Séminaire Bourbaki Mars 1999
51ème année, 1998-99, n$^{\text{o}}$ 856

FORMULES DE TRACE, RÉSONANCES ET QUASI-MODES
[d'après Sjöstrand-Zworski, Stefanov-Vodev et al.]

par **Nicolas BURQ**

1. INTRODUCTION

On se propose dans cet exposé de présenter quelques résultats récents mettant en évidence l'existence de *résonances*. Rappelons par exemple qu'à l'extérieur d'un obstacle compact $\Theta \subset \mathbb{R}^n$, le laplacien avec conditions de Dirichlet Δ_D, sur l'espace $L^2(\Theta^c)$, de domaine l'espace de Sobolev $H^2 \cap H^1_0(\Theta^c)$ est autoadjoint et que sa résolvante $(\mathcal{P}+\mu^2)^{-1}$ est un opérateur holomorphe dans l'ensemble $\mathbf{Im}\mu > 0$. On peut montrer que cette résolvante (agissant de L^2_{comp} dans L^2_{loc}) admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ si n est impair et au revêtement simplement connexe $\widetilde{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{C}^*$ si n est pair. Les résonances sont les pôles de ce prolongement (nous préciserons cette définition dans la section 2). Elles peuvent être interprétées de plusieurs façons. Outre leur définition, ce sont aussi les points pour lesquels il existe une solution sortante (vérifiant les conditions de radiation de Sommerfeld à l'infini, $|\partial_r u + i\mu u| \leq C|e^{-i\mu r}|/r^{1+n/2}$) non triviale de l'équation

$$\left(\Delta+\mu^2\right)u = 0 \;\; u\mid_{\partial\Omega} = 0 \; ; \tag{1.1}$$

ce sont également (en dimension impaire d'espace) les pôles de la matrice de diffusion (scattering) divisés par le complexe i et les valeurs propres du générateur infinitésimal du semi-groupe de Lax et Phillips. Ce sont enfin, nous le verrons à la section 2, les valeurs propres de certains opérateurs (non autoadjoints) construits à partir de $-\Delta_D$ par *distorsion analytique*. Les résonances peuvent permettre (en dimension d'espace impaire) de donner un développement asymptotique en grand temps pour les solutions de l'équation des ondes dans Γ, du type

$$U(t)f = \sum_{\mathbf{Im}\mu < C} e^{it\mu}$$

Pour l'opérateur $-\Delta_D$, les *quasi-modes* sont des suites $(u_n,\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\mu_n \in \mathbb{R}$, $u_n \in H^2 \cap H_0^1\left(\Theta^c\right)$ est une fonction à support compact vérifiant $\|u_n\|_{L^2} = 1$ et $\mu_n \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, vérifiant pour tout $N > 0$:

$$\left(\Delta + \mu_n^2\right) u_n = O\left(\mu^{-N}\right) \;\; u\,|_{\partial\Omega}= 0.$$

De tels quasi-modes ont été construits (voir les résultats de V.M.Babich-V.S.Buldyrev [2], J.Ralston [10], V.F.Lazutkin [6], G.Popov [9]) depuis les années 70 dans certaines géométries favorables (présence de trajectoires captives de type elliptique pour le flot du billard dans Θ^c par exemple).

Nous nous sommes intéressé dans cet exposé à des résultats montrant la présence de résonances, dans un cadre bien plus général que celui du laplacien de Dirichlet. Ces résultats sont de deux types très différents : d'une part nous présenterons des résultats de J.Sjöstrand-M.Zworski [17, 19, 14, 15] utilisant de nouvelles formules de traces valides en dimensions quelconques d'espace (et plus seulement en dimensions impaires) permettant d'obtenir des bornes inférieures pour les fonctions de comptage des résonances (et en particulier de montrer la présence de résonances), et d'autre part des résultats de P.Stefanov-G.Vodev [21, 20], S.U.Tang-M.Zworski [22] montrant que les quasi-modes sont en fait asymptotiquement proches de résonances.

Le plan de l'exposé est le suivant : dans une première partie nous présentons le cadre mathématique de la « boîte noire » de J.Sjöstrand-M. Zworski permettant de définir les résonances pour un opérateur semi-classique analytiquement dilatable à l'infini. Même si elle ne contient pas tous les cas pour lesquels il est possible de définir les résonances, cette approche fournit le cadre conceptuel le plus utilisable à l'heure actuelle pour un analyste. Dans une deuxième partie nous présentons une nouvelle formule de trace due à J. Sjöstrand et nous montrons comment cette formule permet dans l'esprit de J. Sjöstrand-M.Zworski [17] de donner une borne inférieure (non triviale) pour la fonction de comptage des résonances pour l'opérateur de Schrödinger, $-h^2\Delta+V$, sous des hypothèses très faibles sur le potentiel (les hypothèses sont par exemple vérifiées par tout potentiel réel régulier et à support compact). Enfin dans une troisième partie nous présentons les résultats de P.Stefanov-G.Vodev, S.U.Tang-M.Zworski mettant en évidence les liens entre quasi-modes et résonances.

Cet exposé ne prétend pas être exhaustif, ni en ce qui concerne les travaux des auteurs cités dont nous ne présentons qu'une faible part (nous ne parlerons en particulier ni des bornes supérieures pour les fonctions de comptage des résonances ni de résultats récents de J.Sjöstrand-M.Zworski [19] sur la distribution asymptotique des résonances à l'extérieur d'un obstacle convexe), ni en ce qui concerne de nombreux travaux d'autres auteurs sur le sujet.

