voir remarque du théorème 3.15) comme

$$\nabla\sigma = \bar{\partial}\sigma + e^{-\varphi}\bar{\partial}(e^\varphi\sigma).$$

et donc R^∇ s'écrit localement sur U comme

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^\nabla = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi.$$

Terminons par donner des propriétés de la première classe de Chern qui découlent directement de la dernière formule (ou même de la définition) :

Lemme 3.17 *Si E et F sont deux fibrés en droites alors on a*

- $c_1(E \otimes F) = c_1(E) + c_1(F)$,
- $c_1(E^{-1}) = -c_1(E)$.

□

3.2.4 Première classe de Chern d'une variété kählérienne

Soit $L \rightarrow M$ un fibré en droites sur une variété complexe M . On sait que L est entièrement déterminé (modulo isomorphisme) par ses fonctions de transitions $(t_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ associées à un recouvrement de trivialisations $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Elles vérifient alors

$$\begin{aligned} t_{\alpha\beta}t_{\beta\gamma} &= t_{\alpha\gamma} \quad \forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{A}^3, \\ t_{\alpha\beta}t_{\beta\alpha} &= 1, \quad \forall(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}^2. \end{aligned}$$

De plus, si H est une structure hermitienne sur L , il définit en restriction à chaque ouvert de trivialisations une fonction $H_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha, \mathbb{R}_+^*)$ vérifiant la relation

$$H_\alpha = |t_{\beta,\alpha}|^2 H_\beta, \quad \forall(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}^2.$$

Réciproquement, une collection $(H_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de fonctions telle que $H_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha, \mathbb{R}_+^*)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et telle que l'on ait la relation

$$H_\alpha = |t_{\beta,\alpha}|^2 H_\beta, \quad \forall(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}^2,$$

définit donc une structure hermitienne H sur L .

Maintenant si M est une variété complexe munie d'un recouvrement de cartes $(U_\alpha, (z_1^\alpha, \dots, z_n^\alpha))$, on définit le fibré canonique K_M par ses fonctions de transition $t_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, \mathbb{C})$ par

$$t_{\alpha\beta} = \det \left(\left(\frac{\partial z_i^\beta}{\partial z_j^\alpha} \right) \right).$$

En effet, grâce aux formules de changement de variables et à la multiplicativité du déterminant, les fonctions $t_{\alpha\beta}$ vérifient bien

$$\begin{aligned} t_{\alpha\beta}t_{\beta\gamma} &= t_{\alpha\gamma} \quad \forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{A}^3, \\ t_{\alpha\beta}t_{\beta\alpha} &= 1, \quad \forall(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}^2. \end{aligned}$$

Remarque. On peut montrer que le fibré K_M est isomorphe au fibré des formes différentielles de degré maximale i.e. à $\Omega^{n,n}(M)$ (si on note n la dimension complexe de M).

On définit alors le fibré anticanonique K_M^{-1} comme l'inverse du fibré canonique K_M et on a donc (voir lemme 3.17)

$$c_1(K_M^{-1}) = -c_1(K_M)$$

Définition 3.18 Si M est une variété complexe, on définit la première classe de Chern de la variété M , et on la note $c_1(M)$, par

$$c_1(M) = c_1(K_M^{-1}) = -c_1(K_M)$$

Si g est une structure hermitienne alors la matrice g^α associée à l'ouvert U_α est hermitienne définie positive donc $\det(g^\alpha) > 0$. On pose alors

$$H_\alpha := \det(g^\alpha)^{-1}, \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}.$$

On définit alors une collection $(H_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de fonctions telle que $H_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha, \mathbb{R}_+^*)$ qui vérifient grâce à la formule de changement de variables et à la multiplicativité du déterminant :

$$H_\alpha = |t_{\beta,\alpha}|^2 H_\beta, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{A}^2,$$

donc cette collection définit une structure hermitienne H sur K_M . De plus, on a alors localement (voir la section 3.2.3 sur la première classe de Chern d'un fibré en droites)

$$c_1(K_M) = \left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \det g^\alpha \right].$$

3.2.5 Connexion de Levi-Civita pour les variétés kählériennes

Dans cette section, nous allons considérer une variété hermitienne (M, h, J) dont on notera g la métrique riemannienne associée et ω la forme associée.

On sait que h définit une structure hermitienne sur (TM, J) . De plus, on a aussi un opérateur holomorphe naturel $\bar{\partial}$ sur $\Omega^{p,q}(TM)$. Donc, d'après le théorème 3.15, il existe une connexion $\tilde{\nabla}$ que l'on appellera *connexion de Chern de M* , vérifiant $\tilde{\nabla}h = 0$ et $\tilde{\nabla}^{0,1} = \bar{\partial}$.

Nous avons aussi une autre connexion naturelle sur M donnée par la géométrie riemannienne : la *connexion de Levi-Civita*. En effet, on a le résultat de géométrie riemannienne suivant :

Théorème 3.19 *Pour toute variété riemannienne (M, g) , il existe une unique connexion ∇ sur M vérifiant :*

- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (on dit que ∇ est sans torsion).
- $\nabla g = 0$ (on dit que g est parallèle à ∇).

Cette connexion s'appelle la *connexion de Levi-Civita* (associée à g). □

En appliquant ce résultat à la variété (M, g) , on obtient donc la connexion de Levi-Civita sur M (associé à g) que l'on notera ∇ par la suite.

Commençons par un résultat utile pour la suite :

Théorème 3.20 *Une métrique hermitienne h sur une variété presque complexe (M, J) est kählérienne si et seulement si J est parallèle par rapport à la connexion de Levi-Civita de h .*

Démonstration. Au cours de la démonstration, nous aurons besoin du lemme suivant que nous énonçons et démontrons tout de suite :

Lemme 3.21 *Soit h une métrique hermitienne sur une variété presque complexe (M, J) dont on note ∇ la connexion de Levi-Civita. Alors J est intégrable si et seulement si on a*

$$(\nabla_{JX}J)Y = J(\nabla_XJ)Y, \quad \forall (X, Y) \in TM^2.$$

Démonstration.

Fixons un point $x \in M$ et étendons X et Y en des champs de vecteurs parallèles pour ∇ en x (voir lemme 4.4). On peut alors écrire

$$\begin{aligned} N^J(X, Y) &= [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] \\ &= J(\nabla_XJ)Y - J(\nabla_YJ)X - (\nabla_{JX}J)Y + (\nabla_{JY}J)X \\ &= (J(\nabla_XJ)Y - (\nabla_{JX}J)Y) - (J(\nabla_YJ)X - (\nabla_{JY}J)X). \end{aligned}$$

Cela nous donne directement le sens réciproque. Pour le sens direct, on pose

$$A(X, Y, Z) = h((J\nabla_XJ)Y - (\nabla_{JX}J)Y, Z).$$

On voit directement que $A(X, Y, Z) = A(Y, X, Z)$. De plus, comme J et ∇_XJ sont des opérateurs anti-symétriques qui anti-commutent, on trouve que $A(X, Y, Z) = -A(X, Z, Y)$. Ainsi par permutation circulaire, on a que

$$A(X, Y, Z) = -A(Y, Z, X) = A(Z, X, Y) = -A(X, Y, Z),$$

ce qui permet de conclure □

Maintenant, passons à la démonstration du théorème. Le sens direct découle directement des définitions, en effet un calcul direct nous donne que si J est parallèle pour ∇ alors N^J s'annule et comme $\omega = h(J\cdot, \cdot)$, on a aussi que $\nabla\omega = 0$ d'où $d\omega = 0$. Pour le sens réciproque, on considère le tenseur

$$B(X, Y, Z) := h((\nabla_XJ)Y, Z).$$

Comme J et ∇_XJ anti-commutent, on obtient

$$B(X, Y, JZ) = B(X, JY, Z).$$

De plus, le lemme nous donne que

$$B(X, Y, JZ) + B(JX, Y, Z) = 0.$$

Alors en combinant les deux relations qui précèdent, on obtient

$$B(X, Y, JZ) + B(Y, JZ, X) + B(JZ, X, Y) = 0.$$

Enfin, en utilisant le fait que $d\omega = 0$, on obtient que

$$B(X, Y, JZ) + B(Y, JZ, X) + B(JZ, X, Y) = 0,$$

et

$$B(X, JY, Z) + B(JY, Z, X) + B(Z, X, JY) = 0.$$

Ces deux relations combinées avec la précédente nous donnent que $2B(X, Y, JZ) = 0$ i.e. J est parallèle pour ∇ . □

Nous pouvons alors démontrer un résultat important :

Proposition 3.22 *Soit (M, h, J) une variété hermitienne. La connexion de Chern $\tilde{\nabla}$ coïncide avec la connexion de Levi-Civita ∇ si et seulement si (M, h, J) est une variété kählérienne. \square*

Démonstration. Comme la démonstration est longue et n'apporte aucune information supplémentaire utile par la suite, on renvoie à [9] par exemple. \square

4 Le Tenseur de Ricci

4.1 Rappels de géométrie riemannienne

Considérons une variété différentielle lisse réelle M . Commençons par rappeler la définition de *métrie riemannienne* :

Définition 4.1 Une *métrie riemannienne* g est un tenseur de type $(2,0)$ tel que pour tout $p \in M$, $g|_p$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive. On dit alors que (M, g) est une *variété riemannienne*.

Remarque. Toute variété réelle lisse admet au moins une métrie riemannienne. En effet, si le fibré est trivial (et donc pour les fibrés trivialisables), il suffit de prendre le produit scalaire euclidien usuel pour chaque fibre. Pour le cas général, on utilise le cas précédent que l'on globalise grâce à une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement de trivialisations du fibré.

Si (M, g) est une variété riemannienne alors pour tout $p \in M$, l'espace tangent $T_x M$ de M en x est donc un espace euclidien pour le produit scalaire $g|_p$. De plus, comme $g|_p$ est définie positive, $g|_p$ est en particulier non-dégénérée, nous avons donc un isomorphisme entre TM et T^*M donné par

$$g^\flat : \begin{cases} TM & \longrightarrow T^*M \\ X \in T_x M & \longmapsto (Y \mapsto g|_x(Y, X) \in T_x^* M) \end{cases} .$$

Terminons en donnant une expression locale pour les métriques riemanniennes. En effet, si $(U, (x^1, \dots, x^n))$ est une carte locale munie des coordonnées locales (x^1, \dots, x^n) . On a alors une base locale de $\Gamma(T^*U)$ donnée par (dx^1, \dots, dx^n) et sa base locale duale sur $\Gamma(TU)$ donnée par $(\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \partial_n = \frac{\partial}{\partial x^n})$. On peut alors écrire

$$g|_U = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

où (g_{ij}) est une matrice symétrique définie positive à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(U)$ appelée *la matrice de g dans la carte locale U* . Nous noterons g^{ji} la matrice inverse de la matrice (g_{ij}) (qui existe puisque que g est définie positive).

4.1.1 Résultats généraux sur les connexions

Dans cette section, on fixe (M, g) une variété riemannienne et $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel réel au dessus de M .

Commençons par rappeler la définition d'une *connexion* :

Définition 4.2 une *connexion* sur E est une application $\nabla : (\sigma, X) \in \Gamma(E) \times \Gamma(TM) \mapsto \nabla_X \sigma \in \Gamma(E)$ vérifiant

- L'application ∇ est \mathbb{R} -bilinéaire.

- Pour toute fonction $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$, on a $\nabla_{fX} = f\nabla_X\sigma$.
- Pour toute fonction $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$, on a $\nabla_X(f\sigma) = X(f)\sigma + f\nabla_X\sigma$ (règle de Leibniz).

On définit alors les symboles de Christoffel de ∇ par rapport à un système de coordonnées locales (x^i) par

$$\Gamma_{ij}^k = dx^k(\nabla_{\partial_i}\partial_j),$$

ou de manière équivalente par

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k\partial_k.$$

Toute connexion ∇ sur E induit une connexion ∇^* sur le fibré dual E^* de E par la formule

$$(\nabla_X^*l)(\sigma) = X(l(\sigma)) - l(\nabla_X\sigma), \quad \forall(X, l, \sigma) \in \Gamma(TM) \times \Gamma(E^*) \times \Gamma(E).$$

De plus, si $\tilde{E} \rightarrow M$ est un second fibré vectoriel sur M muni d'une connexion $\tilde{\nabla}$. On peut alors définir une connexion $\nabla \oplus \tilde{\nabla}$ sur $E \oplus \tilde{E}$ par la formule

$$(\nabla \oplus \tilde{\nabla})_X(\sigma \oplus \tilde{\sigma}) = \nabla_X\sigma + \tilde{\nabla}_X\tilde{\sigma}, \quad \forall(X, \sigma, \tilde{\sigma}) \in \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \times \Gamma(\tilde{E}),$$

et une connexion $\nabla \otimes \tilde{\nabla}$ sur $E \otimes \tilde{E}$ par la formule

$$(\nabla \otimes \tilde{\nabla})_X(\sigma \otimes \tilde{\sigma}) = \nabla_X\sigma \otimes \tilde{\sigma} + \sigma \otimes \tilde{\nabla}_X\tilde{\sigma}, \quad \forall(X, \sigma, \tilde{\sigma}) \in \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \times \Gamma(\tilde{E}),$$

En posant par convention $\nabla_X f = X(f)$, on peut alors définir par récurrence une connexion $(\nabla^*)^{\otimes s} \otimes \nabla^{\otimes t}$ sur chaque fibré tensoriel $(E^*)^{\otimes s} \otimes E^{\otimes t}$.

Maintenant, on peut remarquer que les connexions sont des opérateurs locaux dans le sens suivant :

Lemme 4.3 Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel au dessus de M muni d'une connexion ∇ et soient deux sections σ et $\tilde{\sigma}$ de E . Pour tout point $p \in M$, s'il existe un voisinage ouvert de p tel que $\sigma|_U = \tilde{\sigma}|_U$ alors $(\nabla_X\sigma)(p) = (\nabla_X\tilde{\sigma})(p)$.

Démonstration. Prenons une fonction plateau f valant 1 sur un voisinage ouvert de p et valant 0 en dehors de U . Maintenant, en appliquant la règle de Leibniz, on trouve que

$$(\nabla_X(f\sigma))(p) = f(p)(\nabla_X(\sigma))(p) + (\mathcal{L}_X(f))(p)\sigma(p).$$

Or comme f est une fonction plateau au voisinage de p , on a $f(p) = 1$ et $(\mathcal{L}_X(f))(p) = 0$ donc

$$(\nabla_X(f\sigma))(p) = f(p)(\nabla_X(\sigma))(p),$$

on peut alors conclure en remarquant que $f\sigma = f\tilde{\sigma}$. □

Grâce au lemme précédent, si $p \in M$ et $v \in T_pM$, alors on peut définir sans ambiguïté :

$$\nabla_v \sigma(p) := \nabla_X \sigma(p), \quad \forall \sigma \in \Gamma(E),$$

où X est un champ de vecteurs tel que $X(p) = v$. On dira alors qu'une section σ de E est parallèle dans la direction $X \in \Gamma(TM)$ au point $p \in M$ si $\nabla_{X(p)} \sigma = 0$.

Terminons par un lemme qui nous sera utile dans la suite :

Lemme 4.4 *Pour tout $X \in T_pM$ et $\sigma_0 \in E|_p$, il existe une section locale σ parallèle dans la direction X au point p satisfaisant $\sigma(p) = \sigma_0$.*

Démonstration. Soit $(U, (x_1, \dots, x_n))$ une carte locale centrée en p et soit un repère local centré en p $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ de E . Prenons une section locale τ de E telle que $\tau(p) = \sigma_0$. Il existe alors des réels (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_k) tels que

$$X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

$$\nabla_X \tau = \sum b_j \sigma_j(p).$$

Si $X = 0$ alors il n'y a rien à faire. Sinon, on peut supposer que $a_1 \neq 0$ et alors $\sigma := \tau - (x_1/a_1) \sum b_j \sigma_j$ permet de conclure. \square

4.1.2 Connexion de Levi-Civita

Commençons par énoncer à nouveau le *théorème de Levi-Civita* qui nous donne l'existence d'une connexion particulière importante : la *connexion de Levi-Civita*.

Théorème 4.5 *Pour toute variété riemannienne (M, g) , il existe une unique connexion ∇ sur M vérifiant :*

- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (on dit que ∇ est sans torsion).
- $\nabla g = 0$ (on dit que g est parallèle à ∇).

Cette connexion s'appelle la connexion de Levi-Civita (associée à g).

Démonstration. Si ∇ est une connexion sans torsion pour laquelle g est parallèle alors on a

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad \forall (X, Y, Z) \in \Gamma(TM)^3.$$

Par symétrie des rôles de X, Y et Z , on obtient en faisant une permutation des variables, on trouve aussi que

$$Y(g(Z, X)) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X),$$

et que

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

Maintenant si on ajoute les deux premières équations et en soustrayant la dernière, on trouve alors

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z) + Y(g(Z, X) - Z(g(X, Y) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) + g([X, Y], Z)).$$

(on a utilisé pour simplifier l'expression le fait que g est symétrique et que ∇ est sans torsion.) Comme pour tous X et Y fixés, l'expression de droite est \mathcal{C}^∞ linéaire en Z , on conclut à l'existence et à l'unicité grâce à la non-dégénérescence de g (et donc à l'isomorphisme g^b). \square

Une propriété importante de la connexion de Levi-Civita est que les symboles de Christoffel associés à cette connexion s'expriment par rapport à la métrique et aux dérivées de la métrique. Plus précisément, on a le lemme suivant :

Lemme 4.6 *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n et soit ∇ la connexion de Levi-Civita associée g . Dans des coordonnées locales (x^1, \dots, x^n) , les symboles de Christoffel sont donnés par*

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{1 \leq l, l \leq n} g^{kl} (\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij}).$$

où (g^{kl}) est la matrice inverse de la matrice (g_{lk}) associée à la métrique g .

Démonstration. Il suffit de traduire l'égalité

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z) + Y(g(Z, X) - Z(g(X, Y) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) + g([X, Y], Z)),$$

que nous avons établie dans la démonstration du théorème 4.5, en coordonnées locales en remplaçant X par ∂_i , Y par ∂_j , et Z par ∂_k . \square

4.1.3 Tenseur de courbure

Soit (M, g) une variété riemannienne dont on notera ∇ la connexion de Levi-Civita. Posons l'application suivante :

$$R^\nabla : \begin{cases} \Gamma(TM)^3 & \longrightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y, Z) & \longmapsto \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{cases} .$$

Lemme 4.7 *L'application R^∇ est $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilinéaire.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la règle de Leibniz pour les connexions et de la formule suivante pour le crochet de Lie :

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f\mathcal{L}_X(g)Y - g\mathcal{L}_Y(f)X.$$

\square

Par le lemme de tensorialité, R^∇ définit donc un tenseur de type $(3, 1)$. Cela nous conduit à la définition suivante :

Définition 4.8 On appelle tenseur de courbure, le tenseur de type $(3, 1)$ défini par

$$R^\nabla(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z, \quad \forall (X, Y, Z) \in \Gamma(TM)^3.$$

De plus, on définit aussi le tenseur de Riemann R comme le tenseur de type $(4, 0)$ par la formule

$$R(X, Y, Z, T) = g(R^\nabla(X, Y)Z, T), \quad \forall (X, Y, Z, T) \in \Gamma(TM)^4.$$

On dira alors que la métrique g est plate si R est nul.

Terminons sur le tenseur de courbure par le lemme suivant qui nous donne les symétries de ce tenseur.

Lemme 4.9 Nous avons les formules suivantes :

- (i) $R(X, Y, Z, T) = -R(X, Y, T, Z)$
- (ii) $R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y)$
- (iii) $R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0$ (première identité de Bianchi).
- (iv) $(\nabla_X R)(Y, Z, T, W) + (\nabla_Y R)(Z, X, T, W) + (\nabla_Z R)(X, Y, T, W) = 0$ (seconde identité de Bianchi).

Démonstration. C'est une conséquence directe de la règle de Leibniz pour les connexions. \square

4.1.4 Tenseur de Ricci

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n .

Définition 4.10 On définit le tenseur de Ricci de (M, g) par

$$Ric(X, Y) := Tr\{V \mapsto R(V, X)Y\}.$$

Remarque. On peut aussi le définir par la formule suivante :

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^n R(e_i, X, Y, e_i),$$

où $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ est une base locale orthonormale pour TM .

Une métrique riemannienne g sur une variété M est dite *métrique d'Einstein* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$Ric(X, Y) = \lambda g(X, Y) \quad \forall (X, Y) \in TM^2.$$

De plus, si $\lambda = 0$ alors on dit que g est *Ricci-plate*.

4.2 Tenseur de Ricci dans le cas kählérien et conséquences

Dans cette partie, on fixe une variété kählérienne (M, h, J) (où h est la métrique hermitienne, J la structure complexe) dont on notera ω la forme de Kähler associée et ∇ la connexion de Chern (qui est aussi la connexion de Levi-Civita par le lemme 3.22).

4.2.1 Définitions et propriétés

On rappelle que le tenseur de Ricci est donné par

$$Ric(X, Y) = Tr\{V \mapsto R(V, X)Y\},$$

où R est le tenseur de courbure de Riemann.

De plus, comme J est ∇ -parallèle (voir lemme 3.20), en utilisant le lemme 3.20, on obtient que

$$R(X, Y)JZ = JR(X, Y)Z, \quad \forall (X, Y, Z) \in \Gamma(TM)^3.$$

De plus, grâce aux symétries du tenseur de courbure (lemme 4.9), on obtient

$$\begin{aligned} R(X, Y, JZ, JT) &= R(X, Y, Z, T) \\ &= R(JX, JY, Z, T), \end{aligned}$$

ainsi en prenant un repère orthonormé local $\{e_i\}$, nous avons que

$$\begin{aligned} Ric(JX, JY) &= \sum_{i=1}^{2m} R(e_i, JX, JY, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{2m} R(Je_i, X, Y, Je_i) \\ &= Ric(X, Y). \end{aligned}$$

Définition 4.11 *On définit le tenseur de Kähler-Ricci $Ric(\omega)$ par*

$$Ric(\omega)(X, Y) = Ric(JX, Y), \quad \forall (X, Y) \in \Gamma(TM).$$

Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 4.12 *Le tenseur de Ricci d'une variété kählérienne satisfait :*

$$Ric(X, Y) = \frac{1}{2}Tr(R(X, JY) \circ J).$$

Démonstration. Soit (e_i) un repère local de TM orthonormé. En utilisant la première identité de Bianchy et les symétries du tenseur, on a

$$\begin{aligned}
Ric(X, Y) &= \sum_{i=1}^{2m} R(e_i, X, Y e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{2m} R(e_i, X, JY, J e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{2m} (-R(X, JY, e_i, J e_i) - R(JY, e_i, X, J e_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{2m} R(X, JY, J e_i, e_i) + R(Y, J e_i, X, J e_i) \\
&= Tr(R(X, JY) \circ J) - Ric(X, Y)
\end{aligned}$$

□

Corollaire 4.13 *Le tenseur de Ricci Kähler vérifie alors*

$$2Ric(\omega)(X, Y) = Tr(R(X, Y) \circ J).$$

En particulier, $Ric(\omega)$ est fermé.

Démonstration. La première égalité vient directement de la définition. Grâce à cette expression, on a alors

$$\begin{aligned}
2d(Ric(\omega))(X, Y, Z) &= 2((\nabla_X(Ric(\omega)))(Y, Z) + (\nabla_Y(Ric(\omega)))(Z, X) + (\nabla_Z(Ric(\omega)))(X, Y)) \\
&= Tr(((\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y)) \circ J) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

4.2.2 Expressions en coordonnées locales

Considérons alors un système de coordonnées locales (z^α) . On a alors la base associée sur $TM^{\mathbb{C}}$ donnée par

$$\partial_\alpha := \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \quad \text{et} \quad \partial_{\bar{\alpha}} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}.$$

Posons alors

$$h_{AB} = h(\partial_A, \partial_B), \quad \forall (A, B) \in \{1, \dots, m, \bar{1}, \dots, \bar{m}\}^2.$$

Avant de continuer, faisons deux remarques concernant les notations ;

Remarque. A partir de maintenant, nous utiliserons les lettres romaines majuscules pour les indices appartenant à l'ensemble $\{1, \dots, m, \bar{1}, \dots, \bar{m}\}$ et les lettres grecques minuscules $\{1, \dots, m\}$. De plus, on utilisera la convention $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$.

Remarque. De même, à partir de maintenant, nous utiliserons les conventions de sommations d'Einstein. Selon cette convention, quand l'indice d'une variable apparaît deux fois dans un terme, on sous-entend la sommation sur toutes les valeurs que peut prendre cet indice. Cet indice est dit muet. On le fait figurer une fois en position supérieure, une fois en position inférieure.

Maintenant, comme h est hermitienne, on obtient que

$$h_{\alpha,\beta} = h_{\bar{\alpha},\bar{\beta}} = 0,$$

et

$$h_{\bar{\beta},\alpha} = h_{\alpha,\bar{\beta}} = \overline{h_{\beta,\bar{\alpha}}}.$$

On définit alors la matrice de $(h_{\alpha,\bar{\beta}})$ associée à la métrique h et on notera la matrice inverse $(h^{\alpha,\bar{\beta}})$. On a donc la formule

$$h_{\alpha,\bar{\beta}} \cdot h^{\beta,\bar{\gamma}} = \delta_{\alpha,\gamma}.$$

On définit alors les symboles de Christoffel par la formule suivante

$$\nabla_{\partial_A} \partial_B = \Gamma_{AB}^C \partial_C,$$

que l'on peut encore ré-écrire sous la forme

$$\Gamma_{AB}^C = dz_C(\nabla_{\partial_A} \partial_B).$$

Par définition, on obtient alors que

$$\overline{\Gamma_{AB}^C} = \Gamma_{\bar{A}\bar{B}}^{\bar{C}}.$$

De plus, comme ∇ est sans torsion (voir par exemple la définition 4.5 de la connexion de Levi Civita), on obtient que

$$\Gamma_{AB}^C = \Gamma_{BA}^C,$$

et comme $T^{1,0}$ est ∇ -parallèle (voir le lemme 3.20), on obtient que

$$\Gamma_{A\bar{\beta}}^{\gamma} = 0.$$

En conclusion, les symboles de Christoffel non nuls sont

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \text{ et } \Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}},$$

qui sont reliés par la formule

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \overline{\Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}}},$$

Nous allons maintenant déterminer l'expression des symboles de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ en fonction de la matrice $(h_{\alpha\beta})$ de la métrique h . Pour commencer, remarquons que, comme $\Gamma_{\alpha,\bar{\delta}}^C = 0$, on a

$$\nabla_{\partial_{\alpha}} \partial_{\bar{\delta}} = 0.$$

Ainsi, on a que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{\beta\bar{\delta}}}{\partial z_{\alpha}} &= h(\nabla_{\partial_{\alpha}} \partial_{\beta}, \partial_{\bar{\delta}}) \\ &= \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} h_{\gamma\bar{\delta}}. \end{aligned}$$

Donc on a

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = h^{\gamma\bar{\delta}} \frac{\partial h_{\beta\bar{\delta}}}{\partial z_{\alpha}}.$$

Maintenant, on calcule en coordonnées locales l'expression de la courbure. On pose alors

$$R(\partial_A, \partial_B) \partial_C = R_{ABC}^D \partial_D,$$

et

$$\begin{aligned} R_{ABCD} &= R(\partial_A, \partial_B, \partial_C, \partial_D) \\ &= h_{DE} R_{ABC}^E. \end{aligned}$$

Maintenant, comme $T^{1,0}M$ est parallèle, nous obtenons que

$$R_{AB\bar{\delta}}^{\gamma} = R_{AB\delta}^{\bar{\gamma}} = 0.$$

De plus, en utilisant les symétries du tenseur de courbure, nous voyons que les seuls termes non-nuls sont

$$R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}, R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\delta}, R_{\bar{\alpha}\beta\gamma\bar{\delta}}, R_{\bar{\alpha}\beta\gamma\delta},$$

et

$$R_{\alpha\bar{\beta}\gamma}^{\delta}, R_{\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}}^{\bar{\delta}}, R_{\bar{\alpha}\beta\gamma}^{\delta}, R_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\delta}}.$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} R_{\alpha\bar{\beta}\gamma}^{\delta} \partial_{\bar{\delta}} &= R(\partial_{\alpha}, \partial_{\bar{\beta}}) \partial_{\gamma} \\ &= -\nabla_{\partial_{\bar{\beta}}} (\nabla_{\partial_{\alpha}} \partial_{\gamma}) \\ &= -\nabla_{\partial_{\bar{\beta}}} (\Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} \partial_{\delta}) \\ &= -\frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta}}{\partial \bar{z}_{\beta}} \partial_{\delta}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne que

$$R_{\alpha\bar{\beta}\gamma}^{\delta} = -\frac{\partial\Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta}}{\partial z_{\bar{\alpha}}}.$$

Ainsi, nous obtenons aussi que

$$\begin{aligned} Ric_{\gamma\bar{\beta}} &= Ric_{\bar{\beta},\gamma} = R_{A\bar{\beta}\gamma}^A \\ &= R_{\alpha\bar{\beta}\gamma}^{\alpha} \\ &= -\frac{\partial\Gamma_{\alpha\gamma}^{\alpha}}{\partial z_{\bar{\alpha}}}. \end{aligned}$$

4.2.3 Lien entre tenseur de Ricci et première classe de Chern

Commençons par rappeler un lemme de calcul de différentiel :

Lemme 4.14 *Soit $h = (h_{ij})$ une matrice hermitienne inversible. Considérons les trois applications suivantes*

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & (h_{ij}(t)) \end{cases},$$

$$\tilde{h} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & (h^{ij}(t)) := (h_{ij}(t))^{-1} \end{cases},$$

et

$$d : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \det(h(t)) \end{cases}.$$

On a alors

$$d'(t) = d(t) \sum_{i,j=1}^n h'_{ij}(t) h^{ij}(t).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe des formules de Cramer par exemple. \square

On peut aussi le reformuler ainsi pour les fonctions à plusieurs variables :

Lemme 4.15 *Soit $A = (A_{\bar{i}j})$ une matrice hermitienne inversible dont on notera $A^{-1} = (A^{\bar{i}i})$ la matrice inverse. Si les coefficients de A dépendent d'une variable s , on obtient alors*

$$\frac{\partial}{\partial s} \det A = \sum_{i,j=1}^n A^{\bar{j}i} \left(\frac{\partial}{\partial s} A_{\bar{i}j} \right) \det A.$$

\square

En utilisant un de ces lemmes, nous obtenons alors la proposition suivante :

Lemme 4.16 *Nous avons l'expression suivante pour le tenseur de Ricci :*

$$Ric(\omega) = -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(\det(h_{\alpha\bar{\beta}})).$$

Démonstration. On a vu que

$$\Gamma_{\alpha,\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\alpha}^\alpha = h^{\alpha\bar{\delta}}\frac{\partial h_{\alpha\bar{\delta}}}{\partial z_\gamma}.$$

Ainsi, en utilisant le lemme 4.14, on obtient que

$$\Gamma_{\alpha,\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\alpha}^\alpha = \frac{1}{\det(h_{\alpha\bar{\beta}})}\frac{\partial \det(h_{\alpha\bar{\beta}})}{\partial z_\gamma} = \frac{\partial \log \det(h_{\alpha\bar{\beta}})}{\partial z_\gamma}$$

d'où

$$Ric_{\alpha\bar{\beta}} = -\frac{\partial^2 \log \det(h_{\alpha\bar{\beta}})}{\partial z_\alpha \partial z_{\bar{\beta}}}.$$

Ce qui permet de conclure. \square

Un lemme important qui découle de l'expression calculée à la fin de la section 3.2.4 :

Lemme 4.17 *Si (M, ω) est une variété kählérienne alors on a*

$$c_1(M) = \frac{1}{2\pi}[Ric(\omega)].$$

\square

Remarque. On peut aussi définir

$$Ric(\omega) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R_{\alpha\bar{\beta}}dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta,$$

avec

$$R_{\alpha\bar{\beta}} = -\frac{\partial^2 \log \det(h_{\alpha\bar{\beta}})}{\partial z_\alpha \partial z_{\bar{\beta}}},$$

afin d'obtenir l'expression

$$c_1(M) = [Ric(\omega)].$$

Nous précisons le moment venu les conventions adoptées.

4.2.4 Coordonnées normales

On appelle *système de coordonnées normales en p* , un système centré en p remplissant les deux conditions suivantes

$$g_{\alpha\bar{\beta}}(p) = \delta_{\alpha\bar{\beta}} \text{ et } \partial_k g_{\alpha\bar{\beta}}(p) = 0.$$

En particulier, les symboles de Christoffel dans ce système s'annulent en p .

Grâce à l'expression des symboles de Christoffel, on a la proposition suivante qui nous dit qu'en tout point, il existe un système de coordonnées normales tel que l'on puisse en plus diagonaliser un tenseur dans ces coordonnées :

Lemme 4.18 *Soit g une métrique sur M et soit S un tenseur hermitien. Pour tout point p de M , il existe un système de coordonnées centré en p tel que*

$$g_{\alpha\bar{\beta}}(p) = \delta_{\alpha\bar{\beta}}, \quad S_{\alpha\bar{\beta}}(p) = \lambda_{\alpha}\delta_{\alpha\bar{\beta}}, \quad \partial_k g_{\alpha\bar{\beta}}(p) = 0$$

Démonstration. L'existence d'un système de coordonnées (z^1, \dots, z^n) centré en p répondant aux deux premières conditions est une conséquence directe des lemmes de diagonalisation en algèbre linéaire. Pour la dernière, on définit le système de coordonnées $(\tilde{z}^1, \dots, \tilde{z}^n)$ au voisinage de p par

$$z^i = \tilde{z}^i - \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^i(0)\tilde{z}^j\tilde{z}^k \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

On vérifie alors que ce système de coordonnées remplit les conditions du lemme. \square

4.2.5 Dérivées covariantes

Soit $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$, on définit alors les dérivées covariantes $\nabla_k f$ et $\nabla_{\bar{k}} f$ par

$$\nabla_k f = \partial_k f \quad \text{et} \quad \nabla_{\bar{k}} f.$$

Ces dérivés peuvent s'étendre aux tenseurs de la façon suivante. Si nous prenons $X \in \Gamma(T^{1,0})$ et $Y \in \Gamma(T^{0,1})$ i.e.

$$X = X^i \partial_i \quad \text{et} \quad Y = Y^{\bar{i}} \partial_{\bar{i}},$$

alors on définit

$$\begin{aligned} \nabla_k X^i &:= \partial_k X^i + \Gamma_{jk}^i X^j, \\ \nabla_{\bar{k}} X^i &:= \partial_{\bar{k}} X^i, \\ \nabla_k Y^{\bar{i}} &:= \partial_k Y^{\bar{i}}, \\ \nabla_{\bar{k}} Y^{\bar{i}} &:= \partial_{\bar{k}} Y^{\bar{i}} + \overline{\Gamma_{jk}^i} Y^{\bar{j}}. \end{aligned}$$

Et si nous prenons une $(1,0)$ -forme α et une $(0,1)$ -forme β i.e.

$$\alpha = a_i dz^i \quad \text{et} \quad \beta := b_{\bar{i}} d\bar{z}^{\bar{i}},$$

alors on définit

$$\begin{aligned} \nabla_k a_i &:= \partial_k a_i - \Gamma_{jk}^i a_j, \\ \nabla_{\bar{k}} a_i &:= \partial_{\bar{k}} a_i, \\ \nabla_k b_{\bar{i}} &:= \partial_k b_{\bar{i}}, \\ \nabla_{\bar{k}} b_{\bar{i}} &:= \partial_{\bar{k}} b_{\bar{i}} - \overline{\Gamma_{jk}^i} b_{\bar{j}}. \end{aligned}$$

Et nous étendons cela à tout type de tenseur de manière naturelle. Par exemple prenons un tenseur $W = (W_k^{i\bar{j}})$, on a alors

$$\begin{aligned}\nabla_m W_k^{i\bar{j}} &= \partial_m W_k^{i\bar{j}} + \Gamma_{lm}^i W_k^{l\bar{j}} - \Gamma_{km}^l W_l^{i\bar{j}}, \\ \nabla_{\bar{m}} W_k^{i\bar{j}} &= \partial_{\bar{m}} W_k^{i\bar{j}} + \Gamma_{l\bar{m}}^i W_k^{l\bar{j}} - \bar{\Gamma}_{k\bar{m}}^l W_l^{i\bar{j}}.\end{aligned}$$

Terminons par remarquer qu'une métrique kahlérienne g induit une norme $|\cdot|_g$ pour tout tenseur défini de la façon suivante : Si nous prenons $X \in \Gamma(T^{1,0})$ et $Y \in \Gamma(T^{0,1})$ i.e.

$$X = X^i \partial_i \quad \text{et} \quad Y = Y^{\bar{i}} \partial_{\bar{i}},$$

alors on définit

$$\begin{aligned}|X|_g^2 &:= g_{i\bar{j}} X^i \bar{X}^{\bar{j}}, \\ |Y|_g^2 &:= g_{i\bar{j}} Y^{\bar{i}} \bar{Y}^{\bar{j}}.\end{aligned}$$

Et si nous prenons une $(1,0)$ -forme α et une $(0,1)$ -forme β i.e.

$$\alpha = a_i dz^i \quad \text{et} \quad \beta := b_{\bar{i}} d\bar{z}^{\bar{i}},$$

alors on définit

$$\begin{aligned}|\alpha|_g^2 &:= g^{\bar{j}i} a_i \bar{a}_{\bar{j}}, \\ |\beta|_g^2 &:= g^{\bar{j}i} b_{\bar{j}} \bar{b}_{\bar{i}}.\end{aligned}$$

Et nous étendons cela à tout type de tenseur de manière naturelle. Par exemple prenons un tenseur $W = (W_k^{i\bar{j}})$, on a alors

$$|W|_g^2 = g^{\bar{l}k} g_{i\bar{j}} g_{p\bar{q}} W_k^{i\bar{q}} \bar{W}_l^{j\bar{p}}.$$

Nous pouvons aussi étendre de manière naturelle la notion de produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ aux différents types de tenseurs. Par exemple si nous prenons deux $(0,1)$ -formes β et δ qui s'écrivent localement

$$\beta := b_{\bar{i}} d\bar{z}^{\bar{i}} \quad \text{et} \quad \delta := d_{\bar{i}} d\bar{z}^{\bar{i}}$$

alors on définit

$$\langle \beta, \delta \rangle_g := g^{\bar{j}i} b_{\bar{j}} \bar{d}_{\bar{i}}.$$

Terminons par une remarque concernant la notation. Par la suite, afin d'améliorer la lecture de certaines équations, nous écrirons en indice les dérivées covariantes de la façon suivante :

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta \cdots, \nabla_\psi \nabla_\omega f = f_{\omega\psi \cdots \beta\alpha}.$$

Attention à l'ordre inverse qui est fait pour que

$$(f_\alpha)_\beta = \nabla_\beta \nabla_\alpha f = f_{\alpha,\beta}.$$

4.2.6 Formules de commutations des dérivés covariantes

On rappelle que nous avons défini le tenseur de courbure d'une métrique kählérienne g par

$$R_{i \quad k\bar{l}}^m = -\partial_{\bar{l}}\Gamma_{ik}^m.$$

Nous pouvons descendre ou monter d'un ou plusieurs indices de ce tenseur en utilisant la métrique g . Par exemple, on pose

$$R_{i\bar{j}k\bar{j}} := g_{m\bar{j}}R_{i \quad k\bar{l}}^m.$$

En utilisant les symboles de Christoffel, on a montré que

$$R_{i\bar{j}k\bar{j}} = -\partial_i\partial_{\bar{j}}g_{k\bar{j}} + g^{\bar{q}p}(\partial_i g_{k\bar{q}})(\partial_{\bar{j}}g_{p\bar{l}}),$$

et que donc le tenseur de Ricci s'exprime en fonction du tenseur de courbure par

$$R_{i\bar{j}} = g^{\bar{l}k}R_{k\bar{l}i\bar{j}} = R_k^{\quad k}{}_{i\bar{j}}.$$

Nous avons alors les formules suivantes dites *formules de commutations des dérivées covariantes (ou de Ricci)* :

Proposition 4.19 *Soit $X \in \Gamma(T^{1,0})$ et $Y \in \Gamma(T^{0,1})$. On a alors les expressions locales suivantes :*

$$X = X^i\partial_i \quad \text{et} \quad Y = Y^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}},$$

De plus, si on pose $[\nabla_k, \nabla_{\bar{j}}] = \nabla_k\nabla_{\bar{j}} - \nabla_{\bar{j}}\nabla_k$, on a

$$[\nabla_k, \nabla_{\bar{j}}]X^m = R_{i \quad k\bar{l}}^m X^i \tag{4.1}$$

$$[\nabla_k, \nabla_{\bar{l}}]X^m = 0 \tag{4.2}$$

$$[\nabla_{\bar{k}}, \nabla_{\bar{l}}]X^m = 0 \tag{4.3}$$

$$[\nabla_k, \nabla_{\bar{j}}]Y^{\bar{m}} = -R^{\bar{m}}{}_{\bar{j}k\bar{l}}Y^{\bar{j}} \tag{4.4}$$

$$[\nabla_k, \nabla_{\bar{l}}]Y^{\bar{m}} = 0 \tag{4.5}$$

$$[\nabla_{\bar{k}}, \nabla_{\bar{l}}]Y^{\bar{m}} = 0 \tag{4.6}$$

Démonstration. La vérification est immédiate et peut être faite en coordonnées normales pour simplifier. On pourra consulter [31]. \square

On peut aussi définir les formules de commutations pour les formes différentielles :

Proposition 4.20 *Soit une $(1,0)$ -forme α et soit une $(0,1)$ -forme β . On a alors les expressions :*

$$\alpha = a_i dz^i \quad \text{et} \quad \beta := b_{\bar{i}} d\bar{z}^{\bar{i}},$$

De plus, si on pose $[\nabla_k, \nabla_{\bar{j}}] = \nabla_k \nabla_{\bar{j}} - \nabla_{\bar{j}} \nabla_k$, on a

$$[\nabla_k, \nabla_{\bar{j}}]a_i = -R_i{}^m{}_{k\bar{l}} a_m \quad (4.7)$$

$$[\nabla_k, \nabla_l]a_i = 0 \quad (4.8)$$

$$[\nabla_{\bar{k}}, \nabla_{\bar{l}}]a_i = 0 \quad (4.9)$$

$$[\nabla_k, \nabla_{\bar{j}}]b_{\bar{m}} = R^{\bar{m}}{}_{\bar{j}k\bar{l}} b_{\bar{m}} \quad (4.10)$$

$$[\nabla_k, \nabla_l]b_{\bar{m}} = 0 \quad (4.11)$$

$$[\nabla_{\bar{k}}, \nabla_{\bar{l}}]b_{\bar{m}} = 0 \quad (4.12)$$

Démonstration. De même, la vérification est immédiate et peut être faite en coordonnées normales pour simplifier (voir [31]). \square

Remarque. On peut étendre ces formules pour des tenseurs de tout type mais elles ne seront pas utiles dans la suite, on pourra consulter [31] pour plus de détails.

