

**TD 1 : Modélisation déterministe**  
**Master Mathématique pour les sciences du vivant ; Université Paris-Saclay**

Ngoc Nhi Nguyen  
ngoc-nhi.nguyen@math.u-psud.fr

## 1 Espaces de Sobolev

Dans toute cette section  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  de frontière lisse.

Rappelons ce qu'est un ouvert de frontière de classe  $\mathcal{C}^k$ .

**Définition 1.1** Soit  $k \geq 1$  entier. Un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  est régulier de classe  $\mathcal{C}^k$  s'il existe un nombre fini d'ouverts  $\{\omega_i\}_{0 \leq i \leq N}$  tels que

$$\overline{\omega_0} \subset \Omega, \quad \overline{\Omega} \subset \bigcup_{1 \leq i \leq N} \omega_i,$$

et que pour chaque  $i \in \{1, \dots, N\}$ , il existe une application bijective  $\phi_i$  de classe  $\mathcal{C}^k : \omega_i \rightarrow Q$  où

$$Q := \{y = (y', y_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}, |y'| < 1, |y_d| < 1\},$$

telle que l'inverse  $\phi_i^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  aussi telle que

$$\begin{aligned} \phi_i(\omega_i \cap \Omega) &= Q \cap \{y = (y', y_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}, y_d > 0\} \\ \phi_i(\omega_i \cap \partial\Omega) &= Q \cap \{y = (y', y_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}, y_d = 0\}. \end{aligned}$$

### 1.1 Rappels sur les multi-indices

**Définition 1.2 (Multi-indice)** On appelle multi-indice tout élément de l'ensemble

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k,$$

c'est-à-dire tout  $k$ -uplet  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$  d'entiers naturels pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Les multi-indices permettent d'écrire rapidement certaines choses sur les fonctions de plusieurs variables, comme l'exprime la définition suivante.

**Définition 1.3 (Dérivée suivant un multi-indice)** On appelle dérivée suivant le multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  et on note  $\partial^\alpha$  l'opérateur

$$\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$$

agissant sur les fonctions de  $\mathbb{R}^d$  pour lesquelles il est défini.

Par exemple, dans  $\mathbb{R}^2$ , dériver  $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$  suivant le multi-indice  $\alpha = (1, 3)$  revient à calculer

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^3}{\partial y^3} f.$$

Pour un multi-indice  $\alpha$ , on définit le module et la factorielle comme suit :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d \quad \text{et} \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_d!,$$

on notera alors, pour la variable  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ,

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}.$$

Lorsque concernant un calcul dans  $\mathbb{R}^d$  on écrit

$$\sum_{|\alpha| \leq k},$$

cela signifie que l'on fait la somme sur tous les multi-indices  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  à  $d$  éléments tels que

$$|\alpha| \leq k.$$

## 1.2 Dérivée faible

Certains problèmes ne sont pas adaptés à la recherche de solutions régulières. Il est donc intéressant de définir l'opération de dérivation d'une manière moins rigide. Remarquons que si une fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , alors pour toute fonction régulière à support compact  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ , la formule d'intégration par partie sur un intervalle  $[-R, R]$  nous donne, après passage à la limite  $R \rightarrow +\infty$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx.$$

**Définition 1.4 (Dérivée faible)** Soit  $F \in L^2(\mathbb{R})$ . On dit que  $f \in L^2(\mathbb{R})$  est une dérivée faible de  $F$  si pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} F(x) \varphi'(x) dx.$$

Plus généralement

**Définition 1.5 (Dérivée faible selon un vecteur de base)** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $F \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ . On dit que  $f_i \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$  est une dérivée faible de  $F$  suivant le vecteur  $e_i$  si pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} f_i(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} F(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx.$$

**Définition 1.6 (Dérivée faible selon un multi-indice)** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et  $(e_1, \dots, e_d)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $f \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ . Soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  un multi-indice. Si cela existe, on appellera dérivée faible suivant  $\alpha$  de  $f$  et on notera  $\partial^\alpha f$  la dérivée faible de  $f$  suivant les vecteurs  $e_1, \dots, e_d$  successivement.

À partir d'ici, nous noterons  $f'$  la dérivée faible de  $f$  en dimension 1 et  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  sa dérivée partielle faible suivant le vecteur de base  $e_i$  en dimension quelconque. La dérivée faible est unique et coïncide avec la dérivée forte pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

## 1.3 Espaces $H^k$

On définit certains des espaces dits de Sobolev qui sont plus appropriés que les espaces de fonctions différentiables à la résolution d'équations aux dérivées partielles.