2. LES RÉSONANCES

2.1. La « boîte noire »

On considère un espace de Hilbert complexe, $\mathcal{H}$ et une famille d'opérateurs $\mathcal{P}$, autoadjoints et non bornés sur $\mathcal{H}$, de domaines $\mathcal{D}$, dépendant d'un paramètre $h \in]0, h_0]$. On munit $H^2\left(\mathbb{R}^n \setminus B\left(0, R_0\right)\right)$ de la norme $\|u\|_{H^2}^2 = \|\left(1 - h^2\Delta\right) u\|_{L^2}$ et $\mathcal{D}$ de la norme $\|u\|_{\mathcal{D}} = \|\left(i + \mathcal{P}\right)^{-1} u\|_{L^2}$.

Nous ferons les hypothèses suivantes sur $\mathcal{H}$ et $\mathcal{P}$.

- **H1** L'espace $\mathcal{H}$ admet une décomposition orthogonale
$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{R_0} \oplus L^2\left(\mathbb{R}^n \setminus B\left(0, R_0\right)\right),$$
$$u \in \mathcal{H} = 1_{B(0,R_0)} u + 1_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R_0)} u$$
et on suppose que
$$1_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R_0)} \mathcal{D} = H^2\left(\mathbb{R}^n \setminus B\left(0, R_0\right)\right),$$
uniformément par rapport à h, c'est à dire que l'application
$$1_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R_0)} : \mathcal{D} \to H^2\left(\mathbb{R}^n \setminus B\left(0, R_0\right)\right)$$
est uniformément bornée par rapport à h et à un inverse à droite qui est aussi uniformément borné par rapport à h.
- **H2** Si $u \in H^2\left(\mathbb{R}^n \setminus B\left(0, R_0\right)\right)$ est nulle au voisinage de $B\left(0, R_0\right)$, alors u (ou plutôt son prolongement par 0 en debors de $\mathbb{R}^n \setminus B\left(0, R_0\right)$) appartient à $\mathcal{D}$.
- **H3** L'opérateur $1_{B(0,R_0)}\left(\mathcal{P} + i\right)^{-1}$ est compact.
- **H4** On suppose que $\left(\mathcal{P}u\right)|_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0,R_0)}}$ est de la forme $Q\left(u\right)$, avec
$$Qu = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha\left(x\right)\left(hD_x\right)^\alpha u + \sum_{|\alpha|<2} a_\alpha\left(x, h\right)\left(hD_x\right)^\alpha u, \tag{2.1}$$
où Q est formellement autoadjoint, les fonctions a_α sont uniformément bornées par rapport à h ainsi que toutes leurs dérivées et vérifient
$$\begin{gathered} \exists c > 0; \forall x,\ \textstyle\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \xi^\alpha \geq c|\xi|^2, \\ \textstyle\sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha \xi^\alpha \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} |\xi|^2 \text{ uniformément par rapport à } h. \end{gathered} \tag{2.2}$$
- **H5** Soient $R > 2R_0$ et $\mathcal{P}^\sharp$ l'opérateur sur $\mathcal{H}^\sharp = \mathcal{H}_{R_0} \oplus L^2\left(\mathbb{R}^n / R\mathbb{Z}^n \setminus B\left(0, R_0\right)\right)$ qui coïncide avec $\mathcal{P}$ sur la cellule $[-R, R]^n$ avec des conditions périodiques au bord. L'opérateur $\mathcal{P}^\sharp$ a alors un spectre discret et on note $N^\sharp\left(\mathcal{P}^\sharp\right)$ le nombre de ses valeurs propres dans un intervalle I. On suppose qu'on a une formule de type « formule de Weyl » pour la fonction de comptage, $N^\sharp$, des valeurs propres de $\mathcal{P}^\sharp$:
$$N^\sharp\left(\mathcal{P}^\sharp, [-\lambda, \lambda]\right) = \mathcal{O}\left(\lambda/h^2\right)^{n^\sharp}; \lambda \geq 1.$$
On peut vérifier que cette hypothèse ne dépend pas du choix de R.

Les deux exemples fondamentaux d'opérateurs vérifiant les hypothèses précédentes sont les suivants :

L'opérateur de Schrödinger. On considère $\mathcal{P} = -h^2\Delta + V(x,h)$ où le potentiel V est réel et vérifie $\lim_{x\to+\infty} V(x,h) = 0$ (uniformément par rapport à h), sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ et de domaine $\mathcal{D} = H^2(\mathbb{R}^n)$.

Le problème extérieur. On considère $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné régulier, $\Gamma = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Theta}$ et $\mathcal{P} = -h^2\Delta_D$ (respectivement $\mathcal{P} = -h^2\Delta_N$) le laplacien de Dirichlet (respectivement de Neumann) sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\Gamma)$ de domaine $\mathcal{D}_D = H^2(\Gamma) \cap H_0^1(\Gamma)$ (respectivement $H^2(\Gamma)$).

2.2. **Distorsion analytique**

Dans cette partie on définit les résonances comme étant les valeurs caractéristiques de certains opérateurs non autoadjoints, obtenus à partir de P par distorsion analytique. L'introduction de la distorsion analytique pour l'étude des résonances remonte aux travaux de J.Aguilar-J.M. Combes [1].

- **H6** On suppose qu'il existe un angle $\theta_0 \in]0,\pi[$ et $\varepsilon > 0$, $R_1 > R_0$ tels que les coefficients $a_\alpha(x,h)$; $|\alpha| \leq 2$ admettent un prolongement holomorphe en x à l'ensemble

  $$\Gamma_{R_0,\theta_0,\varepsilon} = \{r\omega; \omega \in \mathbb{C}^n; \mathrm{dist}(\omega,\mathbb{C}^n) < \varepsilon, r \in e^{i[0,\theta_0[}]R_1,+\infty[\}.$$

  On suppose aussi que les relations (2.1) et (2.2) restent vérifiées dans cet ensemble.

Cette hypothèse supplémentaire est évidement vérifiée pour le problème extérieur et pour l'opérateur de Schrödinger si par exemple le potentiel est à support compact.