4.2.7 Notions de convergences

Fixons une variété kählérienne compacte (M, ω) . Si f est une fonction sur M , on définit la norme \mathcal{C}^0 de f sur M par

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0(M)} = \sup_M |f|.$$

De même, on a vu, dans la section 4.2.5, que nous pouvons définir la norme $|W|_g$ d'un tenseur W , on définit alors la norme sur M de W par :

$$\|W\|_{\mathcal{C}^0(M,g)} = \| |W|_g \|_{\mathcal{C}^0(M)}.$$

Maintenant, en considérant la dérivée covariante réelle associée à la métrique $g_{\mathbb{R}} = \text{Re}(g)$, on définit pour toute fonction f le tenseur $\nabla_{\mathbb{R}}^m f$ dont les composantes sont $(\nabla_{\mathbb{R}})_{i_1} \cdots (\nabla_{\mathbb{R}})_{i_m} f$, et de même pour tout tenseur W . On définit alors la norme \mathcal{C}^k sur M pour tout fonction f et pour tout ouvert $U \subset M$:

$$\|f\|_{\mathcal{C}^k(U,g)} = \sum_{m=0}^k \|\nabla_{\mathbb{R}}^m f\|_{\mathcal{C}^0(U,g)},$$

et de manière similaire pour tout tenseur W .

Finalement, on dit que la famille T_t de tenseurs converge de manière $\mathcal{C}^\infty(M, g)$ vers T_∞ si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|T_t - T_\infty\|_{\mathcal{C}^k(M,g)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

4.2.8 Théorème d'Arzelà-Ascoli

Soit X et Y deux espaces métriques. On considère l'ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ des fonctions continues de X dans Y . On dit que $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ est une famille équicontinue si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in X, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall (f, y) \in \mathcal{F} \times B_\delta(x), \quad d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

(où $B_\delta(x)$ désigne la boule fermée de centre x et de rayon δ .)

De plus, on dit que que \mathcal{F} est une famille ponctuelle bornée si

$$\exists y_0 \in Y, \forall x \in X, \exists C = C(x) < \infty, \forall f \in \mathcal{F}, d_Y(f(x), y_0) \leq C(x).$$

On a alors le *théorème d'Arzelà-Ascoli* :

Théorème 4.21 *Soit X et Y deux espaces métriques localement compacts. Alors une famille $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ est compacte pour la topologie compacte-ouverte si et seulement si \mathcal{F} est une famille équicontinue, ponctuellement bornée et fermée.*

Démonstration. On pourra consulter [18]. □

Une conséquence importante est que si $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ est une famille compacte, alors toute suite $(f_n) \subset \mathcal{F}$ admet une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de X . Nous pouvons utiliser ce fait pour extraire une sous-suite de toute suite de sections ayant des dérivées bornées :

Corollaire 4.22 *Soit (M, g) est une variété et E un fibré vectoriel de M et fixons une métrique g et une connexion ∇ sur E et TM Soit $\Omega \subset M$ un ouvert dont l'adhérence $\overline{\Omega}$ est compacte et $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Alors pour toute suite (ξ_k) de section sur E au dessus de $\overline{\Omega}$ telle que*

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq p+1} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |\nabla^\alpha \xi_k| \leq C \leq \infty,$$

alors il existe une section ξ_∞ de $E|_{\overline{\Omega}}$ et une sous-suite de (ξ_k) qui convergen vers ξ_∞ de manière \mathcal{C}^p sur $\overline{\Omega}$.

Démonstration. On réduit la preuve de ce théorème au théorème d'Ascoli. En effet, on fixe une collection finie d'ouverts de trivialisations de $\overline{\Omega}$ et on applique le théorème d'Arzelà-Ascoli à chaque composante de $\nabla^p \xi_k$ pour tout ouvert de trivialisations, en effet les composantes de $\nabla^p \xi_k$ sont contrôlés par celle de $\nabla^{p+1} \xi_k$ par le théorème des accroissement finis. On pourra consulter [1] □

Un cas particulier important est le cas où le fibré E correspond au fibré trivial au dessus de M une variété compacte. Alors pour toute suite de fonctions $(\varphi_j) \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R})$ bornée pour la norme \mathcal{C}^k , on peut extraire une sous-suite qui converge pour la norme \mathcal{C}^{k-1} .

4.2.9 Théorème d'intégration par parties

Nous aurons besoin des formules d'intégration suivantes. Une référence pour des détails supplémentaires est par exemple [20].

La première formule importante est *la formule de Stokes* :

Proposition 4.23 Soit M une variété différentielle (réelle) orientée compacte à bord. Alors on a pour toute $(n - 1)$ -forme α :

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha.$$

En particulier, si M est sans bords alors

$$\int_M d\alpha = 0.$$

Démonstration. voir [7, 20, 24] par exemple. □

Maintenant, on considère que M est une variété riemannienne orientée i.e. elle est munie d'une métrique riemannienne g qui induit donc une métrique riemannienne \tilde{g} sur ∂M et on peut définir la forme volume de \tilde{g} par

$$d\sigma_{\tilde{g}} = i_{\nu}d\mu_g|_{\partial M},$$

où ν est le champ de vecteurs normaux sortant à ∂M et $d\mu_g$ ma formule volume associée à g sur M . En particulier, pour tout champ de vecteurs $X \in \Gamma(M)$, on a

$$i_X d\mu_g|_{\partial M} = \langle X, \nu \rangle_g d\sigma_{\tilde{g}},$$

et on définit la divergence de X comme la fonction $div(X) \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ vérifiant la formule suivante :

$$d(i_X d\mu_g) = div X d\mu_g.$$

On peut montrer que le lemme suivant qui donne une expression locale pour la divergence :

Lemme 4.24 Soit M une variété riemannienne orientée et soit $X = X^i \partial_i$ un champs de vecteurs sur M . Alors on a la formule suivante

$$div(X) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i (X^i \sqrt{\det g})$$

Démonstration. On peut encore consulter [7, 20, 24] par exemple. □

On a alors le *théorème de la divergence* qui est une conséquence directe de la formule de Stokes (voir [7] par exemple) :

Lemme 4.25 Soit M une variété riemannienne orientée compacte et soit $X = X^i \partial_i$ un champs de vecteurs sur M . Alors on a la formule suivante

$$\int_M div X d\mu_g = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle_g d\sigma_{\tilde{g}}$$

En particulier si M est sans bords, nous avons

$$\int_M div X d\mu_g = 0.$$

□

Terminons les rappels avec un *théorème d'intégrations par partie*. Pour cela, on rappelle que si (M, g) est une variété riemannienne alors on définit le laplacien Δ associé à la métrique g comme la trace par rapport à g de la dérivée covariante seconde (par rapport à la connexion ∇ de Levi-Civita) i.e.

$$\Delta f = \text{tr}_g \nabla^2 f = g^{ij} \nabla_i \nabla_j f, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}).$$

Nous avons alors le théorème suivant dit *théorème d'intégration par partie* :

Théorème 4.26 *Soit (M, g) une variété riemannienne et soient $u, v \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. On a alors les formules suivantes :*

- *Si M est compacte et sans bords alors on a*

$$\int_M \Delta u d\mu = 0.$$

- *Si M est compacte alors on a*

$$\int_M (v \Delta u - u \Delta v) d\mu = \int_{\partial M} \left(u \frac{\partial v}{\partial \mu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

En particulier, si M est compacte sans bords alors on a

$$\int_M v \Delta u d\mu = \int_M u \Delta v d\mu.$$

- *Si M est compact alors on a*

$$\int_M u \Delta v d\mu + \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mu = \int_{\partial M} u \frac{\partial v}{\partial \mu} d\sigma.$$

En particulier, si M est compacte sans bords alors on a

$$\int_M u \Delta v d\mu = - \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mu.$$

Démonstration. On renvoie à [7]. □

Ce théorème d'intégration par partie a une expression particulièrement agréable dans le cas des variétés kählériennes compactes (sans bords) que nous donnons dans le théorème suivant :

Théorème 4.27 *Soit M une variété compacte kählérienne dont on note g la métrique kählérienne et soient $u, v \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$. On a alors les égalités suivantes*

$$\int_M \langle \bar{\partial} u, \bar{\partial} v \rangle \omega_g^n = - \int_M \bar{v} \Delta_g u \omega_g^n = - \int_M u \overline{\Delta_g v} \omega_g^n.$$

□

4.2.10 Principe du maximum

Nous aurons besoin d'une notion de *principe de maximum* que nous introduisons ici. Fixons une variété kählérienne compacte (M, ω) . Commençons par introduire quelques notations et opérateurs.

Soit α une $(1, 1)$ -forme réelle. Elle s'écrit donc localement sous la forme $\alpha = \sqrt{-1}a_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^j$, on écrira que $\alpha > 0$ si la matrice $a_{i\bar{j}}$ est définie positive et $\alpha < 0$ si elle est définie négative. De plus, on remarque que α est une métrique kählérienne si et seulement si $\alpha > 0$. De plus, si une classe de cohomologie $\alpha \in H_{\bar{\partial}, \mathbb{R}}^{1,1}(M)$ s'écrit comme $\alpha = [\omega]$ pour une métrique de Kähler ω , on dit que α est *une classe de Kähler* et on écrit $\alpha > 0$.

Maintenant, si $\alpha = \sqrt{-1}a_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^j$ Nous définissons aussi la trace de α par rapport à la métrique ω par la formule

$$\mathrm{Tr}_\omega(\alpha) := g^{\bar{j}i}a_{i\bar{j}},$$

et l'opérateur laplacien par rapport à la métrique ω par

$$\Delta f = \sqrt{-1} \mathrm{tr}_\omega(\partial\bar{\partial}f) = g^{\bar{j}i}\partial_i\bar{\partial}_{\bar{j}}f \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Nous avons le lemme élémentaire de calcul différentiel suivant

Lemme 4.28 *Soit f une fonction lisse réelle sur M (sans bord) qui atteint son maximum (minimum) en un point x_0 de M , nous avons alors au point x_0 :*

$$df = 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}f \leq 0 \quad (\geq 0).$$

□

Remarque. La condition $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}f \leq 0$ (≥ 0) peut être remplacé par la condition $\Delta f \leq 0$ (≥ 0).

Par la suite, nous rajouterons un paramètre t de temps dans nos équations, ce qui nous obligera à considérer des fonctions $f(x, t)$ définies sur $M \times [0, T]$. Nous avons alors le résultat suivant appelé *principe du maximum (parabolique)* :

Lemme 4.29 *Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$ et soit M une variété compacte sans bord. Si $f = f(x, t)$ est une fonction lisse sur $M \times [0, T]$ qui atteint son maximum (minimum) au point $(x_0, t_0) \in M \times [0, T]$ alors on a $t_0 = 0$ ou on a au point (x_0, t_0) l'inégalité suivante :*

$$\frac{\partial f}{\partial t} \geq 0 \quad (\leq 0) \quad \text{et} \quad df = 0 \quad \text{et} \quad \Delta f \leq 0 \quad (\geq 0).$$

□

Terminons par un corollaire important du principe du maximum (qui par la suite sera aussi appelé principe du maximum) :

Corollaire 4.30 Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$ et soit M une variété compacte sans bord. On suppose que $f = f(x, t)$ est une fonction lisse sur $M \times [0, T[$ satisfaisant l'inégalité différentielle suivante

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) f \leq 0.$$

Alors on a l'inégalité suivante

$$\sup_{(x,t) \in M \times [0, T[} f(x, t) \leq \sup_{x \in M} f(x, 0).$$

Démonstration. Fixons $T' \in [0, T[$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit la fonction $f_\varepsilon := f - \varepsilon t$. Comme M est compact, la fonction f_ε admet un maximum en un point (x_0, t_0) . Supposons que $t_0 > 0$ alors par le principe du maximum (lemme 4.29), nous obtenons

$$0 \leq \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) f_\varepsilon(x_0, t_0),$$

or on a que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) f_\varepsilon(x_0, t_0) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) f(x_0, t_0) - \varepsilon,$$

comme par hypothèse, on a $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) f \leq 0$, nous obtenons

$$0 \leq \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) f_\varepsilon(x_0, t_0) \leq -\varepsilon,$$

ce qui est absurde donc $t_0 = 0$. Ce qui nous donne donc

$$\sup_{(x,t) \in M \times [0, T[} f(x, t) \leq \sup_{(x,t) \in M \times [0, T[} f_\varepsilon(x, t) + \varepsilon T_0 \leq \sup_{x \in M} f(x, 0) + \varepsilon T_0,$$

Comme ε et T_0 sont arbitraires, le résultat s'en déduit. \square

Remarque. Nous obtenons le même résultat pour l'infimum d'une fonction f si on remplace $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) f \leq 0$ par $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) f \geq 0$.

5 Étude du flot de Kähler-Ricci

5.1 Le flot de Kähler-Ricci

Avant de commencer, faisons quelques rappels sur les objets que nous allons utiliser dans cette section. Si on considère une variété kählérienne (M, ω) de dimension n , on rappelle que *la métrique kählérienne g et la forme de Kähler ω* ont les expressions locales suivantes :

$$g = g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j \quad (5.1)$$

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j \quad (5.2)$$

(On rappelle aussi que nous notons $(g^{\bar{j}i})$ l'inverse de la matrice $(g_{i\bar{j}})$.)

Pour des raisons de simplifications des expressions ultérieures, nous adopterons la convention suivante pour *le tenseur de Ricci* :

$$Ric(\omega) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j, \quad R_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} \log \det(g_{i\bar{j}}). \quad (5.3)$$

On définit alors *la courbure scalaire R* par la formule suivante :

$$R := g^{\bar{j}i} R_{i\bar{j}}.$$

(On rappelle aussi que nous notons $\partial_i := \frac{\partial}{\partial z^i}$ et $\partial_{\bar{j}} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}$.)

De plus, nous normaliserons aussi la forme de Kähler de la façon suivante :

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j. \quad (5.4)$$

Au cours de nos calculs, nous aurons besoin de l'opérateur *trace associé à la métrique ω* que nous noterons Tr_ω défini par

$$\text{Tr}_\omega : \begin{cases} \Omega^{1,1}(M) & \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \\ \alpha := \sqrt{-1} a_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j & \longmapsto g^{\bar{j}i} \alpha_{i\bar{j}} \end{cases} \quad (5.5)$$

De même, nous aurons besoin de *l'opérateur laplacien associé à la métrique ω* que nous noterons Δ_ω défini par

$$\Delta_\omega : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(M) & \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \\ f & \longmapsto g^{\bar{j}i} \partial_i \partial_{\bar{j}} f \end{cases} \quad (5.6)$$

Terminons par rappeler les égalités suivantes :

$$R = \text{Tr}_\omega(Ric(\omega)), \quad \Delta_\omega(f) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \text{Tr}_\omega(\partial\bar{\partial}f). \quad (5.7)$$

5.1.1 Définitions

Maintenant, prenons (M, ω_0) une variété kählérienne compacte de dimension complexe n . On dit que la famille $\omega = \omega(t) = \omega_t$ de formes de Kähler (dépendant d'un paramètre $t \in I \subset \mathbb{R}$ où I est un intervalle contenant 0) est *solution du flot de Kähler-Ricci sur M avec comme condition initiale ω_0* si elle vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega = -Ric(\omega), \quad \omega|_{t=0} = \omega_0. \quad (5.8)$$

Par la suite, il nous faudra considérer (pour la convergence, voir section 5.3) une équation un peu plus générale :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\omega} = -Ric(\tilde{\omega}) - \nu \tilde{\omega}, \quad \tilde{\omega}|_{t=0} = \omega_0, \quad (5.9)$$

où $\nu \in \{0, 1\}$. Et si $\nu = 1$ alors on appelle cette équation : l'équation du *flot de Kähler-Ricci normalisé*.

En fait, on peut voir que l'équation (5.9) avec $\nu = 1$ est une renormalisation de l'équation (5.8). Plus précisément on a le lemme suivant :

Lemme 5.1 *Soit ω_s une solution de l'équation (5.8) pour tout $s \in \mathbb{R}$. Alors $\tilde{\omega}_t$ est une solution de l'équation (5.9) avec $\nu = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ où*

$$\tilde{\omega}(t) = \frac{\omega(s)}{s+1}, \quad t = \log(s+1).$$

Démonstration. On commence par remarquer que

$$t = \log(s+1) \iff s = e^t - 1,$$

et grâce à l'expression (5.3), nous avons

$$Ric(\tilde{\omega}_t) = Ric(\omega_s).$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\omega} &= \frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial s} \\ &= e^t \frac{\frac{\partial}{\partial s} \omega(e^t - 1) - \omega(e^t - 1)}{e^{2t}} \\ &= \frac{1}{s+1} \left((s+1) \frac{\partial}{\partial s} \omega(s) - \omega(s) \right) \\ &= \frac{1}{s+1} \left((s+1) Ric(\omega_s) - \omega_s \right) \\ &= Ric(\tilde{\omega}_t) + \tilde{\omega}_t, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. \square

Terminons par un lemme qui nous donnera l'équation différentielle qui régit l'évolution de la matrice inverse de la métrique.

Lemme 5.2 *Soit $g = g(t)$ une famille de métriques solutions de l'équation*

$$\frac{\partial}{\partial t} g = h \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = h_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n,$$

où h est un tenseur de type $(2, 0)$. Alors on a que

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = g^{ik} g^{jl} h_{kl}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Démonstration. Commençons par remarquer que nous avons, par définition du produit matriciel, que

$$g^{ik} g_{kl} = \delta_{i,l}.$$

En différentiant cette expression, nous obtenons que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ik}\right) g_{kl} + g^{ik} \left(\frac{\partial}{\partial t} g_{kl}\right) = 0$$

or on a que $\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = h_{ij}$, ainsi

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ik}\right) g_{kl} = -g^{ik} h_{kl}.$$

En multipliant par g^{jl} , nous obtenons que

$$g^{jl} \left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ik}\right) g_{kl} = -g^{jl} g^{ik} h_{kl}.$$

On conclut alors en remarquant que $g^{jl} \left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ik}\right) g_{kl} = \frac{\partial}{\partial t} g^{ij}$. En effet, comme g est symétrique, on a $g_{kl} = g_{lk}$ ainsi

$$g^{jl} \left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ik}\right) g_{kl} = \left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ik}\right) g^{jl} g_{lk},$$

or on a vu au début de la preuve que $g^{ik} g_{kl} = \delta_{i,l}$, ainsi on a

$$g^{jl} \left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ik}\right) g_{kl} = \left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ik}\right) \delta_{j,k} = \left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ij}\right)$$

\square

On peut appliquer le lemme précédent avec l'équation du flot de Kähler-Ricci (5.9) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\omega} = -Ric(\tilde{\omega}) - \nu \tilde{\omega}, \quad \tilde{\omega}|_{t=0} = \omega_0,$$

nous obtenons ainsi le corollaire suivant

Corollaire 5.3 Si $\omega = \omega(t)$ est une solution de l'équation du flot de Kähler-Ricci (5.9) alors on a

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{\bar{i}j} = g^{\bar{i}k} g^{\bar{j}l} (R_{k\bar{l}} - \nu g_{k\bar{l}}).$$

□

5.1.2 Évolution de la courbure scalaire

Dans cette section, nous allons étudier l'évolution de la courbure scalaire d'une solution à l'équation 5.9. Rappelons pour commencer que l'on définit la *courbure scalaire* R d'une métrique ω par

$$R := \text{Tr}_\omega(\text{Ric}(\omega)) = g^{\bar{j}i} R_{i\bar{j}} = -g^{\bar{j}i} \partial_i \partial_{\bar{j}} \log \det g. \quad (5.10)$$

Lemme 5.4 Soit $R = R(t)$ la courbure de $\omega = \omega(t)$ où ω est une solution de (5.9). Alors on a

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + |\text{Ric}(\omega)|^2 + \nu R,$$

où $|\text{Ric}(\omega)|^2$ est la norme au carré de $\text{Ric}(\omega)$ i.e. $|\text{Ric}(\omega)|^2 = g^{\bar{l}i} g^{\bar{j}k} R_{i\bar{j}} R_{k\bar{l}}$. De plus, on a alors

$$R(t) \geq -\nu n - C_0 e^{-\nu t},$$

où $C_0 := \inf_M (R(0) - \nu n)$.

Démonstration. Faisons le calcul :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-g^{\bar{j}i} \partial_i \partial_{\bar{j}} \log \det g \right). && \text{(par définition de } R, \text{ voir (5.10))} \\ &= - \left(\frac{\partial}{\partial t} g^{\bar{i}j} \right) \partial_i \partial_{\bar{j}} \log \det g - g^{\bar{i}j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \partial_i \partial_{\bar{j}} \log \det g \right). \end{aligned}$$

Remarquons alors que

$$\begin{aligned} -g^{\bar{i}j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \partial_i \partial_{\bar{j}} \log \det g \right) &= -g^{\bar{i}j} \left[\partial_i \partial_{\bar{j}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \log \det g \right) \right] \\ &= -g^{\bar{i}j} \left[\partial_i \partial_{\bar{j}} \left(g^{\bar{l}k} \frac{\partial}{\partial t} g_{k\bar{l}} \right) \right] && \text{(d'après le lemme 4.15)} \\ &= g^{\bar{i}j} \left[\partial_i \partial_{\bar{j}} \left(g^{\bar{l}k} (R_{k\bar{l}} + \nu g_{k\bar{l}}) \right) \right] && \text{(car } \omega \text{ solution de (5.9))} \\ &= g^{\bar{i}j} \left[\partial_i \partial_{\bar{j}} \left(g^{\bar{l}k} R_{k\bar{l}} + \nu \delta_{k,l} \right) \right] \\ &= g^{\bar{i}j} \left[\partial_i \partial_{\bar{j}} R \right] && \text{(par def. de } R, \text{ voir (5.10))} \\ &= \Delta R && \text{(par def. de } \Delta, \text{ voir (5.6))} \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial}{\partial t} g^{\bar{i}j}\right)\partial_i\partial_{\bar{j}}\log\det g &= -g^{\bar{i}k}g^{\bar{j}l}(R_{k\bar{l}} + \nu g_{k\bar{l}})R_{i\bar{j}} && \text{(d'après le lemme 5.3)} \\
&= g^{\bar{i}k}g^{\bar{j}l}(R_{k\bar{l}} + \nu g_{k\bar{l}})R_{i\bar{j}} && \text{(d'après l'équation (5.3))} \\
&= g^{\bar{i}k}g^{\bar{j}l}R_{k\bar{l}}R_{i\bar{j}} + \nu g^{\bar{i}k}g^{\bar{j}l}g_{k\bar{l}}R_{i\bar{j}} && \text{(d'après l'équation (5.3))} \\
&= g^{\bar{i}k}g^{\bar{j}l}R_{k\bar{l}}R_{i\bar{j}} + \nu g^{\bar{j}l}\delta_{i,l}R_{i\bar{j}} \\
&= g^{\bar{i}k}g^{\bar{j}l}R_{k\bar{l}}R_{i\bar{j}} + \nu g^{\bar{j}i}R_{i\bar{j}} \\
&= |Ric(\omega)|^2 + \nu R && \text{(par def. de } R \text{ et de } |Ric(\omega)| \text{)}
\end{aligned}$$

Nous avons donc bien

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + |Ric(\omega)|^2 + \nu R.$$

Maintenant, en remarquant que $n|Ric(\omega)|^2 \geq R^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)R &\geq \frac{R^2}{n} + \nu R \\
&= \frac{1}{n}R(R + \nu n) \\
&= \frac{1}{n}(R + \nu n)^2 - \nu(R + \nu n)
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)(e^{\nu t}(R + \nu n)) \geq 0,$$

on utilise alors le principe du maximum pour obtenir que

$$R(t) \geq -\nu n - C_0 e^{-\nu t},$$

où $C_0 := \inf_M(R(0) - \nu n)$. □

Nous avons alors le corollaire suivant qui concerne la forme volume.

Corollaire 5.5 *Soit $\omega = \omega(t)$ la solution de l'équation (5.9) sur $[0, T[$ et soit C_0 la constante déterminée par le théorème 5.4. On a alors*

- Si $\nu = 0$ alors

$$\omega^n(t) \leq e^{C_0 t} \omega^n(0), \quad \forall t \in [0, T[.$$

- Si $\nu = 1$ alors il existe une constante positive uniforme C telle que

$$\omega^n(t) \leq e^{C_0(1-e^{-t})} \omega^n(0), \quad \forall t \in [0, T[.$$

Démonstration. Commençons par remarquer que

$$g^{\bar{k}k} \frac{\partial}{\partial t} g_{k\bar{l}} = -R - n\nu.$$

En effet, partons de l'équation (5.9), nous avons

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -Ric(\omega) - \nu\omega.$$

Il suffit alors de prendre la trace de cette équation :

$$\mathrm{Tr}_\omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right) = -\mathrm{Tr}_\omega(Ric(\omega) - \nu\omega),$$

or, on a par définition de R (voir l'équation (5.10)) que $\mathrm{Tr}_\omega(Ric(\omega)) = R$ et par définition de la trace (voir l'équation (5.5)), on a que $\mathrm{Tr}_\omega \omega = n$, d'où

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -R - n\nu.$$

On conclut alors en exprimant en coordonnées le terme $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ grâce à l'équation (5.5) :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = g^{\bar{k}k} \frac{\partial}{\partial t} g_{k\bar{l}}.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\log \frac{\omega^n(t)}{\omega^n(0)} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\log \frac{\det(g(t))}{\det(g(0))} \right) && \text{(d'après l'équation (5.14))} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \log \det(g(t)) - \frac{\partial}{\partial t} \log \det(g(0)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \log \det(g(t)) && \text{(car } g(0) \text{ ne dépend pas du temps)} \\ &= g^{\bar{j}i} \frac{\partial}{\partial t} g_{i\bar{j}} && \text{(d'après le lemme 4.15)} \\ &= -R - n\nu && \text{(égalité démontrée au début)} \\ &\leq C_0 e^{-\nu t} && \text{(d'après le lemme 5.4).} \end{aligned}$$

On conclut alors en intégrant par rapport à t l'inégalité précédente. \square

5.1.3 Évolution de la trace

Dans cette section, on considère une variété complexe compacte M et nous allons étudier comment varie la trace d'une solution ω au flot de Kähler-Ricci par rapport à une métrique $\hat{\omega}$ fixée.

Proposition 5.6 *Soit $\hat{\omega}$ une métrique kählérienne sur une variété complexe compacte M et soit $\omega = \omega(t)$ une solution au flot de Kähler-Ricci (5.9). Alors nous avons*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \text{Tr}_{\hat{\omega}} \omega = -\nu \text{Tr}_{\hat{\omega}} - g^{\bar{l}k} \hat{R}_{\bar{k}l} \hat{g}^{\bar{j}i} g_{i\bar{j}} - \hat{g}^{\bar{j}i} g^{\bar{q}p} g^{\bar{l}k} \hat{\nabla}_i g_{p\bar{l}} \hat{\nabla}_{\bar{j}} g_{k\bar{q}},$$

où \hat{g} , $\hat{\nabla}$, \hat{R} sont respectivement la métrique, les dérivés covariants et la courbure par rapport à $\hat{\omega}$.

Démonstration. Pour faire le calcul, nous nous plaçons dans un système normal (voir lemme 4.18) pour la métrique \hat{g} . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \Delta \text{Tr}_{\hat{\omega}} \omega &= g^{\bar{l}k} \partial_k \partial_{\bar{l}} (\hat{g}^{\bar{j}i} g_{i\bar{j}}) \\ &= g^{\bar{l}k} (\partial_k \partial_{\bar{j}} \hat{g}^{\bar{j}i} + g^{\bar{l}k} \hat{g}^{\bar{j}i} \partial_k \partial_{\bar{l}} g_{i\bar{j}}) \\ &= g^{\bar{l}k} \hat{R}_{\bar{k}l}^{\bar{j}i} g_{i\bar{j}} - \hat{g}^{\bar{j}i} g^{\bar{q}p} g^{\bar{l}k} \partial_i g_{p\bar{l}} \partial_{\bar{j}} g_{k\bar{q}}, \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{Tr}_{\hat{\omega}}(\omega) = -g^{\bar{j}i} R_{i\bar{j}} - \nu \text{Tr}_{\hat{\omega}}(\omega).$$

Ce qui nous donne directement le résultat. \square

La proposition nous donne alors une estimation cruciale pour la suite :

Proposition 5.7 *Soit $\hat{\omega}$ une métrique kählérienne sur M et soit $\omega = \omega(t)$ une solution à l'équation (5.9). Il existe alors une constante \hat{C} dépendant uniquement de la borne inférieure de la courbure bisectionnelle de \hat{g} telle que*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \log \text{Tr}_{\hat{\omega}} \omega \leq \hat{C} \text{Tr}_{\hat{\omega}} \hat{\omega} - \nu.$$

Démonstration. Commençons par remarquer que

$$\begin{aligned} \Delta \log f &= g^{\bar{j}i} \partial_i \partial_{\bar{j}} \log f && \text{(d'après l'équation (5.6))} \\ &= g^{\bar{j}i} \partial_i \left(\frac{\partial_{\bar{j}} f}{f} \right) \\ &= g^{\bar{j}i} \frac{f \partial_i \partial_{\bar{j}} f - \partial_i f \partial_{\bar{j}} f}{f^2} \\ &= \frac{\Delta f}{f} - \frac{|\partial f|_g^2}{f^2} && \text{(par def. de } \Delta \text{ et de } |\cdot|_g^2 \text{)} \end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\frac{|\partial \operatorname{Tr}_{\hat{\omega}}|_g^2}{\operatorname{Tr}_{\hat{\omega}} \omega} - \hat{g}^{\bar{j}i} g^{\bar{q}p} g^{\bar{l}k} \hat{\nabla}_i g_{p\bar{l}} \hat{\nabla}_{\bar{j}} g_{k\bar{q}} \leq 0.$$

Pour le démontrer, on remarque que cette inégalité est ponctuelle, on peut donc utiliser un système normal (voir lemme 4.18) tel que \hat{g} soit l'identité et tel que la métrique g est représentée par une matrice diagonale. Nous avons alors en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |\partial \operatorname{Tr}_{\hat{\omega}}|_g^2 &= \sum_i g^{\bar{i}i} \partial_i \left(\sum_j g_{j\bar{j}} \right) \partial_{\bar{i}} \left(\sum_k g_{k\bar{k}} \right) \\ &= \sum_{j,k} \sum_i g^{\bar{i}i} (\partial_i g_{j\bar{j}}) \partial_{\bar{j}} g_{k\bar{k}} \\ &\leq \sum_{j,k} \left(\sum_i g^{\bar{i}i} |\partial_i g_{j\bar{j}}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_i g^{\bar{i}i} |\partial_i g_{k\bar{k}}|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_j \left(\sum_i g^{\bar{i}i} |\partial_i g_{j\bar{j}}|^2 \right)^{1/2} \right)^2 \\ &= \left(\sum_j \sqrt{g_{j\bar{j}}} \left(\sum_i g^{\bar{i}i} g^{j\bar{j}} |\partial_i g_{j\bar{j}}|^2 \right)^{1/2} \right)^2 \\ &\leq \sum_l g_{l\bar{l}} \sum_{i,j} g^{\bar{i}i} g^{j\bar{j}} |\partial_i g_{j\bar{j}}|^2 \\ &\leq (\operatorname{Tr}_{\hat{\omega}}(\omega)) \sum_{i,j,k} g^{\bar{i}i} g^{j\bar{j}} \partial_k g_{i\bar{j}} \partial_{\bar{k}} g_{j\bar{i}}. \end{aligned}$$

(On utilise la condition de Kähler $\partial_i g_{j\bar{j}} = \partial_j g_{i\bar{j}}$ à l'avant-dernière ligne.)

Et enfin, en posant

$$\hat{C} := - \inf_{x \in M} \{ \hat{R}_{i\bar{i}j\bar{j}}(x) / \{ \partial_{z^1}, \dots, \partial_{z^n} \} \text{ est orthonormal pour } \hat{g} \text{ au point } x \ i, j = 1, \dots, n \}$$

(\hat{C} est bien fini car nous prenons l'infimum d'une fonction continue sur un compact), on a

$$g^{\bar{l}k} \hat{R}_{k\bar{k}i\bar{i}} g_{i\bar{j}} = \sum_{k,l} g^{\bar{k}k} R_{k\bar{k}i\bar{i}} g_{i\bar{i}} \geq -\hat{C} \sum_k g^{\bar{k}k} \sum_i g_{i\bar{i}} = -\hat{C} (\operatorname{Tr}_{\hat{\omega}} \omega) (\operatorname{Tr}_{\omega} \hat{\omega}).$$

En combinant ces trois résultats, nous obtenons le résultat souhaité. \square

Par la suite, nous aurons besoin d'un dernier résultat qui se démontre de manière similaire aux précédents :

Théorème 5.8 Soit $\omega = \omega(t)$ une solution à l'équation de Kähler-Ricci (5.8) sur $M \times [0, T[$ avec $0 \leq T \leq \infty$. S'il existe une constante C_0 telle que

$$\frac{1}{C_0} \leq \omega \leq C_0 \omega_0,$$

alors pour tout $m = 1, 2, \dots$, il existe une constante C_m telle que

$$\|\omega(t)\|_{\mathcal{C}^m(M, g_0)} \leq C_m.$$

Démonstration. On pourra consulter [8]. □

5.2 Existence et unicité de solutions maximales

Dans cette section, nous allons démontrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale pour l'équation (5.8) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega = -Ric(\omega), \quad \omega|_{t=0} = \omega_0.$$

La première étape va être de déterminer une borne supérieure au temps d'existence d'une solution. En effet, supposons que (ω_t) soit une solution définie sur un intervalle $[0, t'[$. Alors en prenant les classes de cohomologie de l'équation (5.8). On obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\omega(t)] &= \left[\frac{\partial}{\partial t} \omega(t) \right] && \text{(car la dérivée par rapport au temps n'intervient} \\ & && \text{pas dans les calculs de cohomologie)} \\ &= -[Ric(\omega)] && \text{(d'après l'équation (5.8))} \\ &= -c_1(M) && \text{(d'après le lemme 4.17)} \end{aligned}$$

Comme le membre de droite ne dépend plus de temps, on obtient donc

$$[\omega(t)] = [\omega_0] - tc_1(M) \quad \forall t \in [0, t'[, \tag{5.11}$$

or $\omega(t)$ est une forme de Kähler i.e. $\omega(t) > 0$, nous obtenons ainsi une condition nécessaire pour que le flot existe sur $[0, t'[$, on doit avoir

$$t' \leq \sup\{t > 0 / [\omega_0] - tc_1(M) > 0\} =: T.$$

Nous allons montrer que la condition est, en fait, suffisante :

Théorème 5.9 Il existe une solution maximale $\omega(t)$ à l'équation du flot de Ricci-Kähler (5.8) définie sur l'intervalle $]0, T[$. □

La démonstration demande quelques résultats avant d'être faite. Nous allons d'abord la ramener à une *équation de Monge-Ampère parabolique*.

5.2.1 L'équation de Monge-Ampère parabolique

Avant de commencer, nous aurons besoin d'un préliminaire concernant les formes volumes. Prenons (M, ω) une variété kählérienne compacte, on a la formule

$$\omega^{\wedge n} = \frac{1}{n!} \left(\frac{\sqrt{-1}}{2} \right)^n \det(g_{i\bar{j}}) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n, \quad (5.12)$$

et on définit

$$\omega^n := \frac{1}{n!} \omega^{\wedge n} = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2} \right)^n \det(g_{i\bar{j}}) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n. \quad (5.13)$$

De plus, on sait que toute forme volume Ω sur M va s'écrire localement comme

$$\Omega = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2} \right)^n \alpha(z^1, \dots, z^n) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n,$$

où α est une fonction localement définie sur M à valeurs dans \mathbb{R}^* , on fait souvent l'abus de noter la fonction α par Ω . De plus, si α est à valeurs dans \mathbb{R}_+ , on définit alors localement

$$\log \Omega := \log \alpha,$$

en particulier on a alors

$$\log \omega^n = \log \det(g_{i\bar{j}}). \quad (5.14)$$

De plus, on peut définir la $(1, 1)$ -forme $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \Omega := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \Omega$. Pour que cela ait un sens, il faut remarquer que même si α dépend des coordonnées holomorphes, on peut montrer que pour $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \Omega$, ce n'est pas le cas.

Terminons par un lemme qui nous servira par la suite :

Lemme 5.10 *Soit (M, ω) une variété kählérienne compacte et soit $\theta \in -c_1(M)$. Il existe alors une forme volume Ω sur M telle que*

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \Omega = \theta.$$

Démonstration. si $\theta \in -c_1(M)$ alors $-\theta \in c_1(M)$ et donc $Ric(\omega) \in c_1(M)$ et donc

$$Ric(\omega) + \theta = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} h,$$

que l'on peut encore écrire

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} (\log \det(g_{i\bar{j}})) + h \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} (\log(\det(g_{i\bar{j}}) e^h)) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} (\log \Omega). \end{aligned}$$

où Ω est la forme volume définie localement par

$$\Omega = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2} \right)^n e^h \det(g_{i\bar{j}}) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$$

i.e. $\Omega = e^h \omega^n$. □

Nous allons montrer qu'il existe une solution à l'équation (5.8) sur un intervalle $]0, T'[$ où $T' < T$ en la ramenant à une *équation de Monge-Ampère parabolique*.

