

TD 3 : Modélisation déterministe
Master Mathématique pour les sciences du vivant ; Université Paris-Saclay

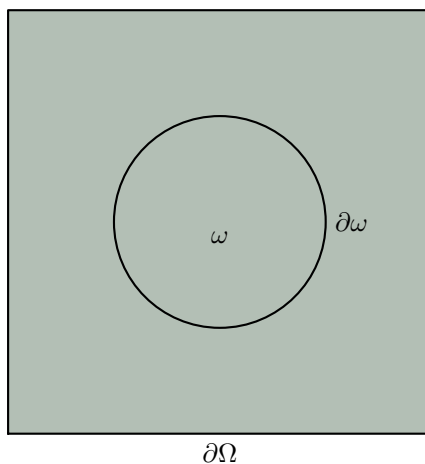
Astrid Decoene, Ngoc Nhi Nguyen
ngoc-nhi.nguyen@math.u-psud.fr

Exercice 1 : (Problème de Laplace dans un domaine perforé)

On s'intéresse au problème de Laplace dans un domaine contenant un sous-domaine sur le bord duquel la solution est égale à une même constante, dont la valeur est inconnue.

Soit Ω un rectangle de $\mathbb{R}^2$, et ω un disque placé de façon arbitraire dans Ω de façon à ce qu'il ne touche pas le bord. Etant donné f une fonction de $L^2(\Omega \setminus \bar{\omega})$ on considère le problème :

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \setminus (\bar{\omega}), \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u = U & \text{sur } \partial\omega, \\ \int_{\partial\omega} \frac{\partial u}{\partial n} = 0. \end{cases}$$



1. Ecrire une formulation variationnelle pour ce problème, en indiquant bien l'espace fonctionnel dans lequel sont définies la solution et la fonction test.
2. Montrer qu'il existe une unique solution à ce problème variationnel. ¹
3. Montrer que la solution faible est solution du problème de départ au sens presque partout dans $\Omega \setminus (\bar{\omega})$ (et presque partout sur le bord pour les conditions limites). ²

1. On admettra que le lemme de Poincaré s'applique sur l'espace des fonctions de l'espace des $\{v \in H^1(\Omega \setminus \bar{\omega}) : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$.
2. On admettra la régularité de la solution u qui est alors dans $H^2(\Omega \setminus \bar{\omega})$

Exercice 2 : (Principe du maximum par la méthode d'entropie)

Considérons l'équation de la chaleur dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de frontière lisse, avec condition de Neumann :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \Delta u(t, x) + f(t, x), & t \in \mathbb{R}_+^*, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(t, x) &= 0, & t \in \mathbb{R}_+^*, x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (0.1)$$

ou de Dirichlet :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \Delta u(t, x) + f(t, x), & t \in \mathbb{R}_+^*, x \in \Omega, \\ u(t, x) &= 0, & t \in \mathbb{R}_+^*, x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (0.2)$$

avec un terme source $f \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ et une condition initiale $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ sur Ω .

On note

$$x_+ = \max(0, x).$$

On appelle entropie de l'équation (0.1) (resp (0.2)) une fonction $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que si u est une solution ($\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^* \times \Omega)$) de (0.1) (resp (0.2)), alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} S(u)(t, x) - \Delta S(u)(t, x) \leq S'(u(t, x)) f(t, x).$$

1. Démontrer que toute fonction S convexe et de classe $\mathcal{C}^2$ est une entropie de (0.1) et (0.2).
2. On suppose à partir de maintenant que $f(t, x) = 0$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$.
 - (a) Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $S(x) = (x - M)_+^3$. Montrer que S est une entropie de (0.1) et (0.2).
 - (b) Soit u une solution régulière de (0.1) ou de (0.2). Soit la fonction $S[u] : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$S[u](t) = \int_{\Omega} (u(t, x) - M)_+^3 dx.$$

En utilisant la relation d'entropie appliquée à la fonction S précédente, démontrer que

$$S[u]'(t) \leq 0.$$

- (c) En déduire que pour toute solution régulière u de (0.1), on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, pour presque tout $x \in \Omega$,

$$u(t, x) \leq \sup_{x \in \Omega} u_0(x).$$

et que pour toute solution régulière de (0.2), on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, pour presque tout $x \in \Omega$,

$$u(t, x) \leq \max(0, \sup_{x \in \Omega} u_0(x)).$$

3. En proposant une autre entropie du même tonneau, montrer que pour toute solution régulière u de (0.1), on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, pour presque tout $x \in \Omega$ le résultat complet, dit *principe du maximum*,

$$\inf_{x \in \Omega} u_0(x) \leq u(t, x) \leq \sup_{x \in \Omega} u_0(x),$$

et qu'on a de même dans le cas de l'équation (0.2),

$$\min(0, \inf_{x \in \Omega} u_0(x)) \leq u(t, x) \leq \max(0, \sup_{x \in \Omega} u_0(x)).$$

4. Que devient ce résultat si on modifie dans l'équation (0.2) la condition de Dirichlet homogène par

$$u(t, x) = g(x), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \partial\Omega,$$

avec g une fonction continue et bornée sur $\partial\Omega$? On le démontrera succinctement sans développer tous les détails.

5. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Considérons l'équation aux dérivées partielles de type réaction-diffusion

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \Delta u(t, x) + u(t, x)(1 - u(t, x))(u(t, x) - \alpha), & t \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(t, x) &= 0, & t \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) &= u_0(x) > 0, & x \in \Omega, \end{aligned} \tag{0.3}$$

Montrer qu'il existe au moins une solution de (0.3) qui tend vers 1 uniformément sur Ω quand $t \rightarrow +\infty$ et au moins une autre qui tend vers 0 uniformément sur Ω quand $t \rightarrow +\infty$.

6. On suppose $u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ et que les solutions de (0.3) sont globales en temps, (très) régulières et positives. En adaptant la méthode d'entropie utilisée pour l'équation de la chaleur, montrer que pour toute condition initiale $u_0 > 0$ telle que

$$\|u_0\|_{L^\infty} < \alpha,$$

la solution vérifie pour tout temps $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty} < \alpha.$$

On pourrait montrer de la même façon la positivité de la solution au lieu de l'admettre. Il est également possible de montrer, mais cela dépasse le cadre de cet exercice et demande plus de moyens, qu'une telle solution converge uniformément vers 0. C'est ce que l'on appelle en biologie l'effet Allee : une population d'organismes dont le nombre est insuffisant peut être condamnée à s'éteindre quoi qu'il arrive.