Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte des ondes

N. Burq* et P. Gérard†

Résumé. On démontre que la condition de contrôle géométrique de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch est une condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte des ondes avec conditions de Dirichlet sur le bord.

Abstract. We show that the geometric control condition of C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch is a necessary and sufficient condition for the exact controlability of the wave equation with Dirichlet boundary conditions

On se propose dans cet article de donner une amélioration d'un résultat de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [BLR92] et de montrer que la condition de contrôle géométrique introduite par ces auteurs est une condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet. Rappelons brièvement le problème. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné, $T > 0$ et $\Theta \in C_c^0\left(]0,T[\times\partial\Omega\,;\mathbb{R}\right)$. On note Δ, le laplacien standard. On dit que la fonction Θ contrôle exactement Ω si pour tout $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ il existe un contrôle, $g \in L^2(\partial\Omega \times \mathbb{R}_t)$, tel que la solution du problème

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \left(\partial_t^2 - \Delta\right) u & = & 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_t \\ u\mid_{t=0} = u_0 & & \partial_t u \mid_{t=0} = u_1 \\ u\mid_{\partial\Omega\times\mathbb{R}_t} & = & \Theta(x,t) \times g \end{array} \right.$$

vérifie $u\mid_{t\geq T} = 0$.

On dit que la fonction Θ contrôle géométriquement Ω si tout rayon bicaractéristique généralisé (voir R. Melrose et J. Sjöstrand [MS82]) rencontre l'ensemble $\Theta \neq 0$ en un point non diffractif (voir la définition 1). C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [BLR92] ont démontré que si Θ contrôle géométriquement Ω, alors Θ contrôle aussi exactement Ω. Par ailleurs, ils montrent aussi que s'il existe un point de la variété caractéristique de l'équation des ondes tel que le rayon issu de ce point ne rencontre pas le support de la fonction Θ, alors Θ ne contrôle pas exactement Ω. Le but de cet article est la démonstration du résultat suivant.

THÉORÈME 1.— *On suppose que l'ouvert Ω, de classe C^∞, n'a pas de contact d'ordre infini avec ses tangentes. On a alors équivalence entre les deux proposition suivantes:*

- La fonction Θ contrôle exactement Ω.

- La fonction Θ contrôle géométriquement Ω.

*Centre de Mathématiques, URA 169 du CNRS, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, FRANCE

†Université de Paris Sud, URA 760 du CNRS, Mathématiques, Bât 425, 91405 Orsay Cedex, FRANCE

La démonstration du théorème 1 revient, compte tenu des résultats de [BLR92] (voir aussi [Bur97]), à montrer que s'il existe un rayon qui ne rencontre l'ensemble $\Theta \neq 0$ qu'en des points diffractifs, alors on n'a pas contrôlabilité exacte. Il faut donc étudier d'une part le cas où le rayon rencontre le bord du support de la fonction Θ et d'autre part le cas où il ne rencontre l'ensemble $\Theta \neq 0$ qu'en des points diffractifs. Le premier point n'est pas essentiel et n'est dû qu'à l'introduction d'une fonction Θ régulière (C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch travaillaient avec $\Theta = \mathbf{1}_{\Gamma \times [0,T]}, \Gamma \subset \partial\Omega$). Notre contribution porte donc essentiellement sur le deuxième point.

D'après la méthode H.U.M. de J. L. Lions [Lio88] la contrôlabilité exacte est équivalente au fait qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, la solution u d'énergie finie de l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet associée aux données initiales (u_0, u_1), vérifie :

$$E(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 + |\partial_t u|^2 \leq C \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t} \Theta^2 \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2 d\sigma dt = |||u|||^2 \tag{2}$$

La stratégie de la démonstration consiste, si l'hypothèse de contrôle géométrique n'est pas satisfaite, à construire une suite de solutions de l'équation des ondes dont l'énergie se concentre sur un rayon qui viole cette condition, à lui associer des mesures de défaut de compacité qui décrivent comment cette concentration se fait (voir les articles de P. Gérard [Gér91], L. Tartar [Tar90], P. Gérard et E. Leichtnam [GL93] et G. Lebeau [Leb96]) et finalement à utiliser ces mesures pour montrer que cette suite contredit (2).

On note $M = \Omega_x \times \mathbb{R}_t$ et $T_b^* M = T^*M \cup T^*\partial M$, le fibré cotangent jusqu'au bord de M. On a une application naturelle de restriction, $\pi : T^*\mathbb{R}^{d+1} |_{\overline{M}} \rightarrow T_b^* M$. On note $p = \tau^2 - |\xi|^2$ le symbole de l'équation des ondes, $H_p = 2\tau\partial_t - 2\,\xi \cdot \partial_x$, son champ Hamiltonien et Σ_b la projection sur $T_b^* M$ de la variété caractéristique d'équation $p = 0$. Dans toute la suite on se placera près du bord dans un système de coordonnées géodésiques, $\zeta = (s, \sigma, y, \eta)$, c'est à dire que dans ce système M est donné par l'équation $s > 0$, l'opérateur $\partial_t^2 - \Delta$ s'écrit $-\partial_s^2 - R(y, s, D_y)$. On note $r(y, s, \eta)$ le symbole principal de l'opérateur R.

