

* Correction de l'exercice 3.

Fait $\overline{GL_n(\mathbb{R})} = M_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$.

Considérons la fonction

$$P(t) = \det(A + tId).$$

P est un polynôme non constant de degré n .

$P(0) = 0$ il s'annule au plus n fois sur $\mathbb{C}$.

en $0, t_1, \dots, t_h$ où $h \leq n-1$.

En particulier

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ tq } |t| < \min(|t_1|, \dots, |t_h|).$$

$$P(t) \neq 0.$$

donc pour n assez grand.

$$P\left(\frac{1}{n}\right) \neq 0.$$

$$n \rightarrow \infty \quad \left| \frac{1}{n} \right| < \min(|t_1|, \dots, |t_h|)$$

et donc $\det \left(A + \frac{1}{n} \text{Id} \right) \neq 0$.

$$\text{et } A_n = A + \frac{1}{n} \text{Id} \in \text{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Correction de l'exercice 4.

* Montrer que $A \rightarrow \exp(A)$ est $\mathcal{C}^1$.
et calculer la différentielle.

Preuve:

* Pour tout h

$\varphi_h: A \rightarrow A^h$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ car les
entrées de A^h sont polynomiales.
et la différentielle

$$\text{et } (A + H)^h = A^h + A^{h-1}H + A^{h-2}HA + \dots + AHA^{h-2} \\ + AA^{h-1} + o(\|H\|).$$

$$\text{d'où } D\varphi_h(H) = \sum_{i=0}^{h-1} A^i H A^{h-1-i},$$

$$* \exp = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{A^h}{h!} \quad \text{est somme de fonctions } \mathcal{C}^1.$$

La suite $S_N = \sum_{h=0}^N \frac{A^h}{h!}$ converge uniformément vers $\exp$.

Les différentielles $\sum_{h=0}^N \frac{D A^h}{h!}$ converge uniformément.

$$\forall H \text{ sq } \|H\| \leq 1, \\ \forall A \in M_n$$

$$\begin{aligned}
 & \left\| \sum_{h=1}^N \frac{D A^h(H)}{h!} \right\| \\
 & \leq \sum_{h=1}^N \frac{\|D A^h(H)\|}{h!} \\
 & \leq \sum_{h=1}^N \frac{h \|A\|^{h-1} \|H\|}{h!}
 \end{aligned}$$

car $\|A^{h-1} H A^i\| \leq \|A\|^{h-1} \|H\|$.

d'où $\left\| \sum_{h=1}^{\infty} \frac{D A^h(H)}{h!} \right\| \leq \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\|A\|^{h-1}}{(h-1)!}$

$$\leq \exp(\|A\|) \|h\|,$$

$$\leq \exp(\|A\|),$$

En particulier la suite $D_A S_n$ converge uniformément vers $\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{D_A \varphi_h}{h!}$ qui est $\mathcal{C}^0$.

Par le théorème de la limite de la dérivée.

$S_n \rightarrow \exp$ et les différentielles $D S_n$ convergent, alors $\exp$ est $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée

est la limite des dérivées.

$$D_A \exp(h) = \sum_{h=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{h-1} A^i h A^{h-1-i}$$