CONTRÔLE DE L'ÉQUATION DES ONDES DANS DES OUVERTS COMPORTANT DES COINS

par

N. Burq

avec un appendice en collaboration avec
J.M. Schlenker

Résumé

On étudie l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet dans un ouvert borné à coins (inclus dans $\mathbb{R}^2$). On démontre que la condition de contrôle géométrique introduite par C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch est une condition suffisante pour la contrôlabilité exacte au bord de ce système.

Abstract

We study the wave equation with Dirichlet boundary conditions in a bounded corner domain (included in $\mathbb{R}^2$). We prove that the condition of geometrical control introduced by C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch is a sufficient condition for the exact boundary controlability of this equation.

1. Introduction

On se propose, dans cet article de donner des conditions suffisantes pour la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans des ouverts de $\mathbb{R}^2$ comportant des coins, généralisant à ce cadre les conditions de contrôle géométrique de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [**BLR92**]. Le problème étudié est le suivant : on considère Ω, un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, comportant des coins, Γ, un ouvert du bord de Ω, $\partial\Omega$, et $T > 0$ un réel. Pour $g \in L^2(]0,T[\times\Gamma)$, $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, le système

$$(1.1)\qquad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_t \\ u\mid_{\partial\Omega} = g \times 1_{\Gamma\times]0,T[} & \\ u\mid_{t=0} = u_0 & \partial_t u\mid_{t=0} = u_1 \end{cases}$$

possède une solution unique dans $C^0(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_t; H^{-1}(\Omega))$. La question de la contrôlabilité exacte est de savoir à quelles conditions sur Γ et T, pour tout $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, il existe $g \in L^2(]0, T[\times\Gamma)$ tel que la solution du système (1.1) vérifie $u\,|_{t\geq T} \equiv 0$.

Ce problème été étudié dans le cas où Ω est, au voisinage des coins, à frontière polyèdrale par P. Grisvard [**Gri89**] qui donne une réponse affirmative dans le cas où $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2; (x - x_0) \cdot n\,(x) > 0\}$, où x_0 est un point de $\mathbb{R}^2$, $n\,(x)$ désigne la normale extérieure au bord de l'ouvert Ω et T est assez grand.

Les hypothèses que nous ferons sur la régularité de l'ouvert Ω sont les suivantes :

- En dehors des coins, l'ouvert Ω est de classe C^∞ (en utilisant les résultats de [**Bur97a**] et de [**Leb96**], on pourrait remplacer cette hypothèse par C^3)
- L'ouvert Ω ne comporte que des coins extérieurs et est au voisinage de ces points analytique par morceaux, c'est à dire que pour chaque coin, O, il existe deux fonctions a et b, analytiques, définies au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, vérifiant $b'\,(0) < 0 < a'\,(0)$ et telles qu'au voisinage de O, il existe un système de cooordonnées orthonormales, (x, y) avec $O = (0, 0)$ et au voisinage de O, on a

$$\Omega^c = \{(x, y)\,; x \geq 0 \text{ et} b\,(x) \leq y \leq a\,(x)\}. \tag{1.2}$$

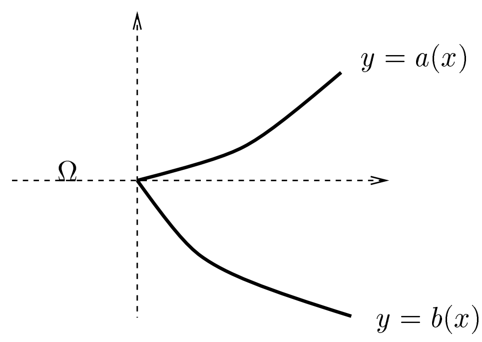

FIGURE 1. Géométrie au voisinage du coin

- Le bord de l'ouvert Ω n'a pas, avec ses tangentes, de contact d'ordre infini.

Pour énoncer les hypothèses que nous ferons sur la géométrie du couple (Γ, T), nous introduisons la notion de rayon bicaractéristique généralisé. On note $M = \Omega \times \mathbb{R}_t$, K, l'ensemble des coins, $L = K \times \mathbb{R}_t$ et $T^*_b M = T^*M \cup T^*\,(\partial M \setminus L) \cup T^*L$, le fibré cotangent jusqu'au bord à M. On a une projection naturelle

$\pi : T^*\mathbb{R}^{2+1} \mid_{\overline{M}} \to T_b^* M$ et on munit $T_b^* M$ de la topologie induite. On note Σ_b, la projection sur $T_b^* M$ de la variété caractéristique de l'équation des ondes, $\mathcal{C}$, et $P_x :\ T_b^* M \to \overline{\Omega}$ la projection naturelle