**Définition 1.7 (Espace de Sobolev)** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On appelle espace de Sobolev d'ordre  $k$  sur  $\Omega$  et on note  $H^k(\Omega)$  l'ensemble

$$H^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ tel que } |\alpha| \leq k, \partial^\alpha f \in L^2(\Omega)\}.$$

On s'intéressera surtout aux espaces  $H^1$  et  $H^2$ . Par exemple pour  $\Omega = \mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^3$

$$H^1(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f' \in L^2(\mathbb{R})\}, \quad H^2(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f', f'' \in L^2(\mathbb{R})\},$$

et

$$H^1(\mathbb{R}^3) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^3) \mid \frac{\partial f}{\partial x_1} \in L^2(\mathbb{R}^3), \frac{\partial f}{\partial x_2} \in L^2(\mathbb{R}^3), \frac{\partial f}{\partial x_3} \in L^2(\mathbb{R}^3)\}.$$

On peut munir  $H^1$  de la norme définie par  $\|f\|_{H^1} = \|f\|_{L^2} + \|f'\|_{L^2}$  ou de la norme définie par  $\|f\|_{H^1} = (\|f\|_{L^2}^2 + \|f'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$  qui sont équivalentes, cela en fait un espace de Banach. La seconde est donnée par le produit scalaire sur  $H^1(\mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle_{H^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} (\overline{f(x)}g(x) + \overline{f'(x)}g'(x))dx,$$

qui en fait un espace de Hilbert.

Plus généralement si l'on muni l'espace  $H^k(\Omega)$  de la norme définie par

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

on obtient un espace de Banach séparable. Cette norme est issue du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g \rangle_{L^2(\Omega)},$$

qui fait de  $H^k$  un espace de Hilbert séparable.

**Définition 1.8 (Adhérence des fonctions test (dans  $H^1$ ))** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . On définit l'espace  $H_0^1(\Omega)$  comme l'adhérence de l'espace  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact dans l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$ , où l'adhérence est prise pour la norme naturelle de  $H^1(\Omega)$ , c'est-à-dire,

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{H^1}.$$

Dans le cas particulier  $\Omega = \mathbb{R}^d$ , on a en fait

$$H_0^1(\mathbb{R}^d) = H^1(\mathbb{R}^d).$$

L'espace  $H_0^1(\Omega)$  est donc un outil "prévu pour" l'étude de problèmes dans des ouverts bornés ou possédant un bord non vide, avec une condition de Dirichlet au bord (les solutions s'annulent sur le bord de  $\Omega$ ).

## 1.4 Trace sur le bord

Puisque l'on peut dériver au sens faibles les fonctions des espaces de Sobolev, on a envie d'intégrer par partie. Le problème, c'est que la notion de restriction d'une fonction de  $H^k(\Omega)$  sur le bord de  $\Omega$  n'a aucun sens puisque le bord est de mesure nulle et que les fonctions des espaces de Sobolev sont définies, comme toutes les fonctions de  $L^2$ , à un ensemble de mesure nulle près.

On résout ce problème avec l'opérateur trace. On va définir un opérateur qui envoie une fonction de  $H^1(\Omega)$  sur une fonction de  $L^2(\partial\Omega)$  qui représente sa restriction sur le bord. On admet qu'il est possible de définir de façon satisfaisante une intégrale de surface sur le bord et donc un espace  $L^2(\partial\Omega)$  des fonctions sur le bord de carré intégrable.

**Théorème 1.9** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k > 0$ , alors  $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$  est dense dans  $H^1(\Omega)$  et l'application qui à  $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$  associe la restriction sur le bord  $\gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$  se prolonge en un opérateur linéaire et continu de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ , encore noté  $\gamma_0$ , appelé opérateur de trace.

On peut également définir l'espace  $H_0^1$  comme l'ensemble des fonctions de  $H^1$  de trace nulle :

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) \mid \gamma_0(f) = 0\}.$$

## 2 Intégration par partie et analyse fonctionnelle

On peut étendre la formule d'intégration par partie aux espaces  $H^1$  et  $H^2$ .

**Théorème 2.1 (Intégration par partie dans  $H^1$ )** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k > 0$ . Soit  $\gamma_0$  l'opérateur trace de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ . Pour tout  $u, v \in H^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)(x) \gamma_0(v)(x) \nu_i d\sigma(x),$$

où  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  est la normale unitaire à  $\partial\Omega$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$ .

