

TD 2 : Modélisation déterministe
Master Mathématique pour les sciences du vivant ; Université Paris-Saclay

Astrid Decoene, Ngoc Nhi Nguyen
ngoc-nhi.nguyen@math.u-psud.fr

Exercices sur les équations de transport

Exercice 1 Résoudre l'équation de transport

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + 2 \frac{\partial \rho}{\partial x}(t, x) &= xt + t \\ \rho(0, x) &= x - 1. \end{cases}$$

Définition. Soit $\rho_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Soit $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. On dit que $\rho \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty[\times \mathbb{R})$ est **solution faible** de l'équation de transport conservative

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\rho) &= 0 \\ \rho(0, \cdot) &= \rho_0, \end{cases} \quad (0.1)$$

si pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([0, \infty[\times \mathbb{R})$

$$\int_{t=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}} [\rho(t, x) \partial_t \varphi(t, x) + u(t, x) \rho(t, x) \partial_x \varphi(t, x)] dx dt + \int_{\mathbb{R}} \rho_0(x) \varphi(0, x) dx = 0.$$

Exercice 2 1. Vérifier que toute solution faible de (0.1) est solution au sens des distributions dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

2. Supposons que $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et $\rho_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Montrer que toute solution $\mathcal{C}^1$ de (0.1) est solution faible.

3. Supposons que $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et $\rho_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Montrer que toute solution faible qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ est solution classique que (0.1).

Exercice 3 Soit $\rho_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et $u \in \mathbb{R}$ une constante. Montrer que (0.1) admet une unique solution faible $\rho \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty[\times \mathbb{R})$ définie par

$$\rho(t, x) = \rho_0(x - ut).$$

Indications pour l'unicité : On pourra montrer que pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}_c^1([0, \infty[\times \mathbb{R})$, pour un $T > 0$ bien choisi, la fonction φ définie par

$$\varphi(t, x) := \int_T^t \psi(s, x - u(t - s)) ds$$

est $\mathcal{C}_c^1([0, \infty[\times \mathbb{R})$ et vérifie l'égalité

$$\partial_t \varphi + u \partial_x \varphi = \psi.$$

Exercice 4 Soit $\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ à dérivées bornées et telle que $u \in L^\infty([a, b] \times \mathbb{R})$ pour tous $b \geq a \geq 0$.

1. Montrer que l'équation de transport conservative (0.1) admet au plus une solution faible $\rho \in L^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R})$
2. Soit $X(\cdot; t, x)$ la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial s}(s; t, x) &= u(s, X(s; t, x)) \\ X(t; t, x) &= x. \end{cases} \quad (0.2)$$

On pourra admettre que la fonction $(t, x) \mapsto X(s, t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ pour $s \geq 0$ fixé. Montrer que l'équation de transport non conservative

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0 \\ \rho(0, \cdot) &= \rho_0, \end{cases} \quad (0.3)$$

admet une solution faible $\rho \in L^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R})$ donnée par

$$\rho(t, x) = \rho_0(X(0; t, x))$$

Indications :

▷ Pour l'unicité de 1. :

- On peut montrer que pour tout $\psi \in \mathcal{C}_c^1([0, \infty[\times \mathbb{R})$ pour un $T > 0$ bien choisi, la fonction φ définie par

$$\varphi(t, x) := \int_T^t \psi(s, X(s; t, x)) ds$$

est $\mathcal{C}_c^1([0, \infty[\times \mathbb{R})$ et vérifie l'égalité

$$\partial_t \varphi + u \partial_x \varphi = \psi$$

- On pourra montrer

$$\forall t, s \geq 0, x \in \mathbb{R} \quad \partial_2 X(s; t, x) + u(t, x) \partial_3 X(s; t, x) = 0,$$

en regardant pour $s \geq 0$ fixé, les dérivées partielles de la fonction $g : (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mapsto X(t; s, X(s, t, x))$.

Exercice 5 (L'équation de Burgers) On considère l'équation de Burgers

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho^2 / 2) = 0 \quad (0.4)$$

avec la donnée initiale : $\rho_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

1. Montrer que

$$\rho(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 2x \\ 1 & \text{si } t < 2x \end{cases}$$

est solution faible de ce problème.

2. (Non unicité de la solution faible.) Montrer qu'il existe une autre solution faible de (0.4) définie par

$$\rho(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{t} & \text{si } 0 \leq x \leq t \\ 1 & \text{si } x \geq t. \end{cases}$$

Exercice 6 (Optionnel : L'équation des ondes) On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}(t, x) &= 0 & \text{dans } [0, \infty[\times \mathbb{R} \\ \rho(0, x) &= f(x) & \text{dans } \mathbb{R} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t}(0, x) &= g(x) & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases} \quad (0.5)$$

où $c > 0$, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ sont données.

1. Montrer que (0.5) admet une unique solution $\rho \in \mathcal{C}^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$ qui s'écrit

$$\forall t \geq 0, x \in \mathbb{R} \quad \rho(t, x) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

▷ Une méthode : On pourra d'abord montrer que toute solution de (0.5) doit être de la forme

$$\rho(t, x) = u(x+ct) + v(x-ct)$$

avec $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Pour cela, on pourra considérer le changement de variable $(t, x) \mapsto (x+ct, x-ct) = (y, z)$ et écrire l'opérateur $\partial_{tt}^2 - c^2 \partial_{xx}^2$ en fonction des opérateurs ∂_y et ∂_z .

▷ Une autre méthode : chercher la forme explicite des fonctions u et v combinaisons linéaires des dérivées partielles $\partial_t \rho$ et $\partial_x \rho$ telles

$$\begin{cases} \partial_t u - c \partial_x u &= 0 \\ \partial_t v + c \partial_x v &= 0, \end{cases}$$

et en déduire que l'expression de la solution ρ .

2. (Solutions faibles)

Définition. Soient $f, g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$. On dit que $\rho \in L_{\text{loc}}^1([0, \infty[\times \mathbb{R})$ est **solution faible** de (0.5) dans $[0, \infty[\times \mathbb{R}$ si on a pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^2([0, \infty[\times \mathbb{R})$

$$\int_{t=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}} \rho(t, x) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, x) \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) dx - \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(0, x) dx = 0$$

Montrer que

- (a) Toute solution $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de (0.5) est solution faible.
- (b) Toute solution faible de (0.5) est solution au sens des distributions sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
- (c) Toute solution faible de (0.5) qui est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ est solution classique.
- (d) Pour tout $f, g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$, la fonction ρ définie par

$$\rho(t, x) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

est l'unique solution faible de (0.5).