DÉFINITION 1.1. — *On appelle bicaractéristique généralisée dans* Ω*, toute application continue* $\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma_b$ *telle que, si* $P_x\gamma(s_0) \notin K$*,* g *est, au voisinage de* s_0*, une bicaractéristique généralisée* C^∞ *au sens usuel (voir* **[Hör85]***) et si* $P_x\gamma(s_0) \in K$*, alors* $\gamma(s_0 \pm 0)$ *existent et* $\gamma(s_0 + 0)$ *est l'une des deux directions obtenues par reflexion de* $\gamma(s_0 - 0)$ *sur les deux demi-faces de* ∂M*. On appellera rayons les projections spatiales des bicaractéristiques généralisées et nous les supposerons paramétrés par le temps.*

DÉFINITION 1.2. — *On dit que* $\rho_0 \in T^*(\partial M \setminus L)$ *est non diffractif si la bicaractéristique de l'équation des ondes dans* $T^*\mathbb{R}^{2+1}$ *issue du point* $\pi^{-1}(\rho_0) \cap \mathcal{C}$ *ne reste pas incluse dans* $T^*\mathbb{R}^{2+1} \mid_{\overline{\Omega}}$ *au voisinage de* ρ_0 *(cette définition ne dépend pas du choix parmis les deux points de l'ensemble* $\pi^{-1}(\rho_0) \cap \mathcal{C}$*)*

DÉFINITION 1.3. — *Soient* $\Gamma \subset \partial\Omega \setminus K$ *et* $T > 0$*. On dira que* (Γ, T) *contrôle géométriquement l'ouvert* Ω *si toute bicaractéristique bicaractéristique généralisé rencontre* $T^*(\Gamma \times]\,0, T\,[)$ *en un point non diffractif (on dira qu'une telle bicaractéristique a été contrôlée) et si toutes les demi- bicaractéristique tangents aux arêtes des coins sont contrôlés avant de rencontrer à nouveau un autre coin.*

DÉFINITION 1.4. — *On dira que l'ouvert* Ω *est non focalisant sur les coins si pour tout* $O \in K$*, l'ensemble des directions pour lesquelles le rayon associé ne rencontre pas de coin avant de rencontrer* Γ *en un point non diffratif est dense dans la sphère unité,* $\mathbb{S}^1$*.*

On notera, si (Γ, T_0) contrôle géométriquement l'ouvert Ω, pour tout demi-rayon γ issu d'un coin à l'instant $t = 0$,

- $t_\gamma = \inf\{t > 0\ ; \gamma(t) \in T^*\Gamma \ \text{ et } \gamma(t) \text{ est non diffractif}\} < T_0$
- $T_1 = 2\sup_\gamma (t_\gamma) < 2T_0$.

On notera S, l'ensemble des segments de rayons connectant un coin à un autre (éventuellement confondu) et ne rencontrant pas, entre ces deux coins Γ en un point non diffractif et

- pour $\gamma \in S$, si O_i, $i = 1;2$ sont les deux coins correspondants, $\gamma_{i,j}$, $j = 1;\cdots;4$ les quatre demi-rayons réfléchis ou tangents aux faces du coin associés à γ, $\widetilde{t}_\gamma = \text{longueur}(\gamma) + \max_{j=1,\cdots,4} t_{\gamma_{1,j}} + \max_{j=1,\cdots,4} t_{\gamma_{2,j}}$
- $T_2 = \sup_{\gamma \in S} \left(\widetilde{t}_\gamma\right) < 3T_0$

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal :

Théorème 1. — *Soient* Ω *comme précédemment,* $\Gamma \subset \partial\Omega$ *tel que* $\Gamma \cap K = \emptyset$. *Soit* $T_0 > 0$. *On suppose que* (Γ, T_0) *contrôle géométriquement l'ouvert* Ω *qui est non focalisant sur les coins. Alors, pour tout* $T > \max(T_0, T_1, T_2)$ *(on rappelle que* $\max(T_0, T_1, T_2) < 3T_0$*) et tout* $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$*, il existe* $g \in L^2(\Gamma \times]0, T[)$ *tel que la solution du système (1.1) vérifie* $u\,|_{t>T} \equiv 0$.