Nous allons définir une forme de Kähler de référence $\hat{\omega}_t$ dans chaque classe de cohomologie $[\omega_0] - tc_1(M)$ pour $t \in]0, T'[$ (cette classe est de Kähler car $t < T' < T$). En particulier, il existe une forme de Kähler η telle que

$$\eta \in [\omega_0] - T'c_1(M).$$

Et on définit $\hat{\omega}_t$ comme le chemin linéaire entre ω_0 et η i.e.

$$\hat{\omega}_t := \omega_0 + t\chi \in [\omega_0] - tc_1(M), \quad \forall t \in]0, T'[,$$

où

$$\chi := \frac{1}{T'}(\eta - \omega_0) \in -c_1(M).$$

En utilisant le lemme 5.10, on sait qu'il existe une forme volume Ω sur M vérifiant

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \Omega = \chi = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\omega}_t \in -c_1(M). \quad (5.15)$$

On cherche maintenant une famille $\varphi = \varphi(t) = \varphi_t$ de fonctions lisses définies sur M à valeurs réelles telle que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \log \frac{(\hat{\omega}_t + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \varphi)^n}{\Omega}, \quad \hat{\omega}_t + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \varphi > 0, \quad \varphi|_{t=0} = 0. \quad (5.16)$$

Et on a alors le résultat suivant :

Lemme 5.11 *Résoudre l'équation du flot de Kähler-Ricci (5.8) est équivalent à résoudre l'équation de Monge-Ampère (5.16).*

Démonstration. Soit φ une solution de l'équation (5.16). Posons alors

$$\omega(t) = \hat{\omega}_t + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \varphi_t.$$

On a donc, d'après la deuxième équation de (5.16), que $\omega(t) > 0$ i.e. $\omega(t)$ est une forme de Kähler. De plus, elle vérifie bien la condition initiale $\omega(0) = \omega_0$ d'après la

troisième équation de (5.16) et le calcul suivant montre qu'elle est bien solution du flot de Kähler-Ricci (5.8) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \omega &= \frac{\partial}{\partial t} \hat{\omega}_t + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \\ &= \hat{\omega}_t + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \left(\log(\hat{\omega}_t + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi)^n \right) - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} (\log \Omega). \quad (\text{voir l'équation (5.16)}) \end{aligned}$$

Grâce à la formule (5.15), le premier et le dernier termes se simplifient, on obtient donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \omega &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \left(\log(\hat{\omega}_t + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi_t)^n \right) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} (\log \omega(t)^n) && (\text{par définition de } \omega(t)) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} (\log \det(g(t)_{i\bar{j}})) && (\text{voir l'équation (5.14)}) \\ &= Ric(\omega_t) && (\text{voir l'équation (5.3)}) . \end{aligned}$$

Réciproquement, si ω est une solution de l'équation 5.8 alors, en utilisant le $\partial \bar{\partial}$ -lemme, on peut trouver un potentiel $\tilde{\varphi}(t)$ tel que

$$\omega(t) = \hat{\omega}_t + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \tilde{\varphi}(t).$$

Quitte à rajouter une constante, on peut supposer que $\tilde{\varphi}(t)$ vérifie

$$\int_M \tilde{\varphi}(t) \omega_0^n = 0.$$

De plus, le théorème de régularité parabolique, nous dit que φ est lisse sur $M \times [0, T']$. Donc nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \omega^n &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \det(g_{i\bar{j}}) && (\text{voir l'équation (5.14)}) \\ &= - Ric(\omega_t) && (\text{voir l'équation (5.3)}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \omega_t && (\text{voir l'équation (5.8)}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\omega_t + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \tilde{\varphi} \right) && (\text{par définition de } \omega(t)) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \Omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \right) && (\text{voir l'équation (5.15)}) \end{aligned}$$

Or M est une variété compacte donc les seules fonctions pluri-harmoniques sont les constantes, ce qui nous donne :

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = \log \frac{\omega^n}{\Omega} + c(t),$$

où $c : [0, T'[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse. Maintenant, on pose

$$\varphi(t) := \tilde{\varphi}(t) - \int_0^t c(s)ds - \tilde{\varphi}(0),$$

et on a alors que φ est une solution de (5.16). En effet, il est clair que $\varphi(0) = 0$ et le calcul suivant montre que.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{\partial(\tilde{\varphi}(t) - \int_0^t c(s)ds - \tilde{\varphi}(0))}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} - c(t) \\ &= \log \frac{\omega^n}{\Omega} && \text{(par définition de } c(t)) \\ &= \log \frac{(\hat{\omega}_t + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi_t)^n}{\Omega} && \text{(par définition de } \omega(t)). \end{aligned}$$

On peut remarquer que $\omega(0) = \omega_0$ donc $\tilde{\varphi}_0$ est constant, ainsi nous avons

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_t + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi_t &= \hat{\omega}_t + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} [\tilde{\varphi}_t - \int_0^t c(s)ds - \tilde{\varphi}(0)] \\ &= \hat{\omega}_t + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \tilde{\varphi}_t \\ &= \omega(t) \\ &> 0 \end{aligned}$$

5.2.2 Estimations pour le potentiel et la forme volume

Nous gardons les notations introduites à la section précédente pour l'équation de Monge-Ampère (5.16) sur un intervalle $[0, T_{max}[$ pour $0 < T_{max} < T' < T$.

Dans cette section, on se donne une solution sur $\varphi = \varphi(t)$ à (5.16) sur un intervalle $[0, T_{max}[$. L'objectif de cette partie est de déterminer des estimations pour φ et pour $\dot{\varphi} := \frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

Commençons par le lemme suivant :

Lemme 5.12 *Il existe une constante uniforme $C > 0$ telle que*

$$\|\varphi(t)\|_{\mathcal{C}^0(M)} \leq C, \quad \forall t \in [0, T_{max}[. \quad (5.17)$$

Démonstration. Commençons par déterminer une borne supérieure. L'idée va être d'appliquer le principe du maximum à $\theta := \varphi - At$ où $A > 0$ est une constante que l'on déterminera plus tard.

Grâce à l'équation (5.16), nous obtenons que

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \log \frac{(\hat{\omega} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \theta)^n}{\Omega} - A.$$

Fixons maintenant $t' \in]0, T_{max}[$. Comme $M \times [0, t']$ est compact, θ atteint son maximum en un point (x_0, t_0) , nous allons choisir A de telle sorte que $t_0 = 0$. Supposons par l'absurde que $t_0 > 0$. Nous obtenons alors par la proposition 4.29 qu'au point (x_0, t_0) , nous avons

$$0 \leq \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \log \frac{(\hat{\omega} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \theta)^n}{\Omega} - A \leq \log \frac{\hat{\omega}_{t_0}^n}{\Omega} - A.$$

Si nous prenons $A > 1 + \sup_{M \times [0, T_{max}]} \log \frac{\hat{\omega}_t^n}{\Omega}$ ($< \infty$ car M est compacte), nous obtenons

$$0 \leq \log \frac{\hat{\omega}_{t_0}^n}{\Omega} - A \leq -1,$$

ce qui est absurde. Ainsi nous obtenons que $t_0 = 0$ et donc $\sup_{M \times [0, t']} \theta \leq \sup_M \theta|_{t=0} = 0$ d'où

$$\varphi(x, t) \leq At \leq AT_{max}, \quad \forall (x, t) \in M \times [0, t'].$$

Comme t' est choisi arbitrairement, nous obtenons notre borne supérieure pour φ sur $[0, T_{max}]$.

Pour la borne inférieure, on raisonne de la même façon en étudiant $\Theta := \varphi + Bt$ où B est une constante positive vérifiant $B \geq 1 - \inf_{M \times [0, T_{max}]} \log \frac{\hat{\omega}_{t_0}^n}{\Omega}$ et en utilisant le principe du maximum. \square

Nous voulons maintenant déterminer une estimation pour la forme volume ou, grâce à l'équation (5.16), une estimation de $\dot{\varphi}$.

Lemme 5.13 *Il existe une constante uniforme $C > 0$ telle que sur $M \times [0, T_{max}[$,*

$$\frac{1}{C} \Omega \leq \omega^n(t) \leq C \Omega,$$

ou de manière équivalente que $\dot{\varphi}$ est une fonction uniformément bornée.

Démonstration. Commençons par remarquer qu'une borne supérieure est donnée par le corollaire 5.5. Il reste donc à déterminer une borne inférieure. Commençons

par remarquer que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\log \frac{(\hat{\omega} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \theta)^n}{\Omega} \right) && \text{(d'après l'équation 5.16)} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\log(\hat{\omega} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \theta)^n \right) && \text{(car } \Omega \text{ ne dépend pas de } t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\log \det[\omega(\hat{t})_{i\bar{j}} + \partial_i \partial_{\bar{j}} \theta] \right) && \text{(d'après l'équation (5.14))} \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial t} \det[\omega(\hat{t})_{i\bar{j}} + \partial_i \partial_{\bar{j}} \theta]}{\det[\omega(\hat{t})_{i\bar{j}} + \partial_i \partial_{\bar{j}} \theta]} \\
&= \omega(t)^{\bar{j}i} \frac{\partial}{\partial t} [(\omega(\hat{t})_{i\bar{j}} + \partial_i \partial_{\bar{j}} \theta)] && \text{(d'après le lemme 4.15)} \\
&= \Delta_{\omega_t} \dot{\varphi} + \text{Tr}_{\omega_t} \chi && \text{(d'après les équations (5.5) et (5.6))}
\end{aligned}$$

De plus, on sait que $\omega(t) = \omega(\hat{t}) + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi(t)$, ainsi

$$\begin{aligned}
\Delta_{\omega_t} \varphi_t &= \text{Tr}_{\omega_t} (\omega(t) - \hat{\omega}_t) \\
&= n - \text{Tr}_{\omega_t} \hat{\omega}_t.
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $Q := (T' - t)\dot{\varphi} + \varphi + nt$ et en utilisant les deux égalités précédentes, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) Q &= (T' - t) \text{Tr}_{\omega} \chi + n - \Delta \varphi \\
&= \text{Tr}_{\omega} (\hat{\omega}_t + (T' - t)\chi) \\
&= \text{Tr}_{\omega} \hat{\omega}_{T'} > 0
\end{aligned}$$

(La dernière inégalité résulte du raisonnement suivant. L'inégalité étant ponctuelle, on peut se ramener à l'étudier dans un système normal où ω est égal à l'identité et où $\hat{\omega}_{T'}$ est diagonalisé (lemme 4.18), dans ce cas $\text{Tr}_{\omega} \hat{\omega}_{T'}$ est égale à la somme des valeurs propres de $\hat{\omega}_{T'}$ qui sont strictement positives car $\hat{\omega}_{T'}$ est défini positif.)

Ainsi, en utilisant le principe du maximum, nous obtenons que la fonction Q est uniformément bornée par son infimum à $t = 0$ donc

$$(T' - t)\dot{\varphi} + \varphi + nt \leq T' \inf_M \log \frac{\omega_0^n}{\Omega}, \quad \text{sur } M \times [0, T_{max}[,$$

on conclut alors en utilisant le fait que φ est uniformément borné et que $T' - t \geq T' - T_{max} > 0$. \square

5.2.3 Borne uniforme pour la métrique

On suppose à nouveau que nous avons une solution φ à l'équation (5.16) sur l'intervalle $]0, T_{max}[$ pour $0 < T_{max} < T' < T$. Commençons par un lemme qui donne une borne uniforme pour la trace :

Lemme 5.14 *Il existe une constante $C > 0$ uniforme telle que sur $M \times [0, T_{max}[$,*

$$\mathrm{Tr}_{\omega_0} \omega \leq C.$$

Démonstration. On considère $Q := \log \mathrm{Tr}_{\omega_0} \omega - A\varphi$ pour $A > 0$ que l'on déterminera plus tard. Pour $t' \in]0, T_{max}[$, comme M est compact, on obtient que Q atteint son maximum en un point (x_0, t_0) . On peut supposer que $t_0 > 0$, en effet, si $t = 0$ alors

$$Q \leq \log \mathrm{Tr}_{\Omega_0} \omega_0 - A\varphi$$

d'où

$$Q \leq \log n - A\varphi,$$

on conclut alors grâce au fait que la fonction φ est bornée par le lemme 5.12. Donc on suppose $t_0 > 0$ et en utilisant le principe du maximum et le lemme 5.7, on obtient qu'au point (x_0, t_0) , il existe C_0 une constante positive ne dépendant que de la borne inférieure de la courbure bisectionnelle de g_0 telle que :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) Q \\ &\leq C_0 \mathrm{Tr}_{\omega} \omega_0 - A\dot{\varphi} + A\Delta\varphi \\ &= \mathrm{Tr}_{\omega}(C_0\omega_0 - A\hat{\omega}_{t_0}) - A \log \frac{\omega^n}{\Omega} + An \end{aligned}$$

(Pour obtenir la dernière égalité, on utilise la formule $\Delta\varphi = n - \mathrm{Tr}_{\omega} \hat{\omega}_t$, que nous avons démontré dans la preuve du lemme 5.13, et l'équation (5.16)).

Remarquons maintenant que pour A suffisamment grand et indépendant de t_0 , nous obtenons que

$$A\hat{\omega}_{t_0} - (C_0 + 1)\omega_0 > 0.$$

En effet, comme $\hat{\omega}_{t_0} = \omega + t_0\chi$, nous avons

$$A\hat{\omega}_{t_0} - (C_0 + 1)\omega_0 = [A - (C_0 + 1)]\omega_0 + At_0\chi,$$

or on a que $\chi = \frac{1}{T'}(\eta - \omega_0)$ où $\eta > 0$, ainsi

$$A\hat{\omega}_{t_0} - (C_0 + 1)\omega_0 = \frac{At_0}{T'}\eta + [A(1 - \frac{t_0}{T'}) - (C_0 + 1)]\omega_0.$$

On conclut alors grâce au fait que $\eta > 0$ et que $0 < t_0 < T' < T_{max}$.

Grâce au fait que $A\hat{\omega}_{t_0} - (C_0 + 1)\omega_0 > 0$, nous obtenons que

$$\mathrm{Tr}_\omega(A\hat{\omega}_{t_0} - (C_0 + 1)\omega_0) > 0.$$

En effet, l'inégalité étant ponctuelle, on peut se ramener à l'étudier dans un système normal où ω est égal à l'identité et où $(A\hat{\omega}_{t_0} - (C_0 + 1)\omega_0)$ est diagonalisé (lemme 4.18), dans ce cas la trace est égale à la somme des valeurs propres de $(A\hat{\omega}_{t_0} - (C_0 + 1)\omega_0)$ qui sont strictement positives car $A\hat{\omega}_{t_0} - (C_0 + 1)\omega_0$ est définie positive. D'où, par linéarité de la trace,

$$\mathrm{Tr}_\omega(C_0\omega_0 + A\hat{\omega}_{t_0}) \leq -\mathrm{Tr}_\omega(\omega_0).$$

En utilisant cette inégalité avec la précédente, nous obtenons que

$$\mathrm{Tr}_\omega(\omega_0) + A \log \frac{\omega^n}{\Omega} \leq An,$$

donc, par le lemme 5.13, il existe une constante positive uniforme C telle que

$$\mathrm{Tr}_\omega(\omega_0) + A \log \frac{\omega^n}{\omega_0^n} \leq C.$$

Au point (x_0, t_0) , on considère le système normal (voir lemme 4.18) tel que

$$(g_0)_{i\bar{j}} = \delta_{i,\bar{j}} \quad \text{et} \quad g_{i\bar{j}} = \lambda_i \delta_{i\bar{j}} \quad \forall i, j = 1, \dots, n,$$

où les λ_i sont des réels strictement positifs car g est définie positive. Dans ce système, on obtient que

$$\mathrm{Tr}_\omega(\omega_0) + A \log \frac{\omega^n}{\omega_0^n} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_i} + A \log \lambda_i \right),$$

d'où

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_i} + A \log \lambda_i \right) \leq C$$

De plus, comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x} + A \log x$ pour $x > 0$ est uniformément bornée inférieurement, on obtient que

$$A \log \lambda_i < \frac{1}{\lambda_i} + A \log \lambda_i < \tilde{C} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

On a donc une borne supérieure uniforme pour λ_i et donc pour $\mathrm{Tr}_{\omega_0} \omega$ aussi. Ainsi $Q(x_0, t_0)$ est bornée supérieurement uniformément donc Q est aussi bornée supérieurement uniformément sur $M \times [0, t']$ pour tout $t' < T_{max}$. On conclut alors en utilisant le lemme 5.12. \square

On a alors le corollaire suivant qui nous servira pour démontrer le théorème d'existence et d'unicité de solutions maximales dans la section suivante :

Corollaire 5.15 *Il existe une constante C positive uniforme telle que nous avons sur $M \times [0, T_{max}[$,*

$$\frac{1}{C}\omega_0 \leq \omega \leq C\omega_0.$$

Démonstration. La borne supérieure provient directement du lemme 5.14. En effet, l'inégalité étant ponctuelle, on peut se ramener à l'étudier dans un système normal où ω_0 est égal à l'identité et où (ω) est diagonalisé (lemme 4.18) i.e.

$$(g_0)_{i\bar{j}} = \delta_{i,\bar{j}} \quad \text{et} \quad g_{i\bar{j}} = \lambda_i \delta_{i\bar{j}} \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

où les λ_i sont des réels strictement positifs (car g est définie positive). Dans ce système, le lemme 5.14 nous donne que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Tr}_{\omega_0} \omega \leq C,$$

et comme les λ_i sont strictement positives, nous obtenons que

$$\lambda_i < C, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Or dans ce système, $\Theta := (C\omega_0 - \omega)$ est donnée par

$$\Theta_{i\bar{j}} = (C - \lambda_i) = \delta_{i\bar{j}},$$

or d'après l'inégalité précédente, Θ est donc une matrice diagonale à coefficients strictement positifs donc nous obtenons que Θ est définie positive i.e.

$$C\omega_0 - \omega > 0.$$

Pour la borne inférieure, continuons de travailler dans le système normal où ω_0 est égal à l'identité et où (ω) est diagonalisé (lemme 4.18) i.e.

$$(g_0)_{i\bar{j}} = \delta_{i,\bar{j}} \quad \text{et} \quad g_{i\bar{j}} = \lambda_i \delta_{i\bar{j}} \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

où les λ_i sont des réels strictement positifs (car g est définie positif). On a alors l'inégalité suivante (on utilise le fait que les λ_i sont des réels strictement positifs) :

$$\frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_n} \leq \frac{1}{(n-1)!} \frac{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^{n-1}}{\lambda_1 \dots \lambda_n}.$$

ce qui nous donne

$$\text{tr}_{\omega} \omega_0 \leq \frac{1}{(n-1)!} (\text{Tr}_{\omega_0} \omega)^{n-1} \frac{\omega_0^n}{\omega^n} < C.$$

(La dernière inégalité résulte du lemme 5.13.)

On peut alors conclure en faisant le même raisonnement que pour la borne supérieure. □

5.2.4 Théorème d'existence et d'unicité de solutions maximales

Rappelons que nous voulons montrer le théorème suivant

Théorème 5.16 *Il existe une unique solution maximale $\omega(t)$ à l'équation du flot de Kähler-Ricci (5.8) pour tout $t \in [0, T[$ où*

$$T := \sup\{t > 0 / [\omega_0] - tc_1(M) > 0\}.$$

Démonstration. D'après le lemme 5.11, on est ramené à étudier l'équation de Monge Ampère parabolique (5.16). La théorie des opérateurs elliptiques nous donne alors le lemme suivant :

Lemme 5.17 *L'équation (5.16) admet une unique solution maximale sur un intervalle $[0, T_{max}[$ avec $T_{max} < T$.*

Démonstration. Comme le linéarisé de l'équation (5.16) est l'opérateur $\Delta_{\omega(t)}$ qui est elliptique, la théorie des opérateurs elliptiques (voir [21, 13]) nous donne directement l'existence et l'unicité d'une solution. Le fait que $T_{max} < T$ résulte, quant à lui, de la discussion au début de la section 5.2. \square

Il faut donc montrer que $T_{max} = T$. Raisonnons par l'absurde, et supposons que $T_{max} < T$, on va montrer que l'on peut prolonger la solution sur un intervalle de la forme $[0, T_{max} + \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$, ce qui contredira la maximalité de T_{max} .

En combinant le corollaire 5.15 et le théorème 5.8, nous obtenons une estimation \mathcal{C}^∞ pour $\omega(t)$ sur $[0, T_{max}[$. Ainsi, par le théorème d'Arzelà-Ascoli, on a

$$\omega(t) \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} \omega(T_{max}) \quad \text{pour } t \longrightarrow T_{max},$$

où $\omega(T_{max}) > 0$ prolongeant ainsi la solution sur l'intervalle $[0, T_{max}]$. Or le lemme 5.17 nous donne aussi (en faisant une translation au niveau du temps) l'existence de solution locale pour toute condition initiale. Ainsi, on peut prolonger la solution à un intervalle de la forme $[0, T_{max} + \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$, ce qui contredit la maximalité de T_{max} . On a donc bien $T_{max} = T$. \square

5.3 Convergence du flot de Kähler-Ricci

Dans cette section, nous allons discuter de la convergence du flot de Ricci. Cependant, Il est nécessaire avant de faire un rappel sur les métriques de Kähler-Einstein.

Soit M une variété complexe. On dit que ω_{KE} est une *métrique de Kähler-Einstein sur M* si ω_{KE} est une métrique kählérienne vérifiant

$$Ric(\omega_{KE}) = \mu\omega_{KE}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \tag{5.18}$$

On dit alors que μ est la *constante d'Einstein de ω_{KE}* .

L'existence de métriques de Kähler-Einstein implique des conditions algébriques fortes sur la première classe de Chern. En effet, si nous prenons les classes de cohomologie alors nous avons d'après le lemme 4.17 que

$$c_1(M) = [Ric(\omega)] = \mu[\omega_{KE}],$$

or ω_{KE} est une métrique kählérienne, elle est donc définie positive i.e. $\omega_{KE} > 0$. Nous avons donc trois possibilités pour la première classe de Chern $c_1(M)$:

- (i) $c_1(M) < 0$ si $\mu < 0$,
- (ii) $c_1(M) = 0$ si $\mu = 0$,
- (iii) $c_1(M) < 0$ si $\mu > 0$.

Nous avons alors des résultats concernant l'existence et l'unicité des métriques de Kähler-Einstein selon ces trois cas :

- Dans le cas où $c_1(M) < 0$, nous avons en particulier le théorème d'Aubin-Yau ([2]) qui nous donne l'existence et l'unicité de solutions à cette équation dans le cas où $c_1(M) < 0$.

Proposition 5.18 *Sur une variété complexe compacte M dont la première classe de Chern $c_1(M)$ est définie négative i.e. $c_1(M) < 0$ alors il existe une unique métrique de Kähler-Einstein avec comme constante d'Einstein $\mu = -1$ \square*

- Dans le cas où $c_1(M) = 0$, la conjecture de Calabi démontrée par Yau (voir [31]) répond à la question de l'existence de solutions à l'équation de Kähler-Einstein :

Théorème 5.19 *Soit (M, ω) une variété compacte kählérienne et soit $R \in c_1(M)$. Alors il existe une unique métrique \tilde{g} dont la forme de Kähler $\tilde{\omega}$ vérifie*

$$[\omega] = [\tilde{\omega}], \quad Ric(\tilde{\omega}) = R.$$

En particulier, si $c_1(M) = 0$ alors il existe dans toute classe de cohomologie de $H^{1,1}(M)$ une métrique de Kähler-Einstein ω dont la constante d'Einstein est nulle. \square

- Dans le cas où $c_1(M) > 0$, il existe des variétés dont la première classe de Chern est positive qui n'admettent pas de métrique de Kähler-Einstein. On pourra consulter l'article [26].

Dans la suite, nous allons étudier les liens entre le flot de Kähler-Ricci et les métriques de Kähler-Einstein. Pour cela, on va étudier la convergence du flot de Kähler-Ricci selon le signe de la première classe de Chern $c_1(M)$.

5.3.1 Étude dans le cas où $c_1(M) < 0$

On considère une variété kählérienne (M, ω_0) telle que $c_1(M) < 0$ et on suppose de plus que

$$\omega_0 \in -c_1(M).$$

En appliquant le théorème 5.16, on obtient qu'il existe une unique solution maximale à l'équation (5.8) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega = -Ric(\omega), \quad \omega|_{t=0} = \omega_0.$$

et que cette équation est définie sur l'intervalle $[0, T[$ où

$$T := \sup\{t > 0 / [\omega_0] - tc_1(M) > 0\},$$

or on sait que $\omega_0 \in -c_1(M)$ et $c_1(M) < 0$ donc

$$[\omega_0] - tc_1(M) = -(t+1)c_1(M) > 0 \forall t > 0$$

d'où

$$T = +\infty.$$

On a donc une solution $\omega = \omega(t)$ définie pour tout $t > 0$ à l'équation (5.3). En prenant les classe des cohomologies de cette équation, on obtient

$$[\omega(t)] = (1+t)c_1(M),$$

et donc $\omega(t)$ diverge quand t tend vers l'infini. On ne peut espérer faire converger ce flot. Pour cette raison, on considère l'équation de Kähler-Ricci normalisée (5.9)

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega = -Ric(\omega) - \omega, \quad \omega|_{t=0} = \omega_0.$$

Nous avons vu alors grâce au lemme 5.1 que cette équation admet aussi une solution $\omega(t)$ définie pour tout $t > 0$. Cette fois-ci, en passant aux classes de cohomologie, on obtient que

$$[\omega(t)] = -c_1(M).$$

Nous voulons maintenant démontrer le résultat suivant :

Théorème 5.20 *Soit $\omega = \omega(t)$ la solution de l'équation du flot de Kähler-Ricci normalisée (5.9). Alors ω converge de manière \mathcal{C}^∞ vers la métrique de Kähler-Einstein de $\omega_{KE} \in -c_1(M)$. \square*

L'idée va être de se ramener à nouveau à une *équation de Monge-Ampère* et d'obtenir ensuite des estimés sur le potentiel de Kähler afin d'étudier précisément la convergence. Commençons par nous ramener à l'étude d'une équation de Monge-Ampère, en raisonnant comme dans la section 5.2.1. Par le lemme 5.10, il existe une forme volume Ω vérifiant

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \Omega = \omega_0 \in -c_1(M), \quad \int_M \Omega = \int_M \omega_0^n.$$

On considère alors l'équation de Monge-Ampère parabolique normalisée :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \log \frac{(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi)^n}{\Omega} - \varphi, \quad \omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi > 0, \quad \varphi|_{t=0} = 0. \quad (5.19)$$

On montre que résoudre l'équation de Monge-Ampère parabolique normalisée (5.19) est équivalent à résoudre l'équation du flot de Kähler-Ricci normalisée (5.9). La démonstration est similaire à celle du cas non-normalisée (voir démonstration du lemme 5.11) : si $\varphi = \varphi(t)$ et une solution de (5.19), on montre que $\omega = \omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi$ est solution de (5.9). Pour le sens réciproque, on utilise à nouveau le $\partial \bar{\partial}$ -lemme pour obtenir la solution. En particulier, dans notre cas, la solution $\varphi(t)$ est définie pour tout $t > 0$. Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 5.21 *Soit φ une solution de l'équation (5.19) définie pour tout $t > 0$. On a alors*

(i) *Il existe une constante uniforme C telle que pour tout $t \in [0, \infty[$,*

$$\|\dot{\varphi}\|_{\mathcal{C}^0(M)} \leq C e^{-t}.$$

(ii) *Il existe une fonction $\varphi_\infty \in \mathcal{C}^0(M, \mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in [0, \infty[$,*

$$\|\varphi(t) - \varphi_\infty\|_{\mathcal{C}^0(M)} \leq C e^{-t}.$$

(iii) *$\|\varphi(t)\|_{\mathcal{C}^0(M)}$ est uniformément bornée pour $t \in [0, \infty[$.*

(iv) *Il existe une constante uniforme C' telle que sur $M \times [0, \infty[$, la forme volume de $\omega(t)$ vérifie*

$$\frac{1}{C'} \omega_0^n \leq \omega^n \leq C' \omega_0^n.$$

Démonstration.

(i) Remarquons que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\log \frac{(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi)^n}{\Omega} \right) - \dot{\varphi} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\log(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi)^n \right) - \dot{\varphi} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (\log \det(g(t))) - \dot{\varphi} \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial t} (\det(g(t)))}{\det(g(t))} - \dot{\varphi} \\
&= g(t)^{\bar{i}j} \frac{\partial}{\partial t} g(t)_{i\bar{j}} - \dot{\varphi} \\
&= g(t)^{\bar{i}j} \frac{\partial}{\partial t} \left(g(0)_{i\bar{j}} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial_i \partial_{\bar{j}} \varphi(t) \right) - \dot{\varphi} \\
&= g(t)^{\bar{i}j} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial_i \partial_{\bar{j}} \varphi(t) \right) - \dot{\varphi} \\
&= g(t)^{\bar{i}j} \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial_i \partial_{\bar{j}} \dot{\varphi}(t) \right) - \dot{\varphi} \\
&= \Delta \dot{\varphi} - \dot{\varphi},
\end{aligned}$$

ainsi on obtient que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (e^t \dot{\varphi}) &= e^t \dot{\varphi} + e^t \frac{\partial}{\partial t} \dot{\varphi} \\
&= e^t \dot{\varphi} + e^t (\Delta \dot{\varphi} - \dot{\varphi}) \\
&= e^t \Delta \dot{\varphi} \\
&= \Delta (e^t \dot{\varphi}).
\end{aligned}$$

Donc en utilisant le principe du maximum, on obtient que

$$\sup_{(x,t) \in M \times [0, T[} (e^t \dot{\varphi}(x, t)) \leq \sup_{x \in M} \varphi_0(x) =: C.$$

($C < +\infty$ car on prend le maximum d'une fonction continue sur un compact).

On a donc

$$e^t \dot{\varphi}(x) \leq C \quad \forall (x, t) \in M \times [0, T[.$$

d'où

$$\dot{\varphi}(x) \leq C e^t \quad \forall (x, t) \in M \times [0, T[.$$

Et comme le résultat est vrai pour tout couple $\forall(x, t) \in M \times [0, T[$, on obtient bien

$$\|\dot{\varphi}\|_{\mathcal{C}^0(M)} \leq Ce^{-t}.$$

(ii) Pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|\varphi(x, s) - \varphi(x, t)| = \left| \int_t^s \dot{\varphi}(x, u) du \right| \leq \int_t^s |\dot{\varphi}(x, u)| du \leq \int_t^s Ce^{-u} du = C(e^{-t} - e^{-s}),$$

ainsi φ converge uniformément vers une fonction $\varphi_\infty \in \mathcal{C}^0(M, \mathbb{R})$. De plus, en prenant la limite quand $s \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient bien

$$\|\varphi(t) - \varphi_\infty\|_{\mathcal{C}^0(M)} \leq Ce^{-t}.$$

(On utilise (i) pour passer la deuxième inégalité).

(iii) Cela est une conséquence de (ii).

(iv) Cela est une conséquence de (i) et (iii) en utilisant l'équation (5.19). □

Maintenant, en utilisant le fait que φ est bornée uniformément de manière \mathcal{C}^0 , on obtient le lemme suivant :

Lemme 5.22 *Il existe une constante uniforme C telle que sur $M \times [0, \infty[$ telle que la solution $\omega(t)$ à l'équation (5.9) vérifie*

$$\frac{1}{C}\omega_0 \leq \omega \leq C\omega.$$

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du lemme 5.14, on pose $Q = \log \text{Tr}_{\omega_0} \omega - A\varphi$ et on utilise le principe du maximum. □

On peut alors démontrer le théorème de convergence énoncé en début de section :

Théorème 5.23 *Soit $\omega = \omega(t)$ la solution de l'équation du flot de Kähler-Ricci normalisée (5.9) converge de manière \mathcal{C}^∞ vers la métrique de Kähler-Einstein de $\omega_{KE} \in -c_1(M)$.*

Démonstration. En utilisant la proposition 5.8 et le lemme 5.22, on a une estimation uniforme \mathcal{C}^∞ de $\omega(t)$ et comme φ est \mathcal{C}^∞ -bornée (voir lemme 5.21), on obtient une estimation uniforme \mathcal{C}^∞ pour $\varphi(t)$. De plus, on a, d'après le lemme 5.21 que

$$\varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{C}^0} \varphi_\infty.$$

En utilisant le théorème d'Arzela-Ascoli et l'unicité de la limite, il existe une suite $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels telle que $t_k \rightarrow +\infty$ et telle que $\varphi(t_k) \rightarrow \varphi$ de manière C^∞ . On montre maintenant qu'il y a convergence sans passer par une sous-suite. Pour cela,

on raisonne par l'absurde. On suppose donc le contraire, il existe donc $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ et une suite $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de réels tel que $t_i \rightarrow +\infty$ vérifiant

$$\|\varphi(t_i) - \varphi_\infty\|_{\mathcal{C}^k(M)} \geq \varepsilon,$$

or d'après ce qui précède $\varphi(t_i)$ est une suite de fonctions \mathcal{C}^{k+1} -uniformément bornée, on peut donc appliquer à nouveau le théorème d'Arzela-Ascoli pour obtenir une sous-suite $\varphi(t_{i_j})$ qui converge de manière \mathcal{C}^k vers $\tilde{\varphi}_\infty$ et donc en passant à la limite

$$\|\tilde{\varphi}_\infty - \varphi_\infty\|_{\mathcal{C}^k(M)} \geq \varepsilon,$$

d'où

$$\tilde{\varphi}_\infty \neq \varphi_\infty.$$

Or, comme $\varphi(t_{i_j})$ converge uniformément vers φ , nous obtenons une contradiction. Donc on a

$$\varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{C}^\infty} \varphi_\infty.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $\omega_\infty = \omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi_\infty$ est une métrique de Kähler-Einstein. Or par le lemme 5.21, on a que

$$\|\dot{\varphi}\|_{\mathcal{C}^0(M)} \leq C e^{-t},$$

ainsi

$$\dot{\varphi} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

En passant alors à la limite quand $t \rightarrow \infty$ dans l'équation (5.19) :

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \Omega = \omega_0 \in -c_1(M),$$

nous obtenons

$$0 = \log \frac{\omega_\infty^n}{\Omega} - \varphi_\infty,$$

d'où

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \varphi_\infty = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \frac{\omega_\infty^n}{\Omega},$$

or, on a $\partial\bar{\partial} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \log \Omega = \omega_0$ (par définition de Ω), d'où

$$\omega_\infty = \omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \varphi_\infty = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \omega_\infty^n,$$

de plus, grâce à l'équation (5.14) qui nous donne que

$$\log \omega_\infty^n = \log \det(g_\infty),$$

ainsi

$$\omega_\infty = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \det(g_\infty),$$

or d'après l'équation (5.3), on a que le membre de droite vaut $-Ric(\omega_\infty)$, ainsi on a que

$$\omega_\infty = -Ric(\omega_\infty),$$

i.e. ω_∞ est une métrique de Kähler-Einstein de constante d'Einstein $\nu = -1$. \square

5.3.2 Étude dans le cas où $c_1(M) = 0$

On considère une variété kählérienne (M, ω_0) telle que $c_1(M) = 0$.

En appliquant le théorème 5.16, on obtient qu'il existe une unique solution maximale à l'équation (5.8) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega = -Ric(\omega), \quad \omega|_{t=0} = \omega_0.$$

et que cette équation est définie sur l'intervalle $[0, T[$ où

$$T := \sup\{t > 0 / [\omega_0] - tc_1(M) > 0\},$$

or on sait que $c_1(M) = 0$ et $\omega > 0$ donc

$$[\omega_0] - tc_1(M) = [\omega_0] > 0 \quad \forall t > 0$$

d'où

$$T = +\infty.$$

On a donc une solution $\omega = \omega(t)$ définie pour tout $t > 0$ à l'équation (5.3). En prenant les classes de cohomologie de cette équation, on obtient

$$[\omega(t)] = [\omega_0].$$

On peut alors montrer le résultat suivant (on renvoie à l'article de [2] pour une preuve) :

Théorème 5.24 *La solution $\omega(t)$ à l'équation (5.8) converge de manière \mathcal{C}^∞ vers l'unique métrique de Kähler-Einstein $\omega_{KE} \in [\omega_0]$. \square*

5.3.3 Étude dans le cas où $c_1(M) > 0$

Comme dit précédemment, il n'y a pas toujours existence de solutions à l'équation de Kähler-Einstein sur une variété M dont la première classe de Chern $c_1(M)$ est positive, voir par exemple [27]. On introduit donc une nouvelle équation : *l'équation des solitons de Kähler-Ricci*. Ceci sera l'objet de la section suivante.

6 Étude des Solitons de Kähler-Ricci

6.1 Les solitons de Kähler-Ricci

6.1.1 L'équation des solitons de Kähler-Ricci

Soit (M, ω) une variété kählérienne compacte dont la première classe de Chern est positive i.e. $c_1(M) > 0$. Par la suite, ces variétés seront appelées *variétés de Fano compactes*. De plus, comme ils joueront maintenant un rôle important, nous notons $\eta(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes complexes sur M .

Définition 6.1 *Soit M une variété de Fano compacte. On dit que le couple (X, g) est un soliton de Kähler-Ricci si*

- $X \in \eta(M)$ i.e. X est un champ de vecteurs holomorphe,
- g est une métrique kählérienne sur M

telle que

$$\text{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \mathcal{L}_X(\omega_g), \quad (6.1)$$

où

- ω_g est la forme de Kähler associée g ,
- $\text{Ric}(\omega_g)$ est la forme de Ricci associée ω_g ,
- $\mathcal{L}_X(\omega_g)$ est la dérivée de Lie de ω_g dans la direction de X .

Remarque. Cette notion généralise la notion de métrique de Kähler-Einstein, en effet si on prend $X = 0$ alors on retrouve l'équation de Kähler-Einstein (5.18).

Remarque. La condition d'être de Fano n'est pas nécessaire car elle découle de l'équation (6.1). En effet, on a

$$\begin{aligned} \text{Ric}(\omega_g) - \omega_g &= \mathcal{L}_X \omega_g \\ &= d(i_X \omega_g) + i_X(d\omega_g) && \text{(formule de Cartan)} \\ &= d(i_X \omega_g) && \text{(car } \omega_g \text{ est fermée)} \end{aligned}$$

or $i_X \omega_g$ est une $(0, 1)$ -forme $\bar{\partial}$ -fermée (résultat démontrée dans la suite) donc d'après la théorie de *Hodge* (voir [5] pour plus de détails), il s'écrit

$$i_X \omega_g = \alpha + \bar{\partial}\phi,$$

où α est une $(0, 1)$ -forme harmonique et ϕ une fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$. ainsi nous obtenons que

$$\begin{aligned} \text{Ric}(\omega_g) - \omega_g &= \partial(i_X \omega_g) && \text{(car } i_X \omega_g \text{ est } \bar{\partial}\text{-fermée)} \\ &= \partial(\alpha + \bar{\partial}\phi) && \text{(d'après ce qui précède)} \\ &= \partial\bar{\partial}\phi && \text{(car } \alpha \text{ est harmonique)} \end{aligned}$$

donc en passant aux classes de cohomologie et en utilisant le fait que $Ric(\omega_g)$ est un représentant de $c_1(M)$ (lemme 4.17), nous obtenons que $c_1(M)$ est représentée par la métrique ω_g et donc $c_1(M)$ est obligatoirement positive. Ceci nous donne une condition nécessaire pour que (X, g) soit un soliton Kähler-Ricci :

Lemme 6.2 *Soit M une variété de Fano compacte. Si (X, g) est un soliton de Kähler-Ricci alors la forme de Kähler ω_g associée à la métrique g vérifie $\omega_g \in c_1(M)$.* \square

6.1.2 Les théorèmes d'existences et d'unicités

Les deux questions importantes lorsque nous étudions une équation sont l'existence et l'unicité de solutions. Dans le cas des solitons de Kähler-Ricci, Il existe un résultat concernant l'unicité démontrée dans [28, 29] :

Proposition 6.3 *Soit une variété compacte de Fano M . Si (X, g) et (X', g') sont des solitons de Kähler-Ricci alors il existe $\sigma \in Aut(M)^\circ$ tel que*

$$\omega_g = \sigma^* \omega_{g'}, \quad X = (\sigma^{-1})_*(X').$$

(où $Aut(M)^\circ$ est la composante connexe de l'identité du groupe $Aut(M)$ des automorphismes holomorphes de M .) \square

Par contre, nous n'avons pas de résultats généraux concernant l'existence. Par contre, nous pouvons montrer l'existence sur des variétés de Fano particulières : les variétés toriques de Fano et ce résultat sera l'objectif de la fin du mémoire.

Théorème 6.4 *Il existe un soliton de Kähler-Ricci, qui est unique modulo les automorphismes holomorphes, sur toute variété compacte torique kählérienne de Fano.* \square

Remarque. On remarque que grâce au résultat précédent sur l'unicité, il suffit de montrer qu'il existe un soliton de Kähler-Ricci sur toute variété torique.

Pour démontrer ce résultat, nous commencerons par une étude de l'équation des solitons afin de dégager des conditions nécessaires sur le couple (X, g) pour qu'il soit un soliton de Kähler-Ricci. Cela nous conduira à introduire une fonctionnelle : l'invariant de Futaki qui sera une obstruction à l'existence de solitons. Et l'étude de cet invariant dans le cas torique nous permettra grâce à la méthode de la continuité de démontrer le théorème 6.4.

6.1.3 Étude de l'équation des solitons de Kähler-Ricci

Dans cette section, nous allons étudier les conséquences de l'existence de solitons de Kähler-Ricci sur une variété kählérienne compacte de Fano.

Pour cela, on fixe une variété kählérienne de Fano compacte M et on considère un soliton de Kähler-Ricci (X, g) sur la variété M i.e. nous avons la relation suivante

$$Ric(\omega_g) - \omega_g = \mathcal{L}_X \omega_g.$$

Ainsi, en se souvenant que ω_g et $Ric(\omega_g)$ sont des $(1, 1)$ -formes réelles, nous obtenons que $\mathcal{L}_X \omega_g$ est aussi une $(1, 1)$ -forme réelle i.e. $\mathcal{L}_{\text{Im}X} \omega_g = 0$, où $\text{Im}X$ est la partie imaginaire de X . Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 6.5 *Soit une variété kählérienne de Fano compacte M et on considère un soliton de Kähler-Ricci (X, g) sur la variété M . Nous avons alors les conséquences suivantes :*

- (i) *La dérivée de Lie $\mathcal{L}_X \omega_g$ est une $(1, 1)$ -forme réelle i.e. $\mathcal{L}_{\text{Im}X} \omega_g = 0$,*
- (ii) *la partie imaginaire $\text{Im}X$ du champ de vecteurs X engendre un sous-groupe à un paramètre compact $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ composé d'isométries pour ω où $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot associé à $\text{Im}X$.*

Démonstration.