Les constantes $\varepsilon_0 > 0, R_1 > R_0$ étant fixées, on peut construire une famille de déformations

$$[0,\theta_0] \times [0,+\infty[\ni (\theta,t) \mapsto f_\theta(t) \in \mathbb{C},$$

vérifiant

(1) $f_\theta(t) = t$ pour $t \leq R_1$,

(2) $0 \leq \arg(f_\theta(t)) \leq \theta$, $\partial_t f_\theta \neq 0$,

(3) $\arg(f_\theta(t)) \leq \arg\partial_t(f_\theta(t)) \leq \arg(f_\theta(t)) + \varepsilon_0$,

(4) $f_\theta(t) = e^{i\theta}t$ pour $t \geq T_0$, T_0 dépendant de R_1 et ε_0.

On considère alors l'application

$$\kappa_\theta : \mathbb{R}^n \ni x = |x|\omega \mapsto f_\theta(|x|)\,\omega \in \mathbb{C}^n$$

et on note Γ_θ son image qui est une variété totalement réelle ($T\Gamma_\theta \cap iT\Gamma_\theta = 0$) qui coïncide avec $\mathbb{R}^n$ près de $B(0,R_1)$. On note aussi

$$\mathcal{H}_\theta = \mathcal{H}_{R_0} \oplus L^2(\Gamma_\theta \setminus B(0,R_0)).$$

La fonction κ_θ permet d'identifier $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_0$. De la même façon, on définit $\mathcal{D}_\theta = \kappa_{\theta *}(\mathcal{D})$. Soit $\chi \in C_0^\infty(B(0,R_1))$ égale à 1 au voisinage de $B(0,R_0)$. On définit alors un opérateur $\mathcal{P}_\theta$ non borné (et non autoadjoint) de domaine $\mathcal{D}_\theta$ par

$$\mathcal{P}_\theta u = \mathcal{P}(\chi u) + Q\,|_{\Gamma_\theta}\,((1-\chi)u)\,;\ \ 0 \leq \theta \leq \theta_0.$$

Le symbole principal de l'opérateur $Q\,|_{\Gamma_\theta}$ vaut $q_\theta(z,\zeta) = q_0\left(\left(\kappa_\theta^{-1}(z),\ {}^tT\kappa_\theta(\zeta)\right)\right)$. Si on identifie Γ_θ et Γ, on obtient par exemple pour $-\Delta$ et son symbole principal, D en coordonnées polaires :

$$-\Delta_{\Gamma_\theta} = \left(\frac{1}{f'(t)} D_t^2\right) - \frac{n-1}{f(t)\,f'(t)} iD_t + (f(t))^{-2} D_\omega^2,$$

$$D_\theta = \frac{\tau^2}{f'(t^2)} + \frac{|\eta|^2}{f(t)^2}.$$

Les lemmes suivants permettent de définir les résonances dans ce cadre : le premier résultat garantit que le spectre de $\mathcal{P}_\theta$ est en dehors de $e^{-2i\theta}[0,+\infty[$ formé de valeurs propres :

Lemme 2.1 (J. Sjöstrand-M. Zworski [16]). — Soit $z \in \mathbb{C}^*$, tel que $\arg z \neq -2\theta$. Alors $\mathcal{P}_\theta : \mathcal{D}_\theta \mapsto \theta$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0. En particulier un point $z \in \mathbb{C} \setminus e^{-2i\theta}[0,+\infty[$ appartient au spectre de $\mathcal{P}_\theta$ si et seulement si $\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{P}_\theta - z) \neq 0$

et le deuxième résultat décrit l'invariance du spectre par rapport à θ et au choix de la déformation f_θ :

Lemme 2.2 (J. Sjöstrand-M. Zworski [16]). — Soient $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_0$ et $z \in \mathbb{C} \setminus e^{-2i[\theta_1,\theta_2]}[0,+\infty[$. Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{P}_{\theta_1} - z)^k = \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{P}_{\theta_2} - z)^k.$$

De plus, si on choisit une deuxième famille de déformation, $\widetilde{f}_\theta$ vérifiant les hypothèses **(1)**–**(4)** et si on note $\widetilde{\mathcal{P}}_\theta$ la famille d'opérateurs associée, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \dim \operatorname{Ker}\big(\widetilde{\mathcal{P}}_{\theta_1} - z\big)^k = \dim \operatorname{Ker}\big(\mathcal{P}_{\theta_1} - z\big)^k.$$

Définition 2.3. — On appelle *résonances* de l'opérateur $\mathcal{P}$ incluses dans $e^{-2i[0,\theta[}]0,+\infty[$ les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{P}_\theta$ incluses dans $e^{-2i[0,\theta[}]0,+\infty[$. On notera $\operatorname{Rés}(\mathcal{P})$ l'ensemble des résonances de $\mathcal{P}$.

D'après le lemme 2.2, cette définition ne dépend ni du choix de θ ni de celui de la famille de déformations f_θ. D'après la théorie de Fredholm analytique, si $z_0 \in e^{-2i[0,\theta[}]0,+\infty[$ est une résonance, alors l'opérateur

$$\pi_{\theta,z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\eta<<1} (z - \mathcal{P}_\theta)^{-1}\,dz$$

est une projection de rang fini, son image F_{θ,z_0} est, pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand le noyau de $(\mathcal{P}_\theta - z_0)^k$ et sa dimension ne dépend donc ni du choix de θ ni de celui de f_θ.