Comme  $H^2 \subset H^1$ , on peut appliquer l'opérateur trace dans  $H^2$  et généraliser la formule de Green pour le laplacien.

**Théorème 2.2 (Formule de Green pour le laplacien dans  $H^2$ )** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k > 0$ . Soit  $\gamma_0$  l'opérateur trace de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ . Pour tous  $u \in H^2(\Omega)$ ,  $v \in H^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) v(x) d\sigma(x),$$

où on a noté  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \langle \gamma_0(\nabla u(x)), \nu(x) \rangle$ , où on a écrit par abus de notation  $v$  à la place de  $\gamma_0(v)$  et où  $\nu$  est la normale unitaire à  $\partial\Omega$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$ .

En général, on n'écrit pas l'application trace dans les formules d'intégration afin de gagner en lisibilité. Il faut prendre garde d'interpréter les intégrales de surface au sens d'une intégrale de la trace chaque fois que c'est nécessaire.

**Théorème 2.3 (Inégalité de Poincaré)** Pour tout ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  borné, il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $\Omega$  (donc de la dimension) telle que pour toute fonction  $f \in H_0^1(\Omega)$ , on a

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{où} \quad \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} = \left( \|\partial_{x_1} f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \dots + \|\partial_{x_d} f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On peut se demander si les fonctions des espaces de Sobolev ne sont pas parfois plus régulières. C'est en fait le cas. Toutes les fonctions de  $H^1(\mathbb{R})$  sont continues. Par contre, toutes les fonctions de  $H^1(\mathbb{R}^d)$  ne sont pas continues. En fait, on a l'injection suivante.

**Théorème 2.4 (Injection de Sobolev)** Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  est un ouvert de bord régulier, et si  $k \geq m + \frac{d}{2}$ ,

$$H^k(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^m(\Omega).$$

Si de plus  $\Omega$  est borné, l'injection est compacte.

Enfin, on utilisera souvent le résultat d'analyse fonctionnelle (un peu abstrait) suivant.

**Théorème 2.5 (Théorème de Lax-Milgram)** Soit  $H$  un espace de Hilbert réel (resp. complexe) muni d'un produit scalaire réel (resp. hermitien)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de sa norme associée  $\|\cdot\|$ . Soit  $a(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire sur  $H$  (resp. sesquilinéaire) et soit  $l \in H^*$  une forme linéaire continue sur  $H$ . Supposons que  $a$  est

- continue, c'est-à-dire

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \forall u, v \in H, |a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|;$$

- coercive, c'est-à-dire

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall u \in H, a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2.$$

Alors il existe un unique  $u \in H$  tel que

$$\forall v \in H, a(u, v) = l(v).$$

Si de plus  $a$  est symétrique, alors

$$u = \min_{v \in H} \left( \frac{1}{2} a(v, v) - l(v) \right).$$

Ce théorème revient simplement à dire que dans un cadre adapté il y a une unique solution à l'équation fonctionnelle de la variable  $u$

$$a(u, \cdot) = l(\cdot).$$

## 3 Intermède transformation de Fourier

### 3.1 Rappels sur la convolution

**Définition 3.1** Soient  $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ , on appelle lorsque c'est défini presque partout, le produit de convolution de  $f$  et  $g$  la fonction  $f * g$  définie par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) g(y) dy.$$

**Proposition 3.2 (Effet régularisant de la convolution)** Soient  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  et  $g \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^d)$  telle que  $\partial^\beta g$  soit bornée pour tout multi-indice  $\beta \in \mathbb{N}^d$  tel que  $|\beta| \leq m$ . Alors  $f * g \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^d)$  et pour tout  $|\beta| \leq m$

$$\partial^\beta (f * g) = f * \partial^\beta g.$$

**Proposition 3.3 (Existence de la convolution)** Donnons des cas particuliers où la convolution est bien définie.

- Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  et  $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ , le produit de convolution  $f * g$  existe presque partout, est une (classe d'équivalence de) fonction(s) appartenant à  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  et,

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty}.$$

- Soit  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , le produit de convolution  $f * g$  existe presque partout, est une (classe d'équivalence de) fonction(s) appartenant à  $L^1(\mathbb{R}^d)$  et,