Le premier point a déjà été prouvé.

Pour le second point, comme M est une variété compacte, le flot de $\text{Im}X$ est global i.e. $\text{Im}X$ engendre bien un sous-groupe à un paramètre (voir [23] pour plus de détails sur le flot). De plus, par ce qui précède et par les propriétés du flot, on a

$$0 = \mathcal{L}_{\text{Im}X} \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\phi_t)_* \omega).$$

ainsi, comme $\phi_0 = id$ (propriété du flot), nous obtenons

$$(\phi_t)_* \omega = (\phi_0)_* \omega = \omega, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ce qui permet de conclure. □

Avant d'étudier plus en détail cette équation, faisons quelques rappels afin de fixer les notations et conventions. Si g est une métrique kählérienne alors g s'écrit localement

$$g = g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j. \tag{6.2}$$

(On rappelle aussi que nous notons $(g^{\bar{j}i})$ l'inverse de la matrice $(g_{i\bar{j}})$.)

De plus, la forme de Kähler ω_g associée à g et la forme de Ricci $Ric(\omega_g)$ associée à ω_g s'écrivent alors

$$\omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j, \tag{6.3}$$

$$Ric(\omega_g) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j, \quad R_{i\bar{j}} = -\partial_i \partial_{\bar{j}} \log \det(g_{i\bar{j}}). \tag{6.4}$$

Avec ces notations nous pouvons étudier l'équation (6.1). Pour commencer, nous pouvons supposer que $\omega_g \in c_1(M)$ (voir lemme 6.2). Alors, comme $Ric(\omega) \in c_1(M)$

(voir lemme 4.17), nous obtenons par le $\partial\bar{\partial}$ -lemme qu'il existe une fonction $h_g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que

$$\text{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}h_g.$$

De plus, h_g est entièrement déterminée modulo une constante, on normalise alors en demandant en plus que

$$\int_M e^{h_g} \omega_g^n = \int_M \omega_g^n,$$

où $\omega_g^n = \omega_g \wedge \cdots \wedge \omega_g$ la forme volume associée à ω_g . En effet, comme ω_g^n est une forme volume, nous avons que

$$\int_M e^{h_g} \omega_g^n > 0 \quad \text{et} \quad \int_M \omega_g^n > 0,$$

donc en posant

$$\theta := \log \left(\frac{\int_M \omega_g^n}{\int_M e^{h_g} \omega_g^n} \right),$$

on obtient bien que

$$\int_M e^{h_g + \theta} \omega_g^n = \int_M \omega_g^n.$$

De plus, cette normalisation détermine entièrement h_g . En effet, supposons que h_g et \tilde{h}_g vérifie cette condition, alors par hypothèse on a que

$$\tilde{h}_g = h_g + \theta,$$

en prenant l'intégrale, on obtient

$$e^\theta \int_M e^{h_g} \omega_g^n = \int_M e^{h_g + \theta} \omega_g^n = \int_M e^{\tilde{h}_g} \omega_g^n = \int_M \omega_g^n = \int_M e^{h_g} \omega_g^n,$$

donc comme $\int_M e^{h_g} \omega_g^n > 0$, nous obtenons que $e^\theta = 1$ i.e. $\theta = 0$. Ce qui permet de conclure à l'unicité. Récapitulons ce que nous venons de démontrer :

Lemme 6.6 *Soit M une variété de Fano compacte. Alors pour toute métrique kählérienne g telle que sa forme de kähler $\omega_g \in c_1(M)$, il existe une unique fonction $h_g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ vérifiant*

$$\text{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}h_g, \quad \int_M e^{h_g} \omega_g^n = \int_M \omega_g^n. \quad (6.5)$$

□

Exploitions maintenant le fait que X est une variété de Fano i.e. $c_1(M) > 0$. En effet, si on prend un champ de vecteurs X holomorphe alors on a que $i_X \omega_g$ est une $(0, 1)$ -forme $\bar{\partial}$ -fermée. Pour le voir, on écrit X s'écrit sous la forme

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial z^i},$$

où les X^i sont des fonctions holomorphes. Alors en utilisant l'équation (5.4), nous obtenons que

$$i_X \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} g_{i\bar{j}} X^i d\bar{z}^j,$$

ainsi le calcul suivant montre le résultat :

$$\begin{aligned} \bar{\partial}(i_X \omega_g) &= \bar{\partial}_k(g_{i\bar{j}} X^i) d\bar{z}^k \wedge d\bar{z}^j \\ &= (\bar{\partial}_k(g_{i\bar{j}}) X^i + g_{i\bar{j}} \bar{\partial}_k(X^i)) d\bar{z}^k \wedge d\bar{z}^j \\ &= (\bar{\partial}_k(g_{i\bar{j}}) X^i) d\bar{z}^k \wedge d\bar{z}^j \quad (\text{car les } X^i \text{ sont holomorphes}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(La dernière égalité résulte de la condition de Kähler qui nous donne que

$$\bar{\partial}_k(g_{i\bar{j}}) = \bar{\partial}_j(g_{i\bar{k}}),$$

or comme le produit extérieur est alterné i.e.

$$d\bar{z}^k \wedge d\bar{z}^j = -d\bar{z}^j \wedge d\bar{z}^k,$$

nous obtenons que pour tout i fixé :

$$\sum_{k,j} \bar{\partial}_k(g_{i\bar{j}}) d\bar{z}^k \wedge d\bar{z}^j = 0,$$

ce qui permet de conclure.)

Maintenant, *la théorie de Hodge* nous donne le résultat suivant

$$Z^{0,1}(M, \mathbb{C}) = \mathcal{H}^{0,1}(M, \mathbb{C}) \oplus \text{Im}(\bar{\partial}),$$

où $\mathcal{H}^{0,1}(M, \mathbb{C})$ est l'ensemble des $(0,1)$ -formes harmoniques sur M et $Z^{0,1}(M, \mathbb{C})$ l'ensemble des $(0,1)$ -formes $\bar{\partial}$ fermées (voir [9] par exemple pour plus de détails). De plus, comme $c_1(M) > 0$, on a d'après *l'inégalité de Bochner-Kodaira-Nakano* que

$$\mathcal{H}^{0,1}(M, \mathbb{C}) = 0, \quad (6.6)$$

i.e. il n'existe pas de $(0,1)$ -forme harmonique sur M (voir par exemple [5] pour plus de détails). Ainsi nous obtenons

$$Z^{0,1}(M, \mathbb{C}) = \text{Im}(\bar{\partial}),$$

ce qui nous donne le lemme suivant

Lemme 6.7 *Soit M une variété de Fano compacte. Pour tout champ de vecteurs holomorphe $X \in \eta(M)$, il existe une unique fonction $\theta_X \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ vérifiant*

$$i_X \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial} \theta_X, \quad \int_M e^{\theta_X} \omega_g^n = \int_M \omega_g^n. \quad (6.7)$$

Nous avons alors l'égalité

$$\mathcal{L}_X \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial} \bar{\partial} \theta_X. \quad (6.8)$$

Démonstration. L'existence vient de la discussion qui précède, tandis que l'unicité vient de la condition de normalisation (seconde équation) comme dans la démonstration du lemme 6.6. L'égalité 6.8 résulte de la formule de Cartan :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X \omega_g &= d(i_X \omega_g) + i_X(d\omega_g) && \text{(formule de Cartan)} \\
&= d(i_X \omega_g) && \text{(car } \omega_g \text{ est fermée)} \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} d(\bar{\partial}\theta_X) && \text{(grâce à l'équation (6.7))} \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\theta_X. && \text{(par le lemme 2.10)}
\end{aligned}$$

□

Nous avons alors le résultat suivant qui fait le lien entre les fonctions θ_X et h_g :

Proposition 6.8 *En gardant les notations des lemmes 6.6 et 6.7, nous obtenons que si (X, g) est un soliton de Kähler-Ricci alors $h_g = \theta_X$.*

Démonstration. Commençons par rappeler que nous avons l'égalité 6.8 :

$$\mathcal{L}_X \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\theta_X.$$

Or comme (X, g) est un soliton de Kähler-Ricci, par l'équation des solitons de Kähler-Ricci (6.1), nous avons que

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\theta_X = \mathcal{L}_X(\omega_g) = Ric(\omega_g) - \omega_g.$$

Or, par l'équation 6.5, nous avons aussi

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}h_g = Ric(\omega_g) - \omega_g.$$

Ainsi θ_X et h_g vérifient la même équation, et de plus, par hypothèse, les fonctions θ_X et h_g vérifient la même condition de normalisation, on conclut alors par unicité de θ_X (voir lemme 6.7). □

Nous avons alors le corollaire suivant :

Corollaire 6.9 *Soit (X, g) un soliton de Kähler-Ricci sur une variété kählérienne M . Alors la fonction $\theta_X \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ vérifiant*

$$i_X \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial}\theta_X, \quad \int_M e^{\theta_X} \omega_g^n = \int_M \omega_g^n, \quad (6.9)$$

est une fonction réelle i.e. $\theta_X \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.

Démonstration. Cela découle directement du fait que $\theta_X = h_g$ et que la fonction $h_g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. □

6.2 L'invariant de Futaki pour les solitons de Kähler-Ricci

6.2.1 Une première définition de l'invariant de Futaki

Dans cette section, on considère une variété M de Fano compacte et une métrique kählérienne g sur M telle que sa forme de kähler $\omega_g \in c_1(M)$. On sait qu'il existe, d'après le lemme 6.6, une unique application $h_g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\text{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}h_g, \quad \int_M e^{h_g} \omega_g^n = \int_M \omega_g^n.$$

On définit alors *l'invariant de Futaki pour les solitons de Kähler-Ricci* qui nous donnera une condition nécessaire pour que (X, g) soit un soliton de Kähler-Ricci.

Définition 6.10 *Soit une variété M de Fano compacte et soit une métrique kählérienne g sur M telle que sa forme de kähler $\omega_g \in c_1(M)$. Pour tout champ de vecteurs holomorphe $X \in \eta(M)$, on définit la fonctionnelle F_X , appelée fonctionnelle de Futaki, par*

$$F_X : \begin{cases} \eta(M) & \longrightarrow \mathbb{C} \\ v & \longmapsto \int_M v(h_g - \theta_X) e^{\theta_X} \omega_g^n \end{cases}.$$

où on note :

- h_g est l'unique fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\text{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}h_g, \quad \int_M e^{h_g} \omega_g^n = \int_M \omega_g^n,$$

- θ_X est l'unique fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ vérifiant

$$i_X \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\theta_X, \quad \int_M e^{\theta_X} \omega_g^n = \int_M \omega_g^n.$$

(voir les lemmes 6.6 et 6.7 pour plus de détails)

Au vu de la définition, il semblerait que la fonctionnelle F_X dépend de la métrique $\omega_g \in c_1(M)$ mais le lemme suivant montre qu'il n'en est rien et que la fonctionnelle de Futaki F_X est un invariant holomorphe appelé *invariant de Futaki* :

Lemme 6.11 *Soit une variété M de Fano compacte et une métrique kählérienne g sur M telle que sa forme de kähler $\omega_g \in c_1(M)$. Alors, pour tout $X \in \eta(M)$ la fonctionnelle F_X est indépendante de la métrique kählérienne g .*

Démonstration. La preuve que nous donnons est tirée de [29]. Soit g' une autre métrique kählérienne telle que $\omega_{g'} \in c_1(M)$. D'après le $\bar{\partial}$ -lemme, Il existe une fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que

$$\omega_{g'} = \omega_g + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\phi.$$

- La première étape de notre démonstration consiste à montrer que

$$\theta_X(g') = \theta_X(g) + X(\phi) + c,$$

où c est une constante. Pour cela, on remarque que d'un côté nous avons

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial}[\theta_X(g) + X(\phi)] = i_X \omega_g + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial}[X(\phi)],$$

et de l'autre côté, nous avons

$$\begin{aligned} i_X(\omega_{g'}) &= i_X(\omega_g + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\phi) \\ &= i_X \omega_g + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} i_X(\partial\bar{\partial}\phi), \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$i_X(\partial\bar{\partial}\phi) = \bar{\partial}[X(\phi)].$$

En effet, si on écrit localement $X = X^i \partial_i$, nous avons alors d'une part

$$\partial\bar{\partial}\phi = (\partial_i \bar{\partial}_j \phi) dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

d'où

$$i_X(\partial\bar{\partial}\phi) = (\partial_i \bar{\partial}_j \phi) X^i d\bar{z}^j.$$

Et d'autre part, nous avons aussi

$$X(\phi) = X^i (\partial_i \phi),$$

d'où

$$\begin{aligned} \bar{\partial}X(\phi) &= \bar{\partial}((\partial_i \phi) X^i) d\bar{z}^j \\ &= (\bar{\partial}_j \partial_i \phi) X^i + (\partial_i \phi) (\bar{\partial}_j X^i) d\bar{z}^j \\ &= (\bar{\partial}_j \partial_i \phi) X^i d\bar{z}^j && \text{(car } X \text{ est holomorphe)} \\ &= (\partial_i \bar{\partial}_j \phi) X^i d\bar{z}^j && \text{(car } \phi \text{ est à valeurs réelles)}. \end{aligned}$$

- La seconde étape consiste à montrer que la constante c est nulle i.e.

$$\theta_X(g') = \theta_X(g) + X(\phi).$$

Pour cela, nous définissons les métriques kählériennes ω_{g_s} par la formule

$$\omega_{g_s} := \omega_g + (s-1) \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\phi, \quad \forall s \in [1, 2].$$

Remarquons que nous avons

$$\frac{d}{ds} (\omega_{g_s}^n) = \Delta_s \phi \omega_{g_s}^n, \quad (6.10)$$

où Δ_s est l'opérateur laplacien associé à ω_{g_s} et

$$X(f) = \langle \bar{\partial} \theta_X(g_s), \bar{\partial} \bar{f} \rangle_{\omega_{g_s}}, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C}). \quad (6.11)$$

(on démontrera ces égalités à la fin de la preuve.)

Nous pouvons aussi remarquer que le premier point de la démonstration nous donne que pour tout $s \in [1, 2]$, il existe c_s telle que

$$\theta_X(g_s) = \theta_X(g) + X(\phi) + c_s.$$

Ainsi, nous obtenons que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \int_M \exp(\theta_X(g) + (s-1)X(\phi)) \omega_{g_s}^n \\ &= \int_M \frac{d}{ds} (\exp(\theta_X(g) + (s-1)X(\phi)) \omega_{g_s}^n) \quad (\text{intersion dérivée et intégrale}) \\ &= \int_M (\Delta_s \phi + X(\phi)) \exp(\theta_X(g) + (s-1)X(\phi)) \omega_{g_s}^n \quad (\text{grâce à la formule précédente}) \end{aligned}$$

Or, en utilisant la formule d'intégration par partie et la formule (6.11), nous obtenons que

$$\begin{aligned} & \int_M \Delta_s \phi \exp(\theta_X(g) + (s-1)X(\phi)) \omega_{g_s}^n \\ &= - \int_M \langle \bar{\partial} \phi, \bar{\partial} [\overline{\exp(\theta_X(g) + (s-1)X(\phi))}] \rangle \omega_{g_s}^n \\ &= - \int_M \langle \bar{\partial} \phi, \bar{\partial} [\overline{\theta_X(g) + (s-1)X(\phi)}] \rangle \exp(\theta_X(g) + (s-1)X(\phi)) \omega_{g_s}^n \\ &= - \int_M \langle \bar{\partial} \phi, \bar{\partial} [\overline{\theta_X(g) + (s-1)X(\phi) + c_s}] \rangle \exp(\theta_X(g) + (s-1)X(\phi)) \omega_{g_s}^n \\ &= - \int_M \langle \bar{\partial} \phi, \bar{\partial} [\overline{\theta_X(g_s)}] \rangle \exp(\theta_X(g) + (s-1)X(\phi)) \omega_{g_s}^n \\ &= - \int_M X(\phi) \exp(\theta_X(g) + (s-1)X(\phi)) \omega_{g_s}^n. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\frac{d}{ds} \int_M \exp(\theta_X(g) + (s-1)X(\phi)) \omega_{g_s}^n = 0,$$

donc nous avons

$$\int_M \exp(\theta_X(g) + (s-1)X(\varphi))\omega_{g_s}^n = \int_M \exp(\theta_X(g))\omega_{g_s}^n,$$

ce qui nous donne, grâce à l'unicité démontrée dans le lemme 6.7, que

$$\theta_X(g) + (s-1)X(\varphi) = \theta_X(g_s), \quad \forall s \in [1, 2],$$

donc en particulier, en prenant $s = 2$ que

$$\theta_X(g) + X(\varphi) = \theta_X(g'),$$

ce que nous voulions.

- La troisième étape consiste à remarquer que

$$h'_g = h_g - \log \frac{\omega_{g'}^n}{\omega_g^n} - \phi + c,$$

où c est une constante. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} h'_g &= Ric(\omega_{g'}) - \omega_{g'} \\ &= Ric(\omega_{g'}) - \omega_g - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \phi \\ &= Ric(\omega_{g'}) - Ric(\omega_g) + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} h_g - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \phi. \end{aligned}$$

En écrivant cela en coordonnées, nous obtenons que

$$\partial \bar{\partial} [h'_g - h_g + \log \frac{\omega_{g'}^n}{\omega_g^n} + \phi] = 0,$$

ce qui permet de conclure.

- La quatrième étape consiste à montrer que pour tout $(X, v) \in \eta(M)^2$, on a

$$\int_M v(h_g - \theta_X(g)) e^{\theta_X(g)} \omega_g^n = \int_M v(h_{g'} - \theta_X(g')) e^{\theta_X(g')} \omega_{g'}^n,$$

ce qui achèvera donc la démonstration du lemme. Pour cela, on rappelle que nous avons les métriques kählériennes ω_{g_s} par la formule

$$\omega_{g_s} := \omega_g + (s-1) \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \phi, \quad \forall s \in [1, 2],$$

et nous posons aussi

$$h_s = h_g - \log \frac{\omega_{g'}^n}{\omega_g^n} - (s-1)\phi, \quad \forall s \in [1, 2].$$

Commençons par remarquer que

$$Ric(\omega_{g_s}) - \omega_{g_s} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} h_s, \quad (6.12)$$

et que

$$\frac{dh_s}{ds} = -(\Delta_s \phi + \phi). \quad (6.13)$$

(Nous démontrerons ces deux égalités à la fin de la preuve.) Remarquons aussi tout de suite que nous avons

$$\frac{d\theta_X(g_s)}{ds} = \frac{d}{ds}[\theta_X(g) + (s-1)X(\phi)] = X(\phi) \quad (6.14)$$

De plus, on rappelle qu'en faisant un raisonnement similaire à celui de la section 6.1, nous obtenons qu'il existe une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ telle que pour tout $v \in \eta(M)$ fixé :

$$i_v(\omega_{g_s}) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \psi,$$

et que nous avons la formule suivante :

$$v(f) = \langle \bar{\partial} \psi, \bar{\partial} f \rangle_{\omega_{g_s}}, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C}). \quad (6.15)$$

(on démontrera cette égalité à la fin de la preuve.)

On définit alors

$$f : \begin{cases} [1, 2] & \longrightarrow \mathbb{C} \\ s & \longmapsto \int_M v(h_s - \theta_X(g_s)) e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n. \end{cases}$$

On obtient alors, en utilisant les équations (6.12), (6.14) et (6.13), que

$$\begin{aligned}
\frac{df(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} \left(\int_M v(h_s - \theta_X(g_s)) e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n \right) \\
&= \int_M \frac{d}{ds} [v(h_s - \theta_X(g_s))] e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n \\
&\quad + \int_M v(h_s - \theta_X(g_s)) \frac{d}{ds} [e^{\theta_X(g_s)}] \omega_{g_s}^n \\
&\quad + \int_M v(h_s - \theta_X(g_s)) e^{\theta_X(g_s)} \frac{d}{ds} [\omega_{g_s}^n] \\
&= \int_M v \left(\frac{d}{ds} [h_s - \theta_X(g_s)] \right) e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n \\
&\quad + \int_M v(h_s - \theta_X(g_s)) \frac{d}{ds} [\theta_X(g_s)] [e^{\theta_X(g_s)}] \omega_{g_s}^n \\
&\quad + \int_M v(h_s - \theta_X(g_s)) e^{\theta_X(g_s)} \frac{d}{ds} [\omega_{g_s}^n] \\
&= \int_M v(-\Delta_s \phi - \phi - X(\phi)) e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n \\
&\quad + \int_M X(\phi) v(h_s - \theta_X(g_s)) e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n \\
&\quad + \int_M (\Delta_s) v(h_s - \theta_X(g_s)) e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n. \\
&= \int_M v(-\Delta_s \phi - \phi - X(\phi)) e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n \\
&\quad + \int_M (\Delta_s + X(\phi)) v(h_s - \theta_X(g_s)) e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n.
\end{aligned}$$

De plus, grâce à l'équation (6.15), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{df(s)}{ds} &= - \int_M \langle \bar{\partial} \psi, \bar{\partial}(\Delta_s \phi + X(\phi)) \rangle_{\omega_{g_s}} e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n \\
&\quad - \int_M \langle \bar{\partial} \psi, \bar{\partial} \phi \rangle_{\omega_{g_s}} e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n \\
&\quad + \int_M (\Delta_s + X(\phi)) v(h_s - \theta_X(g_s)) e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n.
\end{aligned}$$

Maintenant, en faisant une intégration par partie, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
-\int_M (\Delta_s \phi) \psi e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n &= \int_M \langle \bar{\partial} \phi, \bar{\partial}(\overline{\psi e^{\theta_X(g_s)}}) \rangle \omega_{g_s}^n \\
&= \int_M \langle \bar{\partial} \phi, \bar{\partial} \psi \rangle e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n \\
&\quad + \int_M \langle \bar{\partial} \phi, \bar{\partial}(e^{\theta_X(g_s)}) \rangle \psi \omega_{g_s}^n \\
&= \int_M \langle \bar{\partial} \phi, \bar{\partial} \psi \rangle e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n \\
&\quad + \int_M X(\phi) e^{\theta_X(g_s)} \psi \omega_{g_s}^n \quad (\text{voir l'équation (6.11)}).
\end{aligned}$$

Ce que nous pouvons écrire sous la forme

$$\int_M \langle \bar{\partial} \phi, \bar{\partial} \psi \rangle e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n = - \int_M [(\Delta_s \phi) + X(\phi)] \psi e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n. \quad (6.16)$$

De même, on montre que

$$\int_M \langle \bar{\partial} \psi, \bar{\partial} \phi \rangle e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n = - \int_M [\psi \Delta \phi + v(\theta_X(g_s)) \phi] e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n \quad (6.17)$$

Ainsi, en utilisant les équations (6.16) et (6.17), nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{df(s)}{ds} &= \int_M (\Delta_s + X(\phi)) (\Delta_s \psi + v(\theta_X(g_s))) e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n \\
&\quad + \int_M \psi (\Delta_s \phi + X(\phi)) e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n \\
&\quad + \int_M (\Delta_s + X(\phi)) v(h_s - \theta_X(g_s)) e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n.
\end{aligned}$$

En simplifiant cette expression, nous obtenons que

$$\frac{df(s)}{ds} = \int_M (\Delta_s + X(\phi)) (\Delta_s \psi + \psi + v(h_s)) e^{\theta_X(g_s)} \omega_{g_s}^n.$$

On pose maintenant

$$p = \Delta_s \psi + \psi + v(h_s)$$

et nous avons alors que

$$\bar{\partial} p = 0. \quad (6.18)$$

(Cette égalité sera démontré à la fin de la preuve.)

Donc en faisant une intégration par partie, nous obtenons que

$$\frac{df(s)}{ds} = \int_M \langle \bar{\partial}p, \bar{\partial}\phi \rangle_{\omega_{g_s}} e^{\theta x(g_s)} \omega_{g_s}^n = 0.$$

Ainsi nous obtenons que $f(1) = f(2)$, ce qui permet de conclure.

Il nous reste à montrer les 5 égalités énoncées au cours de la démonstration.

• Commençons par montrer l'équation (6.10) :

$$\frac{d}{ds} (\omega_{g_s}^n) = \Delta_s \phi \omega_{g_s}^n.$$

En effet, on a

$$\frac{d}{ds} (\omega_{g_s}^n) = \frac{d}{ds} (\det[\omega_{i\bar{j}} + (s-1)\phi_{i\bar{j}}] dV)$$

(où on a posé $\phi_{i\bar{j}} := \partial_i \bar{\partial}_j \phi$ et dV la forme volume standard)

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{ds} (\det[\omega_{i\bar{j}} + (s-1)\phi_{i\bar{j}}]) dV \\ &= \omega_{g_s}^{\bar{i}j} \frac{d}{ds} (\omega_{i\bar{j}} + (s-1)\phi_{i\bar{j}}) \det(g_s) dV \\ &= \omega_{g_s}^{\bar{i}j} \phi_{i\bar{j}} \det(g_s) dV \\ &= \Delta_s \phi \omega_{g_s}^n \end{aligned}$$

(où Δ_s est l'opérateur laplacien associé à ω_{g_s}).

• Passons à la démonstration des équations (6.12) et (6.13) :

$$Ric(\omega_{g_s}) - \omega_{g_s} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} h_s, \quad \frac{dh_s}{ds} = -(\Delta_s \phi + \phi).$$

On rappelle que

$$\begin{aligned} h_s &= h_s = h_g - \log \frac{\omega_{g_s}^n}{\omega_g^n} - (s-1)\phi \\ &= h_g - \log \frac{\det g_s}{\det g} - (s-1)\phi. \end{aligned}$$

L'équation (6.12) découle alors directement de l'égalité précédente en utilisant les expressions des différents termes de la somme. Pour l'autre égalité, le calcul

suisant permet de conclure :

$$\begin{aligned}
\frac{dh_s}{ds} &= \frac{d}{ds} \left(\log \frac{\det g_s}{\det g} \right) - \phi \\
&= -g^{i\bar{j}} \frac{\partial}{\partial s} \left((g_s)_{i\bar{j}} \right) - \phi \\
&= -g^{i\bar{j}} \frac{\partial}{\partial s} \left(g_{i\bar{j}} + (s-1) \partial_i \bar{\partial}_j \phi \right) - \phi \\
&= -g^{i\bar{j}} \left(\partial_i \bar{\partial}_j \phi \right) - \phi \\
&= \Delta_s \phi - \phi.
\end{aligned}$$

• Ensuite, il y a l'équation (6.15) :

$$v(f) = \langle \bar{\partial} \psi, \bar{\partial} \bar{f} \rangle_{\omega_{g_s}}.$$

Comme cette égalité est ponctuelle, pour la montrer nous pouvons nous placer dans un système normal pour ω_{g_s} en un point quelconque et faire le calcul en ce point. Ainsi comme v est holomorphe, il s'écrit localement sous la forme $v = v^i \partial_i$. Ainsi, nous obtenons que

$$v(f) = v^i \partial_i f = v^i \overline{\partial_i \bar{f}},$$

or, dans un système normal pour ω_{g_s} , l'égalité $i_v(\omega_{g_s}) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial} \psi$ nous donne que $v^j = \bar{\partial}_j \psi$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, ainsi nous obtenons

$$v(f) = \bar{\partial}_i \psi \overline{\partial_i \bar{f}}.$$

On conclut en se souvenant que nous sommes dans un système normal pour ω_{g_s} et donc que dans ce système le membre de droite vaut bien $\langle \bar{\partial} \psi, \bar{\partial} \bar{f} \rangle_{\omega_{g_s}}$.

• De même, l'équation (6.11) est identique à la précédente (en remplaçant v par X).

• Il reste à démontrer l'égalité (6.18) :

$$\bar{\partial} p = 0.$$

Remarquons que l'équation est ponctuelle, on se place dans un système de coordonnées normal centré (en un point x de M quelconque) pour la métrique g_s i.e. au point x , nous avons $g_{i\bar{j}} = \delta_{ij}$. Ainsi, l'égalité $i_v(\omega_s) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial} \psi$ devient $v^i = \bar{\partial}_i \psi$ (où les v_i sont les coordonnées locales du champ de vecteurs v i.e. on a $v = v^i \partial_i$). Au point x , nous avons donc

$$\begin{aligned}
p &:= \Delta_s \psi + \psi + v(h_s) \\
&= \partial_i \bar{\partial}_i \psi + \psi + v_i \partial_i h_s \\
&= \partial_i \bar{\partial}_i \psi + \psi + \bar{\partial}_i \psi \partial_i h_s
\end{aligned}$$

On peut encore l'écrire pour plus de lisibilité :

$$p = \psi_{\bar{i}i} + \psi + \psi_{\bar{i}}(h_s)_i.$$

On a donc

$$\begin{aligned} p_{\bar{j}} &= \psi_{\bar{i}\bar{j}} + \psi_{\bar{j}} + \psi_{\bar{i}\bar{j}}(h_s)_i + \psi_{\bar{i}}(h_s)_{i\bar{j}} \\ &= \psi_{\bar{i}\bar{j}} + R_{m\bar{i}}\psi_{\bar{m}} + \psi_{\bar{j}} + \psi_{\bar{i}\bar{j}}(h_s)_i + \psi_{\bar{i}}(h_s)_{i\bar{j}} && \text{(par les formules de Ricci)} \\ &= R_{m\bar{i}}\psi_{\bar{m}} + \psi_{\bar{j}} + \psi_{\bar{i}}(h_s)_{i\bar{j}} && \text{(puisque } \psi_{\bar{i}} = v^i \text{ est holomorphe)} \\ &= R_{m\bar{i}}\psi_{\bar{m}} + \psi_{\bar{j}} + \psi_{\bar{i}}(R_{i\bar{j}} - g_{i\bar{j}}) && \text{(par définition de } h_s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

La première propriété importante de cet invariant est qu'il nous donne une obstruction à l'existence de solitons de Kähler-Ricci. Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

Lemme 6.12 *Soit M une variété de Fano compacte et soit (X, g) un soliton de Kähler-Ricci sur M . Alors l'invariant de Futaki F_X pour le champs de vecteur X est nul i.e. $F_X \equiv 0$.*

Démonstration. Nous avons vu dans le lemme 6.11 que l'invariant de Futaki ne dépend pas de la métrique choisie, nous prenons donc la métrique g associée au soliton de Kähler-Ricci (X, g) . Or, nous avons vu dans le lemme 6.2 que

$$h_g = \theta_X(g),$$

d'où

$$v(h_g - \theta_X(g)) = 0, \quad \forall v \in \eta(M),$$

or par définition, la fonctionnelle F_X a pour expression :

$$F_X(v) = \int_M v(h - \theta_X) e^{\theta_X} \omega_g^n,$$

ce qui permet de conclure directement.

□

Maintenant, l'objectif va être de démontrer qu'il existe un soliton de Kähler-Ricci sur toute variété de Fano torique compacte. Plus précisément, nous voulons démontrer :

Théorème 6.13 *Il existe un soliton de Kähler-Ricci sur toute variété torique kählérienne de Fano.* □

Cela va passer par une étude de l'invariant de Futaki dans le cas torique, ce que nous ferons dans la section 6.3, où on utilisera l'existence d'une métrique et de champs de vecteurs holomorphes particuliers dont on connaît les expressions. Nous pourrons ainsi démontrer dans la section 6.4.1 l'existence de solitons de Kähler-Ricci sur les variétés toriques de Fano grâce à la méthode de la continuité.

6.2.2 Une autre formulation de l'invariant de Futaki

On garde les notations introduites dans les sections précédentes. Rappelons que si on a métrique kählérienne g telle que sa forme de kähler $\omega_g \in c_1(M)$, il existe une unique fonction $h_g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\text{Ric}(\omega_g) - \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} h_g, \quad \int_M e^{h_g} \omega_g^n = \int_M \omega_g^n.$$

De plus si X est un champ de vecteurs holomorphe alors on a qu'il existe une unique fonction $\theta_X \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ vérifiant

$$i_X \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\theta}_X, \quad \int_M e^{\theta_X} \omega_g^n = \int_M \omega_g^n.$$

On a alors le lemme suivant :

Lemme 6.14 *Nous avons la relation suivante :*

$$\bar{\partial}[\Delta \theta_X + X(h_g) + \theta_X] = 0,$$

où Δ est le laplacien associé à ω_g .

Démonstration. Il suffit de calculer les trois termes séparément et de voir qu'ils se simplifient mutuellement entre eux. \square

Comme M est compacte, le principe du maximum nous dit que

$$-(\Delta \theta_X + X(h_g)) = \theta_X + c,$$

où c est une constante. On peut donc renormaliser la fonction θ_X en une fonction $\tilde{\theta}_X$ qui vérifie donc

$$i_X \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \tilde{\theta}_X, \quad \Delta \tilde{\theta}_X + X(h_g) = -\tilde{\theta}_X. \quad (6.19)$$

Remarquons que cette renormalisation est équivalente à demander que $\tilde{\theta}_X$ vérifie

$$\int_M \tilde{\theta}_X e^{h_g} \omega_g^n = 0.$$

En effet, cela résulte de la formule d'intégration par parties qui nous donne que

$$\begin{aligned} \int_M \Delta \tilde{\theta}_X e^{h_g} \omega_g^n &= - \int_M \langle \bar{\partial} \tilde{\theta}_X, \bar{\partial} e^{h_g} \rangle_{\omega_g^n} \omega_g^n \\ &= - \int_M \langle \bar{\partial} \tilde{\theta}_X, \bar{\partial} h_g \rangle_{\omega_g^n} e^{h_g} \omega_g^n \\ &= - \int_M X(h_g) e^{h_g} \omega_g^n \end{aligned}$$

(La dernière égalité résulte du fait que $\bar{\partial} \theta_X = i_X \omega_g$.) Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 6.15 Soit (M, ω_g) une variété de Fano compacte. Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, on peut définir une métrique kählérienne g' telle que sa forme de Kähler ω_{ϕ} soit égale à

$$\omega_{\phi} := \omega_g + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \phi.$$

De plus, la forme $\omega_{g'}$ appartient à $c_1(M)$ et donc il existe $\tilde{\theta}(g') \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ telle que

$$i_X \omega_{g'} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial} \tilde{\theta}_X(g'), \quad \Delta_{g'} \tilde{\theta}_X + X(h_{g'}) = \tilde{\theta}_X(g'),$$

où $h_{g'}$ est définie par le lemme 6.6 pour la métrique g' . Nous avons alors la relation suivante :

$$\tilde{\theta}_X(g') = \tilde{\theta}_X(g) + X(\phi).$$

Démonstration. Commençons par introduire quelques notations. Pour tout $s \in [1, 2]$, on pose

$$\omega_{g_s} = \omega_g + (s-1) \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \phi, \tag{6.20}$$

et

$$h_s = h_g - \log \frac{\omega_{g_s}^n}{\omega_g^n} - (s-1)\phi, \tag{6.21}$$

et $\tilde{\theta}_X(g_s) \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ telle que

$$i_X \omega_{g_s} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial} \tilde{\theta}_X(g_s), \quad \int_M \tilde{\theta}_X(g_s) e^{h_{g_s}} \omega_{g_s} = 0. \tag{6.22}$$

Remarquons que

$$\bar{\partial} [\tilde{\theta}_X(g_s) - \tilde{\theta}_X - (s-1)X(\phi)] = 0$$

(voir la démonstration du lemme 6.11 pour une preuve de ce fait), ainsi par le principe du maximum, nous obtenons qu'il existe des constantes c_s telles que

$$\tilde{\theta}_X(g_s) = \tilde{\theta}_X + (s-1)X(\phi) + c_s. \tag{6.23}$$

Nous posons maintenant

$$G(s) = \int_M [\tilde{\theta}_X + (s-1)X(\phi) + c_s] e^{h_s} \omega_{g_s}^n.$$

Par l'équation 6.21, on obtient que

$$G(s) = \int_M [\tilde{\theta}_X + (s-1)X(\phi) + c_s] e^{-(s+1)\phi + h_g} \omega_g^n.$$

Ainsi nous obtenons grâce aux équations (6.20) et (6.23) que

$$\begin{aligned} \frac{dG}{ds}(s) &= \int_M \left(X(\phi) + \frac{dc_s}{ds} - (\tilde{\theta}_X + (s-1)X(\phi) + c_s)\phi \right) e^{-(s+1)\phi + h_g \omega_g^n} \\ &= \int_M \left(X(\phi) + \frac{dc_s}{ds} - \tilde{\theta}_X(g_s)\phi \right) e^{h_s \omega_{g_s}^n}. \end{aligned}$$

Or grâce à la formulation d'intégration par parties, nous avons que

$$\int_M (X(\phi) - \tilde{\theta}_X(g_s)\phi) e^{h_s \omega_{g_s}^n} = 0$$

(voir la démonstration du lemme 6.11 pour une preuve de ce fait), ainsi nous obtenons que

$$\frac{dG}{ds}(s) = \frac{dc_s}{ds} \int_M e^{h_s \omega_{g_s}^n}.$$

Maintenant, en remarquant que $h_{g_s} = h_s$ (voir la démonstration du lemme 6.11 pour une preuve de ce fait), nous obtenons par la condition de normalisation de l'équation (6.22) que

$$G(s) = \int_M [\tilde{\theta} + (s-1)X(\phi) + c_s] e^{h_{g_s} \omega_{g_s}^n} = 0$$

ainsi, comme $\int_M e^{h_s \omega_{g_s}^n} > 0$, nous avons

$$\frac{dc_s}{ds} = 0,$$

d'où

$$c_s = c_1 = 0, \forall s \in [1, 2].$$

Nous avons donc bien

$$\tilde{\theta}_X(g') = \tilde{\theta}_X(g_2) = \tilde{\theta}_X + X(\varphi).$$

□

On considère maintenant la fonctionnelle suivante :

$$f : \begin{cases} \eta(M) & \longrightarrow \mathbb{C} \\ Z & \longmapsto \int_M e^{\tilde{\theta}_Z} \omega_g^n. \end{cases}$$

Il semblerait que cette fonctionnelle dépende de la métrique kählérienne g mais il n'en est rien comme le montre le lemme suivant :

Lemme 6.16 *Soit une variété M de Fano compacte et une métrique kählérienne g sur M telle que sa forme $\omega_g \in c_1(M)$. Alors la fonctionnelle f est indépendante de la métrique kählérienne g .*

Démonstration. Prenons une autre métrique g' telle que sa forme $\omega_{g'}$ soit aussi un représentant de $c_1(M)$ ainsi nous avons par le $\bar{\partial}\partial$ -lemme qu'il existe $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que

$$\omega_{g'} := \omega_\phi = \omega_g + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\phi.$$

De plus, nous noterons

$$\omega_{t\phi} = \omega_g + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}(t\phi).$$

Remarquons tout de suite que $\omega_{t\phi}$ est aussi un représentant de $c_1(M)$. Passons maintenant à la démonstration.

- La première étape consiste à montrer que

$$\int_M e^{\tilde{\theta}_Z + Z(\phi)} \omega_\phi^n = \int_M e^{\tilde{\theta}_Z} \omega_g^n + \int_0^1 \int_M (\Delta_t \phi + Z(\phi)) e^{\tilde{\theta}_Z + tZ(\phi)} \omega_{t\phi}^n \wedge dt.$$

Pour cela, on remarque que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[e^{\theta_Z + tZ(\phi)} \omega_{t\phi}^n] &= \frac{d}{dt}[e^{\theta_Z + tZ(\phi)} \det(g_{t\phi})] dV \\ &= Z(\phi) e^{\tilde{\theta}_Z + tZ(\phi)} \det(g_{t\phi}) dV + \frac{d}{dt}[\det(g_{t\phi})] e^{\theta_Z + tZ(\phi)} dV \\ &= Z(\phi) e^{\tilde{\theta}_Z + tZ(\phi)} \det(g_{t\phi}) dV + (g_{t\phi})^{i\bar{j}} \frac{d}{dt}[(g_{t\phi})_{i\bar{j}}] \det(g_{t\phi}) e^{\theta_Z + tZ(\phi)} dV \\ &= Z(\phi) e^{\tilde{\theta}_Z + tZ(\phi)} \det(g_{t\phi}) dV + (g_{t\phi})^{i\bar{j}} \frac{d}{dt}[g_{i\bar{j}} + t\phi_{i\bar{j}}] \det(g_{t\phi}) e^{\theta_Z + tZ(\phi)} dV \\ &= Z(\phi) e^{\tilde{\theta}_Z + tZ(\phi)} \det(g_{t\phi}) dV + (g_{t\phi})^{i\bar{j}} \phi_{i\bar{j}} \det(g_{t\phi}) e^{\theta_Z + tZ(\phi)} dV \\ &= Z(\phi) e^{\tilde{\theta}_Z + tZ(\phi)} \det(g_{t\phi}) dV + \Delta_t \phi \det(g_{t\phi}) e^{\theta_Z + tZ(\phi)} dV \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{dt}[e^{\theta_Z + tZ(\phi)} \omega_{t\phi}^n] = (Z(\phi) + \Delta_t \phi) e^{\theta_Z + tZ(\phi)} \omega_{t\phi}^n.$$

Ainsi, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_M (\Delta_t \phi + Z(\phi)) e^{\tilde{\theta}_Z + tZ(\phi)} \omega_{t\phi}^n \wedge dt &= \int_0^1 \int_M \left(\frac{d}{dt}[e^{\theta_Z + tZ(\phi)} \omega_{t\phi}^n] \right) \wedge dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[\int_M (e^{\theta_Z + tZ(\phi)} \omega_{t\phi}^n) \right] \wedge dt \\ &= \int_M e^{\theta_Z + Z(\phi)} \omega_\phi^n - \int_M e^{\theta_Z} \omega_g^n. \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure.