Définition 2.4. — Si $z_0 \in e^{-2i[0,\theta[}]0,+\infty[$ est une résonance alors on définit sa *multiplicité* mult (z_0) par

$$\mathrm{mult}\,(z_0) = \dim F_{\theta,z_0}.$$

Remarque 2.5. — La définition des résonances que nous avons donnée coïncide avec les autres définitions possibles, en particulier, on aurait pu montrer que la résolvante $(z-\mathcal{P})^{-1}$ définie (et holomorphe) de $\mathcal{H}_{\mathrm{comp}}$ dans $\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$ pour $\mathbf{Im} z > 0$ peut être prolongée méromorphiquement à travers $]0,+\infty[$ et que les pôles de ce prolongement sont les résonances. Plus précisement, on a le résultat suivant :

Lemme 2.6. — Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 au voisinage de $B(0,R_0)$. Alors la résolvante tronquée, $\chi(\mathcal{P}-z)^{-1}\chi$, qui est holomorphe pour $\mathbf{Im} z > 0$, admet un prolongement méromorphe à l'ensemble $z \in e^{-2i]\pi,\theta[}]0,+\infty[$, les pôles de ce prolongement sont les résonances situées dans $e^{-2i]0,\theta[}]0,+\infty[$ et leur multiplicité est la dimension de l'image du projecteur spectral tronqué correspondant :

$$\chi\pi_{z_0}\chi = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0=\eta<<1} \chi(z-\mathcal{P})^{-1}\chi dz.$$

Remarque 2.7. — La définition des résonances que nous avons esquissée dans l'introduction correspond donc à prendre $\mu = h^{-1}\sqrt{\lambda}$ où λ est une résonance suivant la définition 2.3 et $\sqrt{\lambda}$ la racine est la détermination principale de la racine (positive sur $\mathbb{R}^{+*}$).

3. FORMULES DE TRACES ET RÉSONANCES

3.1. Formules de trace

Dans le cas de la diffusion par un obstacle, Θ, ou par un potentiel à support compact, notons $U(t) = \cos\left(t\sqrt{\mathcal{P}}\right)$, $U_0(t) = \cos\left(t\sqrt{\mathcal{P}_0}\right)$ $\left(U_0(t) = 1_{\Theta^c}\cos\left(t\sqrt{\mathcal{P}_0}\right)1_{\Theta^c}\right.$ dans le cas d'un obstacle, $\mathcal{P}_0 = -\Delta$ dans $\mathbb{R}^n$ (ici on fixe $h=1$). La formule de Poisson suivante a été démontrée par P.Lax-R.Phillips [5], puis généralisée successivement par C.Bardos-J.C.Guillot-J.Ralston [3], R.Melrose, [7, 8] et J.Sjöstrand-M.Zworski [18] *dans le cas où la dimension d'espace est impaire* :

$$u(t) = 2\mathrm{Tr}\left(U(t) - U_0(t)\right) = \sum_{\lambda\in\widetilde{\mathrm{Rés}}(\mathcal{P})} e^{-i\lambda|t|};\ t \neq 0,$$

l'égalité ayant lieu au sens des distributions sur $\mathbb{R}^*$, et $\widetilde{\mathrm{Rés}}$ désignant l'ensemble des résonances telles que définies dans l'introduction. Cette relation s'exploite souvent de la manière suivante : on considère $\chi \in C_0^\infty(]0,+\infty[)$ et on obtient pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\widehat{\chi}\left(\lambda-\sqrt{\mathcal{P}}\right)+\widehat{\chi}\left(\lambda+\sqrt{\mathcal{P}}\right)-\widehat{\chi}\left(\lambda-\sqrt{\mathcal{P}_0}\right)-\widehat{\chi}\left(\lambda+\sqrt{\mathcal{P}_0}\right)\right)&\\ =\widehat{\chi u}(\lambda) = \sum_{\mu\in\widetilde{\mathrm{Rés}}}\widehat{\chi}(\lambda-\mu).&\end{aligned} \tag{3.1}$$

La fonction

$$\widehat{\chi}\left(\lambda-\sqrt{z}\right)+\widehat{\chi}\left(\lambda+\sqrt{z}\right)$$

étant holomorphe (car les puissances impaires de $\sqrt{z}$ se compensent). On s'intéresse alors à l'asymptotique $\lambda \to +\infty$ de la relation (3.1). Posons $\lambda = h^{-1}$, on obtient

$$\widehat{\chi u}\left(\lambda\right)=\sum_{\mu\in\widetilde{\text{Rés}}}\widehat{\chi}\left(h^{-1}\left(1-h\sqrt{\mu}\right)\right)+\widehat{\chi}\left(h^{-1}\left(1+h\sqrt{\mu}\right)\right).$$

On constate que la contribution du second terme est $\mathcal{O}\left(h^{\infty}\right)$ tandis que celle du premier terme donne

$$\widehat{\chi u}\left(\lambda\right)=\sum_{\lambda\in\text{Rés}}\widehat{\chi}\left(h^{-1}\left(1-\lambda\right)\right)+\mathcal{O}\left(h^{\infty}\right); \tag{3.2}$$

des renseignements sur les singularités de u (et donc sur la non décroissance rapide en λ de $\widehat{\chi u}$ peuvent alors permettre d'obtenir des indications sur la localisation des résonances.

Le but de cette partie est de présenter une formule de trace semi-classique locale due à J. Sjöstrand applicable en toutes dimensions d'espace et pour des perturbations du Laplacien qui peuvent être à longue portée et permettant de fournir des résultats du type (3.2). Nous suivons ici la présentation de [15]. Nous noterons par la suite, si f_0 et f_1 sont deux quantités, $[f.]_0^1 = f_1 - f_0$.