Définition 1.— *On dit que $\zeta \in T^*\partial M \setminus 0$ est*

- *Hyperbolique si $\sharp\{\pi^{-1}(\zeta) \cap \{p = 0\}\} = 2$ (et on note $\zeta \in \mathcal{H}$), soit $r(\zeta) > 0$*
- *Glancing si $\sharp\{\pi^{-1}(\zeta) \cap \{p = 0\}\} = 1$ (et on note $\zeta \in \mathcal{G}$), soit $r(\zeta) = 0$*
- *Non diffractif si $\partial_s r(\xi)$ change de signe au voisinage de ζ sur la bicaractéristique généralisée passant par ζ (en particulier si $\zeta \in \mathcal{H}$) ou si $\zeta \in \mathcal{G}$ et $\partial_s r(\zeta) < 0$,*
- *Non strictement gliding (et on note $\zeta \in \mathcal{G}_{nsg}$) si $\zeta \in \mathcal{G}$ et $\partial_s(r)(\zeta) \geq 0$.*

Ces définitions ne dépendent pas du système de coordonnées choisi. On remarquera que les points diffractifs de Σ_b sont aussi non strictement gliding.

Un rayon

Points non diffractifs

Points non strictement gliding

Projection sur l'espace des x d'un rayon bicaractéristique généralisé (en dimension 2)

Soit (e_ν) la base orthonormale de $L^2(\Omega)$ formée de vecteurs propres du Laplacien, Δ, avec conditions de Dirichlet et (λ_ν) les valeurs propres associées. On note B l'ensemble des suites $U = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de solutions de l'équation des ondes, $u_k = \sum_{2^{k-1}\leq\nu\leq 2^{k+1}} e^{it\sqrt{\lambda_\nu}} u_{\nu,k} e_\nu$ vérifiant $E(u_k) = 1$. Soient $U \in B$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t)$ telle que $\varphi \equiv 1$ au voisinage de $[-T, 2T]$. On désigne par u_k' le prolongement par 0 à l'extérieur de Ω de u_k. Il est facile de voir que la suite $W = (w_k = \varphi(t)2^k u_k')_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$. Il est montré dans [Bur97] qu'on peut, quitte à extraire une sous-suite, lui associer une mesure de défaut semi-classique, μ, sur $T^*\mathbb{R}^{d+1}$ (c'est à dire une mesure positive vérifiant, pour tout symbole a assez régulier sur $T^*\mathbb{R}^{d+1}$,

$$\lim_{k\to+\infty} \left(a\left(z, 2^{-k}D_z\right) w_k, w_k\right)_{L^2\left(\mathbb{R}^{d+1}\right)} = \langle \mu, a\rangle \tag{3}$$

On a aussi toujours (voir [Lio88])

$$\exists C > 0;\ \forall k\ \|\tfrac{\partial w_k}{\partial n}\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}_t)} \leq CE(u_k), \tag{4}$$

la suite $v_k = \frac{\partial w_k}{\partial n}$ est donc bornée dans $L^2(\partial\Omega \times \mathbb{R}_t)$ et peut lui associer une mesure de défaut semi-classique, ν, sur $T^*\partial M$ vérifiant

$$\langle \nu, \Theta^2\rangle = \lim_{k\to+\infty} \left(Op\left(\Theta^2\right) v_k, v_k\right)_{L^2(\partial M)} = \lim_{k\to+\infty} \int_{\partial M} \Theta^2 \left|\frac{\partial w_k}{\partial n}\right|^2 d\sigma \tag{5}$$

Le résultat suivant est démontré dans [Bur97], proposition 3.12 et théorèmes 3 et 4.

PROPOSITION 2.— *On a les trois propriétés suivantes :*

- Le support de la mesure μ est inclus dans l'ensemble $\left\{\tau^2 = |\xi|^2 \in [1/4, 4]\right\}$ (en particulier ce support ne rencontre pas la section nulle) et celui de ν est inclus dans $\mathcal{H}\cup\mathcal{G}$.

- On note, si $\rho \in \mathcal{H}\cup\mathcal{G}$, $\rho_\pm$ les deux points (éventuellement confondus) de la variété caractéristique, au dessus de ρ. Les mesures μ et ν vérifient au sens des distributions l'équation suivante sur $]-T, 2T[$:

$$H_p(\mu) = (2\tau\partial_t - 2\xi\cdot\partial_x)\,\mu = \int_{\rho\in\mathcal{H}\cup\mathcal{G}} \frac{\delta(\xi-\xi_+(\rho)) - \delta(\xi-\xi_-(\rho))}{<\xi_+-\xi_-, n(x(\rho))>}\nu(d\rho). \tag{6}$$

- Le support de la mesure μ est réunion de rayons bicaractéristiques généralisés.