- La seconde étape consiste à montrer que

$$\int_M e^{\tilde{\theta}_Z + Z(\phi)} \omega_\phi^n = \int_M e^{\tilde{\theta}_Z} \omega_g^n.$$

Cela est une conséquence de la formule d'intégration par partie qui nous donne que

$$\int_M (\Delta_t \phi + Z(\phi)) e^{\tilde{\theta}_Z + tZ(\phi)} \omega_{t\phi}^n = 0.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_M \Delta_t \phi e^{\tilde{\theta}_Z + tZ(\phi)} \omega_{t\phi}^n &= - \int_M \langle \bar{\partial} e^{\tilde{\theta}_Z + tZ(\phi)}, \bar{\partial} \phi \rangle_{\omega_{t\phi}} \omega_{t\phi}^n \\ &= - \int_M \langle \bar{\partial} [\tilde{\theta}_Z + tZ(\phi)], \bar{\partial} \phi \rangle_{\omega_{t\phi}} e^{\tilde{\theta}_Z + Z(\phi)} \omega_{t\phi}^n. \end{aligned}$$

or d'après le lemme 6.19, on a que $i_Z \omega_{t\phi} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial}(\tilde{\theta}_Z + tZ(\phi))$ donc

$$\int_M \Delta_t \phi e^{\tilde{\theta}_Z + tZ(\phi)} \omega_{t\phi}^n = \int_M -Z(\phi) e^{\tilde{\theta}_Z + tZ(\phi)} \omega_{t\phi}^n.$$

Ce qui nous donne alors le résultat souhaité.

- La dernière étape consiste à conclure en utilisant le lemme 6.19 qui nous dit que

$$\tilde{\theta}_Z + Z(\phi) = \tilde{\theta}_Z(g').$$

□

Maintenant, on veut étudier la dérivée de f au point X par rapport à $v \in \eta(M)$. Le lemme suivant nous donne une expression de cette dérivée et montre en particulier qu'elle est un multiple de l'invariant de Futaki introduit précédemment :

Lemme 6.17 *Soit M une variété de Fano compacte. La fonctionnelle f définie par*

$$f : \begin{cases} \eta(M) & \longrightarrow \mathbb{C} \\ Z & \longmapsto \int_M e^{\tilde{\theta}_Z} \omega_g^n \end{cases}.$$

La dérivée au point X par rapport à $v \in \eta(M)$ de la fonction f a pour expression

$$F'_X(v) = \int_M \tilde{\theta}_v e^{\tilde{\theta}_X} \omega_g^n.$$

De plus nous avons qu'il existe une constante C non nulle telle que

$$F'_X(v) = C \cdot F_X(v),$$

où F_X est l'invariant de Futaki pour le champ de vecteurs X . En particulier, nous avons donc

$$F'_X(v) = 0 \iff F_X(v) = 0.$$

Démonstration. On sait que

$$F'_X(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(X + tv) - f(X)}{t}.$$

En remplaçant f par son expression, nous obtenons que

$$F'_X(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_M \frac{e^{\tilde{\theta}_{X+tv}} - e^{\tilde{\theta}_X}}{t} \omega_g^n.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \tilde{\theta}_{X+tv} &= \omega_g(X + tv, \cdot) \\ &= \omega_g(X, \cdot) + t \omega_g(v, \cdot) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \tilde{\theta}_X + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial(t \cdot \tilde{\theta}_v) \end{aligned}$$

d'où

$$\tilde{\theta}_{X+tv} = \tilde{\theta}_X + t \cdot \tilde{\theta}_v + c,$$

où c est une constante. De plus, par la condition de normalisation des différentes fonctions, nous obtenons

$$\int_M \tilde{\theta}_{X+tv} e^{h_g} \omega_g^n = 0, \quad \int_M \tilde{\theta}_X + t \cdot \tilde{\theta}_v e^{h_g} \omega_g^n = 0,$$

d'où

$$c \int_M e^{h_g} \omega_g^n = 0$$

ce qui nous donne $c = 0$ puisque $\int_M e^{h_g} \omega_g^n > 0$. Ainsi notre dérivée a pour expression

$$\begin{aligned} F'_X(v) &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M \frac{e^{\tilde{\theta}_X + t \cdot \tilde{\theta}_v} - e^{\tilde{\theta}_X}}{t} \omega_g^n \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M e^{\tilde{\theta}_X} \frac{(1 - e^{-t \cdot \tilde{\theta}_v})}{t} \omega_g^n \\ &= \int_M \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-t \cdot \tilde{\theta}_v})}{t} e^{\tilde{\theta}_X} \omega_g^n \\ &= \int_M \frac{1 - 1 - t \cdot \tilde{\theta}_v + o(t)}{t} e^{\tilde{\theta}_X} \omega_g^n \\ &= \int_M \tilde{\theta}_v e^{\tilde{\theta}_X} \omega_g^n. \end{aligned}$$

Cela démontre la première partie du lemme. Pour la seconde, nous allons exploiter le fait que

$$\tilde{\theta}_v = -\Delta \tilde{\theta}_v - v(h_g).$$

Ainsi, nous avons

$$F'_X(v) = - \int_M \Delta \tilde{\theta}_X + X(h_g) e^{\tilde{\theta}_X} \omega_g^n,$$

or grâce à la formulation d'intégration par parties, nous avons que

$$F'_X(v) = - \int_M v(\tilde{\theta}_X - h_g) e^{\tilde{\theta}_X} \omega_g^n.$$

Or on sait que

$$\tilde{\theta}_X = \theta_X + c,$$

d'où

$$F'_X(v) = -e^c \int_M v(\theta_X - h_g) e^{\theta_X} \omega_g^n = -e^c F_X(v).$$

De plus, comme $e^c \neq 0$, nous avons donc bien

$$F'_X(v) = 0 \iff F_X(v) = 0.$$

□

Rappelons que si (X, g) est un soliton de Kähler-Ricci alors $F_X \equiv 0$ (voir lemme 6.12. Nous pouvons reformuler ce fait sous la forme suivant :

Lemme 6.18 *Soit M une variété compacte de Fano. Si (X, g) est un soliton de Kähler-Ricci alors X est un point critique de l'application :*

$$f : \begin{cases} \eta(M) & \longrightarrow \mathbb{C} \\ Z & \longmapsto \int_M e^{\tilde{\theta}_Z} \omega_g^n \end{cases}.$$

□

C'est cette vision de l'invariant de Futaki que nous allons exploiter dans la section suivante afin de trouver un champ de vecteurs l'annulant.

6.2.3 Étude de l'invariant de Futaki

Rappelons pour commencer que le groupe des automorphismes d'une variété complexe compacte M est un groupe de Lie de dimension finie (voir [19] pour plus de détails) dont l'algèbre de Lie est $\eta(M)$.

Maintenant, si K un sous-groupe compact maximal de la composante connexe de l'identité $Aut^\circ(M)$ du groupe des automorphismes holomorphes $Aut(M)$ de la variété M , alors la décomposition de Chevalley nous donne que

$$Aut^\circ(M) = Aut_r(M) \rtimes R_u,$$

où $Aut_r(M)$ est un sous-groupe réductif de $Aut^\circ(M)$ et la complexification de K et R_u le radical unipotent de $Aut^\circ(M)$. De plus, si on note $\eta(M)$, $\eta_r(M)$, $\eta_u(M)$ et $\kappa(M)$ les algèbres de Lie de $Aut(M)$, $Aut_r(M)$, R_u et K respectivement, alors on a

$$\eta(M) = \eta_r(M) + \eta_u(M).$$

On pourra consulter [12] pour plus de détails.

Lemme 6.19 *En gardant les notations qui précèdent, il existe un unique champ de vecteur holomorphe $X \in \eta_r(M)$ tel que $\text{Im}(X) \in \kappa(M)$ et vérifiant*

$$F_X(v) = 0, \quad \forall v \in \eta_r(M).$$

Démonstration. En gardant les notations introduites dans le lemme 6.18, ce problème est équivalent à chercher un point critique à la fonction f . On rappelle aussi que $F'_X(v)$ est la dérivée de f en X dans la direction v .

Puisque F'_X est indépendante de la métrique kählérienne g , nous pouvons choisir une métrique kählérienne g qui est K -invariante (une telle métrique existe toujours, voir [12]). De plus, comme F_X est linéaire sur $\eta_r(M)$ et que $\text{Aut}_r(M)$ est le complexifié de K , on peut se restreindre à calculer $F_X(v)$ pour $v \in \eta_r(M)$ tel que $\text{Im}(v) \in \kappa(M)$.

Ainsi, on sait que pour tout $Z \in \eta_r(M)$ tel que $\text{Im}(Z) \in \kappa(M)$ il existe une fonction $\widetilde{\theta}_Z \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ telle que

$$i_Z \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \widetilde{\theta}_Z.$$

En utilisant la formule de Cartan et le fait que $i_X \omega_g$ est une $(0, 1)$ -forme $\bar{\partial}$ -fermée, on a vu que

$$\mathcal{L}_Z \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \widetilde{\theta}_Z.$$

De plus, on remarque que $i_{\bar{Z}} \omega_g = \overline{i_Z \omega_g}$. En effet, si on écrit que localement $Z = Z^i \partial_i$ alors on a d'une part que

$$i_{\bar{Z}} \omega_g = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} g_{i\bar{j}} \bar{Z}^{\bar{j}} dz^i.$$

et d'autre part que

$$\begin{aligned} \overline{i_Z \omega_g} &= \overline{\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} g_{i\bar{j}} Z^i d\bar{z}^{\bar{j}}} \\ &= -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} g_{j\bar{i}} \bar{Z}^{\bar{i}} dz^j. \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons grâce à la formule de Cartan que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{Z}} \omega_g &= d \circ i_{\bar{Z}} \omega_g \\ &= d \circ (\overline{i_Z \omega_g}) \\ &= \overline{d \circ i_Z \omega_g} \\ &= -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \overline{\partial \bar{\partial} \widetilde{\theta}_Z} \\ &= -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \widetilde{\theta}_Z \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \widetilde{\theta}_Z. \end{aligned}$$

En combinant ces deux résultats, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} [\tilde{\theta}_Z - \overline{\tilde{\theta}_Z}] &= \mathcal{L}_{Z-\bar{Z}} \omega_g \\
&= \mathcal{L}_{2\sqrt{-1}\text{Im}(Z)} \omega_g \\
&= 2\sqrt{-1} \mathcal{L}_{\text{Im}(Z)} \omega_g \\
&= 0 \quad (\text{car } g \text{ est } K\text{-invariante et } \text{Im}(Z) \in \kappa(M)).
\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons que

$$\tilde{\theta}_Z = \overline{\tilde{\theta}_Z} + c,$$

où c est une constante. Or, nous avons que

$$\int_M \tilde{\theta}_X e^{h_g} \omega_g^n = 0,$$

et comme h_g est une fonction réelle, en prenant le conjugué de cette intégrale, nous obtenons aussi

$$\int_M \overline{\tilde{\theta}_X} e^{h_g} \omega_g^n = 0.$$

Ainsi $c = 0$ et donc $\tilde{\theta}_Z$ est une fonction à valeurs réelles. De plus, en se souvenant que $\tilde{\theta}_{(1-t)X+tY} = (1-t)\tilde{\theta}_X + t\tilde{\theta}_Y$ (voir par exemple la démonstration du lemme 6.17) et que l'exponentielle est une fonction convexe, on obtient que f est une fonction convexe sur $\eta_r(M)$ vu comme \mathbb{R} -espace vectoriel. Pour conclure, il suffit donc de montrer que f est propre i.e. $f(Z)$ diverge quand Z tend vers l'infini.

Soit $(Z_i)_{i=1, \dots, m}$ une base de $\eta_r(M)$ (en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel), or comme $\text{Aut}_r(M)$ est le complexifié de K , on peut supposer que pour tout i , on a $\text{Im}(Z_i) \in \kappa(M)$. De plus, grâce au procédé de Gram-Schmith pour le produit scalaire induit par la métrique g , on peut considérer que (Z_i) est une base orthonormée. De plus, par le même raisonnement qu'au début de la démonstration, on voit que les fonctions θ_{Z_i} associées aux champs de vecteurs Z_i par l'équation (6.19) sont à valeurs réelles.

Prenons maintenant une suite $(Z_l)_{l \in \mathbb{N}}$ de champs de vecteurs holomorphes dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $\eta_r(M)$ telle que $\int_M |Z_l|_{\omega_g} \omega_g^n \rightarrow +\infty$. Il faut donc montrer que $f(Z_l) \rightarrow +\infty$. Il existe donc m suites réelles (t_l^i) telle que $Z_l = \sum_i t_l^i Z_i$, et comme nous avons pris une base orthonormée, nous avons que $|Z_l|_{\omega_g}^2 = \sum_i |t_l^i|^2$.

Comme $|Z_l|_{\omega_g} \rightarrow +\infty$, quitte à extraire, cela signifie qu'il existe au moins une suite $(t_l^k)_{l \in \mathbb{N}}$ telle que $|t_l^k| \rightarrow +\infty$. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $k = 1$. Comme cette suite diverge, on peut donc extraire des sous-suites $t_{l_k}^i$ telles que

$$|t_{l_k}^1| \geq |t_{l_k}^i|, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

De plus, la suite $\left(\frac{|t_{l_k}^i|}{|t_{l_k}^1|} \right)$ est alors bornée, quitte à extraire à nouveau, on peut supposer que les suites $\left(\frac{|t_{l_k}^i|}{|t_{l_k}^1|} \right)$ sont convergentes pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Terminons

en remarquant que l'on peut supposer aussi que $t_{l_k}^i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. En effet, il existe un nombre infini de termes positifs ou de termes négatifs dans cette suite, quitte à remplacer Z_i par $-Z_i$ et à extraire à nouveau, on peut donc bien faire cette hypothèse.

Grâce à ces hypothèses, on a que

$$Z_1 + \sum_{l=2}^m \left(\frac{|t_{l_k}^i|}{|t_{l_k}^1|} \right) Z_i \rightarrow Z_0, \quad l \rightarrow +\infty,$$

où Z_0 appartient à $\eta_r(M)$ (vu \mathbb{R} -espace vectoriel). On notera $\tilde{\theta}_{Z_0}$ la fonction associée au champ de vecteur Z_0 par l'équation (6.19), on remarque tout de suite que cette fonction est non identiquement nulle comme Z_0 n'est pas identiquement nul. De plus, par le même raisonnement qu'au début de la démonstration, on voit que $\tilde{\theta}_{Z_0}$ est à valeurs réelles. Maintenant, comme nous avons que $\int_M \tilde{\theta}_{Z_0} e^{h_g} \omega_g^n = 0$, que $e^{h_g} > 0$ (car h_g est à valeurs réelles) et que $\tilde{\theta}_{Z_0} \not\equiv 0$, nous obtenons qu'il existe un ouvert $U \subset M$ telle $\tilde{\theta}_{Z_0} > 0$ sur U .

En remarquant que

$$\tilde{\theta}_{Z_1 + \sum_{i=1}^m (t_{l_k}^i)/(t_{l_k}^1) Z_i} = \tilde{\theta}_{Z_1} + \sum_{i=1}^m (t_{l_k}^i)/(t_{l_k}^1) \tilde{\theta}_{Z_i}$$

(voir la démonstration du lemme 6.17 pour une démonstration de cette propriété), nous obtenons par passage à la limite :

$$\tilde{\theta}_{Z_1} + \sum_{i=1}^m \frac{t_{l_k}^i}{t_{l_k}^1} \tilde{\theta}_{Z_i} \rightarrow \tilde{\theta}_{Z_0}, \quad l_k \rightarrow +\infty.$$

On en déduit donc qu'il existe $\epsilon > 0$ assez petit tel qu'à partir d'un certain rang, nous obtenons que

$$\tilde{\theta}_{Z_1} + \sum_{i=1}^m \frac{t_{l_k}^i}{t_{l_k}^1} \tilde{\theta}_{Z_i} > \epsilon > 0.$$

Ce qui nous donne donc

$$\begin{aligned} f(Z_{l_k}) &= \int_M \exp \left(\sum_{i=1}^m t_{l_k}^i \tilde{\theta}_{Z_i} \right) \omega_g^n \\ &= \int_M \exp \left(t_{l_k}^1 \left(\tilde{\theta}_{Z_1} + \sum_{i=2}^m \frac{t_{l_k}^i}{t_{l_k}^1} \tilde{\theta}_{Z_i} \right) \right) \omega_g^n \\ &\geq \int_U e^{\epsilon t_{l_k}^1} \omega_g^n \rightarrow +\infty, \quad l_k \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Cela permet de conclure. En effet, la seule valeur d'adhérence possible pour la suite $(|f(Z_l)|)_{l \in \mathbb{N}}$ est $+\infty$. Supposons le contraire i.e. la suite admet une valeur d'adhérence finie que l'on notera $l \in \mathbb{R}^+$. Il existe alors une sous-suite $(|f(Z_{l_k})|)$ qui converge

vers l . Comme nous avons pris la suite (Z_k) complètement arbitraire, nous pouvons faire le même raisonnement pour la suite extraite (Z_{l_k}) et donc obtenir que par unicité de la limite $l = +\infty$, ce qui est absurde. La suite $(|f(Z_l)|)_{l \in \mathbb{N}}$ admet $+\infty$ comme unique valeur d'adhérence, elle converge donc vers cette valeur d'adhérence. Ce qui permet de conclure que f est propre et donc termine la preuve. \square

Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 6.20 *En gardant les notations précédentes, il existe un unique champ de vecteurs holomorphe $X \in \eta_r(M)$ avec $\text{Im}(X) \in \kappa(M)$ tel que $F_X(\cdot)$ s'annule sur $\eta_r(M)$. De plus, X est nul ou il appartient au centre de $\eta_r(M)$, et nous avons*

$$F_X([u, v]) = 0, \quad \forall (u, v) \in \eta_r(M) \times \eta(M).$$

En particulier $F_X(\cdot)$ est un caractère de Lie sur $\eta_r(M)$.

Démonstration. La première partie du lemme est une conséquence directe du lemme précédent. Maintenant, on va traiter 2 cas séparément :

- (1) Supposons que le centre de $\eta_r(M)$ est réduit à $\{0\}$. Alors comme $\eta_r(M)$ est une algèbre de Lie réductive, nous avons $\eta_r(M) = [\eta_r(M), \eta_r(M)]$. Remarquons que la fonctionnelle de Futaki en $X = 0$ devient

$$F_0(v) = \int_M v(h_g) \omega_g^n.$$

Cette fonctionnelle coïncide avec l'invariant de Futaki pour les métriques de Kähler-Einstein. On voit, en particulier, que dans ce cas, F_0 est un morphisme d'algèbre de Lie sur $\eta(M)$. En effet, si on pose $\tau \in \text{Aut}(M)$ et σ_t le sous-groupe à un paramètre engendré par v , alors on a

$$\begin{aligned} \int_M (\tau \cdot \sigma_t \cdot t^{-1})^*(h_g) \omega_g^n &= \int_M h_g((\tau \cdot \sigma_t \cdot \tau^{-1})^{-1})^*(\omega_g^n) \\ &= \int_M h_g((\tau \cdot \sigma_t)^{-1})^*(\tau^* \omega_g^n) \\ &= \int_M (\tau \cdot \sigma_t)^* h_g(\tau^* \omega_g^n) \\ &= \int_M (\sigma_t)^*(\tau^*(h_g))(\tau^* \omega_g^n). \end{aligned}$$

En dérivant cette égalité en $t = 0$, en se souvenant que l'invariant de Futaki ne dépendant pas de la métrique kählérienne et en remarquant que $(\tau \cdot \sigma_t \cdot \tau)$ est le sous-groupe engendré par $Ad_\tau(v)$ et que $\tau^*(h_g)$ vérifie $\text{Ric}(\tau^* \omega_g) - \tau^* \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} h_g$, nous obtenons

$$F_0(Ad_\tau v) = F_0(v).$$

Maintenant, si on prend $\tau = \tau_s$ le groupe à un paramètre engendré par $u \in \eta(M)$ alors en dérivant en $t = 0$ l'équation précédente, nous obtenons que

$$F_0([u, v]) = 0, \quad \forall (u, v) \in \eta(M)^2.$$

Ce qui montre bien que F est bien un morphisme d'algèbres de Lie. Ainsi comme $\eta_r(M) = [\eta_r(M), \eta_r(M)]$, nous obtenons que F_0 est identiquement nulle sur $\eta_r(M)$. Comme 0 vérifie les hypothèses du lemme précédent, par unicité, nous avons $X = 0$, ce qui permet de conclure dans ce cas.

- (2) Supposons que le centre $\eta_c(M)$ de $\eta_r(M)$ n'est pas réduit à zéro. En considérant la fonctionnelle f restreint à $\eta_c(M)$, on montre en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve précédente que l'on peut trouver un unique champ de vecteurs holomorphe $X' \in \eta_c(M)$ avec $\text{Im}(X') \in \kappa(M)$ tel que $F'_{X'}(\cdot)$ s'annule sur $\eta_c(M)$. Il reste donc à montrer que

$$F'_{X'}([u, v]) = 0, \quad \forall (u, v) \in \eta_r(M) \times \eta(M).$$

Soit $v \in \eta(M)$ et (σ_t) le sous-groupe à un paramètre engendré par v . Nous avons alors

$$\begin{aligned} & \int_M (\tau \cdot \sigma_t \cdot \tau^{-1})^* (h_g - \theta_{X'}) e^{\theta_{X'}} \omega_g^n \\ &= \int_M (h_g - \theta_{X'}) ((\tau \cdot \sigma_t \cdot \tau^{-1})^{-1})^* (e^{\theta_{X'}} \omega_g^n) \\ &= \int_M (h_g - \theta_{X'}) ((\tau \cdot \sigma_t \cdot)^{-1})^* (\tau^* (e^{\theta_{X'}} \omega_g^n)) \\ &= \int_M (\tau \cdot \sigma_t)^* (h_g - \theta_{X'}) (\tau^* (e^{\theta_{X'}} \omega_g^n)) \\ &= \int_M (\sigma_t)^* (\tau^* (h_g - \theta_{X'})) (\tau^* (e^{\theta_{X'}} \omega_g^n)) \\ &= \int_M (\sigma_t)^* (\tau^* (h_g) - \tau^* (\theta_{X'}(\omega_g))) e^{\theta_{X'}(\tau^* \omega_g)} \tau^* (\omega_g^n) \end{aligned}$$

où $\theta_{X'}$ est la fonction associée au champs de vecteurs X' par l'équation (6.19).

Maintenant, remarquons que $(\tau \cdot \sigma_t \cdot \tau)$ est le sous-groupe engendré par $Ad_\tau(v)$, que (h_g) vérifie $Ric(\tau^* \omega_g) - \tau^* \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} h_g$ et que $\tau^* (\theta_{X'}(\omega_g))$ vérifie $i_{X'}(\tau^* \omega_g) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial}[\tau^* (\theta_{X'}(\omega_g))]$. Ainsi, en dérivant cette égalité en $t = 0$ et en se souvenant que l'invariant de Futaki ne dépend pas de la métrique kählérienne nous obtenons

$$F'_X(Ad_\tau(v)) = F'_X(v).$$

Maintenant si nous prenons $u \in \eta_r(M)$ tel que $\text{Im}(u) \in \kappa(M)$ et $\tau = \tau_s$ le groupe à un paramètre engendré par u alors, en différentiant l'égalité précédente, nous trouvons que

$$F'_{X'}([u, v]) = 0, \quad \forall (u, v) \in \eta_r(M) \times \eta(M).$$

Ce que nous voulions. Ainsi, nous voyons que $F_{X'}(\cdot)$ s'annule sur $\eta_r(M)$. Par unicité, on conclut que $X = X'$. Ce qui permet de conclure.

□

6.3 Les solitons de Kähler-Ricci sur les variétés toriques de Fano

6.3.1 Rappel sur les variétés toriques

Définition 6.21 *On dit que (M, g, J, ω, μ) est une variété torique kählérienne de dimension complexe n ou de dimension réelle $2n$ si*

- (M, g, J, ω) est une variété kählérienne compacte de dimension réelle $2n$.
- Il existe une action $\phi : \mathbb{T}^n \times M \rightarrow M$ effective et hamiltonienne du tore réel \mathbb{T}^n de dimension réelle n sur M .
- L'action ϕ s'étend en une action effective holomorphe $\phi : T \times M \rightarrow M$ du tore complexe $T \simeq (\mathbb{C}^*)^n \simeq \mathbb{R}^n \times (\mathbb{S}_1)^n$ M telle qu'il existe une orbite libre ouverte et dense $M_0 \subset M$.

Les propriétés importantes qui découlent directement de la définition sont réunis dans la proposition suivante :

Proposition 6.22 *Le tore T définit donc un tore maximal dans le groupe de Lie $\text{Aut}(M)$ des automorphismes biholomorphes de M . De plus, nous avons alors un système de coordonnées holomorphes sur M_0 :*

$$\begin{aligned} M_0 &\simeq T \\ &\simeq (\mathbb{C}^*)^n \\ &\simeq \mathbb{R}^n \times \sqrt{-1} \mathbb{T}^n \\ &\simeq \{u + \sqrt{-1}v \mid (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n\}. \end{aligned}$$

En particulier, dans ce système l'action de T est donnée par l'action naturelle de T sur lui-même i.e.

$$\rho : \begin{cases} T \times T &\longrightarrow T \\ (z_i) \times (\tilde{z}_i) &\longmapsto (z_i \cdot \tilde{z}_i) \end{cases}.$$

Démonstration. En effet, vu que l'action est effective, nous obtenons que le morphisme $\rho : T \rightarrow \text{Aut}(M)$ induit par l'action est injective. Nous pouvons donc voir T comme un tore maximal dans le groupe de Lie $\text{Aut}(M)$.

Maintenant, on considère la restriction de ρ à M_0 :

$$\rho : \begin{cases} T \times M_0 &\longrightarrow M_0 \\ z \times m &\longmapsto z \cdot m \end{cases}.$$

En fixant un point base noté m_0 dans ce repère, on obtient donc une application

$$\tilde{\rho} : \left\{ \begin{array}{l} T \longrightarrow M_0 \\ z \longmapsto z \cdot m_0 \end{array} \right. .$$

Cette application est bien holomorphe puisque l'action est holomorphe. De plus, cette application est bien bijective puisque l'action est libre en restriction à M_0 . Son inverse est aussi holomorphe puisqu'elle est donné par

$$\tilde{\rho}^{-1} : \left\{ \begin{array}{l} T \longrightarrow M_0 \\ z \longmapsto z^{-1} \cdot m_0 \end{array} \right. .$$

Nous avons donc bien un isomorphisme entre M_0 et T . En utilisant le fait que ρ est un morphisme i.e. $\tilde{z} \cdot (z \cdot m_0) = (\tilde{z}z) \cdot m_0$, nous obtenons que l'action ρ est donc donnée via cet isomorphisme par

$$\rho : \left\{ \begin{array}{l} T \times M_0 \longrightarrow M_0 \\ (\tilde{z}, z \cdot m_0) \longmapsto (\tilde{z}z) \cdot m_0 \end{array} \right. ,$$

ce qui permet de conclure. □

On rappelle que l'on peut associer à toute variété torique kählérienne M un polytope dit de Delzant dont on rappelle la définition :

Définition 6.23 *Un polytope Ω de $(\mathbb{R}^n)^*$ est un polytope de Delzant (entier) s'il vérifie :*

- (i) *Pour tout sommet p du polytope Ω , p appartient à exactement n faces F_{i_1}, \dots, F_{i_n} , dont les vecteurs normaux $\nu_{i_1}, \dots, \nu_{i_n}$ forment une base de \mathbb{R}^n .*
- (ii) *Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\nu_i \in \mathbb{Z}^d$.*
- (iii) *Pour tout sommet p , les vecteurs normaux sortants $\{\nu_{i_1}, \dots, \nu_{i_n}\}$ des faces F_{i_1}, \dots, F_{i_n} contenant p peuvent être choisis pour former une base de \mathbb{Z}^n .*

La condition d'être de Fano qui veut dire (pour nous) que $c_1(M) > 0$ est équivalente à de nombreuses propriétés algébriques, notamment que le fibré anti-canonique est ample, ces propriétés de la géométrie algébrique donne une caractérisation importante via son polytope pour qu'une variété torique soit de Fano. Pour cela, on introduit la notion de polytope de Fano :

Définition 6.24 *On dit qu'un polytope $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ défini par*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x, \nu_r \rangle \leq c_r \quad \forall r \in \{1, \dots, d\}\},$$

est un polytope de Fano si

- *le polytope Ω est un polytope de Delzant,*
- *et le polytope Ω admet un "centre" privilégié i.e. il existe $x_0 \in \Omega^*$ tel que*

$$\langle \nu_r, x_0 \rangle + c_r = 1, \quad \forall r \in \{1, \dots, d\}.$$

Remarque. Dans ce cas, quitte à translater le polytope, on peut supposer que le centre privilégié est l'origine et donc le polytope est de la forme :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x, \nu_r \rangle \leq 1 \ \forall r \in \{1, \dots, d\}\}.$$

Nous ferons cette hypothèse par la suite.

Lemme 6.25 *Une variété kählérienne torique (M, ω) est de Fano si et seulement son polytope est un polytope de Fano.*

Démonstration. Comme ce résultat vient de la géométrie algébrique, nous renvoyons par exemple à [11, 10] pour une démonstration. \square

6.3.2 Les champs de vecteurs holomorphes sur une variété kählérienne torique de Fano

Rappelons que le groupe des automorphismes d'une variété complexe compacte M est un groupe de Lie de dimension finie (voir [19] pour plus de détails) dont l'algèbre de Lie est $\eta(M)$. Ainsi le tore complexe T va engendrer une sous-algèbre de Lie abélienne maximale $\eta_0(M)$. Comme \mathbb{C} est algébriquement clos, tous les endomorphismes $\{\text{ad } v / v \in \eta_0(M)\}$ sont diagonalisables et commutent entre eux par la formule de Jacobi, ils sont donc simultanément diagonalisable. De plus, l'espace commun pour la valeur propre 0 est le commutant $Z_{\eta(M)}(\eta_0(M))$ de $\eta_0(M)$ dans $\eta(M)$. Ainsi, nous avons la décomposition :

$$\eta(M) = Z_{\eta(M)}(\eta_0(M)) \oplus_{\alpha \in \Phi} \eta_\alpha(M),$$

où Φ est l'ensemble des applications de $\eta_0(M)$ dans \mathbb{C} non identiquement nulle et

$$\eta_\alpha(M) = \{x \in \eta(M), \ \forall v \in \eta_0(M), \ \text{ad}_v x = \alpha(v)x.\}$$

De plus, comme $\eta_0(M)$ est abélienne maximale, on peut montrer grâce à la décomposition de Jordan que $Z_{\eta(M)}(\eta_0(M)) = \eta_0(M)$ (voir [24] pour plus de détails), et nous obtenons le lemme suivant :

Lemme 6.26 *Soit M une variété torique de Fano. Si on note $\eta(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes, nous avons la décomposition suivante :*

$$\eta(M) = \eta_0(M) \oplus_{\alpha \in \Phi} \eta_\alpha(M),$$

où $\eta_0(M)$ est l'algèbre de Lie abélienne maximal engendrée par le tore maximal T de la variété torique M , Φ est l'ensemble des applications de $\eta_0(M)$ dans \mathbb{C} non identiquement nulles et

$$\eta_\alpha(M) = \{x \in \eta(M), \ \forall v \in \eta_0(M), \ \text{ad}_v x = \alpha(v)x.\}.$$

Démonstration. On pourra consulter [24]. □

L'objectif va être d'utiliser le lemme 6.20. Pour cela, nous introduisons quelques algèbres et groupes de Lie importants et étudions les relations entre eux. En notant $K_0 \simeq (\mathbb{S}_1)^n$ le sous-groupe compact maximal de T , en remarquant que K_0 est un tore réel de dimension n , nous obtenons que T est la complexification du groupe de Lie (réel) K_0 (voir [6] pour plus de détails). Nous obtenons donc le diagramme suivant :

$$K_0 \hookrightarrow T \hookrightarrow \text{Aut}(M) .$$

De plus, comme T est connexe, on a que T appartient à une composante connexe de $\text{Aut}(M)$, or les composantes connexes de $\text{Aut}(M)$ sont de la forme $g \cdot \text{Aut}(M)^\circ$ où $\text{Aut}(M)^\circ$ est la composante connexe de l'identité de $\text{Aut}(M)$, donc en remplaçant T par $g^{-1} \cdot T$, nous pouvons supposer de plus que nous avons

$$K_0 \hookrightarrow T \hookrightarrow \text{Aut}(M)^\circ \hookrightarrow \text{Aut}(M) .$$

En considérant le sous-groupe compact maximal K contenant K_0 (qui existe par le théorème de Cartan-Iwasawa-Malcev : voir [17]) dans $\text{Aut}^\circ(M)$, le diagramme devient :

$$\begin{array}{ccccccc} K_0 & \hookrightarrow & T & \hookrightarrow & \text{Aut}(M)^\circ & \hookrightarrow & \text{Aut}(M) \\ \downarrow & & & & \nearrow & & \\ K & \hookrightarrow & K_{\mathbb{C}} & & & & \end{array}$$

où $K_{\mathbb{C}}$ est la complexification de K (qui existe puisque K est compact : voir [6]). De plus, il existe une flèche $T \hookrightarrow K_{\mathbb{C}}$ provenant de la propriété universelle du complexifié. Ce qui nous donne au final le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} K_0 & \hookrightarrow & T & \hookrightarrow & \text{Aut}(M)^\circ & \hookrightarrow & \text{Aut}(M) \\ \downarrow & & \downarrow & & \nearrow & & \\ K & \hookrightarrow & K_{\mathbb{C}} & & & & \end{array} .$$

Rappelons aussi que nous avons la décomposition de Chevalley :

$$\text{Aut}^\circ(M) = \text{Aut}_r(M) \ltimes R_u,$$

où $\text{Aut}_r(M)$ est un sous-groupe réductif de $\text{Aut}^\circ(M)$ et la complexification de K et R_u le radical unipotent de $\text{Aut}^\circ(M)$. De plus, si on note $\eta(M), \eta_r(M), \eta_u(M), \kappa(M)$ et $\kappa_0(M)$ les algèbres de Lie de $\text{Aut}(M), \text{Aut}_r(M), R_u, K$ et K_0 respectivement, alors on a

$$\eta(M) = \eta_r(M) + \eta_u(M)$$

(voir [12] pour plus de détails). Nous pouvons aussi traduire "en algèbre de Lie" le diagramme précédent :

$$\begin{array}{ccccc} \kappa_0(M) & \hookrightarrow & \eta_0(M) & \hookrightarrow & \eta(M) \\ \downarrow & & \downarrow & & \nearrow \\ \kappa(M) & \hookrightarrow & \eta_r(M) & & \end{array} .$$

De plus, on a que $\eta_0(M)$ et $\eta_r(M)$ sont les complexifications de $\kappa_0(M)$ et $\kappa(M)$ i.e.

$$\eta_r(M) = \kappa(M) \oplus \sqrt{-1}\kappa(M).$$

$$\eta_0(M) = \kappa_0(M) \oplus \sqrt{-1}\kappa_0(M),$$

De plus, par la théorie des groupes de Lie, nous savons que l'algèbre de Lie de $T \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ est donnée par $\mathfrak{t} = T_{(1,\dots,1)}T \simeq \mathbb{C}^n$. De plus l'isomorphisme entre τ et $\eta_0(M)$ est alors donné par

$$X : \left\{ \begin{array}{l} T \longrightarrow \eta_0(M) \\ \tau \longmapsto X_\tau(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(-t \cdot \tau) \cdot x \end{array} \right. .$$

En utilisant cela, nous obtenons le lemme suivant :

Lemme 6.27 *L'algèbre de Lie $\eta_0(M)$ admet une base de champs de vecteurs holomorphes (X_1, \dots, X_n) telle que*

$$X_i|_{M_0} = \frac{\partial}{\partial w_i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

où $(w_1, w_2, \dots, w_n) = (x_1 + \sqrt{-1}\theta_1, \dots, x_n + \sqrt{-1}\theta_n)$ sont les coordonnées logarithmiques sur $T \simeq \mathbb{R}^n \times (\mathbb{S}_1)^n$.

Démonstration. La première partie découle directement du fait que $\mathfrak{t} \simeq \mathbb{C}^n$. Le fait qu'elle vérifie

$$X_i|_{M_0} = \frac{\partial}{\partial w_i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

découle de l'isomorphisme X donné précédemment et du fait que l'action de T en restriction M_0 est donnée via les coordonnées logarithmiques par l'action naturelle du tore sur lui-même (voir lemme 6.22). \square

6.3.3 Une métrique K_0 -invariante sur une variété kählérienne torique de Fano

Nous allons maintenant introduire une métrique K_0 -invariante provenant du fait que M est torique. En effet, on a vu dans la section 1.5 que toute variété torique est entièrement déterminée par un polytope Ω dont on note $p^{(1)}, \dots, p^{(m)}$ les sommets, on définit alors une fonction u^0 sur \mathbb{R}^n par

$$u^0 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \log\left[\sum_{i=1}^n \exp(\langle p^{(i)}, x \rangle)\right] \end{array} \right. .$$

Nous avons alors le lemme suivant

Lemme 6.28 *La fonction u^0 définie précédemment est une fonction (strictement) convexe sur \mathbb{R}^n . De plus, en utilisant les coordonnées logarithmiques sur $T \simeq \mathbb{C}^* \simeq \mathbb{R}^n \times (\mathbb{S}_1)^n$, on a que la 2-forme ω_{g^0} sur T définie par*

$$\omega_{g^0} := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} u^0,$$

est une métrique kählérienne K_0 -invariante où K_0 est le sous groupe compact maximal de T i.e. on a vu, via les coordonnées logarithmiques, que $K_0 \simeq (\mathbb{S}_1)^n$. De plus, on a que la fonction gradient $Du^0 : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (\partial_1 u^0(x), \dots, \partial_n u^0(x)) \in \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme entre \mathbb{R}^n et l'intérieur $\overset{\circ}{\Omega}$ du polytope Ω et qu'il vérifie

$$|\log \det(u_{ij}^0) + u^0| < \infty, \quad u_{ij}^0 := \partial_i \bar{\partial}_j u^0.$$

Démonstration. Pour la première partie du lemme, il suffit de remarquer que u^0 est une fonction strictement convexe sur \mathbb{R}^n . En effet, sa matrice hessienne est alors définie positive et donc ω_{g^0} sera bien positive. De plus, comme elle ne dépend pas des variables d'angles $\theta_1, \dots, \theta_n$, elle sera bien K_0 -invariante.

