Données initiales aléatoires et théorie de Cauchy pour les ondes sur-critiques

Nicolas Burq

Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, CNRS, UMR 8628
et Institut universitaire de France

I.H.P. 30 novembre 2007

Autour des lauréats des prix de l'académie des sciences

Un résultat de Zygmund (1932)

On fixe une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dont les coefficients sont l^2

$$\sum_k |\alpha_k|^2 < +\infty$$

et on consid'ere la série trigonométrique sur le tore $\mathbb{T}$

$$\sum_k \alpha_k e^{ik\theta}$$

Alors cette série converge dans $L^2(\mathbb{T})$ mais en général, la somme de la série n'est dans aucun $L^p(\mathbb{T})$, $p > 2$.

Si on change les signes de α_k aléatoirement c'est à dire si on considère

$$\sum_k g_k(\omega)\alpha_k e^{ik\theta} = u^\omega(\theta)$$

ou Ω, P est un espace probabilisé et $g_k(\omega)$ sont des variables aléatoires de Bernouilli *indépendantes* sur Ω,

$$P(g_k(\omega) = \pm 1) = \frac{1}{2}$$

on a alors

Theorem (Zygmund 1932)

Pour tout $p < +\infty$ et presque tout $\omega \in \Omega$ la série $\sum_k g_k(\omega)\alpha_k e^{ik\theta}$ converge dans $L^p(\mathbb{T})$.

Pourquoi résoudre des EDP à données initiales peu régulières

- Existence globale de solutions. Stratégie classique existence locale pour des données dans un espace X tel que la norme dans X est essentiellement conservée par le flot. Si on peut résoudre entre $t = 0$ et $t = T(\|u_0\|_X)$ et si $\|u(T)\|_X \leq \|u_0\|_X$ alors on pourra résoudre entre $t = T$ et $t = 2T$, etc...
- Comportement en grand temps sur les solutions *régulières*à données initiales régulières (diffusion), ou comportement en grand temps des normes de ces solutions (taux de croissance exponentiels/polynoomiaux, etc...)
- Pour en déduire des renseignements sur la vitesse d'explosion des solutions explosives (ex NLS)...

EDP sous-critiques/surcritiques (dans les espaces de Sobolev)

Quand on résoud une EDP non lineaire, il apparait assez souvent un niveau de régularité (dit critique), s_c, pour lequel on a le phénomène suivant

- Si les données sont assez régulières, $u_0 \in H^s, s > s_c$ alors on a existence locale (avec un temps d'existence qui ne dépend que de la norme H^s)
- Si les données initiales ne sont pas assez régulières, alors l'EDP est instable

Exemple pour l'équation de Navier-Stokes, on a

- $s_c = 0$ en dimension 2 d'espace
- $s_c = 1/2$ en dimension 3 d'espace

Divers types d'instabilités

- Explosion en temps fini des solutions.
- Il n'y a pas de flot continu (sur aucun borné de H^s).
- Le flot défini par l'EDP (s'il existe) n'est pas uniformément continu sur les bornés de H^s.

Rq. Ce type d'instabilités ne dit pas grand chose sur les solutions correspondant à des données initiales régulières.

L'équation des ondes en dimension 3 d'espace: une EDP modèle

Soit (M, g) une variété Riemanienne de dimension 3 (sans bord) et

$$\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x_i} g^{i,j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{0.1}$$

le Laplacien sur les fonctions. On considère l'équation des ondes cubiques

$$\begin{cases} (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\Delta})u + u^3 = 0, \\ (u, \partial_t u)_{t=0} = (u_0(x), u_1(x)) \in H^s(M) \times H^{s-1}(M) = \mathcal{H}^s(M) \end{cases}$$

Indice critique: $s_c = 1/2$

Theorem (Strichartz 77, Ginibre-Velo 80')

Soit $s \geq 1/2$. *Pour toute donnée initiale* $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}^s(M)$, *il existe* $T > 0$ *et une unique solution du systeme* (7) *dans*

$$C^0([0,T]; H^s(M)) \cap C^1([0,T]; H^{s-1}(M)) \cap L^4((0,T) \times M)$$

L'équation des ondes sur-critique est *mal* posée

Pour $s < 1/2$, instabilités fortes dans $\mathcal{H}^s(M)$: D'une part il n'y a pas de flot continu et de plus il y a perte instantannée de régularité.