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

- Soit  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  et  $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ , où  $p, q \in ]1, +\infty[$  vérifient  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , alors le produit de convolution  $f * g$

existe presque partout, est une (classe d'équivalence de) fonction(s) appartenant à  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  et,

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

- **(Inégalité de Young)** Soit  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  et  $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ , où  $p, q, r \in ]1, +\infty[$  vérifient  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ , alors le produit de convolution  $f * g$  existe presque partout, est une (classe d'équivalence de) fonction(s) appartenant à  $L^r(\mathbb{R}^d)$  et,

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

**Définition 3.4 (Approximation de l'unité)** Une famille de fonctions intégrables positives  $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est une approximation de l'unité si

- pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x) dx = 1$ ,
- si pour tout voisinage de l'origine  $V$ , l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}^d \setminus V} \rho_\varepsilon(x) dx$  converge vers 0 lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

**Théorème 3.5** Si  $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est une approximation de l'unité alors

- soit  $1 \leq p < \infty$ , on a pour toute fonction  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  la convergence de  $\rho_\varepsilon * f$  vers  $f$  dans  $L^p(\mathbb{R}^d)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0,
- si  $f$  est uniformément continue dans  $\mathbb{R}^d$  alors  $f * \rho_\varepsilon$  converge uniformément vers  $f$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

On peut construire des approximations de l'unité à partir de fonctions  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  de norme  $L^1$  unitaire :  $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} \rho(x/\varepsilon)$ . Dans les cas suivants, l'approximation de l'unité peut être régularisante :

- $\rho \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  positive à support dans la boule unité,
- $\rho \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  une fonction plateau normalisée sur un voisinage de 0,
- la gaussienne renormalisée sur  $\mathbb{R}^d$  :  $\rho(x) = (2\pi)^{-d/2} e^{-|x|^2/2}$ .

**Corollaire 3.6** Pour tout  $p \in [1, +\infty[$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , le sous-ensemble  $\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$  est dense dans  $L^p(\mathbb{R}^d)$  muni de sa norme naturelle.

### 3.2 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

**Définition 3.7** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , on appelle sa transformée de Fourier la fonction

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

Remarquons que sous les hypothèses précédentes,  $\hat{f}$  est une fonction continue bornée sur  $\mathbb{R}^d$ . En particulier

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq (2\pi)^{-d/2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

**Proposition 3.8** Pour tout  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , on a les propriétés suivantes

1. Pour tout  $a \in \mathbb{R}^d$ ,  $\widehat{f(\cdot - a)}(\xi) = e^{-ia \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$  et  $\widehat{e^{-ia \cdot x} f}(\xi) = \hat{f}(\xi + a)$ .
2. Pour tout  $\lambda > 0$   $\widehat{f(\cdot/\lambda)}(\xi) = \lambda^d \hat{f}(\lambda \xi)$ .
3. En définissant  $\check{f}(x) := f(-x)$ , on a  $\mathcal{F}(\check{f})(\xi) = \overline{\mathcal{F}(f)(\xi)}$  et  $\mathcal{F}(\overline{f})(\xi) = \overline{\mathcal{F}(f)(-\xi)}$ .
4. Soit  $j \in \{1, \dots, d\}$ , si la fonction  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}^d$  alors  $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)$ .  
Réciproquement, si  $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  alors  $\widehat{x_j f} = i \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{f}$ .

**Proposition 3.9** Si  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  alors  $\widehat{f * g} = (2\pi)^{d/2} \hat{f} \hat{g}$ .

**Lemme 3.10 (Riemann-Lebesgue)** Pour toute  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ,  $\hat{f}$  est continue et tend vers 0 en l'infini.

**Théorème 3.11 (Inversion de Fourier)** Si  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$  alors on a pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^d$

$$f(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (3.1)$$

Donnons quelques exemples de transformées de Fourier de fonctions.

- La fonction  $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-|x|}$  est intégrable et a pour transformée de Fourier  $\xi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+|\xi|^2}$ .
- Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  de partie réelle strictement positive. La gaussienne  $G_\lambda : x \in \mathbb{R}^d \mapsto e^{-\lambda|x|^2/2}$  est intégrable et sa transformée de Fourier est égale à  $\lambda^{-d/2} G_{1/\lambda}$ .

**Théorème 3.12 (Injectivité de Fourier)** Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  telle que  $\hat{f} = 0$  sur  $\mathbb{R}^d$ , alors  $f = 0$  p.p.