On considère deux opérateurs $\mathcal{P}_{0;1}$ de domaines $\mathcal{D}_{0;1}$ vérifiant les hypothèses **H1–6**. On suppose qu'ils vérifient l'hypothèse supplémentaire :

- **H7**

$$\forall\alpha;\,|\alpha|\leq 2,\forall 0<h\leq h_0,\ \forall x\in\Gamma_{R_0,\theta,\varepsilon},$$
$$\left|\left[a_{;\alpha}\left(x,h\right)\right]_0^1\right| = ||\left[a_{1,\alpha}\left(x,h\right)-a_{0,\alpha}\left(x,h\right)\right]_0^1| \leq C\left(1+|x|\right)^{-\widetilde{n}};\widetilde{n}>n.$$

Le résultat suivant permet de définir la trace (on note $n^\sharp = \max\{n_0^\sharp, n_1^\sharp\}$) :

Proposition 3.1. — Soient $m > 2N$, $\chi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$, égale à 1 au voisinage de $B\left(0,R_0\right)$ et $f \in C^{\infty}_{-}$

Soient $W \subset\subset \Gamma$ deux ouverts relativement compacts de $e^{i]-2\theta_0,\varepsilon_0]}]0,+\infty[$. On suppose que les intersections I et J de W et Γ avec l'axe réel sont des intervalles et que Γ est simplement connexe. On note Γ_- et W_- les intersections de Γ et W avec $e^{i]-2\theta_0,0]}]0,+\infty[$.

THÉORÈME 1 (Sjostrand, 96). — Soit $f(z,h)$ une famille de fonctions holomorphes en $z \in \Gamma$ telle que $|f|_{\Omega\setminus W}| \leq 1$. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 au voisinage de $\overline{I}$. Alors

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\left((\chi f)(\mathcal{P}_1) - (\chi f)(\mathcal{P}_0)\right)\\ &\quad= \Big[\sum_{\lambda\in \mathrm{Rés}\,\mathcal{P}_\cdot\cap W_-} f(\lambda,h) - \sum_{\mu\in\sigma(\mathcal{P}_\cdot)\cap]-\infty,0[\cap W_-} f(\mu,h)\Big]_0^1 + \mathcal{O}\left(h^{-n^\sharp}\right).\end{aligned}$$

REMARQUE 3.2. — Si $W \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$, le choix de $f = 1$ sur W dans la formule de trace permet, si on peut construire un opérateur $\mathcal{P}_0$ n'ayant pas de résonances dans W, de retrouver que le nombre de résonances de $\mathcal{P}_1$ dans W est majoré par $Ch^{-n^\sharp}$ (ce résultat était connu antérieurement).

La démonstration de cette formule de trace est assez technique. Nous allons en donner les grandes lignes. On fixe $m \in \mathbb{N}$ assez grand pour que les opérateurs qu'on considère aient de bonnes propriétés de trace et on écrit, pour un $z_0 \notin W$ de partie imaginaire strictement positive, loin du spectre de $\mathcal{P}$, $f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z)$ et on obtient par le calcul fonctionnel des opérateurs autoadjoints

$$\begin{aligned}(\chi f)(\mathcal{P}_\cdot) &= (P - z_0)^{-m}(\chi g)(\mathcal{P}_\cdot),\\ &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\chi(x)\,(\mathcal{P}_\cdot - z_0)^{-m}\left((x+i0-\mathcal{P})^{-1} - (x-i0-\mathcal{P})^{-1}\right)dx.\end{aligned}$$

Soit $\widetilde{\chi}$ une extension quasi analytique de χ ($\partial_{\overline{z}}\chi$ est nulle à l'ordre infini sur $\mathbb{R}$), à support proche de $J_+ = J \cap \mathbb{R}^+$, égale à 1 au voisinage de $I_+ = I \cap \mathbb{R}^+$. La formule de Stokes implique ($dL(z)$ étant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$),

$$\begin{aligned}(\chi f)(\mathcal{P}_\cdot) &= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} g(z)\,\partial_{\overline{z}}\widetilde{\chi}(z)\,(\mathcal{P}_\cdot - z_0)^{-m}(z-\mathcal{P}_\cdot)^{-1}\,dL(z)\\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{\Omega_-} - \frac{1}{\pi}\int_{\Omega_+}\\ &= I_\cdot^- + I_\cdot^+.\end{aligned}$$

On choisit $\widehat{\chi}$ égale à 1 au voisinage de W_-, à $\widetilde{\chi}$ près de J_+ et quasi analytique près de $\mathbb{R}^-$. On obtient

$$I_\cdot^- = -\left(\widehat{\chi}1_{\mathbb{R}^-}f\right)(\mathcal{P}_\cdot) - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} g(z)\,\partial_{\overline{z}}\widehat{\chi}(z)\,(\mathcal{P}_\cdot - z_0)^{-m}(z-\mathcal{P}_\cdot)^{-1}\,dL(z).$$

On vérifie alors que la contribution du premier terme à la trace donne le terme de la formule de trace correspondant aux valeurs propres négatives des opérateurs $\mathcal{P}_{0;1}$ tandis que celle du deuxième est en $\mathcal{O}\left(h^{-n^\sharp}\right)$. Il reste à étudier la contribution de I^+ à la formule de trace.

La formule de Stokes donne

$$I_{\cdot}^{+} = -\frac{1}{\pi}\int_{\Omega_+\cap\mathbf{Im}z\leq\delta} g(z)\,\partial_{\overline{z}}\widetilde{\chi}(z)\,(\mathcal{P}_{\cdot}-z_0)^{-m}\,(z-\mathcal{P}_{\cdot})^{-1}\,dL(z)$$
$$+\frac{1}{2i\pi}\int_{\Omega_+\cap\mathbf{Im}z=\delta} g(z)\,\widetilde{\chi}(z)\,(\mathcal{P}_{\cdot}-z_0)^{-m}\,(z-\mathcal{P}_{\cdot})^{-1}\,dz.$$