Pour la seconde partie, cela découle directement de l'expression de la différentielle $Du^0 : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (\partial_1 u^0(x), \dots, \partial_n u^0(x)) \in \mathbb{R}^n$. Un calcul direct nous donne que

$$Du^0(x) = \left(\frac{\sum_{1 \leq k \leq m} e^{\langle p^{(k)}, x \rangle} p_i^{(k)}}{\sum_{1 \leq k \leq m} e^{\langle p^{(k)}, x \rangle}} \right)_{1 \leq i \leq n}.$$

De plus, si on note $D^2 u^0 : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (\partial_i \partial_j u^0(x)) \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice hessienne de u^0 , on obtient que

$$\partial_i \partial_j u^0(x) = \frac{\sum_{1 \leq u \leq m} \sum_{1 \leq v \leq m} e^{\langle p^{(u)}, x \rangle} e^{\langle p^{(v)}, x \rangle} [p_i^{(u)} p_j^{(u)} - p_i^{(u)} p_j^{(v)}]}{\left(\sum_{1 \leq k \leq m} e^{\langle p^{(k)}, x \rangle} \right)^2}.$$

□

Par la suite, on devra étudier les fonctions

$$g_r : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \log[1 - \langle Du^0(x), \nu_r \rangle] \end{cases},$$

où ν_r est le vecteur normal entrant définissant la r -ième face du polytope Ω i.e. on a $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall r \in \{1, \dots, m\}, \langle x, \nu_r \rangle \leq 1\}$. On remarque que cette application est bien définie puisque d'après ce qui précède Du^0 est un difféomorphisme de \mathbb{R}^n sur Ω i.e. $1 - \langle Du^0(x), \nu_r \rangle > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Lemme 6.29 *Les dérivées des fonctions g_r sont bornées sur \mathbb{R}^n , autrement dit la norme du gradient des g_r est bornée i.e. il existe $C > 0$*

$$\|Dg_r(x)\| \leq C, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. On calcule la dérivée $\partial_i g_r(x)$ en utilisant les expressions calculées plus haut :

$$\begin{aligned} \partial_i g_r(x) &= \partial_i (\log[1 - \langle Du^0(x), \nu_r \rangle]) \\ &= - \frac{\partial_i (\langle Du^0(x), \nu_r \rangle)}{1 - \langle Du^0(x), \nu_r \rangle} \\ &= - \frac{\langle \partial_i (Du^0)(x), \nu_r \rangle}{1 - \langle Du^0(x), \nu_r \rangle}, \end{aligned}$$

or on a

$$Du^0 : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (\partial_1 u^0(x), \dots, \partial_n u^0(x)) \in \mathbb{R}^n,$$

ainsi

$$\partial_i (Du^0)(x) = (\partial_i \partial_1 u^0(x), \dots, \partial_i \partial_n u^0(x)).$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \partial_i g_r(x) &= - \frac{\sum_{j=1}^n \partial_i \partial_j u^0(x) (\nu_r)_j}{1 - \sum_{j=1}^n \partial_j u^0(x) (\nu_r)_j} \\ &= - \frac{\sum_{1 \leq k \leq m} e^{\langle p^{(k)}, x \rangle} \sum_{1 \leq u, v \leq m} \sum_{j=1}^n e^{\langle p^{(v)}, x \rangle} e^{\langle p^{(u)}, x \rangle} [p_j^{(u)} p_i^{(v)} - p_j^{(v)} p_i^{(u)}] (\nu_r)_j}{\left(\sum_{1 \leq k \leq m} e^{\langle p^{(k)}, x \rangle} \right)^2 \sum_{1 \leq k \leq m} e^{\langle p^{(k)}, x \rangle} [1 - \sum_{j=1}^n p_j^{(k)} (\nu_r)_j]}. \end{aligned}$$

En simplifiant, cela nous donne

$$\partial_i g_r(x) = \frac{\sum_{1 \leq u, v \leq m} \sum_{j=1}^n e^{\langle p^{(v)}, x \rangle} e^{\langle p^{(u)}, x \rangle} [p_j^{(u)} p_i^{(v)} - p_j^{(v)} p_i^{(u)}] (\nu_r)_j}{\sum_{1 \leq u, v \leq m} e^{\langle p^{(u)}, x \rangle} e^{\langle p^{(v)}, x \rangle} [1 - \sum_{j=1}^n p_j^{(u)} (\nu_r)_j]}.$$

Commençons par remarquer que le dénominateur n'est jamais nul. En effet, pour tout face $F_r = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x, \nu_r \rangle = 1\}$, il existe un sommet $p^{(k)}$ n'appartenant pas à

cette face F_r i.e. $[1 - \sum_{j=1}^n p_j^{(u)}(\nu_r)_j] > 0$. Nous pouvons ainsi ré-écrire la dérivée sous la forme

$$\partial_i g_r(x) = \frac{\sum_{1 \leq u, v \leq m} \sum_{j=1}^n e^{\langle p^{(v)}, x \rangle} e^{\langle p^{(u)}, x \rangle} [p_j^{(u)} p_i^{(v)} - p_j^{(v)} p_i^{(u)}](\nu_r)_j}{\sum_{\substack{1 \leq u, v \leq m \\ p^{(u)} \notin F_r}} e^{\langle p^{(u)}, x \rangle} e^{\langle p^{(v)}, x \rangle} [1 - \sum_{j=1}^n p_j^{(u)}(\nu_r)_j]}.$$

Maintenant, nous posons

$$\Theta_{max} := \max_{1 \leq u, v \leq m} [p_j^{(u)} p_i^{(v)} - p_j^{(v)} p_i^{(u)}](\nu_r)_j, \quad \Theta_{min} := \min_{1 \leq u, v \leq m} [p_j^{(u)} p_i^{(v)} - p_j^{(v)} p_i^{(u)}](\nu_r)_j$$

et

$$\Omega_{max} := \max_{\substack{1 \leq u, v \leq m \\ p^{(u)} \notin F_r}} [1 - \sum_{j=1}^n p_j^{(u)}(\nu_r)_j], \quad \Omega_{min} := \min_{\substack{1 \leq u, v \leq m \\ p^{(u)} \notin F_r}} [1 - \sum_{j=1}^n p_j^{(u)}(\nu_r)_j].$$

Ainsi, en remarquant que $0 < \Omega_{min} \leq \Omega_{max}$, nous obtenons

$$\frac{\Theta_{min}}{\Omega_{max}} \leq \partial_i g_r(x) \leq \frac{\Theta_{max}}{\Omega_{min}},$$

ce qui permet de conclure □

Continuons en définissant aussi

$$\bar{v}(x) : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \max\{\langle x, p^{(k)} \rangle / k = 1, \dots, m\} \end{cases},$$

et nous avons alors le lemme :

Lemme 6.30 *La fonction \bar{v} vérifie*

$$\bar{v} \leq u^0 \leq \log m + \bar{v}.$$

et

$$\bar{v}(y) \geq \langle z, y \rangle \quad \forall z \in \Omega.$$

Démonstration. Pour la première inégalité, remarquons que

$$\max_i \langle x, p^{(i)} \rangle \leq \sum_i^m \langle x, p^{(i)} \rangle \leq m \max_i \langle x, p^{(i)} \rangle,$$

en prenant l'exponentielle puis le logarithme de cette inégalité, on trouve

$$\bar{v} \leq u^0 \leq \log m + \bar{v}.$$

Pour l'autre inégalité, rappelons que nous avons défini

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall r \in \{1, \dots, m\}, \langle x, \nu_r \rangle \leq 1\}.$$

En prenant une face $F_r := \{x, \nu_r = 1\} / x \in \mathbb{R}^n\}$ telle que p^k appartienne à cette face, on obtient

$$\langle p^{(k)}, \nu_r \rangle = 1.$$

et par définition du polytope, nous avons que $p^{(k)}$ appartient à n faces F_{r_1}, \dots, F_{r_n} . De plus les vecteurs normaux (ν_{r_i}) forment une \mathbb{R} -base de \mathbb{R}^n ainsi pour tout $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\bar{v}(y) \geq \langle p^{(k)}, y \rangle = \sum_{i=1}^n y_i \langle p^{(k)}, \nu_{r_i} \rangle = \sum_{i=1}^n y_i.$$

et

$$\langle y, z \rangle = \sum_{i=1}^n y_i \langle \nu_{r_i}, z \rangle \leq \sum_{i=1}^n y_i,$$

ce qui permet de conclure. □

Maintenant, nous remarquons qu'en utilisant les coordonnées logarithmiques $(w_1, w_2, \dots, w_n) = (x_1 + \sqrt{-1}\theta_1, \dots, x_n + \sqrt{-1}\theta_n)$, nous avons alors

$$\omega_{g^0}^n = \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \det(u_{ij}^0) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge d\Theta, \quad (6.24)$$

où $d\Theta$ est la forme volume standard sur K_0 i.e. $d\Theta = d\theta_1 \wedge \dots \wedge d\theta_n$.

De plus, cette métrique peut s'étendre sur M en une métrique kählérienne K_0 -invariante vérifiant en plus $\omega_{g^0} \in c_1(M)$. (voir [4] pour plus de détails).

Ainsi, nous nous trouvons sous les hypothèses du lemme 6.6 qui nous donne donc l'existence et l'unicité d'une fonction $h^0 \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, vérifiant

$$\text{Ric}(\omega_{g^0}) - \omega_{g^0} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}h^0, \quad \int_M e^{h_g^0} \omega_{g^0}^n = \int_M \omega_{g^0}^n. \quad (6.25)$$

Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 6.31 *En gardant les notations introduites précédemment, nous avons*

$$\partial\bar{\partial} \left(\det(u_{ij}^0) e^{u^0 + h^0} \right) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^n.$$

De plus, après normalisation, nous obtenons

$$\det(u_{ij}^0) = e^{-h^0 - u^0} \quad \text{sur } \mathbb{R}^n. \quad (6.26)$$

Démonstration. Pour simplifier les notations, nous posons :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \det(u_{ij}^0(x))e^{u^0(x)+h^0(x)} \end{cases} .$$

Nous avons alors que sur $T \simeq (\mathbb{C}^*)^n \simeq \mathbb{R}^n \times (\mathbb{S}_1)^n$

$$\partial\bar{\partial}f = \frac{\partial f}{\partial w^i \partial \bar{w}^j} dw^i \wedge d\bar{w}^j,$$

or f est à valeurs réelles donc

$$\partial\bar{\partial}f = \frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j,$$

et ainsi en restriction à \mathbb{R}^n , nous avons

$$\begin{aligned} \partial\bar{\partial}f &= \frac{1}{4} \frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{par le théorème de Schwarz}),$$

i.e. nous avons bien

$$\partial\bar{\partial} \left(\det(u_{ij}^0) e^{u^0+h^0} \right) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^n.$$

Or, comme $|\log \det(u_{ij}^0) + u^0| < \infty$, nous obtenons que f est une fonction harmonique bornée, elle est donc constante. Nous pouvons alors renormaliser h^0 pour obtenir une fonction h vérifiant

$$Ric(\omega_{g^0}) - \omega_{g^0} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}h$$

et

$$\det(u_{ij}^0) = e^{-h-u^0}. \quad (6.27)$$

□

Nous travaillerons avec cette fonction h renormalisée. Nous posons donc pour la suite la fonction $h \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ vérifiant

$$Ric(\omega_{g^0}) - \omega_{g^0} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}h,$$

et

$$\det(u_{ij}^0) = e^{-h-u^0}. \quad (6.28)$$

Terminons par un dernier lemme qui nous sera utile par la suite et qui exploite le fait que ω_{g^0} est K_0 -invariante :

Lemme 6.32 Soit un champ de vecteur holomorphes $Z \in \eta_0(M)$ tel que $\text{Im}X \in \kappa_0(M)$. Alors la fonction $\theta_Z \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ vérifiant

$$i_Z \omega_{g^0} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial} \theta_Z, \quad \int_M e^{\theta_Z} \omega_{g^0}^n = \int_M \omega_{g^0}^n.$$

est, en fait, réelle i.e. $\theta_Z \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Démonstration.

En utilisant la formule de Cartan et le fait que $i_X \omega_g$ est une $(0, 1)$ est $\bar{\partial}$ -fermée, on a vu que

$$\mathcal{L}_Z \omega_{g^0} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \theta_Z.$$

De plus, on remarque que $i_{\bar{Z}} \omega_g = \overline{i_Z \omega_g}$. En effet, si on écrit que localement $Z = Z^i \partial_i$ alors on a d'une part que

$$i_{\bar{Z}} \omega_{g^0} = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} g_{i\bar{j}} \bar{Z}^{\bar{j}} dz^i.$$

et d'autre part que

$$\begin{aligned} \overline{i_Z \omega_{g^0}} &= \overline{\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} g_{i\bar{j}}^0 Z^i dz^i} \\ &= -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} g_{j\bar{i}}^0 \bar{Z}^{\bar{i}} dz^j. \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons grâce à la formule de Cartan que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{Z}} \omega_{g^0} &= d \circ i_{\bar{Z}} \omega_{g^0} \\ &= d \circ (\overline{i_Z \omega_{g^0}}) \\ &= \overline{d \circ i_Z \omega_{g^0}} \\ &= -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \overline{\partial \bar{\partial} \theta_Z} \\ &= -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \overline{\theta_Z} \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \theta_Z. \end{aligned}$$

En combinant ces deux résultats, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} [\theta_Z - \overline{\theta_Z}] &= \mathcal{L}_{Z - \bar{Z}} \omega_{g^0} \\ &= \mathcal{L}_{2\sqrt{-1}\text{Im}(Z)} \omega_{g^0} \\ &= 2\sqrt{-1} \mathcal{L}_{\text{Im}(Z)} \omega_{g^0} \\ &= 0 \quad (\text{car } g^0 \text{ est } K_0\text{-invariante et } \text{Im}(Z) \in \kappa_0(M)). \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons que

$$\theta_Z = \overline{\theta_Z} + c.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $\theta_Z = \overline{\theta_Z}$. Pour cela, on va utiliser l'unicité du lemme 6.7. En effet, on a que θ_Z est l'unique fonction $\theta_Z \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ vérifiant

$$i_Z \omega_{g^0} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \theta_Z, \quad \int_M e^{\theta_Z} \omega_{g^0}^n = \int_M \omega_{g^0}^n.$$

Or, grâce au fait que $\theta_Z = \overline{\theta_Z} + c$, nous obtenons aussi que

$$i_Z \omega_{g^0} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \overline{\theta_Z}.$$

De plus, en prenant le conjugué de l'expression $\int_M e^{\theta_Z} \omega_{g^0}^n = \int_M \omega_{g^0}^n$, nous obtenons que

$$\int_M e^{\overline{\theta_Z}} \omega_{g^0}^n = \int_M \omega_{g^0}^n.$$

Ce qui permet de conclure. □

6.3.4 Étude des solitons de Kähler-Ricci dans le cas des variétés torique de Fano

Nous gardons les notations introduites dans les sections précédentes.

Lemme 6.33 *Soit M une variété de Fano torique. Il existe alors un unique champ de vecteurs holomorphe $X \in \eta_0(M)$ tel que sa partie imaginaire $\text{Im}(X) \in \kappa_0(M)$ engendre un sous-groupe compact dans $\text{Aut}(M)$, et qui vérifie*

$$F_X(v) \equiv 0, \quad \forall v \in \eta(M).$$

Démonstration. On utilise le lemme 6.19 pour l'algèbre de Lie K contenant K_0 . Il existe alors un unique champ de vecteurs holomorphe $X \in \eta_r(M)$ tel que sa partie imaginaire $\text{Im}(X) \in \kappa(M)$ engendre un sous-groupe compact dans $\text{Aut}(M)$, vérifiant

$$F_X(v) \equiv 0, \quad \forall v \in \eta_r(M).$$

De plus, le champ de vecteurs X est nul ou il appartient au centre de $\eta_r(M)$. Ainsi comme $\eta_0(M) \subset \eta_r(M)$ est abélienne maximale, nous avons que $X \in \eta_0(M)$ et que $\text{Im} X \in \kappa_0(M)$. De plus par le lemme 6.20, nous avons aussi que

$$F_X([u, v]) = 0, \quad \forall (u, v) \in \eta_r(M) \times \eta(M).$$

Maintenant, comme $\eta_0(M) \subset \eta_r(M)$, on a

$$\forall v \in \eta_0(M), \quad F_X(v) = 0.$$

Comme nous avons $\eta(M) = \eta_0(M) \oplus_{\alpha \in \Phi} \eta_\alpha(M)$, par linéarité, il suffit que nous montrons :

$$\forall \alpha \in \phi, \forall x_\alpha \in \eta_\alpha(M), \quad F_X(x_\alpha) = 0.$$

Si $\eta_\alpha(M) = \{0\}$ alors il n'a rien à montrer. Sinon, on peut, par définition de ϕ , trouver $v \in \eta_0(M)$ telle que $\alpha(v) \neq 0$. Ainsi nous obtenons

$$F_X(x_\alpha) = \alpha(v)^{-1} F_X([v, x]) = 0, \quad \forall x_\alpha \in \eta_\alpha(M).$$

Ce qui permet de conclure. □

En utilisant le lemme 6.27, on peut donc écrire que le champ de vecteurs $X \in \eta_0(M)$ vérifiant $F_X(v) = 0$ pour $v \in \eta_r(M)$ s'écrit

$$X = \sum_i c_i X_i, \quad c_i \in \mathbb{C}.$$

Nous avons donc un champ de vecteurs X qui est un bon candidat à être un champ de vecteurs associé à un soliton de Kähler-Ricci. Il reste donc à déterminer la métrique g associée. Pour cela, remarquons tout de suite que le couple (X, ω_{g^0}) vérifie la condition nécessaire (lemme 6.5) pour être un soliton de Kähler-Ricci :

Lemme 6.34 *En gardant les notations introduites précédemment, nous avons que $\mathcal{L}_X \omega_{g^0} = 0$ est une $(1, 1)$ -forme réelle i.e.*

$$\mathcal{L}_{\text{Im}X} \omega_{g^0} = 0.$$

De plus, si on prend une fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ qui est aussi K_0 invariante alors, en notant $\omega_\phi = \omega_{g^0} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\phi$, on obtient aussi

$$\mathcal{L}_{\text{Im}X} \omega_\phi = 0.$$

On peut aussi remarquer que $\theta_X \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ où θ_X est la fonction vérifiant

$$i_Z \omega_{g^0} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \theta_Z,$$

Démonstration. Pour la première assertion, il suffit de remarquer que $\text{Im}X \in \kappa_0(M)$ et que ω_{g^0} est K_0 -invariante.

Pour la seconde assertion, il suffit de remarquer que si ϕ est K_0 -invariant alors ω_ϕ est aussi K_0 -invariant.

Pour le dernier point, il suffit d'appliquer le lemme 6.32. □

Ce lemme nous montre donc que nous pouvons chercher la métrique g sous la forme

$$\omega_g = \omega_{g^0} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\phi.$$

C'est ce fait que nous exploiterons dans la section 6.4 en ramenant l'équation des solitons de Kähler-Ricci à une équation de Monge-Ampère. Pour le moment, nous allons nous intéresser aux constantes c_i associées au champ de vecteurs X . Commençons par un premier lemme :

Lemme 6.35 *En gardant les notations précédentes, on a que les constantes c_i sont réelles i.e.*

$$c_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Nous avons donc que le champs de vecteurs $X \in \eta_0(M)$ vérifiant $F_X(v) = 0$ pour tout $v \in \eta_r(M)$ s'écrit

$$X := \sum_i c_i X_i, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. On peut écrire

$$c_i = a_i + \sqrt{-1}b_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Ainsi, on a que

$$\begin{aligned} X &= \sum_l c_l X^k \\ &= \sum_l (a_l + \sqrt{-1}b_l) \left(\frac{\partial}{\partial x^l} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial \theta^l} \right) \\ &= \sum_l \left(a_l \frac{\partial}{\partial x^l} - b_l \frac{\partial}{\partial \theta^l} \right) + \sqrt{-1} \sum_l \left(b_l \frac{\partial}{\partial x^l} + a_l \frac{\partial}{\partial \theta^l} \right). \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\text{Im}X = \sum_l \left(b_l \frac{\partial}{\partial x^l} + a_l \frac{\partial}{\partial \theta^l} \right),$$

or $\text{Im}X \in \kappa_0(M)$ qui est engendré par la famille $(\frac{\partial}{\partial \theta^l})$, ce qui impose

$$b_i = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

et permet de conclure. □

En utilisant le lemme 6.7 sur les champs de vecteurs donnés par le lemme 6.27, nous obtenons qu'il existe une unique fonction $\theta_{X_i} \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ telle que

$$i_{X_i} \omega_g = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \theta_{X_i}, \quad \int_M e^{\theta_{X_i}} \omega_g^n = \int_M \omega_g^n.$$

Nous avons alors le lemme suivant qui nous donne une expression pour les θ_{X_i} :

Lemme 6.36 *Les θ_{X_i} vérifient les formules suivantes :*

$$\theta_{X_i} = \frac{\partial u^0}{\partial x_i} + b_i, \quad b_i \in \mathbb{R}. \quad (6.29)$$

En particulier, on remarque que les fonctions θ_{X_i} sont des fonctions à valeurs réelles.

Démonstration. Il suffit d'écrire dans les coordonnées logarithmiques l'équation (6.29). En effet, on a

$$\omega_{g^0} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} u_{ij}^0 dw^i \wedge d\bar{w}^j.$$

Ainsi pour tout $v = v^i \frac{\partial}{\partial w^i} \in \eta(M)$, nous avons

$$i_v \omega_{g^0} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} u_{ij}^0 v^i d\bar{w}^j$$

On applique la formule précédente à $v = X_i = \frac{\partial}{\partial w^i}$, nous obtenons alors

$$i_{X_i} \omega_{g^0} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} u_{ij}^0 d\bar{w}^j.$$

D'un autre côté, nous avons que

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial} \theta_{X_i} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial}_j \theta_{X_i} d\bar{w}^j.$$

Nous obtenons alors

$$\partial_i \bar{\partial}_j u^0 = \bar{\partial}_j \theta_{X_i}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\},$$

d'où

$$\bar{\partial}_j [-\partial_i u^0 + \theta_{X_i}] = 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Comme M est une variété compacte, on a donc l'existence d'une constante $b_i \in \mathbb{C}$ telle que

$$\theta_{X_i} = \partial_i u^0 + b_i = \frac{\partial u^0}{\partial x^i} + b_i.$$

(La dernière égalité résulte du fait que u^0 est K_0 -invariant.)

Pour conclure, il suffit de montrer que θ_{X_i} est à valeurs réelles, nous obtiendrons donc bien que b_i est réelle (puisque $\partial_i u^0$ l'est aussi). Ceci est tout simplement une conséquence du lemme 6.32 que l'on peut appliquer puisque $\text{Im} X^i = \frac{\partial}{\partial \theta^i} \in \kappa_0(M)$. \square

Nous allons déterminer les constantes b_i . Pour cela, on remarque que

$$\bar{\partial}[\Delta \theta_v + \theta_v + v(h)] = 0,$$

où Δ est le laplacien pour la métrique g^0 (voir le lemme 6.14). Donc comme M est compacte, on a que

$$\forall v \in \eta(M), \exists c_v \in \mathbb{C}, \quad v(h) = c_v - \Delta \theta_v - \theta_v. \quad (6.30)$$

On remarque au passage que la constante c_v est entièrement déterminée par la condition de normalisation de l'équation (6.7). Montrons maintenant que nous avons

$b_i = c_{X_i}$. Pour cela, grâce à l'égalité (6.30) et en faisant une intégration par parties, nous avons

$$\int_M (\theta_v - c_v) e^h \omega_{g^0}^n = \int_M (-v(h) - \Delta \theta_v) e^h \omega_{g^0}^n = 0.$$

Maintenant, en utilisant les équations (6.28) et (6.24), nous voyons que

$$\int_M (\theta_{X_i} - c_{X_i}) e^h \omega_{g^0}^n = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_i} + b_i - c_{X_i} \right) e^{-u^0} dx.$$

Or nous avons que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u^0}{\partial x_i} e^{-u^0} dx = 0.$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u^0}{\partial x_i} e^{-u^0} dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u^0}{\partial x_i} e^{-u^0} dx_i \right) dx_{\setminus \{i\}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-u_i^0})' dx_i \right) dx_{\setminus \{i\}} \end{aligned}$$

où $u_i^0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la i -ième application partielle de u^0 i.e. u_i^0 est la fonction $u^0 : t \in \mathbb{R} \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ où les x_k sont fixés. D'où

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u^0}{\partial x_i} e^{-u^0} dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [e^{-u_i^0}]_{-\infty}^{+\infty} dx_{\setminus \{i\}}.$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u_i^0(t) = +\infty.$$

Pour cela, en utilisant l'expression de u^0 , on voit que

$$u_i^0(t) = \log \left(\sum_{k=1}^m A_k e^{p_i^{(k)} \cdot t} \right),$$

où A_k est une constante positive. Il suffit donc de montrer que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists (k, h) \in \{1, \dots, m\}^2, p_i^k > 0 \text{ et } p_i^h < 0.$$

La traduction géométrique de cette proposition est que pour toute coordonnée x_i dans \mathbb{R}^n , il existe deux sommets du polytope Ω^* tels que l'un ait sa i -ième coordonnée strictement positive et l'autre strictement négative. Ce qui est le cas puisque dans le

cas d'un polytope de Fano, nous avons vu que 0 appartient à l'intérieur du polytope. Ainsi nous obtenons que

$$\int_M (\theta_{X_i} - c_{X_i}) e^{h\omega_{g^0}^n} = (b_i - c_{X_i}) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-u^0} dx.$$

or comme $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-u^0} > 0$, nous $b_i = c_{X_i}$ i.e.

$$\theta_{X_i} = \frac{\partial u^0}{\partial x_i} + c_{X_i}. \quad (6.31)$$

Nous avons alors le lemme suivant qui nous servira quand nous voudrons déterminer notre estimation à la section 6.4.5 :

Lemme 6.37 *Soit $X = \sum_i c_i X^i$ un champ de vecteurs déterminé par le lemme 6.33. Les constantes c_1, \dots, c_n vérifient alors les équations*

$$\int_{\Omega} y_i \exp\left(\sum_{l=1}^n c_l y_l\right) dy = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.32)$$

Démonstration. Pour cela, on se souvient que l'invariant de Futaki a pour expression :

$$F_X(v) = \int_M v(h - \theta_X) e^{\theta_X \omega_{g^0}^n},$$

nous obtenons, grâce à l'équation (6.30) et en faisant une intégration par partie que

$$F_X(v) = - \int_M (\theta_v - c_v) e^{\theta_X \omega_{g^0}^n}.$$

or comme nous avons $\theta_{X_i} = \frac{\partial u^0}{\partial x_i} + c_{X_i}$ (équation (6.31)), nous obtenons que $F_X(X_i) = 0$ est équivalent à

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u^0}{\partial x_i} \exp\left(\sum_{l=1}^n c_l \frac{\partial u^0}{\partial x_l}\right) \det(u_{pq}^0) dx.$$

ce qui est équivalent à l'équation (6.32) par le changement de variable $y_i = \frac{\partial u^0}{\partial x_i}$. \square

6.4 Existence des solitons de Kähler-Ricci dans le cas torique

Rappelons que nous voulons démontrer le théorème suivant :

Théorème 6.38 *Il existe un soliton de Kähler-Ricci sur toute variété compacte torique kählérienne de Fano.*

6.4.1 La méthode de la continuité

On commence par ramener l'équation (6.1) à une équation de Monge-Ampère complexe comme dans le cas du flot de Kähler-Ricci. Pour cela, on considère l'équation

$$\begin{cases} \det(g_{i\bar{j}}^0 + \varphi_{i\bar{j}}) = \det(g_{i\bar{j}}^0) \exp(h - \theta_X - X(\varphi) - \varphi) \\ (g_{i\bar{j}}^0 + \varphi_{i\bar{j}}) > 0 \end{cases} \quad (6.33)$$

On montre que résoudre cette équation de Monge-Ampère complexe (6.33) est équivalent à résoudre l'équation normalisée des solitons de Kähler-Ricci (6.1). La démonstration est similaire à celle du cas du flot de Kähler-Ricci (voir démonstration du lemme 5.11).

Maintenant, comme la métrique ω_{g^0} est K_0 -invariante, on cherche des solutions φ à l'équation (6.33) qui sont aussi K_0 -invariantes. Donc si $\varphi = \varphi_t$ est une solution K_0 -invariante de l'équation (6.35) alors en posant $u = u_t = u^0 + \varphi_t \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on obtient

$$\theta_X + X(\varphi) = \sum_{l=1}^n c_l \frac{\partial u}{\partial x^l} + c_X.$$

En effet, on a le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \theta_X + X(\varphi) &= \theta_{\sum_l c_l X_l} + \sum_{l=1}^c c_l X_l(\varphi) && \text{(par définition de } X \text{ et } u) \\ &= \sum_l c_l \theta_{X_l} + \sum_l c_l X_l(u) - \sum_l c_l X_l(u^0) && \text{(par linéarité)} \\ &= \sum_l c_l \theta_{X_l} - \sum_l c_l \frac{\partial u^0}{\partial x_l} + \sum_l c_l \frac{\partial u}{\partial x_l} && \text{(car } u^0 \text{ et } \varphi \text{ sont } K_0\text{-invariants)} \\ &= \sum_l c_l [\theta_{X_l} - \frac{\partial u^0}{\partial x_l}] + \sum_l c_l \frac{\partial u}{\partial x_l} \\ &= \sum_l c_l b_l + \sum_l c_l \frac{\partial u}{\partial x_l} && \text{(grâce au lemme 6.29),} \end{aligned}$$

En particulier, on a que $\theta_X + X(\varphi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (puisque les constantes c_l et b_l sont réelles) et donc que u satisfait l'équation de Monge-Ampère réelle :

$$\det(u_{i\bar{j}}) = \exp(-c_X - u - \sum_{l=1}^n c_l \frac{\partial u}{\partial x_l}), \quad \text{sur } \mathbb{R}^n. \quad (6.34)$$

Nous avons alors deux propriétés importantes que nous résumons dans la proposition suivante :

Proposition 6.39 *Nous avons les propriétés suivantes :*

(i) La fonction u est convexe.

(ii) $Du(\mathbb{R}^n) = Du^0(\mathbb{R}^n) = \mathring{\Omega}$.

Démonstration. L'assertion (i) résulte de la deuxième équation de (6.33) et l'assertion (ii) découle des propriétés des fonctions convexes en remarquant que $\varphi = u - u^0$ est bornée. \square

L'objectif pour démontrer le théorème d'existence est d'appliquer la méthode de la continuité, on considère alors l'équation suivante dépendant d'un paramètre $t \in [0, 1]$:

$$\begin{cases} \det(g_{i\bar{j}}^0 + \varphi_{i\bar{j}}) = \det(g_{i\bar{j}}^0) \exp(h - \theta_X - X(\varphi) - t\varphi) \\ (g_{i\bar{j}}^0 + \varphi_{i\bar{j}}) > 0 \end{cases} \quad (6.35)$$

On remarque tout de suite que l'équation (6.33) correspond au cas où $t = 1$. Nous pouvons reformuler l'équation précédente sous la forme suivant :

Lemme 6.40 *En posant $\omega_\varphi := \omega_{g^0} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi$, l'équation (6.35) est équivalente à résoudre :*

$$\begin{cases} Ric(\omega_\varphi) - t\omega_\varphi - (1-t)\omega_{g^0} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}(\theta_X + X(\varphi)) = \mathcal{L}_X \omega_\varphi \\ (g_{i\bar{j}}^0 + \varphi_{i\bar{j}}) > 0 \end{cases} \quad (6.36)$$

Démonstration. Pour le voir, partons de l'équation

$$\det(g_{i\bar{j}}^0 + \varphi_{i\bar{j}}) = \det(g_{i\bar{j}}^0) \exp(h - \theta_X - X(\varphi) - t\varphi),$$

nous prenons alors le log de cette équation et nous la différencions pour obtenir

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \det(g_{i\bar{j}}^0 + \varphi_{i\bar{j}}) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \det(g_{i\bar{j}}^0) + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} h - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} t \partial\bar{\partial} \varphi - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} (\theta_X + X(\varphi)). \end{aligned}$$

La seconde équation de (6.35) nous dit que ω_φ est une métrique kählérienne donc on peut considérer $Ric(\omega_\varphi)$ et donc en utilisant l'expression 5.3, nous obtenons

$$-Ric(\omega_\varphi) = -Ric(\omega_{g^0}) + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} h - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} t \partial\bar{\partial} \varphi - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} (\theta_X + X(\varphi)).$$

Maintenant, on se souvient que $Ric(\omega_{g^0}) - \omega_{g^0} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} h$, d'où

$$-Ric(\omega_\varphi) = -\omega_{g^0} - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} t \partial\bar{\partial} \varphi + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} (\theta_X + X(\varphi)).$$

Maintenant, l'astuce est de remarquer que $\omega_{g^0} = t\omega_{g^0} + (1-t)\omega_{g^0}$ et donc

$$\begin{aligned} -Ric(\omega_\varphi) &= t\omega_{g^0} + (1-t)\omega_{g^0} - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}t\partial\bar{\partial}\varphi - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}(\theta_X + X(\varphi)) \\ &= -t\left(\omega_{g^0} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi\right) - (1-t)\omega_{g^0} - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}(\theta_X + X(\varphi)) \\ &= -t\omega_\varphi - (1-t)\omega_{g^0} - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}(\theta_X + X(\varphi)), \end{aligned}$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}(\theta_X + X(\varphi)) = Ric(\omega_\varphi) - t\omega_\varphi - (1-t)\omega_{g^0}.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}(\theta_X + X(\varphi)) = \mathcal{L}_X\omega_\varphi,$$

ce qui est une conséquence du fait $\theta_X(g_\varphi) = \theta_X + X(\varphi)$ (voir démonstration du lemme 6.11) et de l'équation (6.8). \square

La méthode de la continuité consiste à montrer trois propriétés :

- Il existe une solution pour le temps $t = 0$.
- S'il existe une solution φ_{t_0} au temps $t_0 \in [0, 1[$ alors il existe $\delta > 0$ tel qu'il existe une solution φ_t pour tout $t \in [t_0, t_0 + \delta[$.
- Si il existe une solution φ_t pour tout temps $t \in [0, \varepsilon_1[$ alors il existe une solution φ_{ε_1} au temps ε_1 .

Grâce à ces trois propriétés, nous pouvons conclure qu'il existe une solution au temps $t = 1$ et donc qu'il existe une solution à l'équation (6.33). En effet, pour le voir posons

$$T_{max} = \sup \{t \in [0, 1] / \text{Il existe une solution } \varphi_t \text{ à l'équation (6.35) pour le temps } t\}.$$

Commençons par remarquer que T_{max} existe car l'ensemble des temps où il existe une solution est non vide par le première point (il existe une solution au temps $t = 0$). Maintenant, l'idée est de montrer par l'absurde que $T_{max} = 1$. Supposons donc que $T_{max} < 1$. Par le première point, on sait qu'il existe une solution au temps $t = 0$, on peut donc appliquer le deuxième point et obtenir qu'il existe une solution sur un intervalle de la forme $[0, \delta[$ donc $T_{max} > 0$. Nous avons alors deux possibilités soit ce supremum est atteint ou non :

- Supposons que T_{max} est atteint i.e. il existe une solution pour tout $t \in [0, T_{max}]$. On peut donc appliquer le deuxième point pour $t_0 = T_{max}$ et obtenir qu'il existe $\delta > 0$ tel qu'il existe des solutions sur l'intervalle $[T_{max}, T_{max} + \delta[$, ce qui contredit la maximalité de T_{max} . Ce qui est absurde.

- Supposons que T_{max} n'est pas atteint i.e. il existe une solution pour tout $t \in [0, T_{max}[$. On utilise alors le troisième point pour obtenir une solution au temps $t = T_{max}$ et on conclut alors comme dans le cas précédent que c'est absurde.

Ainsi nous obtenons bien que $T_{max} = 1$ et donc que l'équation (6.33) admet une solution.

Remarque. Une manière plus topologique de voir cette méthode consiste à considérer l'ensemble S des temps où il existe une solution :

$$S := \{t \in [0, 1] / \text{Il existe une solution } \varphi_t \text{ à l'équation (6.35) pour le temps } t\},$$

et à montrer que c'est un ouvert fermé non vide de $[0, 1]$, on pourra alors conclure par connexité de l'intervalle $[0, 1]$. Les trois points précédents reprennent ce principe. En effet, le premier point montre que l'ensemble S est non vide, tandis que le deuxième et le troisième traitent respectivement le caractère ouvert et fermé de l'ensemble S .

6.4.2 Existence d'une solution au temps $t = 0$

L'existence d'une solution au temps $t = 0$ revient à résoudre l'équation :

$$\det(g_{i\bar{j}}^0 + \varphi_{i\bar{j}}) = \det(g_{i\bar{j}}^0) \exp(h - \theta_X - X(\varphi)).$$

Ce type d'équation a fait l'objet de l'article [33] de Zhu dans lequel il montre par des arguments similaires (en utilisant notamment la méthode de la continuité) que cette équation admet une unique solution. De plus, on peut montrer (voir lemme A.12) qu'il existe donc des solutions φ_t à l'équation (6.35) sur un intervalle de la forme $[0, \delta[$ avec $\delta > 0$. On est donc ramener à travailler sur un intervalle de la forme $[\varepsilon_0, 1]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ où il sera plus facile de travailler par la suite. On considère donc :

$$S := \{t \in [\varepsilon_0, 1] / \text{Il existe une solution } \varphi_t \text{ à l'équation (6.35) pour le temps } t\},$$

et on veut donc montrer que S est un ouvert fermé non vide de $[\varepsilon_0, 1]$. Comme nous avons montré qu'il existe une solution en ε_0 , il nous reste à montrer que

- S'il existe une solution φ_{t_0} au temps $t_0 \in [\varepsilon_0, 1[$ alors il existe $\delta > 0$ tel qu'il existe une solution φ_t pour tout $t \in [t_0, t_0 + \delta[$.
- Sil existe une solution φ_t pour tout temps $t \in [\varepsilon_0, \varepsilon_1[$ alors il existe une solution φ_{ε_1} au temps ε_1 .

6.4.3 Caractère ouvert de l'ensemble des solutions

Dans cette section, nous voulons montrer que :

- S'il existe une solution φ_{t_0} au temps $t_0 \in]0, 1[$ alors il existe $\delta > 0$ tel qu'il existe une solution φ_t pour tout $t \in [t_0, t_0 + \delta[$.

La démonstration de ce fait repose sur *le théorème des fonctions implicites*. Pour cela, considérons l'application

$$F : \begin{cases} \mathcal{C}^3(M) \times [0, 1] & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(M) \\ (\varphi, t) & \longmapsto & \log \left(\frac{\det(g_{i\bar{j}}^0 + \varphi_{i\bar{j}})}{\det(g_{i\bar{j}}^0)} \right) - (h - \theta_X - X(\varphi) - t\varphi) \end{cases} .$$

Si φ_{t_0} est une solution au temps t_0 alors on a $F(\varphi_{t_0}, t_0) = 0$. Maintenant, on calcule la dérivée de F dans la direction de φ au point (φ_{t_0}, t_0) :

$$L_{(\varphi_{t_0}, t_0)} F(\psi, t) = \Delta' \psi + t_0 \psi + X(\psi),$$

où Δ' est le laplacien par rapport à la métrique $\omega_{\varphi_{t_0}}$. Comme cet opérateur est inversible pour tout $t \in [0, 1[$ (voir la section A.4), le *théorème des fonctions implicites* nous donne l'existence de $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]t_0, t_0 + \delta[$, il existe $\varphi_t \in \mathcal{C}^3(M)$ vérifiant $F(\varphi_t, t) = 0$ et tel que l'application $t \mapsto \varphi_t$ est continue.

Il reste à voir que ω_φ est bien une métrique kählérienne. Cela repose sur le *critère de Sylvester* :

Théorème 6.41 *Une matrice $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est définie positive si et seulement si*

$$\det(A_p) > 0, \quad \forall p \in \{1, \dots, n\},$$

où $A_p = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$ est la matrice extraite de A en prenant les p premières lignes et colonnes. \square

En combinant ce critère au fait que l'application $t \mapsto \varphi_t$ est continue, nous obtenons que l'application $f : t \in [t_0, t_0 + \delta[\mapsto (\det((g_\varphi)_1), \dots, \det((g_\varphi)_n)) \in \mathbb{R}^n$ est continue et donc comme $f(t_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ (puisque $\omega_{g^0} > 0$) nous voyons qu'en réduisant δ , on peut supposer que $f(t) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ i.e. $\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi_t > 0$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + \delta[$. Il reste à montrer que φ_t est lisse or ceci est une conséquence directe du *théorème de régularisation des solutions de l'équation de Monge-Ampère* (voir la section A.6 ou [31, 14] pour plus de détails).

6.4.4 Caractère fermé de l'ensemble des solutions

Dans cette section, nous voulons montrer :

- Pour tout $\varepsilon_0 \in]0, 1[$, s'il existe une solution φ_t pour tout temps $t \in [\varepsilon_0, \varepsilon_1[$ alors il existe une solution φ_{ε_1} au temps ε_1 .

Passons maintenant à la preuve. Celle-ci repose sur l'obtention d'une constante $C > 0$ indépendante du temps t , telle que la famille $(\varphi_t)_{t \in [\varepsilon_0, \varepsilon_1[}$ soit bornée pour la norme \mathcal{C}^3 i.e.

$$\|\varphi_t\|_{\mathcal{C}^3(M)} \leq C.$$

Supposons que nous ayons cette majoration, celle-ci sera démontrée dans la section suivante, alors en utilisant le *théorème d'Arzelà-Ascoli*, on obtient qu'il existe une fonction $\varphi_{\varepsilon_1} : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, quitte à extraire une sous-suite, elle vérifie

$$\varphi_{t_n} \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \varphi_{\varepsilon_1}, \quad \text{quand } t_n \longrightarrow \varepsilon_1.$$

Comme la convergence est \mathcal{C}^2 , on peut passer à la limite (simple) dans l'équation (6.35) :

$$\det(g_{i\bar{j}}^0 + \varphi_{i\bar{j}}) = \det(g_{i\bar{j}}^0) \exp(h - \theta_X - X(\varphi) - t\varphi).$$

et d'obtenir que φ_{ε_1} vérifie

$$\det(g_{i\bar{j}}^0 + (\varphi_{\varepsilon_1})_{i\bar{j}}) = \det(g_{i\bar{j}}^0) \exp(h - \theta_X - X(\varphi_{\varepsilon_1}) - \varepsilon_1\varphi_{\varepsilon_1}).$$

c'est-à-dire qu'elle est solution de (6.35) au temps $t = \varepsilon_1$. De plus, la solution φ_{ε_1} est bien lisse et ceci est encore une conséquence directe du *théorème de régularisation des solutions de l'équation de Monge-Ampère* (voir la section A.6 ou [31, 14] pour plus de détails).