Admettons dans un premier temps le résultat suivant :

PROPOSITION 3.— *La mesure ν ne charge pas l'ensemble des points non strictement gliding du bord, $\mathcal{G}_{nsg}$: on a $\langle\nu, \mathbf{1}_{\mathcal{G}_{nsg}}\rangle = 0$.*

Soit alors γ un rayon niant l'hypothèse de contrôle géométrique. Il existe (voir [Bur97]) une suite $U = (u_k) \in B$ telle que le support de la mesure μ associée soit inclus dans ce rayon. D'après (6) le support de la mesure ν est inclus dans l'intersection avec $T^*\partial M$ de ce rayon. L'intersection de ce support avec l'ensemble $\Theta \neq 0$ est donc inclus dans l'ensemble des points non strictement gliding du bord donc dans un ensemble que la mesure ν ne charge pas, ce qui implique $0 = \langle\nu, \Theta^2\rangle$. Pour la suite (u_k), le terme de gauche de la relation (2) est égal à 1 tandis que d'après (5), le terme de droite tend vers $\langle\nu, \Theta^2\rangle = 0$ ce qui montre que l'inégalité (2) ne peut pas être vérifiée. Le théorème 1 est donc démontré.

Il reste à démontrer la proposition 3. On se place dans un système de coordonnées géodésiques : $\Omega = \{s > 0\}$ et $p(s, y, \sigma, \eta) = \sigma^2 - r(s, y, \eta)$. On applique alors l'équation (6) à la fonction $a = \sigma \times b(s, y, \eta)$, avec $b \geq 0$ et on obtient, comme pour $\rho = (y, \eta) \in T^*\partial M \cap \Sigma_b$, $\rho^{\pm} = \left(\sigma = \pm\sqrt{r(\zeta)}, s = 0, y, \eta\right)$,

$$\langle \mu, H_p(a) \rangle = \langle \mu, (\partial_s r) b + \sigma H_p(b) \rangle = -\int_{\mathcal{G} \cup \mathcal{H}} b(s = 0, \rho)\, d\nu(\rho). \tag{7}$$

L'équation de $\mathcal{G}$ est $p = 0, s = 0, r = 0$. On peut, puisque le support de la mesure μ ne rencontre pas la section nulle, supposer que la composante duale du temps, τ, est non nulle, ce qui implique, comme $\partial_\tau r \mid_{s=0} \neq 0$, qu'on peut compléter la coordonnée $r \mid_{s=0}$ en un système de coordonnées (non symplectiques), $(r \mid_{s=0}, q(t, y, \tau, \eta))$ sur $T^*\partial M$. On applique l'équation (7) à la suite de fonctions $b_\varepsilon = b_0\left(\frac{s}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{r}{\varepsilon}, q\right)\psi\left(\frac{\partial_s r}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$, avec b_0 de classe C^1 à support compact, indépendante de s au voisinage de $s = 0$, ψ de classe C^1 égale à 1 sur $[0, +\infty]$ et à 0 sur $]-\infty, -1/2[$. On peut passer à la limite dans l'équation (7) par convergence dominée et on obtient, puisque μ est supportée par $p = \sigma^2 - r = 0$,

$$\langle \mu, \partial_s r \times \mathbf{1}_{\mathcal{G}_{\mathrm{nsg}}} \rangle = -\int_{\mathcal{G} \cup \mathcal{H}} \mathbf{1}_{\mathcal{G}_{\mathrm{nsg}}} d\nu(\rho) \tag{8}$$

Comme $\partial_s r \geq 0$ sur $\mathcal{G}_{\mathrm{nsg}}$, les deux termes de l'équation (8) sont de signes opposés, ils sont donc tous les deux nuls et en particulier, on a $\langle \nu, \mathbf{1}_{\mathcal{G}_{\mathrm{nsg}}} \rangle = 0$.

References

[BLR92] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary. *Siam Journal of Control and Optimization*, 305:1024–1065, 1992.

[Bur97] N. Burq. Contrôle de l'équation des ondes dans des ouverts peu réguliers. *Asymptotic Analysis*, 14:157–191, 1997.

[Gér91] P. Gérard. Microlocal defect measures. *Communications in Partial Differential Equations*, 16:1761–1794, 1991.

[GL93] P. Gérard and E. Leichtnam. Ergodic properties of eigenfunctions for the dirichlet problem. *Duke Mathematical Journal*, 71:559–607, 1993.

[Leb96] G. Lebeau. Equation des ondes amorties. In A. Boutet de Monvel and V. Marchenko, editors, *Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics*, pages 73–109. Kluwer Academic, The Netherlands, 1996.

[Lio88] J.L. Lions. *Contrôlabilité exacte. Perturbation et stabilisation des systèmes distribués*, volume 23 of *R.M.A.* Masson, 1988.

[MS82] R.B. Melrose and J. Sjöstrand. Singularities of boundary value problems I & II. *Communications in Pure Applied Mathematics*, 31 & 35:593– 617 & 129–168, 1978 & 1982.

[Tar90] L. Tartar. H-measures, a new approach for studying homogenization, oscillations and concentration effects in partial differential equations. *Proceedings of the Royal Society Edinburgh*, 115-A:193–230, 1990.