La méthode H.U.M. de J.L. Lions [**Lio88**] montre que ce résultat est équivalent à la proposition :

Proposition 1.5. — *Sous les hypothèses du théorème 1, il existe* $C > 0$ *tel que pour tout* $(u_0, u_1) \in H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$*, la solution du système*

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} (\partial_t^2 - \Delta)u & = & 0 & \text{dans} & \Omega \times \mathbb{R}_t \\ u\,|_{\partial\Omega} & = & 0 & & \\ u\,|_{t=0} = u_0 & & \partial_t u\,|_{t=0} = u_1 & & \end{array} \right. \tag{1.3}$$

vérifie

$$E(u) = \int_\Omega |\nabla u_0|^2 + |u_1|^2 \leq C \int_{\Gamma \times]0,T[} \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt \tag{1.4}$$

Enfin, le théorème d'unicité pour les opérateurs elliptiques du second ordre et un argument de graphe fermé de [**BLR92**] permettent de montrer que cette dernière inégalité est équivalente à

$$\left\{ \begin{array}{c} \exists C' > 0;\ \forall (u_0, u_1) \in H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ E(u) \leq C' \left[\int_{\Gamma \times]0,T[} \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt + \|u\|^2_{L^2(\Omega \times]0,T[)} \right] \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Pour démontrer le théorème 1, nous allons procéder par l'absurde en niant la proposition 1.5 et donc aussi la relation (1.5), ce qui fournit une suite u_n de solutions de l'équation (1.3) à laquelle on peut associer une mesure de défaut microlocale (voir G. Lebeau, [**Leb96**]). On montre ensuite, en utilisant des arguments de propagation du support de cette mesure qu'on a une contradition. Le plan de l'article est donc le suivant : dans une première partie, nous introduisons les mesures de défaut d'une suite d'énergie bornée de solutions de l'équation des ondes, dans une deuxième partie, nous donnons en termes de mesures une conséquence d'un résultat de propagation des singularités H^1 pour l'équation des ondes dans les ouverts à coins de N. Burq, [**Bur97b**] et dans une troisième partie, nous démontrons le théorème 1. Enfin, des appendices sont consacrés à l'étude de l'hypothèse de non focalisation. D'une part nous montrons que dans un cadre convexe (qui est le cas qui a motivé notre étude), cette hypothèse est toujours vérifiée et d'autre part, nous montrons (en collaboration avec J.M. Schlenker) que cette hypothèse est génériquement vérifiée.

REMARQUE 1.6. — *L'hypothèse $T > T_0$ est l'hypothèse minimale naturelle. Néanmoins on pourrait peut être l'affiner : il n'est pas clair qu'il soit nécessaire de contrôler géométriquement les rayons qui ne sont pas limites de rayons ne rencontrant pas de coin. L'hypothèse $T > T_1$ est due aux possibilités de focalisation des ondes sur les coins. Des résultats plus précis sur la diffraction des ondes par les coins, en terme de mesures de défaut permettraient peut être d'affaiblir cette hypothèse (mais probablement pas de la supprimer). Enfin, l'hypothèse $T > T_2$ ainsi que l'hypothèse de contrôlabilité directe des demi-rayons tangents aux faces des coins est due au fait que nous ne savons pas analyser la diffraction par un coin d'une onde arrivant tangentiellement à une des faces du coin. Ces dernières hypothèses devraient pouvoir être supprimées. Néanmoins, c'est ce dernier point qui semble le plus difficile à étudier. Enfin, l'hypothèse de régularité analytique par morceaux des coins n'est absolument pas naturelle et des résultats en termes de mesures de défaut devraient pouvoir être obtenus avec des hypothèses beaucoup plus faibles.*

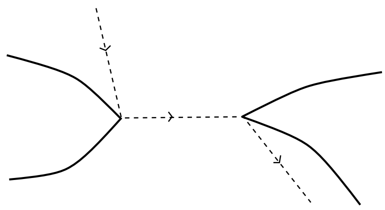

FIGURE 2. Un exemple de rayon qui n'est pas limite de rayons ne rencontrant pas de coin

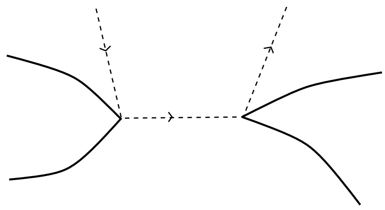

FIGURE 3. Un exemple de rayon qui est limite de rayons ne rencontrant pas de coin

Table des matières

2. Mesures de défaut de compacité pour les ondes

Soit $u_k \in H^1_{0,loc}\left(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}_t\right)$, une suite de solutions de l'équation (1.3), convergeant faiblement vers 0. Le but de cette partie est de rappeler comment on peut associer une mesure de défaut à la suite u_k, ainsi que de rappeler les principales propriétés vérifiées par cette mesure. Nous suivrons, pour cela, la présentation de [**Leb96**]

On choisit, au voisinage de chaque point x_0 du bord de Ω, un système de coordonnées (x,y) vérifiant (1.2) si x_0 est un coin et si x_0 n'est pas un coin, on suppose que dans ce système, on a $\Omega = \{(x,y)\,;\ x>0\}$.