Theorem (Lebeau 01, Christ-Colliander-Tao 04, Burq-Tzvetkov 07)

Il existe des suites $(u_{0,n}, u_{1,n}) \in C_0^\infty(M), (t_n) \in \mathbb{R}$ *telles que la solution de (ONL) associée aux données* (u_0, u_1) *existe sur* $[0, t_n]$ *mais*

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 0, \lim_{n\to+\infty} \|(u_{0,n}, u_{1,n})\|_{\mathcal{H}^s(M)} = 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n(t_)\|_{H^s(M)} = +\infty$$

Il existe aussi une donnée initiale $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}^s(M)$ *telle que toute solution* raisonnable *de* (7) *associée a cette donnée cesse instantanément d'appartenir à* $\mathcal{H}^s(M)$

L'instabilité: une situation générique?

- Les données initiales construites par Lebeau sont très pariculières.
- Question: les données exhibant le caractère pathologique décrit par Lebeau sont rares ou au contraire génériques?

Une première réponse est qu'en fait en général la situation est meilleure que ce que laisserait penser le théorème de Lebeau et que la situation qu'il décrit est rare. Nous montrons que pour des données initiales aléatoires, la situation est bien meilleure.

Données aléatoires

On considère (e_n, λ_n) une base hilbertienne de $L^2(M)$ formée de fonctions propres du laplacien associées aux valeurs propres λ_n^n. Tout élément $u \in H^s(M)$ s'écrit

$$u = \sum_n \alpha_n e_n(x), \sum_n (1+\lambda_n)^{2s} |\alpha_n|^2 = \|u\|^2_{H^s(M)} < +\infty.$$

On considère $\Omega, \mathcal{A}, p$ un espace probabilisé et g_n une suite de variables aléatoires *indépendantes centrées* admettant des moments d'ordre q uniformément bornés $q = 4$ suffira en général):

$$\sup_n \mathbb{E}(g_n^q) < +\infty$$

Une fonction aléatoire dans $H^s(M)$ est de la forme

$$u_0^\omega(x) = \sum_n g_n(\omega) \alpha_n e_n(x)$$

L'équation des ondes sur-critique est bien posée pour des données initiales aléatoires dans $\mathcal{H}^{1/4}$

Theorem (Tzvetkov-B. 2007)

Pour une donnée initiale aléatoire dans $\mathcal{H}^s(M)$, $1/4 \leq s$, p.s. il existe $T > 0$ et une unique solution $u^\omega(t,x)$ de (ONL) (dans un espace X_T qui est inclus dans $C([0,T]; H^s(M)) \cap C^1([0,T]; H^{s-1}(M))$).

De l'existence locale à l'existence globale

Le résultat précédent garantit qu'en général, on peut résoudre l'équation sur un intervalle de temps maximal $(0, T)$. Une question naturelle est de savoir si $T = +\infty$ (existence globale). Un deuxième résultat que nous obtenons porte sur cette question. L'équation modèle est un peu différente: on considère sur la boule unité de $\mathbb{R}^3$,

$$(0.2) \quad \begin{cases} (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\Delta})u + |u|^{p-1}u = 0, \\ (u, \frac{\partial u}{\partial t})_{t=0} = (u_0(x), u_1(x)) \in H^s(M) \times H^{s-1}(M) \end{cases}$$

Indice critique $s_c = 3/2 - 2/(p-1)$ On suppose que les données (et donc la solution) sont *radiales*

On choisit

$$u_0 = \sum_n \frac{\sin(nr)}{nr}, u_1 = \sum_n \frac{\sin(nr)}{r}$$

Les v.a. g_n, g'_n sont des Gaussiennes indépendantes centrées réduites.