### 3.3 Transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz

Commençons par rappeler quelques définitions et propriétés sur les fonctions de Schwartz.

**Définition 3.13** On appelle l'espace de Schwartz de  $\mathbb{R}^d$ , l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  des fonctions régulières dont les dérivées sont à décroissance rapide :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| = 0\}.$$

Les fonctions tests  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  ainsi que les fonctions gaussiennes  $G_\lambda$  (pour  $\Re \lambda > 0$ ) sont des fonctions de Schwartz. Par contre, les fractions rationnelles ne sont des fonctions de Schwartz.

**Définition 3.14** On dit qu'une fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$  est à croissance lente si

$$\forall \beta \in \mathbb{N}^d \quad \exists C_\beta > 0, m_\beta \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad |\partial^\beta f(x)| \leq C_\beta (1 + |x|)^{m_\beta}.$$

Les fonctions polynomiales sont à croissance lente. Par contre la fonction exponentielle n'est pas à croissance lente.

**Proposition 3.15** L'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  est stable par multiplication, dérivation, convolution et multiplication par des fonctions à croissance lente.

Définissons la notion de convergence dans l'espace de Schwartz.

**Définition 3.16** On dit qu'une suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  est convergente vers  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  dans l'espace de Schwartz si  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d \quad x^\alpha \partial^\beta \varphi_n(x)$  converge uniformément vers  $x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)$  dans  $\mathbb{R}^d$ .

Définissons sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  des semi-normes  $\mathcal{N}_q$ , ce qui permet de donner une autre caractérisation de la convergence.

**Proposition 3.17** On munit  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  des normes

$$\mathcal{N}_q(\varphi) = \sup_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, |\alpha|, |\beta| \leq q} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Alors  $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  si et seulement si  $\mathcal{N}_q(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  pour tout  $q \in \mathbb{N}$ .

Remarquons que  $\mathcal{N}_0$  n'est rien d'autre que la norme  $L^\infty$  sur  $\mathbb{R}^d$ . Par ailleurs, on peut définir munir l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  de la distance suivante qui fait de lui un espace métrique complet

$$\delta(\varphi, \psi) := \sum_{q \in \mathbb{N}} 2^{-q} \min(1, \mathcal{N}_q(\varphi - \psi)).$$

Et  $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  si et seulement si  $\delta(\varphi_n, \varphi) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

Notons que l'on a le résultat de densité

**Proposition 3.18** *L'espace  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  est dense dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .*

Par ailleurs, les fonctions de Schwartz ont le bon goût d'être comprises dans les espaces  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .

**Proposition 3.19** *Pour tout  $1 \leq q \leq \infty$ ,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ . En particulier, il existe une constante  $C_{p,d} > 0$  telle que pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$*

$$\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C_{p,d} \mathcal{N}_0(\varphi)^{1-1/p} \mathcal{N}_{d+1}(\varphi)^{1/p}.$$

On a aussi le résultat de densité suivant <sup>1</sup>.

**Proposition 3.20** *L'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  est dense dans les espaces  $L^p(\mathbb{R}^d)$  pour  $1 \leq p < \infty$ .*

Remarquons que ce résultat découle de l'inclusion de  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  et de la densité de  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  3.18 dans les espaces  $L^p(\mathbb{R}^d)$  3.6.

Étudions la transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz.

**Théorème 3.21** *La transformée de Fourier est bien définie sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  et envoie  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  sur elle même. Elle est aussi une application linéaire, bijective, bicontinue, d'inverse*

$$\mathcal{F}^{-1} : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \mapsto \left( x \mapsto (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi) d\xi \right).$$

**Proposition 3.22** *On retrouve toutes les propriétés de la proposition 3.8 <sup>2</sup>. De plus pour tout  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$*

- On a la formule d'inversion du chapeau

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \hat{\psi}(y) dy.$$

- On a aussi la formule de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi(x)} \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{\varphi}(\xi)} \hat{\psi}(\xi) d\xi. \quad (3.2)$$

On en déduit la formule de Plancherel en prenant  $\psi = \varphi$

$$\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\hat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (3.3)$$

- $\widehat{\varphi * \psi} = (2\pi)^{-d/2} \hat{\varphi} \hat{\psi}$  et  $\widehat{\varphi \hat{\psi}} = (2\pi)^{d/2} \hat{\varphi} * \hat{\psi}$ .