On notera $\mathcal{A}$, l'espace des opérateurs $Q = Q_i + Q_b + Q_c$ où

- Q_i est un opérateur pseudo-différentiel classique sur $\mathbb{R}_t\times\Omega$, à support compact dans $\mathbb{R}_t\times\Omega$, c'est à dire qu'il existe $\varphi\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}_t\times\Omega\right)$ tel que $Q_i = \varphi Q_i\varphi$
- Q_b est un opérateur pseudodifférentiel tangentiel à support compact près de $\mathbb{R}_t\times(\partial\Omega\setminus K)$, c'est à dire que Q_b se décompose en somme d'opérateurs Q_b^j, les opérateurs Q_b^j étant à support compact dans $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^2$ près d'un point du bord qui n'est pas un coin, et s'écrivant dans un système de coordonnées associé à ce point $Q_b^j = Q_b^j(x)$ où $Q_b^j(x)$ est une famille C^∞ d'opérateurs pseudodifférentiels sur $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_y$.
- Q_c est un opérateur pseudodifférentiel tangentiel à support compact près de $\mathbb{R}_t\times(K)$, c'est à dire que Q_c se décompose en somme d'opérateurs Q_c^j, les opérateurs Q_c^j étant à support compact dans $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^2$ près d'un point coin, et s'écrivant dans un système de coordonnées associé à ce point $Q_b^j = Q_b^j(x,y)$ où $Q_b^j(x,y)$ est une famille C^∞ d'opérateurs pseudodifférentiels sur $\mathbb{R}_t$.

On notera $\mathcal{A}^i$ le sous espace de $\mathcal{A}$ formé des opérateurs d'ordre i. On note $X = \overline{M}$, ${}^bTX$ le fibré de rang 3 dont les sections sont les champs de vecteur tangents à ∂X et ${}^bT^*X$ son fibré dual (le fibré cotangent compressé de R. Melrose). On note j la projection naturelle de $T^*\mathbb{R}^{1+2}$ sur ${}^bT^*X$, Z l'image par j de la variété caractéristique de l'équation des ondes,$\mathcal{C}$, $\widehat{Z} = Z\cup j\left(T^*\mathbb{R}^{2+1}\mid_{\partial X}\right)$ et $S\widehat{Z} = \left(\widehat{Z}\setminus X\right)/\mathbb{R}_+^*$, l'espace quotient par l'action naturelle de $\mathbb{R}_+^*$.L'espace $S\widehat{Z}$ est un espace métrique localement compact.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}_t$ ouvert et borné. On notera $\mathcal{A}^0_I$, le sous espace de $\mathcal{A}^0$ formé des opérateurs à support compact dans I. Il est alors démontré dans [**Leb96**] qu'on peut associer à toute suite u_k de solutions de (1.3), bornée dans $H^1(I\times\Omega)$, convergeant faiblement vers 0 dans $H^1(\Omega\times\mathbb{R}_t)$, quitte à extraire une sous suite, une mesure μ de Radon sur $S\widehat{Z}$, portée par SZ telle que pour tout opérateur $Q\in\mathcal{A}^0_I$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}\left(Q\left(u_k\right),u_k\right)_{H^1} &= \lim_{k\to+\infty}\left(\nabla_x Qu_k,\nabla_x u_k\right)+\left(\partial_t Qu_k,\partial_t u_k\right)\\ &= \int \kappa\left(\sigma\left(Q\right)\right)d\mu\end{aligned}\tag{2.1}$$

où $\sigma(Q)$ est le symbole principal de Q et $\kappa(\sigma(Q))(\varrho)=\sigma(Q)\left(j^{-1}(\varrho)\right)$ (cette expression à un sens car l'opérateur Q est tangentiel près du bord et $\sigma(Q)\left(j^{-1}(\varrho)\right)$ ne dépend donc pas du choix de $j^{-1}(\varrho)$). Cette fonction est une fonction continue sur $S\widehat{Z}$.

