

Équations différentielles et mouches

Ngoc Nhi Nguyen,
ngoc-nhi.nguyen@universite-paris-saclay.fr

Partie 1. L'évolution de la population de mouches de laboratoire peut être donnée par l'équation

$$\frac{dN(t)}{dt} = PN(t - t_0) \exp\left(-\frac{N(t - t_0)}{N_0}\right) - \delta N(t) \quad (1)$$

1. Donner une interprétation biologique des paramètres du modèle.
2. Montrer que l'on peut adimensionner le modèle pour avoir

$$\frac{dn(\tau)}{d\tau} = pn(\tau - \tau_0) \exp(-n(\tau - \tau_0)) - n(\tau). \quad (2)$$

3. En supposant que $p > 1$, montrer que l'unique état stationnaire de (2) strictement positif n_* du modèle adimensionné est donné par $n_* = \ln p$.
4. Chercher une solution de l'équation (2) de la forme $n(\tau) = n_* + \varepsilon n_1(\tau) + \varepsilon^2 r(\tau)$ pour $\varepsilon \ll 1$ et montrer que n_1 satisfait l'équation

$$\frac{dn_1(\tau)}{d\tau} = (1 - \ln p)n_1(\tau - \tau_0) - n_1(\tau). \quad (3)$$

5. En cherchant des solutions de l'équation (3) de la forme $n_1(\tau) = n_1(0)e^{\lambda\tau}$, montrer que λ vérifie l'équation

$$\lambda = -1 - (\ln p - 1)e^{-\lambda\tau_0}. \quad (4)$$

Expliquer que l'état stationnaire est stable pour des délais finis et pourquoi l'état stationnaire ne peut devenir instable (en ayant des solutions complexes de l'équation (4)) que lorsque τ_0 est croissant.

6. Supposons que $\ln p > 2$. A l'aide de l'équation (4), montrer que la valeur critique du délai τ_0 telle que l'état stationnaire est instable peut être obtenue en résolvant

$$\cos(\omega\tau_0) = -\frac{1}{\ln p - 1}, \quad (5)$$

$$\sin(\omega\tau_0) = \omega \ln p - 1, \quad (6)$$

pour $\omega = \Im \lambda$. De plus, montrer que la valeur critique du délai où l'état stationnaire perd sa stabilité est donnée par

$$\tau_0 = \frac{\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{\ln p - 1}\right)}{\sqrt{-(\ln p - 1)^2 - 1}}. \quad (7)$$

Partie 2. La forme générale pour l'équation du délai est donnée avec un délai discret T

$$\frac{dN(t)}{dt} = f(N(t), N(t - T)). \quad (8)$$

On suppose qu'il existe un unique état stationnaire N_* strictement positif.

1. Montrez que l'équation régissant les petites perturbations εN_1 (du premier ordre) autour de l'état stationnaire N_* est donnée par

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -AN_1(t) - BN_1(t - T) \quad (9)$$

avec des constantes A and B à déterminer.

2. En cherchant des solutions de la forme $N_1(t) = N_1(0)e^{\lambda t}$, montrer que la valeur propre λ déterminant la stabilité de l'état stationnaire est donné par

$$\lambda = -A - Be^{-\lambda T}. \quad (10)$$

3. Énoncer les conditions sur A et B afin que l'état stationnaire soit stable dans le cas sans délai and dans le cas $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. En supposant ces conditions, déterminer le délai critique T_c pour lequel λ devient imaginaire pur, $\lambda = i\omega_c$ pour $\omega_c \in \mathbb{R}$.

Partie 3. On considère l'équation différentielle à délai distribué :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{1}{K} \int_0^\infty W(s)N(t-s)ds \right). \quad (11)$$

1. On regarde dans un premier temps un *noyau de retard générique faible* de la forme

$$W(s) = \frac{1}{t_0} e^{-s/t_0} \quad (12)$$

- (a) Adimensionner le modèle pour obtenir

$$\frac{dn(\tau)}{d\tau} = n(\tau) \left(1 - \int_0^\infty w(\xi)n(\tau-\xi)d\xi \right). \quad (13)$$

- (b) Dessiner l'allure de ce noyau, et déduisez une expression pour le délai moyen

$$\bar{\tau}_w = \int_0^\infty \xi w(\xi) d\xi. \quad (14)$$

- (c) Montrer que les états d'équilibres sont $n = 0$ et $n = 1$.

- (d) Montrer que l'équation régissant les petites perturbations $\varepsilon n_1(t)$ pour l'état stationnaire $n_* = 1$ est

$$\frac{dn_1(\tau)}{d\tau} = - \int_0^\infty w(\xi)n_1(\tau-\xi)d\xi. \quad (15)$$

- (e) En cherchant les solutions de l'équation (15) de la forme $n_1(\tau) = n_1(0)e^{\lambda\tau}$, en déduire une équation pour la valeur propre, qui détermine la stabilité de l'état stationnaire.

- (f) Montrer que $n_* = 1$ est linéairement stable pour toutes les valeurs propres pour le délai moyen $\bar{\tau}_w$.

2. On considère à présent le *noyau de retard générique fort* adimensionné

$$w(\xi) = \frac{\xi}{\tau_0^2} e^{-\xi/\tau_0} \quad (16)$$

- (a) Dessiner l'allure de ce noyau sur les mêmes axes que le noyau de délai générique faible adimensionné et dériver une expression pour le délai moyen $\bar{\tau}_s$.

- (b) Refaire la même chose que pour 1.(c)-(e).

- (c) L'état stationnaire $n_* = 1$ peut-il devenir instable pour des valeurs suffisamment grandes du délai moyen ?