Theorem (Tzvetkov-B.2007)

On suppose $p < 4$. Alors p.s. la solution de (ONL') existe pour $t \in [0, +\infty[$ et vérifie

$$\|(u^\omega(t,\cdot), \partial_t u^\omega(t,\cdot))\|_{\mathcal{H}^{1/2}(B)} \leq C(1 + \log(1+t))^{1/2}$$

Rq: presque surement la donnée initiale $(u_0^\omega, u_1^\omega) \in \mathcal{H}^s(M)$, $s < 1/2$, mais presque surement $(u_0^\omega, u_1^\omega) \notin \mathcal{H}^{1/2}(M)$ et notre résultat semble hors de portée des théories déterministes

Théorie déterministe: estimations de Strichartz

On note $S(t)(u_0, u_1)$ la solution de l'équation des ondes linéaire a données (u_0, u_1).

Theorem (Strichartz)

$$\|S(t)(u_0, u_1)\|_{L^4((0,T)\times M)} \leq C\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}^{1/2}(M)}$$

Remarques:

- Estimations similaires pour des normes $L^p_t; L^q_x$, $2 \leq p \leq +\infty$
- Estimations de Sobolev impliquent

$$\|u\|_{L^4(M)} \leq C\|u\|_{H^{3/4}(M)}$$

Théorie déterministe: estimations de Sogge

Theorem (Sogge)

$$-\boldsymbol{\Delta} e_n = \lambda_n^2 e_n$$

Alors

$$\|e_n\|_{L^4(M)} \leq C(1+\lambda)^{1/4} \sim \|e_n\|_{H^{1/4}(M)}$$

Remarques:

- Estimations similaires pour les normes L^p, $2 \leq p \leq +\infty$
- Estimations de Sobolev impliquent

$$\|u\|_{L^4(M)} \leq C\|u\|_{H^{3/4}(M)}$$

L'analogue du théorème de Zygmund

Theorem

Presque surement,

$$\|S(t)(u_0^\omega, u_1^\omega)\|_{L^4((0,T)\times M)} \leq C\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}^{1/4}(M)}$$

Preuve: identique à celle du théorème de Zygmund en remplaçant l'estimation triviale

$$|e^{inx}| \leq 1$$

par les estimations de Sogge

Existence locale: idée de la preuve

On cherche la solution u^ω sous la forme

$$u^\omega = S(t)(u_0^\omega, u_1^\omega) + v^\omega = u_f^\omega + v^\omega$$

v est alors solution d'une équation de la forme

$$(\partial_t^2 - \Delta)v^\omega + (v^\omega)^3 + 3(v^\omega)^2 u_f^\omega + 3v(u_f^\omega)^2 + (u_f^\omega)^3$$

Soit a résoudre une équation des ondes non linéaire avec un terme source, $(u_f^\omega)^3$. On utilise alors que p.s. la contribution de ce terme source est meilleure que ce qu'on attendrait ce qui permet de résoudre cette EDP dans un espace *sous critique*. Dans un certain sens, ce résultat montre que le problème qui semblait sur critique est en fait sous critique

Existence globale: idée de la preuve

L'application

$$\omega \mapsto \Big(\sum_n g_n(\omega)\frac{\sin(nr)}{nr}, \sum_n g'_n(\omega)\frac{\sin(nr)}{r}$$

définit une mesure de Wiener sur

$$\cap_{s<1/2}\mathcal{H}^s(M)$$

Une propriété essentielle de cette mesure est que

$$\mu\{(u_0,u_1)\in\mathcal{H}^s(M); \|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{H}^s(M)} > \Lambda\} \leq Ce^{-\alpha\Lambda^2} \tag{0.3}$$

L'idée est (suivant une stratégie de Bourgain pour NLS) de modifier cette mesure pour qu'elle soit (au moins formellement) invariante par le flot de l'équation non linéaire, puis de combiner notre résultat d'existence locale avec cette mesure pour montrer que même s'il peut arriver qu'au cours de l'évolution la solution devienne grande, l'invariance de la mesure combinée avec (0.3) garantit que cela n'arrive que très rarement