Étendons la transformée de Fourier dans l'espace  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Appelons  $\mathcal{F}_{L^2}$  l'application de prolongement de  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . On l'appelle toujours *transformée de Fourier*.

<sup>1</sup>qui sera très utile pour montrer des inégalités fonctionnelles sur les fonctions  $L^p$ !

<sup>2</sup>et à tout ordre de dérivation !



**Théorème 3.23** *L'application  $\mathcal{F}_{L^2} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$  est un isomorphisme isométrique. On retrouve en particulier les formules de Fourier inverse (3.1) et de Plancherel (3.22) sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .*

**Théorème 3.24** *L'application  $\mathcal{F}_{L^2}$  est l'unique application linéaire continue de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$  coïncidant avec la transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  dans  $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ .*

**Gourmandise :** Remarquons que l'on peut ainsi définir par interpolation<sup>3</sup> la transformée de Fourier sur les espaces  $L^p(\mathbb{R}^d)$  avec  $1 \leq p \leq 2$ . Elle envoie même de manière continue les espaces  $L^p$  sur leur dual  $L^{p'}$  où  $2 \leq p' \leq \infty$  est l'exposant conjugué de  $p$  :  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  (c'est le théorème de Hausdorff-Young).

### 3.4 Application pour l'équation de la chaleur

La transformée de Fourier est assez chouette et bien pensée pour certaines équations aux dérivées partielles. On donne une jolie application à l'équation de la chaleur dans l'espace euclidien tout entier  $\mathbb{R}^d$ .

**Théorème 3.25** *Pour tout  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$  donné, il existe une unique solution  $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, L^2(\mathbb{R}^d))$  de l'équation*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u(t) \quad \text{pour } t > 0, \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^d), \\ u(0) &= u_0. \end{cases}$$

*De plus pour tout  $t > 0$ ,  $u(t, \cdot) = u_0 * \kappa_t$  où  $\kappa_t$  est le noyau de Green*

$$\kappa_t(x) := (4\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

*En particulier, pour tout  $t > 0$ , la fonction  $u(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ , tend vers 0 en l'infini ainsi que ses dérivées et*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

---

<sup>3</sup>complexe ou réelle mais ça demande une grosse artillerie. La bonne nouvelle est que c'est fait dans un cours d'analyse harmonique.

## 4 Exercices

### Exercice 1 :

1. Soit la fonction  $H = 1_{\mathbb{R}_+}$ , aussi appelée fonction de Heaviside, qui vaut 0 pour  $x < 0$  et 1 pour  $x \geq 0$ . De quelle fonction est-elle la dérivée faible ?
2. La fonction de Heaviside admet-elle une dérivée faible sur  $\mathbb{R}$  ?

### Exercice 2 :

1. Donner une fonction qui est dans  $H^1(\mathbb{R})$  mais pas dans  $H^2(\mathbb{R})$ . Donner une fonction qui est dans  $H^1(\mathbb{R})$  mais pas dans  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ .
2. Calculer la dérivée faible dans  $L^2(-1, 1]$  de la fonction  $u$  définie par  $u(x) = 1 - x^2$ .
3. Même question avec  $u$  définie par

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1+x & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

4. Enoncer sans le démontrer<sup>4</sup> un résultat plus général qui trivialisait les deux questions précédentes.

### Exercice 3 : ( $H^1(\mathbb{R})$ et la transformée de Fourier)

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . On rappelle que la *transformée de Fourier* de  $f$  est l'application  $\hat{f}$  (qu'on notera aussi  $\mathcal{F}f$ ) définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx,$$

et on appelle (et note) *transformation de Fourier* l'application (linéaire) suivante<sup>5</sup> :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \hat{f}. \end{array}$$

1. Soit  $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$ . Montrer que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi'}(\xi) = i\xi \hat{\varphi}(\xi).$$

2. Soit  $f \in H^1(\mathbb{R})$ . Montrer que pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$  on a

$$\int_{\mathbb{R}} i\xi \mathcal{F}f(\xi) \overline{\mathcal{F}\varphi(\xi)} d\xi = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\varphi'(x)} = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f')(\xi) \overline{\mathcal{F}\varphi(\xi)} d\xi$$

En déduire que la fonction  $\mathcal{F}(f')$  est égale (presque partout) à la fonction  $\xi \mapsto i\xi \mathcal{F}f(\xi)$  et que

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi < +\infty.$$

3. Inversement, supposons que  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et que  $\xi \mapsto \xi \mathcal{F}f(\xi)$  est dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Justifier qu'il existe  $g \in L^2(\mathbb{R})$  tel que pour (presque tout)  $\xi$ ,

$$\mathcal{F}g(\xi) = i\xi \mathcal{F}f(\xi).$$

<sup>4</sup>Même si ce n'est pas dur !