Si $\delta > 0$ est assez petit, sur le domaine d'intégration de la première intégrale, $g = \mathcal{O}(1)$, ce qui permet de montrer que la contribution de ce terme à la trace est $\mathcal{O}\left(h^{-n^\sharp}\right)$. La deuxième intégrale est, modulo une erreur du même ordre égale à

$$J_{\cdot} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} g(z)\,(\mathcal{P}_{\cdot}-z_0)^{-m}\,(z-\mathcal{P}_{\cdot})^{-1}\,dz,$$

où γ est un segment $[a,b]$, $\mathbf{Im}a = \mathbf{Im}b = \delta$, $J_+ \ni \mathbf{Re}a < \inf I_+$, $J_+ \ni \mathbf{Re}b > \sup I^+$. On montre alors qu'on peut déformer l'opérateur $\mathcal{P}$ sans changer $J_{\cdot}$:

$$J_{\cdot} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} g(z)\,(\mathcal{P}_{\theta,\cdot}-z_0)^{-m}\,(z-\mathcal{P}_{\theta,\cdot},\cdot)^{-1}\,dz.$$

Soit γ' un contour dans $\Gamma\setminus W$ joignant a à b. On montre ensuite (et c'est la partie la plus technique de la preuve) que

$$\mathbf{Tr}\Big[\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'} g(z)\,(\mathcal{P}_{\theta,\cdot}-z_0)^{-m}\,(z-\mathcal{P}_{\theta,\cdot})^{-1}\,dz\right)\Big]_0^1 = \mathcal{O}\left(h^{-n^\sharp}\right),$$

ce qui implique

$$\mathbf{Tr}\left(\Big[J\Big]_0^1\right) = \mathbf{Tr}\left(\Big[\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma\cup\gamma'} g(z)\,(\mathcal{P}_{\theta,\cdot}-z_0)^{-m}\,((z-\mathcal{P}_{\theta,\cdot})^{-1}\,dz\Big]_0^1\right)+\mathcal{O}\left(h^{-n^\sharp}\right),$$
$$= \mathbf{Tr}\left(\Big[\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma\cup\gamma'} g(z)\,(P-z_0)^{-m}\,(z-\mathcal{P}_{\theta})^{-1}\,dz\Big]_0^1\right)+\mathcal{O}\left(h^{-n^\sharp}\right),$$

et le théorème des résidus fournit la contribution des résonances à la formule de trace.

3.2. Application à l'étude des résonances pour des opérateurs de Schrödinger semi-classiques

Soit $\mathcal{P}_1 = -h^2\Delta + V_1(x)$ un opérateur de Schrödinger vérifiant les hypothèses **H1–6**. Pour $E > 0$ on note $\nu_{+,1}(E) = \int_{V_1(x)\geq E} dx$ et on rappelle que le support singulier analytique d'une distribution f, noté supp $\mathrm{sing}_a(f)$, est l'ensemble des points au voisinage desquels cette distribution n'est pas une fonction analytique réelle). On a alors le résultat suivant qui montre l'existence de nombreuses résonances :

Théorème 2 (Sjöstrand 96). — Soit $0 < E_0 \in \operatorname{supp}\,\mathrm{sing}_a(\nu_{+,1})$. Alors pour tout voisinage complexe de E_0, W, il existe $h_0, C > 0$ tels que pour tout $0 < h < h_0$ le nombre de résonance de $\mathcal{P}$ dans W est supérieur à Ch^{-n}.

Remarque 3.3. — Dans la mesure où la distribution ν_+ est nulle pour

$$|x| > \sup_x |V_1(x)|,$$

son support singulier analytique n'est pas vide.

Pour la démonstration du théorème 2 nous suivons [13] : on commence par construire un deuxième opérateur $\mathcal{P}_0 = -h^2\Delta + V_0$ vérifiant les hypothèses **H1–6** et tel que

(1) La mesure $\nu_{+,0}$ est nulle au voisinage de E_0,

(2) l'opérateur $\mathcal{P}_0$ n'a pas de résonance au voisinage de E_0,

(3) $|V_1(x) - V_0(x)| \le \frac{C}{(1+|x|)^{-n-1}}$.

Cette construction se fait simplement par troncature et régularisation.

Pour $\pm E > 0$, on note $\nu_{\pm,\cdot} = \int_{\pm V(x) \ge \pm E} dx$ et $\mu_\pm = \mp \frac{d}{dE}\nu_{\pm,\cdot}$. Les distributions μ_+ et μ_- sont deux mesures positives sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ respectivement. Soit μ la distribution d'ordre -1, à support compact définie par

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \int (\varphi(V_1(x) - V_0(x))\, dx, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

On a $\mu_{\mathbb{R}^\pm} = \Big[\mu_{\pm,\cdot}\Big]_0^1$. Enfin, on note ω la distribution définie par

$$\langle \omega, \varphi \rangle = \iint \Big[f\big(\xi^2 + V_\cdot(x)\big)\Big]_0^1 dx.$$

Des calculs standard de distributions permettent d'exprimer μ et ω en fonction l'une de l'autre et de montrer en particulier que leurs supports singuliers analytiques coïncident. En particulier, $E_0 \in \operatorname{supp}\operatorname{sing}_a(\omega)$. Plus précisement, puisque la distribution ω est réelle, les deux points $(E_0, \pm 1)$ appartiennent au front d'onde analytique de ω. On rappelle la caractérisation du front d'onde analytique, $SS_a(f)$, d'une distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, en termes de transformation de F.B.I. (voir [12]) :

Définition 3.4. — Soient $\varrho_0 = (x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2d}$ et $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ égale à 1 au voisinage de x_0. On dit que ϱ_0 n'appartient pas au front d'onde analytique de f ($\varrho_0 \notin SS_a(f)$) si et seulement s'il existe V un voisinage dans $\mathbb{C}^d$ de $x_0 - i\xi_0$ et $C, \varepsilon > 0$ tels que

$$T(\chi f, \lambda, z) = \int e^{-\lambda(z-x)^2/2} \chi f(x)\, dx,$$

vérifie $|T(\chi f, \lambda, z)| \le Ce^{\lambda(\mathbf{Im} z)^2/2 - \varepsilon\lambda}$ sur $[1, +\infty[_\lambda \times V_z$. Cette définition est indépendante du choix de χ.