Il reste à montrer que $\omega_{g^0} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi$ définie bien une métrique kählérienne, cela est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 6.42 *Si φ est une solution de l'équation*

$$(\omega_g + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^{F+\varphi}\omega_g^n,$$

où ω_g est une métrique kählérienne et F une fonction lisse sur M à valeurs réelles. Alors il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de M , ω_g , $\sup_M |F|$, et de $\inf_M \Delta F$ telle que

$$C^{-1}(g_{i\bar{j}}) \leq (g_{i\bar{j}} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\varphi_{i\bar{j}}) \leq C(g_{i\bar{j}}).$$

Démonstration. On renvoie à [31]. □

6.4.5 Démonstration de l'estimation a priori

Nous voulons donc montrer que :

- Si la famille $(\varphi_t)_{t \in [\varepsilon_0, 1]}$ est solution de l'équation (6.35), alors il existe $C > 0$ indépendante du temps t , telle que la famille $(\varphi_t)_{t \in [\varepsilon_0, 1]}$ soit bornée pour la norme \mathcal{C}^3 i.e.

$$\|\varphi_t\|_{\mathcal{C}^3(M)} \leq C.$$

La première étape consiste à réduire cette estimation a priori à une estimation uniforme sur la famille $(\varphi_t)_{t \in [\varepsilon_0, 1]}$ i.e. il existe une constante $C > 0$ uniforme telle que

$$\|\varphi_t\|_{\mathcal{C}^0} \leq C.$$

En effet, en utilisant les calculs de l'appendice A de [31], on peut montrer l'inégalité suivante :

Lemme 6.43 *Soit $\varphi_t = \varphi$ une solution de 6.35 au temps $t \in [\varepsilon_0, 1]$. Alors il existe deux constantes c et C telles que*

$$n + \Delta\varphi_t \leq C \cdot \exp\left(c[\varphi_t - \inf_M \varphi_t]\right) \cdot [1 + \exp(-t \sup_M \varphi_t)].$$

Démonstration. C'est une conséquence des calculs de Yau et de Calabi fait dans l'appendice A de [31]. On peut également consulter [28]. \square

Donc si nous avons que φ est uniformément bornée pour tout $t \in [\varepsilon_0, 1]$. Nous obtenons alors qu'il existe une constante $C > 0$ uniforme telle que

$$n + \Delta\varphi_t \leq C, \quad \forall t \in [\varepsilon_0, 1].$$

Nous avons alors le lemme suivant qui permet de conclure :

Lemme 6.44 *Soit $(\varphi_t)_{t \in [\varepsilon_0, 1]}$ une famille de solutions de 6.35 pour les temps $t \in [\varepsilon_0, 1]$. Il existe une constante $C > 0$ uniforme telle que*

$$\|\varphi_t\|_{\mathcal{C}^3(M)} \leq C.$$

Démonstration. On pose

$$S := g^{i\bar{r}} g^{j\bar{s}} g^{k\bar{t}} \varphi_{i\bar{j}k} \varphi_{\bar{r}s\bar{t}}.$$

Par les calculs de Yau et Calabi dans l'appendice A de [31], on obtient que $S \leq C$ pour une constante $C > 0$ uniforme. Le lemme s'en déduit alors. On pourra aussi consulter [28]. \square

Nous sommes donc ramener à montrer que :

- Si $(\varphi_t)_{t \in [\varepsilon_0, 1]}$ est une famille de solutions à (6.35) pour les temps $t \in [\varepsilon_0, 1]$ alors il existe une constante $C > 0$ uniforme telle que

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}^0} \leq C.$$

La deuxième étape consiste à réduire l'équation précédente à montrer que $\sup_M \varphi_t < C$ où C est une constante positive uniforme indépendante de t . En effet, rechercher $C > 0$ telle que

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}^0} \leq C,$$

est équivalent à chercher C et \tilde{C} telle que

$$\sup_M \varphi_t \leq C \quad \text{et} \quad \tilde{C} \leq \inf_M \varphi_t,$$

or on a une inégalité de type Harnack :

$$-\inf_M \varphi_t \leq C(1 + \sup_M \varphi_t).$$

(voir [28, 30] pour plus de détails). Ce qui permet de conclure.

Nous sommes donc ramener à montrer que :

- Si $(\varphi_t)_{t \in [\varepsilon_0, 1]}$ est une famille de solutions à (6.35) pour les temps $t \in [\varepsilon_0, 1]$ alors il existe une constante $C > 0$ uniforme telle que

$$\sup_M \varphi_t \leq C.$$

La dernière étape consiste donc à montrer cette inégalité.

Nous aurons besoin d'un lemme concernant les domaines convexes que nous énonçons immédiatement pour plus de simplicité :

Lemme 6.45 *Soit Ω un convexe borné de \mathbb{R}^n . Alors il existe un unique ellipsoïde, appelé ellipsoïde minimal de Ω , qui a un volume minimal parmi tous les ellipsoïdes contenant Ω et tel que*

$$\frac{1}{n}E \subset \Omega \subset E,$$

où $\frac{1}{n}E$ est la dilatation de facteur $\frac{1}{n}$ et qui préserve le centre de E . De plus si T est une application affine telle que $|T| = 1$ qui laisse invariant le centre x_0 de E i.e. $T(x) = A(x - x_0) + x_0$ où A est une matrice) et telle que $T(E)$ est une boule B_R , alors on a

$$B_{R/n} \subset T(\Omega) \subset B_R,$$

où les boules $B_{R/n}$ et B_R ont même centre.

Démonstration. Comme la preuve n'apporte aucune information importante supplémentaire, on renvoie à [15, 14]. \square

Nous aurons aussi besoin du *principe de comparaison* pour les fonction convexes suivant que nous énonçons avant de commencer :

Théorème 6.46 *Si u et v sont deux fonctions convexes définies sur l'adhérence $\overline{\Omega}$ d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^n qui vérifient $|\nabla u(E)| \leq |\nabla v(E)|$ pour tout borélien E de Ω alors on a*

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} \{u(x) - v(x)\} = \min_{x \in \partial\Omega} \{u(x) - v(x)\},$$

où $|\nabla u(E)|$ désigne la mesure de $\nabla u(E)$ pour la mesure de Lebesgue.

Démonstration. Comme la preuve n'apporte aucune information importante supplémentaire, on renvoie à [14]. \square

Maintenant, remarquons que si $\varphi = \varphi_t$ est une solution de l'équation (6.35) alors en posant $u = u_t = u^0 + \varphi_t$, on obtient (comme dans l'équation (6.34)) que u satisfait

$$\det(u_{ij}) = \exp(-c_X - w - \sum_{l=1}^n c_l \frac{\partial u}{\partial x_l}), \quad \text{sur } \mathbb{R}^n, \quad (6.37)$$

où $w = w_t = tu + (1 - t)u^0$. Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 6.47 *On a*

$$m_t = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} w_t(x) \leq C,$$

où $C > 0$ est indépendante de $t \in [\varepsilon_0, 1]$.

Démonstration. Commençons par remarquer que

$$m_t < +\infty, \quad \forall t \in [\varepsilon_0, 1].$$

Cela repose sur le fait qu'une fonction convexe sur \mathbb{R}^n qui a un point critique admet un minimum global. Pour appliquer ce résultat, on remarque que w_t est bien une fonction convexe comme barycentre des deux fonctions convexes u et u^0 , pour conclure, il suffit donc de montrer que $0 \in Dw_t(\mathbb{R}^n)$. En effet, cela résulte du calcul suivant

$$\begin{aligned} Dw_t(\mathbb{R}^n) &= tDu(\mathbb{R}^n) + (1-t)Du^0(\mathbb{R}^n) && \text{(par définition de } w) \\ &= t\overset{\circ}{\Omega} + (1-t)\overset{\circ}{\Omega} && \text{(lemme 6.28 et proposition 6.39)} \\ &= \overset{\circ}{\Omega} && \text{(car } \overset{\circ}{\Omega} \text{ est convexe)} \end{aligned}$$

et de la définition 6.24 qui nous donne que $0 \in \overset{\circ}{\Omega}$. Nous posons alors

$$A_k := \{x \in \mathbb{R}^n / m_t + k \leq w(x) \leq m_t + k + 1\},$$

et nous avons alors les propriétés élémentaires suivantes qui découlent directement du fait que w est convexe et que $m_t \leq +\infty$:

- A_k est borné pour tout $k \geq 0$ et $\cup_k A_k = \mathbb{R}^n$
- $m_t \in A_0$.
- $\cup_{i=0}^k A_i$ est convexe pour tout $k \geq 0$.

De plus, comme u et u^0 sont convexes, nous avons que (u_{ij}) et (u_{ij}^0) sont des matrices positives, en particulier il y a un résultat d'algèbre linéaire qui nous donne que

$$\det(w_{ij}) = \det(tu_{ij} + (1-t)u_{ij}^0) \geq \det(tu_{ij}) + \det((1-t)u_{ij}^0),$$

or comme (u_{ij}^0) est positive, nous avons $\det((1-t)u_{ij}^0) \geq 0$ d'où

$$\begin{aligned} \det(w_{ij}) &\geq \det(t \cdot u_{ij}) \\ &\geq t^n \cdot \det(u_{ij}) && \text{(propriété du déterminant)} \\ &\geq t^n \cdot e^{-cx-nd} \cdot e^{-w} && \text{(par l'équation (6.37))} \end{aligned}$$

où $d = \sup\{c_l y_l / y \in \Omega^*\}$. Ainsi comme $t \in [\varepsilon_0, 1]$, nous obtenons

$$\det(w_{ij}) \geq C_0 e^{-m_t} \quad \text{dans } A_0,$$

où $C_0 = \varepsilon_0^n e^{-c\varepsilon_0 - d - 1}$. En utilisant le lemme 6.45, il existe une transformation linéaire $y = T(x)$ avec $|T| = 1$ laissant le centre de l'ellipsoïde minimal de A_0 invariant, telle que

$$B_{R/n} \subset T(A_0) \subset B_R.$$

et donc préservant l'inégalité précédente. Nous avons alors

$$R \leq \sqrt{2n}C_0^{-1/2n}e^{m_t/2n}.$$

En effet, on considère l'application

$$v : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ y & \longmapsto \frac{1}{2}C_0^{-1/2n}e^{m_t/2n}[|y - y_t|^2 - (\frac{R}{n})^2] + m_t + 1 \end{cases},$$

où y_t est le centre de l'ellipsoïde minimal de A_0 . Un calcul nous donne que

$$\det(v_{ij}) = C_0e^{-m_t} \text{ dans } T(A_0),$$

et que $v \geq w$ sur $\partial T(A_0)$ donc sur $T(A_0)$ par le *principe de comparaison*(voir [14]). En particulier, nous avons

$$m_t \leq w_t \leq v(y_t) = -\frac{1}{2}C_0^{1/n}e^{m_t/n}(\frac{R}{n})^2 + m_t + 1,$$

ce qui nous donne bien l'inégalité souhaitée.

Maintenant, par la convexité de w , nous obtenons

$$T(A_k) \subset B_{2(k+1)R},$$

de plus on remarque que

$$\cup_k A_k = \mathbb{R}^n.$$

De plus, comme T est de norme 1, c'est une isométrie affine de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n donc un isomorphisme, ainsi la famille $(T(A_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est aussi un recouvrement de \mathbb{R}^n . Nous obtenons donc, en notant ω_n l'aire de la sphère S_{n-1} , que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-w} &\leq \sum_k \int_{T(A_k)} e^{-w} \\ &\leq \sum_k e^{-m_t-k} |T(A_k)| \end{aligned}$$

(car $\omega \geq -m_t - k$ sur A_k et donc sur $T(A_k)$ car T est une isométrie)

$$\begin{aligned} &\leq \omega_n \sum_k e^{-m_t-k} |2(k+1)R|^n && \text{(car } T(A_k) \subset B_{2(k+1)R}\text{)} \\ &= \omega_n \frac{(2R)^n}{e^{m_t}} \sum_k \frac{(k+1)^n}{e^k} && \leq Ce^{m_t/2} \end{aligned}$$

(car $\sum_k \frac{(k+1)^n}{e^k}$ est convergente d'après le *principe de d'Alembert* par exemple et grâce aussi à l'inégalité $R \leq \sqrt{2n}C_0^{-1/2n}e^{m_t/2n}$.)

En remarquant que cette inégalité est invariante par transformation linéaire T vérifiant $|T| = 1$, nous obtenons donc

$$e^{m_t/2} \geq \frac{1}{C} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-w},$$

de plus, en utilisant l'équation (6.37), cela nous donne

$$e^{m_t/2} \geq \int_{\mathbb{R}^n} \det(u_{ij}) \cdot e^{c^x} \cdot \exp\left(\sum_l \frac{\partial u}{\partial x_l} dx\right),$$

on conclut alors grâce au changement de variables $y = Du(x)$ que

$$e^{m_t/2} \geq \frac{1}{C} \int_{\Omega} \exp\left(\sum_i c_i y_i\right) dy =: \tilde{C},$$

où \tilde{C} est bien indépendant de t (grâce à la dernière égalité). Au final, nous obtenons bien, en passant au logarithme, que

$$m_t \leq C,$$

où C est une constante positive indépendante de t . □

Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 6.48 *Soit $x^t = (x_1^t, \dots, x_n^t) \in \mathbb{R}^n$ un point où est atteint le minimum de $w = w_t$. Alors on a*

$$|x^t| \leq C,$$

où C est une constante uniforme.

Démonstration.

On raisonne par l'absurde, on suppose donc que

$$\forall C > 0, \exists t \in [\varepsilon_0, 1], |x^t| > C.$$

Remarquons pour commencer que pour tout vecteur unitaire $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u^0}{\partial \xi} e^{-w} dx = 0.$$

En effet, nous avons grâce à l'équation (6.32) que :

$$0 = \int_{\Omega} y_i \exp\left(\sum_{l=1}^n c_l y_l\right) dy,$$

en faisant le changement de variable $y = Du(x)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \exp\left(\sum_{l=1}^n c_l \frac{\partial u}{\partial x_l}\right) \det(u_{pq}) dx \\ &= e^{-cx} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_i} e^{-w} dx \end{aligned} \quad (\text{grâce à l'équation (6.37)})$$

Or nous avons que $w = t \cdot u + (1-t) \cdot u^0$ donc

$$u = \frac{1}{t} \cdot w - \frac{1-t}{t} \cdot u^0,$$

ainsi

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{t} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_i} - \frac{1-t}{t} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_i}.$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial w}{\partial x_i} e^{-w} dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial w}{\partial x_i} e^{-w} dx_i \right) dx_{\setminus\{i\}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} ([e^{-w_i}]_{-\infty}^{+\infty}) dx_{\setminus\{i\}}, \end{aligned}$$

où la fonction $w_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la i -ième fonction partielle de w , c'est-à-dire qu'elle est définie par $w_i : x \in \mathbb{R} \mapsto w(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ où les autres variables $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ sont fixées au départ. Nous remarquons alors que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial w}{\partial x_i} e^{-w} dx = 0.$$

En effet, on a vu dans la démonstration du lemme 6.47 que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-w} dx$ est finie et donc $e^{-w_i(x)} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm\infty$.

Si nous revenons à la première équation, nous obtenons donc

$$0 = -\frac{1-t}{t} e^{-cx} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u^0}{\partial x_i} dx,$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u^0}{\partial x_i} e^{-w} dx = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Ainsi

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u^0}{\partial \xi} e^{-w} dx,$$

pour tout vecteur unitaire $\xi \in \mathbb{R}^n$.

L'objectif maintenant est de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u^0}{\partial \xi} e^{-w} dx > 0.$$

Ce qui amènera une contradiction.

On rappelle que

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall r \in \{1, \dots, d\}, \langle x, \nu_r \rangle \leq 1\}.$$

De plus, en utilisant l'expression de Du^0 (voir la démonstration du lemme 6.28), on obtient que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \text{dist}(Du^0(x), \partial\Omega) = 0.$$

Ainsi en posant pour tout $r \in \{1, \dots, d\}$,

$$g_r(x) := \log[1 - \langle Du^0(x), \nu_r \rangle],$$

on a

$$\forall M > 0, \exists C > 0, \exists r \in \{1, \dots, d\}, |x^t| > C \text{ et } g_r(x^t) < -M.$$

De plus, en remarquant que $\|Dg_r\|$ est bornée par une constante $A > 0$ sur \mathbb{R}^n (voir lemme 6.29), nous obtenons par l'inégalité des accroissements finis appliquée sur une boule $B_R(x^t)$ de centre x^t et de rayon R :

$$|g_r(x) - g_r(x^t)| \leq \|Dg_r\| \|x - x^t\| \leq AR.$$

Ce qui nous donne, en prenant $\tilde{R} = R/A$,

$$g_r(x) - g_r(x^t) \leq \tilde{R},$$

nous obtenons alors

$$g_r(x) \leq \tilde{R} + g_r(x^t) \leq \tilde{R} - M, \quad \forall x \in B_R(x^t).$$

En utilisant l'expression de g_r et en passant à l'exponentielle, cela nous donne

$$1 - \langle Du^0(x), \nu_r \rangle \leq e^{\tilde{R}-M},$$

que l'on peut écrire, en posant $\xi = \nu_r/|\nu_r|$, sous la forme

$$\frac{1 - e^{\tilde{R}-M}}{|\nu_r|} \leq \langle Du^0(x), \xi \rangle, \quad \forall x \in B_R(x^t).$$

d'où en se rappelant que $Du^0(x) = \frac{\partial u^0(x)}{\partial \xi}$, on a

$$\frac{1 - e^{\tilde{R}-M}}{|\nu_r|} \leq \frac{\partial u^0(x)}{\partial \xi}, \quad \forall x \in B_R(x^t).$$

Donc, on a

$$\int_{B_R(x^t)} \frac{\partial u^0}{\partial \xi} e^{-w} dx \geq \frac{1 - e^{\tilde{R}-M}}{|\nu_r|} \int_{B_R(x^t)} e^{-w} dx.$$

Maintenant, remarquons que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-w} dx = e^{c^x} \int_{\Omega} \exp\left(\sum_{l=1}^n c_l y_l\right) dy := \beta.$$

Donc, en utilisant la définition de la limite, pour tout $t \in [\varepsilon_0, 1]$ et pour tout $\varepsilon > 0$ petit, il existe R_ε tel que pour tout $d > R_\varepsilon$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_d(x^t)} e^{-w} dx \leq \varepsilon.$$

En particulier, nous posons $\varepsilon = \frac{\beta}{8|\nu_r|d_0}$ où $d_0 := \sup\{|x|/ \in \Omega\}$. De plus, comme $\frac{\partial u^0}{\partial \xi} \in \Omega$, nous obtenons que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_d(x^t)} \frac{\partial u^0}{\partial \xi} e^{-w} dx \right| \leq d_0 \varepsilon \leq \frac{\beta}{8|\nu_r|}.$$

On sait que l'application $f : d \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_{B_d(x^t)} e^{-w} dx \in \mathbb{R}$ vérifie

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} f(r) = \beta,$$

ainsi, par définition de la limite, il existe $B > 0$ telle que pour tout $d > B$, on a $\int_{B_d(x^t)} e^{-w} dx \geq \frac{1}{2}\beta$, on obtient quitte à prendre R suffisamment grand (en particulier plus grand que R_ε)

$$\int_{B_R(x^t)} \frac{\partial u^0}{\partial \xi} e^{-w} dx \geq \frac{1 - e^{\tilde{R}-M}}{2|\nu_r|} \beta$$

et, en prenant $M = \tilde{R} + \log 2 > 0$, nous obtenons

$$\int_{B_R(x^t)} \frac{\partial u^0}{\partial \xi} e^{-w} dx \geq \frac{\beta}{4|\nu_r|} > 0.$$

Ainsi, nous obtenons que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u^0}{\partial \xi} e^{-w} dx > 0.$$

Nous avons donc notre contradiction et cela termine la preuve. \square

Nous avons alors tous les pré-requis pour conclure que la fonction φ est bornée supérieurement :

Lemme 6.49 Soit $\varphi = \varphi_t$ une solution de l'équation (6.37) pour tout $t \in [\varepsilon_0, 1]$. Alors on a

$$\sup_M \varphi \leq C,$$

pour $C > 0$ indépendante de $t \in [\varepsilon_0, 1]$.

Démonstration. Rappelons que nous avons défini

$$\bar{v}(x) = \max\{\langle x, p^{(k)} \rangle \mid k = 1, \dots, m\},$$

et que nous

$$\bar{v} \leq u^0 \leq \log m + \bar{v},$$

(voir le lemme 6.30). En utilisant le fait que u est convexe, nous obtenons par l'inégalité de convexité que

$$u_t(0) \geq \langle z, -y \rangle + u_t(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

où $z = Du(y) \in Du(\mathbb{R}^n) = \Omega^*$ (voir lemme 6.39). Ce qui se ré-écrit sous la forme

$$u_t(0) + \langle z, y \rangle \geq u_t(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Or, la proposition 6.30 nous donne que

$$\bar{v}(y) = \max_i \langle y, p^{(i)} \rangle \geq \langle y, z \rangle.$$

Ce qui nous donne

$$\bar{v}(x) + u_t(0) \geq u_t(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

Ainsi, grâce à la première inégalité du lemme 6.30, nous avons

$$\varphi_t = u_t - u^0 \leq \bar{v} - u^0 + u_t(0) \leq C + u_t(0),$$

Il suffit donc de montrer que $u(0)$ est uniformément borné. Pour cela, on considère le point minimal x^t de w^t . Par le lemme 6.48, nous avons que

$$|x^t| \leq C.$$

De plus, comme $Dw(\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{\Omega}$ qui est borné, on a que

$$|Dw(\mathbb{R}^n)| \leq d_0 := \sup\{|x| \mid x \in \Omega\},$$

donc en utilisant le théorème des accroissement finis, nous obtenons

$$|w(0) - w(x^t)| \leq \|Dw\|_\infty \cdot |x^t|.$$

où $Dw(x)$ est le gradient en x de w . De plus, grâce au lemme 6.48, nous savons qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de t telle que $|x^t| \leq C$, ce qui implique que

$$|w(0) - w(x^t)| \leq d_0 \cdot C.$$

Par le lemme 6.47, on a que $w(x^t) = m_t \leq \tilde{C}$ où \tilde{C} est une constante indépendante de t . Donc on a

$$-\tilde{C} - d_0 \cdot C \leq w(0) \leq \tilde{C} + d_0 \cdot C,$$

or, comme $w = tu + (1-t)u^0$, on a

$$-\tilde{C} - d_0 - (1-t)u^0(0) \cdot C \leq t \cdot u_t(0) \leq \tilde{C} + d_0 - (1-t)u^0(0)$$

or, par définition de u^0 (voir le lemme 6.28), on a que $u^0(0) = \log m$ donc

$$-\tilde{C} - d_0 \cdot C - (1-t) \log m \leq t \cdot u_t(0) \leq \tilde{C} + d_0 \cdot C - (1-t) \log m$$

or comme m est un entier strictement positif, nous obtenons que $\log m \leq 0$, ce qui implique que

$$-\tilde{C} - d_0 - \log m \cdot C \leq t \cdot u_t(0) \leq \tilde{C} + d_0$$

d'où

$$t|u_t(0)| = |t \cdot u_t(0)| \leq \theta,$$

où θ est une constante positive indépendante de t . Comme nous avons pris $t \in [\varepsilon_0, 1]$, nous pouvons diviser par t et majorer par $\frac{1}{\varepsilon_0}$ et nous obtenons donc bien que

$$|u_t(0)| \leq \Theta,$$

avec Θ une constante positive indépendante de t . □

Remarque. On remarque qu'il est donc bien important de ne pas chercher à obtenir l'estimation sur l'intervalle $[0, 1]$ mais sur un intervalle de la forme $[\varepsilon_0, 1]$ pour à la fin pouvoir diviser par t et majorer par $\frac{1}{\varepsilon_0}$.

A Annexe : Étude du linéarisé de l'application F définie dans la section 6.4.3

Dans cette section, nous voulons étudier le linéarisé

$$L_{(\varphi_{t_0}, t_0)} : \begin{cases} \mathcal{C}^k(M) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{k-2}(M) \\ \psi & \longmapsto & \Delta' \psi + t_0 \psi + X(\psi) \end{cases} ,$$

où Δ' est le laplacien par rapport à la métrique $\omega_{\varphi_{t_0}} := \omega_{g^0} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \varphi_{t_0}$, de l'équation

$$\det(g_{i\bar{j}}^0 + \varphi_{i\bar{j}}) = \det(g_{i\bar{j}}^0) \exp(h - \theta_X - X(\varphi) - t\varphi). \quad (\text{A.1})$$

Nous allons utiliser la théorie des opérateurs elliptiques, nous aurons donc besoin d'introduire les espaces d'Holder $C^{k+\alpha}(M)$, notamment pour obtenir le théorème A.8, ce que nous ferons dans la partie suivante. En particulier comme M est compacte, le lemme A.5 nous permettra en particulier d'étudier l'application $L_{(\varphi_{t_0}, t_0)}$ sur les espaces d'Holder $\mathcal{C}^{k+\alpha}(M)$ (pour $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0, 1[$) :

$$L_{(\varphi_{t_0}, t_0)} : \begin{cases} \mathcal{C}^{k+\alpha}(M) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{k-2+\alpha}(M) \\ \psi & \longmapsto & \Delta' \psi + t_0 \psi + X(\psi) \end{cases} .$$

L'objectif final est bien entendu de montrer que $L_{(\varphi_{t_0}, t_0)}$ est inversible.

On introduit une notation qui nous servira par la suite :

$$\mathcal{M}_X = \{ \phi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) / \omega_g + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \phi > 0 \text{ et } \text{Im}(X)(\phi) = 0 \}.$$

A.1 Espaces d'Holder

A.1.1 Cas de \mathbb{R}^n

Pour commencer, nous allons définir les fonctions de Hölder sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dont le bord est au moins \mathcal{C}^1 , pour plus de simplicité, on peut aussi supposer que Ω est une boule ouverte de \mathbb{R}^n . On fixe donc Ω un tel domaine.

Définition A.1 *On dit qu'une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est α -höldérienne, pour $\alpha \in]0, 1[$, si on a*

$$\sup_{x, y \in \Omega, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty.$$

On note alors $\mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ l'ensemble des fonctions α -höldérienne. On peut alors munir cet espace d'une norme dite *norme \mathcal{C}^α* par

$$|f|_{\mathcal{C}^\alpha} := \sup_{x, y \in \Omega, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

On peut alors montrer le lemme suivant :

Lemme A.2 Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, l'espace $\mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ muni de la norme \mathcal{C}^α est un espace de Banach. En particulier, $\mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ est complet.

Démonstration. On pourra consulter [13]. □

Une première généralisation de cette notion est la suivante : pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on pose

$$|f|_{\mathcal{C}^{k+\alpha}} := \sup_{x \in \Omega, |l| \leq k} |\partial^l f(x)| + \sup_{|l|=k} |\partial^l f|_{\mathcal{C}^\alpha},$$

où $l = (l_1, \dots, l_j) \in \mathbb{N}^j$ est un multi-indice (et on pose $|l| := j$) et

$$\partial^l = \frac{\partial}{\partial x_1^{l_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_j^{l_j}}$$

et on pose

$$\mathcal{C}^{k+\alpha}(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega) \mid |f|_{\mathcal{C}^{k+\alpha}} \leq +\infty\}.$$

On peut montrer comme précédemment que

Lemme A.3 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\alpha \in]0, 1[$, l'espace $\mathcal{C}^{k+\alpha}(\Omega)$ muni de la norme $\mathcal{C}^{k+\alpha}$ est un espace de Banach. En particulier, $\mathcal{C}^{k+\alpha}(\Omega)$ est complet. □

A.1.2 Cas d'une variété riemannienne compacte

On veut étendre la notion de fonctions α -holdériennes au cas d'une variété riemannienne compacte M .

L'idée naturelle est d'utiliser le fait que M est compacte, on peut alors recouvrir M par un nombre fini d'ouverts de cartes :

$$M = \cup_{j=1}^m U_j.$$

et localement sur ces cartes, M est difféomorphe à un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on peut définir la norme $\mathcal{C}^{k+\alpha}$ sur chaque ouvert U_j et définir une norme "globale" sur M par

$$|f|_{\mathcal{C}^{k+\alpha}} := \sup_{1 \leq i \leq m} |f|_{U_j}|_{\mathcal{C}^{k+\alpha}}.$$

Une autre manière qui coïncide avec la précédente mais qui peut permettre de définir cette notion sur une variété non nécessairement compacte est la suivante. On fixe une variété riemannienne connexe (M, g) et note d la distance sur M induite par la métrique g . Pour tout fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, on définit alors :

$$|f|_{\mathcal{C}^\alpha} = \sup_{x, y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)^\alpha},$$

cette notion peut s'étendre à tout type de tenseur, grâce au transport parallèle le long des géodésiques par rapport à la connexion de Levi-Civita :

$$|T|_{\mathcal{C}^\alpha} = \sup_{x, y} \frac{|T(x) - T(y)|}{d(x, y)^\alpha},$$

où la différence $T(x) - T(y)$ est calculé en transportant $T(y)$ au point x le long de la géodésique minimal (pour la connexion de Levi-Civita) joignant x à y . On pose alors

$$|f|_{\mathcal{C}^\alpha} := \sup_M (|f| + |\nabla f| + \dots + |\nabla^k f|) + |\nabla^k f|_{\mathcal{C}^\alpha}.$$

On pose alors comme précédemment

$$\mathcal{C}^{k+\alpha}(M) := \{f \in \mathcal{C}^k(M) \mid |f|_{\mathcal{C}^{k+\alpha}} \leq +\infty\}.$$

On peut alors montrer comme pour \mathbb{R}^n que

Lemme A.4 *Pour toute variété compacte M , pour $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\alpha \in]0, 1[$, l'espace $\mathcal{C}^{k+\alpha}(M)$ muni de la norme $\mathcal{C}^{k+\alpha}$ est un espace de Banach.* \square

Remarquons que comme M est une variété compacte, nous avons $\text{diam}(M) \leq +\infty$ et donc pour tout $(x, y) \in M^2$ et $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)^\alpha} = \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)^\beta} \cdot d(x, y)^{\beta-\alpha} \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)^\beta} \text{diam}(M)^{\beta-\alpha}.$$

Ainsi nous obtenons le lemme suivant :

Lemme A.5 *Pour toute variété riemannienne compacte M , pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $0 < \alpha < \beta < 1$, nous avons les inclusions suivantes :*

$$\mathcal{C}^k(M) \subset \mathcal{C}^{k+\alpha}(M) \subset \mathcal{C}^{k+\beta}(M) \subset \mathcal{C}^{k+1}(M).$$

\square

A.2 Opérateurs Elliptiques

Commençons par traiter le cas de \mathbb{R}^n avant de l'étendre au cas des variétés riemanniennes compactes M . On dit qu'un opérateur L est *un opérateur différentiel d'ordre 2* s'il est de la forme

$$L(f) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} + \sum_{l=1}^n b_l \frac{\partial f}{\partial x^l} + cf, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}),$$

où a_{jk} et b_l appartient à $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ qui vérifient en plus $a_{jk} = a_{kj}$.

On dit alors qu'un opérateur L différentiel d'ordre 2 est *elliptique* si la matrice $a_{jk}(x)$ est définie positive pour tout $x \in \Omega$, et on dit que L est *uniformément elliptique* s'il existe $\lambda, \Lambda > 0$ tels que

$$\lambda|v|^2 \leq \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x)v^j v^k \leq \Lambda|v|^2, \quad \forall (x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^n.$$

Nous avons le lemme dit *des estimations locales de Schauder* :

Théorème A.6 Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un domaine et soit L un opérateur différentiel d'ordre 2 uniformément elliptique avec comme constantes Λ et λ . On considère un domaine $\Omega' \subset \Omega$ tel que $d(\Omega', \partial\Omega) > 0$ et on suppose $\alpha \in]0, 1[$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors il existe $C > 0$ tel que si $L(f) = g$ alors on a

$$|f|_{\mathcal{C}^{k+2+\alpha}(\Omega')} \leq C(|g|_{C^{k+\alpha}(\Omega)} + |f|_{C^0(\Omega)}),$$

où C est une constante dépendant uniquement de $k, \alpha, \Omega, \Omega'$, de la norme $\mathcal{C}^{k+\alpha}$ des coefficients de L , de λ et Λ .

De plus, si f est, en fait, \mathcal{C}^h (pour $h > 2$) alors f est, en fait, $\mathcal{C}^{h+k+2+\alpha}$ quand $L(f)$ et les coefficients de L sont $\mathcal{C}^{k+\alpha}$.

Démonstration. On pourra consulter [13]. □

On veut maintenant étendre cette notion au cas des variétés riemanniennes compactes M . Pour cela, on procède de la même manière que pour les espaces d'Hölder : on peut recouvrir M par un nombre fini d'ouverts de cartes :

$$M = \cup_{j=1}^m U_j.$$

On dit que $L : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ est un opérateur linéaire différentiel d'ordre 2 si par restriction sur les ouverts U_j , il est de la forme :

$$L(f) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} + \sum_{l=1}^n b_l \frac{\partial f}{\partial x^l} + cf, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}),$$

où a_{jk} et b_l appartiennent à $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ qui vérifient en plus $a_{jk} = a_{kj}$. On étend alors les définitions d'opérateurs elliptiques et uniformément elliptiques. En particulier, comme M est compacte, ces deux notions coïncident. De plus, comme M peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts de cartes, on obtient le théorème suivant dit *des estimations de Schauder* :

Théorème A.7 Soit L un opérateur différentiel d'ordre 2 (uniformément) elliptique avec comme constantes Λ et λ sur une variété riemannienne compacte M .

$$|f|_{\mathcal{C}^{k+2+\alpha}(M)} \leq C(|g|_{C^{k+\alpha}(M)} + |f|_{C^0(M)}),$$

où C est une constante dépendant uniquement de $k, \alpha, \Omega, \Omega'$, de la norme $\mathcal{C}^{k+\alpha}$ des coefficients de L , de λ et Λ .

De plus, si f est, en fait, \mathcal{C}^h (pour $h \geq 2$) alors f est, en fait, $\mathcal{C}^{h+k+2+\alpha}$ quand $L(f)$ et les coefficients de L sont $\mathcal{C}^{k+\alpha}$. □

Remarque. La seconde propriété s'appelle aussi la propriété de *régularisation des opérateurs elliptiques*.

A.3 Adjoint formel d'un opérateur

On travaille sur une variété riemannienne orientée et compacte M dont on fixe une forme volume dV et on considère un opérateur P linéaire différentiel d'ordre 2. On peut alors définir un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ par

$$\langle f, g \rangle = \int_M fg \, dV, \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}).$$

On peut étendre $(\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en un espace d'Hilbert $L^2(M)$ constitué des fonctions $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ mesurables de carrés sommables i.e. telle que

$$\|f\| = \int_M |f|^2 \, dV \leq +\infty.$$

On a alors le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $L^2(M)$ défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_M f \bar{g} \, dV, \quad \forall f, g \in L^2(M).$$

On dit que Q est un *adjoint formel* à l'opérateur linéaire P si on a

$$\langle Pf, g \rangle = \langle f, Qg \rangle, \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}).$$

On note souvent l'adjoint formel de P par P^* . De plus, on dit que P est *auto-adjoint* si $P^* = P$.

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème A.8 *Soit L un opérateur elliptique d'ordre 2 à coefficients lisses sur une variété riemannienne compacte M . Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on a que $L : (\ker L)^\perp \cap C^{k+2+\alpha}(M) \rightarrow (\ker L^*)^\perp \cap C^{k+\alpha}(M)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On pourra consulter [13]. □

Le fait que nous travaillons dans un espace d'Hilbert permet d'utiliser la théorie spectrale pour obtenir un résultat sur les valeurs propres de $L_{\varphi,t}$:

Théorème A.9 *Soit L un opérateur différentiel linéaire d'ordre 2 elliptique auto-adjoint sur une variété riemannienne compacte M . Alors les valeurs propres de L constituent une suite de réels $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_k| = +\infty$. De plus, les espaces propres V_{λ_k} sont de dimension finie et on a une somme directe hilbertienne*

$$L^2(M) = \bigoplus_k V_{\lambda_k}.$$

Démonstration. On pourra consulter [5]. □

A.4 Inversibilité de $L_{(\varphi_{t_0}, t_0)}$

Revenons à notre problème. Nous voulons montrer que

$$L_{(\varphi_{t_0}, t_0)} : \begin{cases} \mathcal{C}^{k+\alpha}(M) & \longrightarrow \mathcal{C}^{k-2+\alpha}(M) \\ \psi & \longmapsto \Delta' \psi + t_0 \psi + X(\psi) \end{cases},$$

est inversible pour $t_0 \in]0, 1[$. Pour cela, nous allons utiliser le théorème A.8, nous allons donc montrer que

- l'opérateur $L_{(\varphi_{t_0}, t_0)}$ est un opérateur linéaire différentiel d'ordre 2 et elliptique,
- l'opérateur $L_{(\varphi_{t_0}, t_0)}$ est auto-adjoint (modulo le choix d'une forme volume convenable),
- on a $\ker(L_{(\varphi_{t_0}, t_0)}) = \{0\}$ et donc $\ker(L_{(\varphi_{t_0}, t_0)}^*) = \{0\}$ (puisque L est auto-adjoint).

En combinant ces 3 points, il est clair que le théorème A.8 permet de conclure.

Commençons par remarquer que le premier point est direct par définition d'un opérateur elliptique sur une variété compacte M . Il reste donc à montrer les deux derniers. Ceci est le but de la fin de cette section.