<sup>5</sup>Attention, la définition de la transformée de Fourier dans  $L^2$  est beaucoup moins naturelle que dans  $L^1$ . Il faut la définir en prolongeant la transformée de Fourier dans  $L^1$ , par densité de  $L^1 \cap L^2$  dans  $L^2$ . La récompense pour ces efforts est que cette application est un isomorphisme d'espaces de Hilbert de  $L^2(\mathbb{R})$  sur lui-même. C.f. section sur la transformée de Fourier.

4. Montrer qu'alors pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx d\xi = - \int_{\mathbb{R}} i\xi(\mathcal{F}f)(-\xi) \mathcal{F}\varphi(\xi) d\xi = - \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(x) dx.$$

Conclure.

**Exercice 4 :**

Soit  $I$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ . On veut montrer l'injection de Sobolev

$$H^1(I) \subset \mathcal{C}(\bar{I}),$$

c'est-à-dire montrer que pour tout  $u \in H^1(I)$ , il existe une fonction  $\tilde{u}$  continue sur  $\bar{I}$  telle que  $u$  et  $\tilde{u}$  sont égales presque partout sur  $I$ .

1. Fixons  $x_0 \in I$ . Soit la fonction

$$u_0 : x \mapsto \int_{x_0}^x u'(t) dt.$$

Justifier qu'elle est définie et uniformément continue de  $\bar{I}$  dans  $\mathbb{R}$ .

2. Montrer que pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(I)$ ,

$$\int_I u_0(x) \varphi'(x) dx = \int_I u(x) \varphi'(x) dx.$$

3. Vérifier que

$$\{\varphi' \mid \varphi \in \mathcal{C}_0^1(I)\} = \{\psi \in \mathcal{C}_0^0(I) \mid \int_I \psi(x) dx = 0\}.$$

4. Conclure en étudiant les formes linéaires

$$\begin{aligned} J_1 : \mathcal{C}_0^0(I) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \psi &\longmapsto \int_I \psi(x) dx, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J_2 : \mathcal{C}_0^0(I) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \psi &\longmapsto \int_I (u(x) - u_0(x)) \psi(x) dx. \end{aligned}$$

**Exercice 5 :** (Problème de Dirichlet) Supposons que l'on travaille sur l'espace des fonctions à valeurs réelles. Soit  $q$  une fonction continue et positive sur  $[0, 1]$ .

1. Soit  $f \in L^2(0, 1)$  donné. Montrer qu'il existe un unique  $u \in H_0^1(0, 1)$  tel que

$$\forall v \in H_0^1(0, 1) \quad \int_0^1 [u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

(Indication : on pourra utiliser le théorème de Lax-Milgram sur des formes bilinéaires symétriques  $a$  et linéaire  $l$  bien choisies.)

2. Supposons maintenant que  $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ . Montrer que  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1]$ .

3. En déduire que  $u$  est solution du problème

$$\begin{cases} -u'' + qu &= f \text{ sur } ]0, 1[, \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{cases}$$

4. Montrer que cette solution au sens classique vérifie  $u'(0) = u'(1) = 0$ .

**Exercice 6 :** (Equation de la chaleur) On se propose de démontrer le théorème 3.25.

1. Soit  $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, L^2(\mathbb{R}^d))$  vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u(t) \quad \text{pour } t > 0, \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^d), \\ u(0) &= u_0. \end{cases}$$

Montrer que pour tout  $t > 0$ ,  $\hat{u}(t)$  est égale à  $\hat{u}_0 e^{-t|\xi|^2}$  (dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$ ). En déduire que  $u(t)$  doit être forcément égale à  $u_0 * \kappa_t$ .

2. Montrer que  $(\kappa_t)_{t>0}$  est une approximation de l'unité. On l'appelle notamment  $\kappa$  le noyau de la chaleur.

3. Vérifier que  $u$  est contrôlée par sa donnée initiale  $u_0$ , pour tout  $t \geq 0$

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

et

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

4. Montrer enfin que pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^d$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\partial_x^\alpha u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0,$$

et si  $|\alpha| \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\partial_x^\alpha u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = 0.$$