Puisque $(E_0, \pm 1)$ appartiennent au front d'onde analytique de ω, il existe donc des suites $(\alpha_j, \beta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_j, \lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $(E_0, 1)$ et $(0, +\infty)$ respectivement et vérifiant

$$|T(\chi f, \lambda_j, \alpha_j - i\beta_j, \lambda_j)| = \left| \int e^{i\lambda_j\left(\beta_j(\alpha_j - E_0) + i(\alpha_j - E_0)^2/2\right)} \chi f(x)\, dx \right| \ge e^{-\varepsilon_j \lambda_j}. \tag{3.3}$$

Soient $a, b > 0$ et

$$\Gamma =]E_0 - b, E_0 + b[\times i] - a, a], \ W =]E_0 - b/2, E_0 + b/2[\times i] - a/2, a].$$

On note I et J les intersections respectives de W et Γ avec l'axe réel et $\chi \in C_0^\infty(J)$ égale à 1 sur I. Soient

$$f_j(E) = e^{i\lambda_j\left(\beta_j(\alpha_j - E_0) + i(\alpha_j - E_0)^2/2\right)},$$

qui vérifient, si a, b et a/b sont petits, $f_j\ |_{\Omega\backslash W}\ | \leq e^{-\lambda_j/C}$. La formule de trace du théorème 1 donne

$$\begin{aligned} \text{(3.4)} \qquad \operatorname{Tr}\Big[(f_j\chi)(\mathcal{P}.) \Big]_0^1 &= \Big[\textstyle\sum_{\lambda \in \text{Rés}(\mathcal{P}.) \cap W_-} f(\lambda) \Big]_0^1 + \mathcal{O}(1)\, h^{-n} e^{-\lambda_j/C}, \\ &= \textstyle\sum_{\lambda \in \text{Rés}(\mathcal{P}_1) \cap W_-} f(\lambda) + \mathcal{O}(1)\, h^{-n} e^{-\lambda_j/C}. \end{aligned}$$

Pour calculer la trace on peut appliquer une autre formule due à D.Robert [11]

$$\text{(3.5)} \qquad \operatorname{Tr}\Big[(f_j\chi)(\mathcal{P}.) \Big]_0^1 = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int (f_j\chi)(E)\, \omega(E)\, dE + \mathcal{O}_j\left(h^{1-n}\right).$$

Cette formule se démontre assez simplement en utilisant le calcul symbolique des opérateurs (voir [13], pages 11 et 12 pour un schéma de preuve). D'après (3.4) et (3.5), on obtient

$$\sum_{\lambda \in \text{Rés}(\mathcal{P}_1) \cap W_-} f(\lambda) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int (f_j\chi)(E)\, \omega(E)\, dE + \mathcal{O}(1)\, h^{-n} e^{-\lambda_j/C} + \mathcal{O}_j\left(h^{1-n}\right),$$

donc d'après (3.3)

$$\Big| \sum_{\lambda \in \text{Rés}(\mathcal{P}_1) \cap W_-} f(\lambda) \Big| \geq \frac{e^{-\varepsilon_j \lambda_j} - \mathcal{O}(1)\, e^{-\lambda_j/C}}{(2\pi h)^n} + \mathcal{O}_j\left(h^{1-n}\right).$$

Fixant d'abord j grand puis h petit, on obtient

$$\Big| \sum_{\lambda \in \text{Rés}(\mathcal{P}_1) \cap W_-} f(\lambda) \Big| \geq \frac{1}{Ch^n},$$

ce qui implique le théorème 2 puisque $|f_j| \leq 1$ sur W_- (si on a choisi W assez petit).

4. RÉSONANCES ET QUASI-MODES

L'objet de cette section est de présenter une autre approche permettant de mettre en évidence la présence de résonances. Il s'agit de résultats de toute autre nature que les précédents. Dans la section 3.1, on a montré que les formules de traces permettaient de minorer le nombre de résonances dans un voisinage complexe d'une énergie E_0, c'est à dire relativement loin du réel. On aurait pu donner d'autres résultats de J. Sjöstrand et M. Zworski permettant de minorer ce nombre dans des régions de la forme $|\mathbf{Re} z - E_0| < \varepsilon$, $|\mathbf{Im} z| < Ch^2 |\log h|$. Ici, nous allons mettre en évidence (dans des cas particuliers) la présence de résonances convergeant vers le réel quand h tend vers 0 plus vite que tout polynome en h^{-1}. Cette dernière propriété est à la fois un avantage et un inconvénient. C'est un inconvénient puisqu'elle restreint la généralité et que la construction que nous présentons nécessite des hypothèses très fortes (permettant de construire des quasi modes), mais c'est aussi un avantage car les résonances ainsi construites sont par nature très proches du réel et d'un point de vue physique (voire expérimental), ce sont ces résonances qu'il est possible de mesurer. Nous suivons ici la présentation de P.Stefanov [20].