Pour cela, on considère le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ suivant :

$$\langle f, g \rangle = \int_M f g e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_g^n, \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}),$$

qui nous donne donc un espace d'Hilbert $L^2(M, \mathbb{R})$ comme expliqué précédemment. Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme A.10 *Soit $\phi \in \mathcal{M}_X$ et $t \in [0, 1[$. On considère $\tilde{L}_{(\phi, t)} = \Delta' + X(\cdot)$. Nous avons alors pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$*

$$\begin{aligned} \int_M g \overline{\tilde{L}_{(\phi, t)} f} e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n &= \int_M \tilde{f} \tilde{L}_{(\phi, t)} g e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n \\ &= - \int_M \langle \partial f, \partial g \rangle_{\omega_\phi} e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n. \end{aligned}$$

En particulier, on a que $L_{(\phi, t)}$ est auto-adjoint pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i.e. pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \int_M g L_{(\phi, t)} f e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n &= \int_M f L_{(\phi, t)} g e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n \\ &= - \int_M (\langle \partial f, \partial g \rangle_{\omega_\phi} - t f g) e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n. \end{aligned}$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que f et g sont à support dans un ouvert $U \subset M$ dans lequel il y a un repère local holomorphe et orthonormal (ω_i) où $\omega_\phi = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \omega^i \wedge \bar{\omega}^i$. On remarque que dans ce repère, nous avons

que les coordonnées X^i de X sont égales aux \bar{i} -dérivées covariantes $(\theta_X + X(\phi))_{\bar{i}}$ de la fonction $(\theta_X + X(\phi))$. En effet, on a (voir le lemme 6.11 par exemple) que

$$i_X \omega_\phi = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial}[\theta_X + X(\phi)],$$

or comme $\omega_\phi = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \omega^i \wedge \bar{\omega}^i$, en écrivant en coordonnées l'inégalité précédente, nous obtenons bien que

$$X^i = (\theta_X + X(\phi))_{\bar{i}}. \quad (\text{A.2})$$

Ce résultat combiné au choix d'une "bonne" forme volume va être la clé de cette démonstration. Rappelons aussi que la fonction $\theta_X + X(\phi)$ est à valeurs réelles (puisque $\phi \in \mathcal{M}_X$), ce qui permettra de simplifier certaines égalité. Nous avons alors

$$\begin{aligned} & \int_M \overline{g \tilde{L}_{(\phi,t)} f} e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n \\ &= \int_M \overline{g(f_{\bar{i}\bar{i}} + X^i f_i)} e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n && \text{(par définition de } \tilde{L} \text{)} \\ &= \int_M \overline{g(f_{\bar{i}\bar{i}} + (\theta_X + X(\phi))_{\bar{i}} f_i)} e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n && \text{(par l'équation (A.2))} \\ &= \int_M \overline{g(\bar{f}_{\bar{i}\bar{i}} + \overline{(\theta_X + X(\phi))_i f_{\bar{i}}})} e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n && \text{(par les formules de la section 4.2.5)} \\ &= \int_M \overline{g(\bar{f}_{\bar{i}\bar{i}} + (\theta_X + X(\phi))_i \bar{f}_{\bar{i}})} e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n && \text{(car } (\theta_X + X(\phi)) \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \text{)} \\ &= \int_M \overline{g \bar{f}_{\bar{i}\bar{i}}} e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n + \int_M \overline{g(\theta_X + X(\phi))_i \bar{f}_{\bar{i}}} \omega_\phi^n \\ &= - \int_M [g \bar{f}_{\bar{i}} + g(\theta_X + X(\phi))_i \bar{f}_{\bar{i}}] e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n \\ &+ \int_M [g(\theta_X + X(\phi))_i \bar{f}_{\bar{i}}] e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n && \text{(en faisant une intégration par parties)} \\ &= - \int_M \overline{g \bar{f}_{\bar{i}}} e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n \\ &= - \int_M \langle \partial g, \partial f \rangle_{\omega_\phi} e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n \\ &= - \int_M \overline{\langle \partial f, \partial g \rangle_{\omega_\phi}} e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n. \end{aligned}$$

Par symétries des rôles, on obtient aussi que

$$\int_M \overline{f \tilde{L}_{(\phi,t)} g} e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n = - \int_M \langle \partial f, \partial g \rangle_{\omega_\phi} e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n.$$

Ce qui permet de conclure à la première égalité. La seconde partie du lemme s'en déduit aussitôt car $L_{(\phi,t)} \psi = \tilde{L}_{(\phi,t)} \psi + t\psi$. \square

Maintenant, nous devons montrer que le noyau de $L_{(\phi,t)}$ est trivial. Nous montrerons un résultat un peu plus précis :

Lemme A.11 *Pour tout $t \in]0, 1[$ et pour toute solution $\phi = \phi_t$ de (6.35) au temps t , nous avons que les valeurs propres de $L_{(\phi_t, t)}$ sont strictement positives. En particulier, les valeurs propres de $L_{(\phi_t, t)}$ constituent une suite λ_k de réels positifs qui diverge i.e.*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \cdots < +\infty,$$

et donc

$$\ker(L_{(\phi_t, t)}) = \ker(L_{(\phi_t, t)}^*) = \{0\}$$

Démonstration. On garde les notations et les conventions de la preuve précédente. Soit λ une valeur propre et ψ une fonction propre associée i.e.

$$\Delta' \psi + t\psi + X(\psi) = -\lambda\psi.$$

On a alors

$$\begin{aligned} & \lambda \int_M \psi_i \psi_{\bar{i}} e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n \\ &= - \int_M (\Delta' \psi + t\psi + X(\psi))_i \psi_{\bar{i}} e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n \\ &= - \int_M (\psi_{j\bar{j}i} \psi_{\bar{i}} + t\psi_i \psi_{\bar{j}}) e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n - \int_M [X^j \psi_{\bar{i}} \psi_{ij} (X^j)_i + \psi_{\bar{i}} \psi_j] e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n, \end{aligned}$$

en faisant une intégration par partie et en utilisant les formules de Ricci de la section 4.2.5, nous obtenons

$$= \int_M ([R_{i\bar{j}} - t\delta_{ij} - (X^j)_{\bar{i}}] \psi_i \psi_{\bar{j}}) e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n + \int_M [\psi_{i\bar{j}} \psi_{\bar{i}j}] e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n,$$

et comme ϕ est solution de l'équation (6.35), nous obtenons donc

$$= \int_M [(1-t)g_{i\bar{j}} \psi_i \psi_{\bar{j}}] e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n + \int_M [\psi_{i\bar{j}} \psi_{\bar{i}j}] e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n.$$

Comme $0 < t < 1$, on a que ψ n'est pas une constante et donc il existe un indice i tel que $\psi_i \psi_{\bar{i}} \not\equiv 0$ d'où

$$\int_M \psi_i \psi_{\bar{i}} e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n, \quad \int_M [(1-t)g_{i\bar{j}} \psi_i \psi_{\bar{j}}] e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n > 0,$$

et

$$\int_M [\psi_{i\bar{j}} \psi_{\bar{i}j}] e^{\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n \geq 0.$$

Ce qui permet de conclure. □

Le cas où $t = 0$ est plus compliqué, nous le traitons dans la section suivante.

A.5 Le cas où $t = 0$

Dans la section 6.4.2, nous utilisons le lemme suivant :

Lemme A.12 *Il existe des solutions à l'équation (6.35) sur un intervalle de la forme $[0, \delta[$ avec $\delta > 0$.*

L'existence au temps $t = 0$ découle de l'étude faite dans la section B et nous voudrions aussi utiliser le théorème des fonctions implicites, or le linéarisé au temps $t = 0$ n'est pas inversible sur les espaces $\mathcal{C}^{k+\alpha}(M)$, en effet, le noyau contient les fonctions constantes. L'idée va être de perturber la fonction F pour obtenir le résultat.

Démonstration. Posons la fonctionnelle

$$a(\phi) = \int_0^1 \int_M \phi_s e^{\theta_X + X(\phi_s)} \omega_{\phi_s} \wedge ds, \quad \forall \phi \in C^{2+\alpha}(M),$$

où ϕ_s est un chemin de 0 à ϕ dans $\mathcal{C}^{2+\alpha}(M)$ et $\omega_{\phi_s} = \omega_g^0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \phi_s$. On considère la fonction F normalisée :

$$F : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}^{2+\alpha}(M) \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{C}^{0+\alpha}(M) \\ (\varphi, t) \longmapsto \log \left(\frac{\det(g_{i\bar{j}}^0 + \varphi_{i\bar{j}})}{\det(g_{i\bar{j}}^0)} \right) - (h - \theta_X - X(\varphi) - t\varphi) - a(\varphi) \end{array} \right. .$$

Nous verrons dans la section B qu'il existe une fonction lisse φ_0 telle que

$$F(\varphi_0, 0) = 0, \quad a(\varphi_0) = 0.$$

On peut alors calculer le linéarisé de $F(\phi, t)$ par rapport à la première variable au point $(\varphi_0, 0)$:

$$L_{(\varphi_0, 0)} \psi = \Delta' \psi + X(\psi) - \int_M \psi e^{\theta_X + X(\varphi_0)} \omega_{\varphi_0}^n,$$

où Δ' est le laplacien par rapport à ω_{φ_0} . Nous verrons aussi dans la section B que cet opérateur est inversible. En utilisant le théorème des fonctions implicites, nous obtenons donc qu'il existe des fonctions $\phi_t \in C^{2+\alpha}(M)$ pour $t \in [0, \delta[$ telles que $F(\phi_t, t) = 0$. De plus, ces fonctions sont en fait \mathcal{C}^∞ grâce au théorème de régularisation des équations de Monge-Ampère (voir [31, 14] pour plus de détails). En posant

$$\varphi_t = \phi_t + \frac{a(\phi_t)}{t},$$

et en réduisant δ pour que ω_{φ_t} soit une métrique kählérienne, nous obtenons des solutions à l'équation (6.35) sur l'intervalle $[0, \delta[$. \square

A.6 Régularisation de l'équation (A.1)

Dans cette section, nous allons expliquer pourquoi il est suffisant de chercher des solutions de régularité $\mathcal{C}^{3+\alpha}$ à l'équation (6.35). En effet, toute solution de régularité au moins $\mathcal{C}^{3+\alpha}$ sera automatiquement \mathcal{C}^∞ . Ce fait est appelé principe de régularisation des équations de Monge-Ampère et provient du théorème de régularité elliptique (voir le théorème A.7 par exemple).

Nous travaillons donc sur l'équation

$$F : \begin{cases} \mathcal{C}^{3+\alpha}(M) \times [0, 1] & \longrightarrow & \mathcal{C}^{1+\alpha}(M) \\ (\varphi, t) & \longmapsto & \log \left(\frac{\det(g_{i\bar{j}}^0 + \varphi_{i\bar{j}})}{\det(g_{i\bar{j}}^0)} \right) - (h - \theta_X - X(\varphi) - t\varphi) \end{cases} .$$

et nous prenons un couple $(\phi, t) \in \mathcal{C}^{3+\alpha}(M) \times [0, 1]$ tel que $F(\phi, t) = 0$ i.e.

$$\log \left(\frac{\det(g_{i\bar{j}}^0 + \phi_{i\bar{j}})}{\det(g_{i\bar{j}}^0)} \right) - (h - \theta_X - X(\phi) - t\phi) = 0.$$

Plaçons nous dans un système de coordonnées locales (z^1, \dots, z^n) . Comme tous les termes sont au moins $C^{1,\alpha}$, on peut dériver par rapport à la variable z^l :

$$(g_\phi)^{j\bar{k}} (\partial_l g_{j\bar{k}} + \partial_l \partial_j \partial_{\bar{k}} \phi) - \partial_l \log \det(g_{j\bar{k}}) - t \partial_l \phi - \partial_l (h - \theta_X) - X^k \partial_l \partial_{\bar{k}} \phi = 0.$$

On peut l'écrire sous la forme

$$E(\partial_l \phi) = h,$$

avec E un opérateur elliptique d'ordre 2 à coefficients C^∞ et $h \in C^\infty$. On conclut alors en utilisant le théorème de régularisation des opérateurs elliptiques (voir lemme A.7).

B Annexe : Solution de l'équation 6.35 pour $t = 0$

B.1 Introduction

Nous voulons montrer que l'équation (6.35) pour $t = 0$:

$$\begin{cases} \det(g_{i\bar{j}}^0 + \varphi_{i\bar{j}}) = \det(g_{i\bar{j}}^0) \exp(h - \theta_X - X(\varphi)) \\ (g_{i\bar{j}}^0 + \varphi_{i\bar{j}}) > 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

admet une solution. Cela passe par l'étude des *équations de type soliton de Kähler-Ricci*. En effet, on sait depuis les travaux de Calabi et Yau que si on se donne Ω une $(1, 1)$ -forme réelle représentant la première classe de Chern. Il existe une métrique kählérienne g telle que sa forme de Kähler ω_g vérifie

$$\text{Ric}(\omega_g) - \Omega = 0.$$

Nous nous intéresserons à une généralisation de cette équation s'inspirant des solitons de Kähler-Ricci : on cherche un couple (X, g) vérifiant

$$\text{Ric}(\omega_g) - \Omega = \mathcal{L}_X \omega_g, \quad (\text{B.2})$$

où g est une métrique kählérienne et X est un champ de vecteurs holomorphe.

Avant d'énoncer le théorème d'existence et d'unicité, il nous faut quelques notations. Rappelons pour commencer que le groupe des automorphismes d'une variété complexe compacte M est un groupe de Lie de dimension finie (voir [19] pour plus de détails) dont l'algèbre de Lie est $\eta(M)$. Maintenant, si K un sous-groupe compact maximal de la composante connexe de l'identité $\text{Aut}^\circ(M)$ du groupe des automorphismes holomorphes $\text{Aut}(M)$ de la variété M , alors la décomposition de Chevalley nous donne que

$$\text{Aut}^\circ(M) = \text{Aut}_r(M) \ltimes R_u,$$

où $\text{Aut}_r(M)$ est un sous-groupe réductif de $\text{Aut}^\circ(M)$ et la complexification de K et R_u le radical unipotent de $\text{Aut}^\circ(M)$. De plus, si on note $\eta(M)$, $\eta_r(M)$, $\eta_u(M)$ et $\kappa(M)$ les algèbres de Lie de $\text{Aut}(M)$, $\text{Aut}_r(M)$, R_u et K respectivement, alors on a

$$\eta(M) = \eta_r(M) + \eta_u(M).$$

On pourra consulter [12] pour plus de détails.

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant qui a été initialement démontré par Zhu dans son article [33] :

Théorème B.1 *Soit (M, ω_g) une variété compacte kählérienne de Fano, soit $\Omega \in c_1(M)$ une forme définie positive et soit $X \in \eta(M)$ un champ de vecteurs holomorphe. Alors il existe une forme de Kähler ω appartenant à la classe de cohomologie $[\omega_g]$ de ω_g solution de l'équation (B.2) si et seulement si*

- (i) le champ de vecteurs X appartient à une sous-algèbre de Lie réductive $\eta_r(M)$ du groupe de Lie $\text{Aut}_r(M) \subset \text{Aut}^\circ(M)$,
- (ii) la partie imaginaire de X engendre un sous-groupe compact à un paramètre de $\text{Aut}^\circ(M)$.
- (iii) $\mathcal{L}_X \Omega$ est une $(1, 1)$ -forme réelle.

De plus cette solution est unique dans la classe de cohomologie $[\omega_g]$. □

Dans la section suivante, nous monterons que les trois conditions sont nécessaires. Ensuite, en utilisant la méthode de la continuité, nous montrerons qu'elles sont suffisantes.

B.2 Conditions nécessaires

Dans cette section, nous voulons montrer que les conditions énoncées sont nécessaires. Pour cela, on fixe une variété kählérienne de Fano compacte (M, ω_g) et on considère une solution (X, g) sur la variété M à l'équation (B.2) i.e. nous avons la relation suivante

$$\text{Ric}(\omega) - \Omega = \mathcal{L}_X \omega.$$

Ainsi, en se souvenant que Ω et $\text{Ric}(\omega_g)$ sont des $(1, 1)$ -formes réelles, nous obtenons que $\mathcal{L}_X \omega_g$ est aussi une $(1, 1)$ -forme réelle i.e. $\mathcal{L}_{\text{Im}X} \omega_g = 0$, où $\text{Im}X$ est la partie imaginaire de X . Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition B.2 *Soit une variété kählérienne de Fano compacte M et on considère un soliton de Kähler-Ricci (X, g) sur la variété M . Nous avons alors les conséquences suivantes :*

- (i) La dérivée de Lie $\mathcal{L}_X \omega_g$ est une $(1, 1)$ -forme réelle i.e. $\mathcal{L}_{\text{Im}X} \omega_g = 0$,
- (ii) la partie imaginaire $\text{Im}X$ du champ de vecteurs X engendre un sous-groupe à un paramètre compact $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ composé d'isométries pour ω où $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot associé à $\text{Im}X$.

Démonstration. Le premier point a déjà été prouvé.

Pour le second point, comme M est une variété compacte, le flot de $\text{Im}X$ est global i.e. $\text{Im}X$ engendre bien un sous-groupe à un paramètre (voir [23] pour plus de détails sur le flot). De plus, par ce qui précède et par les propriétés du flot, on a

$$0 = \mathcal{L}_{\text{Im}X} \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\phi_t)_* \omega).$$

ainsi, comme $\phi_0 = \text{id}$ (propriété du flot), nous obtenons

$$(\phi_t)_* \omega = (\phi_0)_* \omega = \omega, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ce qui permet de conclure. □

En considérant Aut° la composante connexe de l'identité de $Aut(M)$, il existe un sous-groupe compacte K de $Aut(M)$ contenant le sous-groupe engendré par $\text{Im}X$ et telle que nous ayons

$$Aut^\circ(M) = Aut_r(M) \times R_u,$$

où $Aut_r(M)$ est un sous-groupe réductif de $Aut^\circ(M)$ et la complexification de K et R_u le radical unipotent de $Aut^\circ(M)$. De plus, si on note $\eta(M)$, $\eta_r(M)$, $\eta_u(M)$ et $\kappa(M)$ les algèbres de Lie de $Aut(M)$, $Aut_r(M)$, R_u et K respectivement, nous obtenons que $\eta_r(M)$ est la complexification de K et que $X \in \eta_r(M)$.

Nous avons donc montré les conditions (i) et (ii) du théorème (B.1). La proposition suivante montre alors la dernière condition :

Proposition B.3 *En gardant les notations précédentes, nous avons que $\mathcal{L}_X\omega$ est une $(1, 1)$ -forme réelle.*

Démonstration. Nous avons déjà vu que $i_x\omega$ est une $(0, 1)$ -forme réelle $\bar{\partial}$ -fermée et donc en combinant la théorie de Hodge et le fait que $\mathcal{L}_X\omega$ est une $(1, 1)$ -forme réelle, nous obtenons qu'il existe $\theta \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\mathcal{L}_X\omega = \partial i_X(\omega) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \theta.$$

De plus, en choisissant un système de coordonnées locales dans lequel on a

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \phi,$$

où $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Nous obtenons alors que

$$\mathcal{L}_X\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \mathcal{L}_X(\partial \bar{\partial} \phi) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} (X(\phi)).$$

Ainsi nous obtenons

$$\Delta X(\phi) = \Delta \theta,$$

où Δ est le Laplacien associé à la métrique ω . Maintenant, en notant $\omega = h_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^j$, remarquons que nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X Ric(\omega) &= -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}(X(\log \det(h_{k\bar{l}}))) \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}(h^{k\bar{l}} X^i (h_{k\bar{l}})_i) \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}(h^{k\bar{l}} X^i (\phi_{k\bar{l}})_i) \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}(h^{k\bar{l}} X^i (\phi_{k\bar{l}})_i) \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}(h^{k\bar{l}} (X^i \phi_i)_{k\bar{l}}) - h^{k\bar{l}} (X^i)_k \phi_{i\bar{l}} \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}(h^{k\bar{l}} (X(\phi))_i - (X^k)_k) \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}(\Delta(X(\phi))),
\end{aligned}$$

ainsi nous obtenons que

$$\mathcal{L}_X Ric(\omega) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}(\Delta(\theta)).$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_X\omega) &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\theta \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}(h^{k\bar{l}} \theta_{\bar{l}} \theta_k) \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}(\|\theta\|_\omega^2).
\end{aligned}$$

En combinant ces deux égalités, nous obtenons

$$\mathcal{L}_X \Omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}(\Delta\theta + \|\theta\|_\omega^2),$$

ce qui permet de conclure. □

B.3 Méthode de la continuité

Nous voulons utiliser la méthode de la continuité. La première étape consiste à réduire l'équation (B.2) à une équation de Monge-Ampère.

Avant de commencer, rappelons que nous fixons un champ de vecteur holomorphe X appartenant à une sous-algèbre réductive $\eta_r(M)$ de $\eta(M)$ et tel que sa

partie imaginaire engendre un sous-groupe compact à un paramètre de M . Nous supposons aussi que $\mathcal{L}_X\Omega$ est une $(1, 1)$ -forme réelle. De plus, on note K le sous-groupe compact maximal de $Aut^\circ(M)$ engendré par $\eta_r(M)$, on considère alors une métrique kählérienne K -invariante ω dont on note $\omega_g := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$ la forme de Kähler. En particulier, nous obtenons que $\mathcal{L}_X\omega_g$ est une $(1, 1)$ -forme réelle sur M et ainsi par la théorie de Hodge, il existe une fonction lisse à valeurs réelles θ_X sur M telle que

$$\mathcal{L}_X\omega = \partial i_X(\omega) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\theta_X.$$

De plus, comme $\Omega \in c_1(M)$, il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ vérifiant

$$Ric(\omega_g) - \Omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}f, \quad \int_M e^f \omega_g^n = \int_M \omega_g^n. \quad (\text{B.3})$$

□

En utilisant la preuve de la proposition B.3, on voit que $\mathcal{L}_X Ric(\omega_g)$ est une $(1, 1)$ -forme réelle sur M . Ceci combiné au fait que Ω est aussi définie positive, nous obtenons que

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \mathcal{L}_X\omega(\partial\bar{\partial}f) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} (X(f))$$

est une $(1, 1)$ -forme réelle sur M et que donc $X(f)$ est à valeurs réelles.

Soit $\omega_\phi = \omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\phi$ une solution à l'équation (B.2) :

$$Ric(\omega_\phi) - \Omega = \mathcal{L}_X\omega_\phi.$$

D'après ce qui précède, nous voyons que cette équation est équivalente à l'équation suivante :

$$\begin{cases} \det(g_{i\bar{j}} + \phi_{i\bar{j}}) = \det(g_{i\bar{j}}) \exp(f - (\theta_X + X(\phi)) + c) \\ (g_{i\bar{j}} + \phi_{i\bar{j}}) > 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

où c est une constante.

Nous allons utiliser la méthode de la continuité sur l'équation (B.4), mais avant cela, nous allons la normaliser. Comme $X(\phi)$ est une fonction à valeurs réelles, on introduit les deux espaces suivants :

$$\mathcal{M}_X = \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) / \omega_\phi > 0, \quad X(\phi) \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})\},$$

et

$$\mathcal{W}_X = \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) / X(\phi) \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})\}.$$

On définit alors pour tout $\phi \in \mathcal{M}_X$:

$$I_t(\phi) = \int_0^1 \int_M \phi e^{t(\theta_X + \tau X(\phi))} \omega_{\tau\phi}^n \wedge d\tau.$$

On considère alors l'équation suivante dépendant d'un paramètre $t \in [0, 1]$:

$$\begin{cases} \det(g_{i\bar{j}} + \phi_{i\bar{j}}) = \det(g_{i\bar{j}}) \exp(f - t(\theta_X + X(\phi)) + I_t(\phi)) \\ (g_{i\bar{j}} + \phi_{i\bar{j}}) > 0 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Comme θ_X est une fonction lisse à valeurs réelles sur M , on obtient que $X(\phi_t)$ et une fonction lisse à valeurs réelles si ϕ_t sont des solutions lisses de l'équation (B.5). De plus, on voit facilement, en prenant le log et en différenciant, que l'équation (B.5) est équivalente à

$$\text{Ric}(\omega_{\phi_t}) - \Omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}t (\theta_X + X(\phi_t)) = t \mathcal{L}_X \omega_{\phi_t}. \quad (\text{B.6})$$

Ainsi, l'équation (B.2) correspond à $t = 1$. On considère donc l'ensemble

$$S = \{t \in [0, 1] \mid \text{Il existe une solution lisse } \phi_t \text{ à l'équation (B.5) au temps } t \}.$$

Et nous voulons montrons que S est un ouvert fermée non vide de $[0, 1]$. Ainsi par connexité, on aura $S = [0, 1]$ et donc l'équation (B.5) admettra une solution, ce que nous voulions. Remarquons tout de suite que S est non vide puisque le théorème de Calabi-Yau montre qu'il existe une solution à l'équation (B.6) au temps $t = 0$:

$$\text{Ric}(\omega_{\phi_0}) - \Omega = 0.$$

B.3.1 Caractère ouvert de S

Avant de commencer, introduisons la notation suivante :

$$\mathcal{H}^k(M) = \mathcal{W}_X \cap \mathcal{C}^k(M),$$

et définissons le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur cet espace par :

$$\langle f, g \rangle = \int_M f g e^{t(\theta_X + X(\phi))} \omega_{\phi}^n.$$

On peut alors étendre $\mathcal{H}^k(M)$ en un espace de Hilbert $L^2(M, \mathbb{R})$.

Dans cette section, nous voulons montrer que :

- S'il existe une solution φ_{t_0} au temps $t_0 \in [0, 1]$ alors il existe $\delta > 0$ tel qu'il existe une solution φ_t pour tout $t \in [t_0, t_0 + \delta]$.

La démonstration de ce fait repose sur *le théorème des fonctions implicites*. Pour cela, considérons l'application

$$F : \begin{cases} \mathcal{H}^3(M) \times [0, 1] & \longrightarrow & \mathcal{H}^1(M) \\ (\varphi, t) & \longmapsto & \log \left(\frac{\det(g_{i\bar{j}}^0 + \varphi_{i\bar{j}})}{\det(g_{i\bar{j}}^0)} \right) - f - t(\theta_X + X(\varphi) - I_t(\varphi)) \end{cases}$$

Si φ_{t_0} est une solution au temps t_0 alors on a $F(\varphi_{t_0}, t_0) = 0$. Maintenant, on calcule la dérivée de F dans la direction de φ au point (φ_{t_0}, t_0) :

$$L_{(\varphi_{t_0}, t_0)}F(\psi, t) = \Delta' \psi + t_0 X(\psi) + \int_M \psi e^{t\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n,$$

où Δ' est le laplacien par rapport à la métrique $\omega_{\varphi_{t_0}}$. Comme cet opérateur est inversible pour tout $t \in [0, 1[$ (voir la proposition B.4), le théorème des fonctions implicites nous donne l'existence de $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]t_0, t_0 + \delta[$, il existe $\varphi_t \in \mathcal{H}^3(M)$ vérifiant $F(\varphi_t, t) = 0$. De plus, le théorème de régularité de l'équation de Monge-Ampère nous donne que φ_t est, en fait, lisse.

Il nous reste à montrer que $L_{(\phi, t)}$ est inversible, pour cela nous montrerons que c'est un opérateur elliptique d'ordre 2 auto-adjoint sur $L^2(M)$ de noyau nul.

Proposition B.4 *Nous avons les deux propriétés suivantes :*

(i) *Soit $\phi \in \mathcal{M}_X$. Alors $L_{(\phi, t)}$ est un opérateur auto-adjoint pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i.e.*

$$\int_M g L_{(\varphi, t)} f e^{t(\theta_X + X(\phi))} \omega_\phi^n = \int_M f L_{(\varphi, t)} g e^{t(\theta_X + X(\phi))} \omega_\phi^n.$$

(ii) *Si Ω est définie positive dans $c_1(M)$ et que $\varphi = \varphi_t$ est une solution à l'équation (B.6) au temps t . Alors les valeurs propres de $L_{(\varphi, t)}$ sont strictement positives.*

Démonstration. On pose $\tilde{L}_{(\varphi, t)} f = \Delta' f + tX(f)$. De plus, sans perte de généralité, on peut supposer que f et g sont à support dans un ouvert $U \subset M$ où il y a un repère local holomorphe et orthonormal (ω_i) où $\omega_\phi = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \omega^i \wedge \bar{\omega}^i$. On remarque que dans ce repère, nous avons que les coordonnées X^i de X sont égales aux \bar{i} -dérivées covariantes $(\theta_X + X(\phi))_{\bar{i}}$ de la fonction $(\theta_X + X(\phi))$. En effet, on a (voir le lemme 6.11 par exemple) que

$$i_X \omega_\phi = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial}[\theta_X + X(\phi)],$$

or comme $\omega_\phi = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \omega^i \wedge \bar{\omega}^i$, en écrivant en coordonnées l'inégalité précédente, nous obtenons bien que

$$X^i = (\theta_X + X(\phi))_{\bar{i}}.$$

En utilisant la formule d'intégration par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \int_M g \widetilde{L}_{(\varphi,t)} f e^{t(\theta_X + X(\phi))} \omega_\phi^n \\
&= \int_M (g f_{i\bar{i}} + t g X_i f_i) e^{t\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n \\
&= \int_M (f g_{i\bar{i}} + t f g_{i\bar{i}} \overline{X}_i + t f g_i \overline{X}_i + t g f X_{i\bar{i}} + t^2 f g X_i \overline{X}_i) e^{t\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n \\
&\quad - t \int_M (f g_i X_{i\bar{i}} + g f X_{i\bar{i}} + t f g X_i \overline{X}_i) e^{t\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n \\
&= \int_M (f g_{i\bar{i}} + t f \overline{X}_i g_i) e^{t\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n \\
&= (f g_{i\bar{i}} + t f X(g)) e^{t\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n \\
&= (f \widetilde{L}_{(\phi,t)} g) e^{t\theta_X + X(\phi)} \omega_\phi^n,
\end{aligned}$$

ce qui démontre le point (i).

Soit λ une valeur propre de $L_{(\phi,t)}$ et ψ une fonction propre de λ i.e.

$$\Delta' \psi + tX(\psi) - \int_M \psi e^{t(\theta_X + X(\phi))} \omega_\phi^n = -\lambda \psi.$$

Traisons deux cas. Si ψ est une constante non nulle alors on a $\lambda = \int_M e^{t(\theta_X + X(\phi))} \omega_\phi^n > 0$. Sinon si ψ n'est pas constant, il existe un indice i tel qu'on a que $\psi_i \psi_{i\bar{i}} \neq 0$ et donc en utilisant la formule d'intégration par parties et les formules de Ricci, on obtient

$$\begin{aligned}
& \lambda \int_M \psi_i \psi_{i\bar{i}} e^{t(\theta_X + X(\phi))} \omega_\phi^n \\
&= - \int_M (\Delta' \psi + tX(\psi))_i \psi_{i\bar{i}} e^{t(\theta_X + X(\phi))} \omega_\phi^n \\
&= - \int_M \psi_{j\bar{j}i} \psi_{i\bar{i}} e^{t(\theta_X + X(\phi))} \omega_\phi^n - t \int_M (X_j \psi_{i\bar{i}} \psi_{ij} + X_{j\bar{i}} \psi_{i\bar{i}} \psi_j) e^{t(\theta_X + X(\phi))} \omega_\phi^n \\
&= \int_M (R_{i\bar{j}} - tX_{ij}) \psi_{i\bar{i}} \psi_j e^{t(\theta_X + X(\phi))} \omega_\phi^n + \int_M \psi_{ij} \psi_{i\bar{j}} e^{t(\theta_X + X(\phi))} \omega_\phi^n \\
&= \int_M \Omega_{i\bar{j}} \psi_{i\bar{i}} \psi_j e^{t(\theta_X + X(\phi))} \omega_\phi^n,
\end{aligned}$$

on conclut en utilisant le fait que Ω est définie positive et donc comme $\psi_i \psi_{i\bar{i}} \neq 0$, on a $\lambda > 0$. On a donc démontré le point (ii). \square

B.3.2 Caractère fermé de S

Comme dans la section 6.4.4, nous voulons montrer que :

• Pour tout $\varepsilon_0 \in]0, 1[$, s'il existe une solution φ_t pour tout temps $t \in [\varepsilon_0, \varepsilon_1[$ alors il existe une solution φ_{ε_1} au temps ε_1 .

Passons maintenant à la preuve. Celle-ci repose sur l'obtention d'une constante $C > 0$ indépendante du temps t , telle que la famille $(\varphi_t)_{t \in [\varepsilon_0, \varepsilon_1[}$ soit bornée pour la norme \mathcal{C}^3 i.e.

$$\|\varphi_t\|_{\mathcal{C}^3(M)} \leq C.$$

Supposons que nous ayons cette majoration, celle-ci sera démontrée dans la section suivante, alors en utilisant *le théorème d'Arzelà-Ascoli*, on obtient qu'il existe une fonction $\varphi_{\varepsilon_1} : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, quitte à extraire une sous-suite, elle vérifie

$$\varphi_{t_n} \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \varphi_{\varepsilon_1}, \text{ quand } t_n \longrightarrow \varepsilon_1.$$

Comme la convergence est \mathcal{C}^2 , on peut passer à la limite (simple) dans l'équation (B.1) :

$$\det(g_{i\bar{j}}^0 + \varphi_{i\bar{j}}) = \det(g_{i\bar{j}}^0) \exp(h - \theta_X - X(\varphi) - t\varphi).$$

et d'obtenir que φ_{ε_1} vérifie

$$\det(g_{i\bar{j}}^0 + (\varphi_{\varepsilon_1})_{i\bar{j}}) = \det(g_{i\bar{j}}^0) \exp(h - \theta_X - X(\varphi_{\varepsilon_1}) - \varepsilon_1 \varphi_{\varepsilon_1}).$$

c'est-à-dire qu'elle est solution de (B.1) au temps $t = \varepsilon_1$. De plus, il reste à montrer que φ_{ε_1} est lisse et ceci est encore une conséquence directe du *théorème de régularisation des solutions de l'équation de Monge-Ampère* (voir la section A.6 ou [31, 14] pour plus de détails).

La première étape consiste à réduire cette estimation a priori à une estimation uniforme sur la famille $(\varphi_t)_{t \in [\varepsilon_0, 1]}$ i.e. il existe une constante $C > 0$ uniforme telle que

$$\|\varphi_t\|_{\mathcal{C}^0} \leq C.$$

En effet, en utilisant les calculs de l'appendice A de [31], on peut montrer l'inégalité suivante :

Lemme B.5 *Soit $\varphi_t = \varphi$ une solution de B.1 au temps $t \in [\varepsilon_0, 1]$. Alors il existe deux constantes c et C telles que*

$$n + \Delta\varphi_t \leq C \cdot \exp\left(c\left[\varphi_t - \inf_M \varphi_t\right]\right) \cdot \left[1 + \exp\left(-t \sup_M \varphi_t\right)\right].$$

Démonstration. C'est une conséquence des calculs de Yau de Calabi fait dans l'appendice A de [31]. On peut également consulter [28]. \square

Donc si nous avons que φ est uniformément bornée pour tout $t \in [\varepsilon_0, 1]$. Nous obtenons alors qu'il existe une constante $C > 0$ uniforme telle que

$$n + \Delta\varphi_t \leq C, \quad \forall t \in [\varepsilon_0, 1].$$

Nous avons alors le lemme suivant qui permet de conclure :

Lemme B.6 Soit $(\varphi_t)_{t \in [\varepsilon_0, 1]}$ une famille de solutions de B.1 pour les temps $t \in [\varepsilon_0, 1]$. Il existe une constante $C > 0$ uniforme telle que

$$\|\varphi_t\|_{\mathcal{C}^3(M)} \leq C.$$

Démonstration. On pose

$$S := g^{i\bar{r}} g^{j\bar{s}} g^{k\bar{t}} \varphi_{i\bar{j}k} \varphi_{\bar{r}s\bar{t}}.$$

Par les calculs de Yau et Calabi dans l'appendice A de [31], on obtient que $S \leq C$ pour une constante $C > 0$ uniforme. Le lemme s'en déduit alors. On pourra aussi consulter [28]. \square

Nous sommes donc ramener à montrer que :

• Si $(\varphi_t)_{t \in [\varepsilon_0, 1]}$ est une famille de solutions à (B.1) pour les temps $t \in [\varepsilon_0, 1]$ alors il existe une constante $C > 0$ uniforme telle que

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}^0} \leq C.$$

Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition B.7 Soit ϕ_t une solution à l'équation (B.6) au temps t . Alors il existe une constante uniforme C telle que $|\phi_t| \leq C$.

Démonstration. Nous aurons besoin d'un lemme qui vient de l'étude des surfaces de Riemann (pour la preuve, on pourra consulter [33]) :

Lemme B.8 Soit (M, ω_g) une variété kählérienne, soit X un champ de vecteurs holomorphe non trivial et soit $\phi \in \mathcal{M}_X$. Alors il existe $C > 0$ indépendante de ϕ telle que $|X(\phi)| \leq C$. \square

Ce lemme nous donne en particulier qu'il existe une constante C_1 uniforme telle que

$$|I_t(\phi_t)| \leq C_1.$$

En effet, l'équation (B.2) nous donne

$$e^{I_t(\phi_t)} \int_M e^{f-t(\theta_X+X(\phi_t))} \omega_g^n = \int_M \omega_{\phi_t}^n = \int_M \omega_g^n.$$

Maintenant, posons $\tilde{f}_t = I_t(\varphi_t) + f - t(\theta_X + X(\phi_t))$. Ainsi, nous obtenons $|\tilde{f}_t| \leq C_2$ pour une constante C_2 uniforme et l'équation (B.5) devient

$$\det(g_{i\bar{j}} + (\tilde{\phi}_t)_{i\bar{j}}) = \det(g_{i\bar{j}}) e^{\tilde{f}_t},$$

où $\tilde{\phi}_t = \phi_t - c_t$ où c_t est choisi pour que $\sup_M \tilde{\phi}_t = -1$. De plus, par un argument classique sur les estimations \mathcal{C}^0 des équations de Monge-Ampère (voir [25]), nous obtenons qu'il existe une constante $C_3 > 0$ telle que $|\tilde{\phi}_t| \leq C_3$.

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} I_t(\phi_t) &= \int_0^1 \int_M \phi_t e^{t(\theta_X + sX(\phi_t))} \omega_{s\phi_t}^n ds \\ &= c_t \int_0^1 \int_M e^{t(\theta_X + sX(\phi_t))} \omega_{s\phi_t}^n \wedge ds + \int_0^1 \int_M \tilde{\varphi}_t e^{t(\theta_X + sX(\phi_t))} \omega_{s\phi_t}^n ds, \end{aligned}$$

en utilisant le lemme énoncé en début de preuve, on obtient qu'il existe $C_4 > 0$ telle que

$$|c_t \int_0^1 \int_M e^{t(\theta_X + sX(\phi_t))} \omega_{s\phi_t}^n \wedge ds - I_t(\phi_t)| \leq C_4.$$

Par conséquent, nous obtenons qu'il existe une constante uniforme $C_5 > 0$ vérifiant

$$|c_t| \leq C_5.$$

Au final, nous obtenons

$$|\phi_t| \leq |\tilde{\phi}_t| + |c_t| \leq C_3 + C_5.$$

□

Références

- [1] ANDREWS, B., AND HOPPER, C. *The Ricci Flow in Riemannian Geometry : A Complete Proof of the Differentiable $1/4$ -Pinching Sphere Theorem*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2010.
- [2] AUBIN, T. Equations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes. *Bull. Sci. Math. (2)* (1978).
- [3] AUDIN, M. *Torus Actions on Symplectic Manifolds*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Basel, 2012.
- [4] BATYREV, V. V., AND SELIVANOVA, E. N. Einstein-kähler metrics on symmetric toric fano manifold. *J.Reine Angew. Math.* 512 (1999), 225–236.
- [5] BERTIN, J., DEMAILLY, J.-P., ILLUSIE, L., AND PETERS, C. *Introduction à la théorie de Hodge*. Panoramas et synthèses 3. Société mathématique de France, 1996.
- [6] BOURBAKI, N. *Groupes et algèbres de Lie : Chapitres 2 et 3*. Elements de mathématique. Deutsches MAB-Nationalkomitee beim Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit, 2007.
- [7] CHAVEL, I. *Eigenvalues in Riemannian Geometry*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 1984.
- [8] CHOW, B., LU, P., AND NI, L. *Hamilton's Ricci Flow*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Soc.
- [9] DEMAILLY, J.-P. Complex analytic and differential geometry. Notes de cours.
- [10] DEMAZURE, M. Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de cremona. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*.
- [11] DONALDSON, S. Kähler geometry on toric manifolds, and some other manifolds with large symmetry.
- [12] FUTAKI, A., AND MABUCHI, T. Bilinear forms and extremal kähler vector fields associated with kähler classes. *Mathematische Annalen* 301, 1 (1995), 199–210.
- [13] GILBARG, D., AND TRUDINGER, N. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2015.
- [14] GUTIERREZ, C. *The Monge—Ampère Equation*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Birkhäuser Boston, 2001.
- [15] GUZMÁN, M. *Differentiation of Integral in \mathbb{R}^n* . Lecture notes in mathematics. Springer-Verlag, 1975.
- [16] HORMANDER, L. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. North-Holland Mathematical Library. Elsevier Science, 1973.
- [17] JAMES, I. *Handbook of Algebraic Topology*. Elsevier Science, 1995.
- [18] KELLEY, J. L. *General Topology*. Springer-Verlag, 1991.

- [19] KOBAYASHI, S. *Transformation Groups in Differential Geometry*. Classics in Mathematics. U.S. Government Printing Office, 1995.
- [20] KOBAYASHI, S. *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*. Princeton Legacy Library. Princeton University Press, 2014.
- [21] LIEBERMAN, G. *Second Order Parabolic Differential Equations*. World Scientific, 1996.
- [22] MCDUFF, D., AND SALAMON, D. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford mathematical monographs. Clarendon Press, 1998.
- [23] PAULIN, F. Géométrie différentielle élémentaire. Notes de cours.
- [24] PAULIN, F. Groupes et géométries. Notes de cours.
- [25] TIAN, G. Kähler-einstein metrics on algebraic manifolds. 143–185.
- [26] TIAN, G. Kähler-einstein metrics with positive scalar curvature. *Inventiones mathematicae* 130, 1 (1997), 1–37.
- [27] TIAN, G. Kähler einstein metrics with positive scalar curvature. *Invent. Math.* 130 (1997), 1–37.
- [28] TIAN, G., AND ZHU, X. Uniqueness of kähler-ricci solitons. *Acta Mathematica* 184, 2 (2000), 271–305.
- [29] WANG, X.-J., AND ZHU, X. Kähler-ricci solitons on toric manifolds with positive first chern class. *Advances in Mathematics* 188, 1 (2004), 87 – 103.
- [30] WANG, X.-J., AND ZHU, X. Kähler-ricci solitons on toric manifolds with positive first chern class. *Advances in Mathematics* 188, 1 (2004), 87 – 103.
- [31] YAU, S.-T. On the ricci curvature of a compact kähler manifold and the complex monge-ampère equation, i. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 31, 3 (1978), 339–411.
- [32] ZHU, C. Marsden-weinstein reductions for kähler, hyperkähler and quaternionic kähler manifolds. Notes.
- [33] ZHU, X. Kähler-ricci soliton typed equations on compact complex manifolds with $c_1(m) > 0$. *The Journal of Geometric Analysis* 10, 4 (2000), 759–774.