DÉFINITION 4.1. — Pour toute suite $(h_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs tendant vers 0 quand l tend vers l'infini, on appelle *quasi-modes* (u_j) associés aux *quasi-résonances* (E_j), toute famille $\left(u_j\left(h_l\right), E_j\left(h_l\right)\right)_{j=1}^{m(l)}$ telle qu'il existe une fonction $R\left(h\right) = \mathcal{O}\left(h^{-N}\right)$, $\forall N > 0$ et

- $u_j\left(h_l\right) \in \mathcal{H},\ \forall l, j,$
- $E_j\left(h_l\right) \in \mathbb{R},\ \forall l, j,$
- Pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et tout $1 \leq j \leq m\left(l\right)$,

$$\begin{aligned} \|\left(\mathcal{P} - E_j\left(h_l\right)\right) u_j\left(h_l\right)\|_{\mathcal{H}} &\leq R\left(h_j\right), \\ \left|\left(u_i\left(h_l\right), u_j\left(h_l\right)\right)_{\mathcal{H}} - \delta_{i,j}\right| &\leq R\left(h_j\right), \\ \exists R_1 > R_0;\ u_j\left(h_l\right) &= 1_{B(0,R_1)} u_j\left(h_l\right). \end{aligned}$$

On a alors le résultat suivant

THÉORÈME 3 (Stefanov-Vodev 95, Tang-Zworski 98, Stefanov 98). — Soient $\mathcal{P}$, un opérateur vérifiant les hypothèses **H1–6**, $(h_l) \to 0$, $l \to +\infty$ et $\left(u_j\left(h_l\right), E_j\left(h_l\right)\right)$ des quasi-modes. On suppose de plus qu'il existe deux fonctions $0 < a_0 \leq a\left(h\right) \leq b\left(h\right) \leq b_0 < +\infty$ telles que pour tous $0 \leq j \leq m\left(l\right)$, $E_j\left(h_l\right) \in \left[a\left(h_l\right), b\left(h_l\right)\right]$. Alors il existe $D > 0, L \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $l \geq L$ et toute fonction positive $S\left(h\right)$ vérifiant

$$S\left(h\right) \geq \max\{h^{-n^\sharp-1} R\left(h\right), De^{-D/h}\},$$

l'opérateur $\mathcal{P}\left(h_l\right)$ a au moins $m\left(l\right)$ résonances (comptées avec leur multiplicité) dans l'ensemble

$$E = \left[a\left(h_l\right) - 6h_l^k, b\left(h_l\right) + 6h_l^k\right] \times i\left[-2S\left(h_j\right) h_l^{-n^\sharp-1}, 0\right]. \tag{4.1}$$

En d'autres termes, si l est assez grand, on aura au moins autant de résonances proches de $E_j\left(h_l\right)$ que de quasi-modes et les résonances correspondantes seront d'autant plus proches du réel que la fonction R est petite, sans pouvoir être plus proches qu'exponentiellement. Au sujet de l'impossibilité pour les résonances de s'approcher du réel plus vite qu'exponentiellement, on pourra consulter [4].

La preuve de ce résultat repose essentiellement sur les deux lemmes suivants dus à S.H.Tang-M.Zworski [22]. Le premier est une estimation *a priori* sur la résolvante en dehors d'un voisinage des résonances :

Lemme 4.2. — Soient θ vérifiant les conclusions de l'hypothèse **H6** et $\chi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ égale à 1 au voisinage de $B\,(0, R_0)$. Pour tout compact simplement connexe $\widetilde{\Gamma}$ vérifiant

$$\widetilde{\Gamma} \subset S_\theta = \{z \in \mathbb{C};\ \max(-\pi, 2\theta - 2\pi) < -\arg z < 2\theta\}$$

et pour toute fonction positive $g\,(h)$ définie pour $0 < h < h_0$ et assez petite, il existe des constantes $A, h_1 > 0$ telles que pour tout $0 < h < h_1$ et tout

$$z \in \widetilde{\Gamma} \setminus \cup_{z \in \text{Rés}(\mathcal{P}(h)) \cap \widetilde{\Omega}} \overline{B\,(z, g\,(h))},$$

on a

$$\|\chi\,(\mathcal{P}\,(h) - z)\,\chi\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq Ae^{Ah^{-n^\sharp}\log(1/g(h))};$$

et le deuxième lemme est un principe du maximum :

Lemme 4.3. — Soient (h_l) une suite convergeant vers 0 quand l tend vers l'infini, $H = \cup_l \{h_l\}$ et $F\,(z, h)\,; h \in H$, une famille de fonctions holomorphes en z définie au voisinage de

$$\Gamma\,(h) = [E\,(h) - 5h^k, E\,(h) + 5h^k] + i\left[-S\,(h)\,h^{-n^\sharp - 1}, S\,(h)\right]. \tag{4.2}$$

On suppose qu'on a

$$|F\,(z, h)\,| \leq Ae^{Ah^{-n^\sharp}\log(1/hS(h))} \text{ sur } \Gamma\,(h),$$
$$|F\,(z, h)\,| \leq 1/|\mathbf{Im}z| \text{ sur } \Gamma\,(h) \cap \{\mathbf{Im}z > 0\}.$$

Alors il existe $h_1 > 0$ et B ne dépendant que de S, A et k tels que pour tout $0 < h < h_1,\ h \in H$,

$$|F\,(z, h)\,| \leq B/S\,(h) \ \text{ sur } \left[E\,(h) - h^k, E\,(h) + h^k\right].$$

On revient à la preuve du théorème 3. On commence par supposer que le nombre de quasi-modes vérifie $m\,(h) \leq Ch^{-n^\sharp}$. On fixe $h \in \{h_l; l \in \mathbb{N}^*\}$. On note $z_1\,(h)\,, \ldots, z_{M(h)}\,(h)$ les pôles de l'opérateur $\chi\,(\mathcal{P}\,(h) - z)\,\chi$ inclus dans l'ensemble E défini par la relation (4.1) et

$$A^{(j)}\,(h) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z - z_j(h) = \varepsilon_j} \chi\,(\mathcal{P}\,(h) - z)\,\chi dz,$$

le projecteur spectral correspondant (si ε_j est assez petit). On rappelle que la multiplicité de l'opérateur $A^{(j)}$ est égale à la multiplicité de la résonance z_j. Soit dans l’image du projecteur spectral correspondant. L’opérateur