L'espace SZ possède deux composantes connexes, définies par $\pm\tau>0$, $SZ^{\mp}$, qu'on peut identifier à $(Z\setminus X)\cap\{\pm\tau=1/2\}$. A cette décomposition de l'espace SZ, correspond une décomposition de la mesure $\mu=\mu^{+}+\mu^{-}$. On suppose qu'il n'y a pas de contact d'ordre infini entre les géodésiques de X et son bord. On note alors $G(s)(\varrho)$, le flot bicaractéristique généralisé issu de ϱ défini par R. Melrose et J. Sjostrand [**MS78**], quand il est défini, c'est à dire tant que la bicaractéristique issue de ϱ ne rencontre pas un coin. On a alors le résultat suivant démontré dans [**Leb96**] :

THÉORÈME 2 **(G. Lebeau [Leb96], théorème A.1)**. — *Soit B un Borélien de SZ^{+} et $s\in\mathbb{R}$. On suppose que $G(t)$ est défini pour $t\in[-\varepsilon,s+\varepsilon]$ au voisinage de B et qu'il existe un voisinage de l'ensemble des coins tel que pour tout $t\in[-\varepsilon,s+\varepsilon]$, $G(t)(B)$ ne rencontre pas ce voisinage. Alors*

$$\mu^{+}\left(G\left(s\right)\left(B\right)\right)=\mu^{+}\left(B\right).\tag{2.2}$$

REMARQUE 2.1. — *Ce résultat est démontré par G. Lebeau dans le cas où l'ouvert Ω est de classe C^∞ mais, la démonstration étant locale, il est clair que la preuve donnée dans* [**Leb96**] *implique le théorème 2.*

Enfin, si la suite u_k est telle que

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\Gamma\times]0,T[}\left|\frac{\partial u_k}{\partial n}\right|^2 dt d\sigma\left(x\right)=0,\tag{2.3}$$

alors, le lemme de relèvement de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [**BLR92**] montre que la mesure μ est nulle au voisinage de tout point non diffractif de $SZ\cap]0,T[\times\Gamma$. Rappelons brièvement comment on procède. On se place dans un système de coordonnées près de x_0, (x_n,x'), tel que dans ce système, on a $x_0=(0,0)$, $\Omega=\{x_n>0\}$ et $(\partial_t-\Delta)u=\partial^2_{x_n}-R(x_n,x',D_{x'})$.

Soit $\rho_0 = (x_0, \xi_0') \in SZ$ un point non diffractif. On note $\rho_0^{\pm} = (x_0, \xi_0', \pm\xi - n)$ les deux points (éventuellement confondus) de $j^{-1}(\rho_0) \cap \mathcal{C}$. Soit $c(x_n, x', \xi_n, \xi')$ un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1 supporté près de ρ_0^+. On note $\underline{u}_k$ le prolongement par 0 en dehors de Ω de u_k. Comme dans $\mathbb{R}^{2+1}$, on a

$$(2.4) \qquad \left(\partial_t^2 - \Delta\right) \underline{u}_k = \partial_n u_k \mid_{\partial\Omega} \otimes \delta_{\partial\Omega} \in H^{-1/2-\varepsilon},$$

en dehors de $\mathcal{C}$, $\underline{u}_k$ est microlocalement bornée dans $H^{3/2-\varepsilon}$, donc converge fortement vers 0 dans H^1. Il suffit donc de montrer que $C(x, D_x)\underline{u}_k$ converge vers 0 dans L^2 pour montrer que $\underline{u}_k$ converge, au voisinage de (x_0, ξ_0') vers 0 dans $H^1\left(\mathbb{R}^{2+1}\right)$ donc que u_k converge, au voisinage de x_0 vers 0 dans $H^1(\mathbb{R} \times \Omega)$ (puisqu'on peut faire le même calcul près de ρ_0^-).

Soit $\widetilde{r}$, la solution de l'équation $\frac{1}{i}\{p, r\} = |c|^2$ à support près de la demi bicaractéristique (dans $T^*\mathbb{R}^{2+1}$) issue de ρ_0^+ qui sort de $\overline{\Omega}$ (le point ρ_0 est supposé non diffractif). Soit $\Psi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$, à support proche de ρ_0^+, égale à 1 sur le support de c et telle que si on note $r = \Psi\widetilde{r}\Psi$, le support de $\frac{1}{i}\{p, r\} - |c|^2$ est inclus dans $x_n < -\varepsilon$. On a :

$$(2.5) \qquad \left(\partial_t^2 - \Delta\right) R - R^*\left(\partial_t^2 - \Delta\right) = C^*C + T_1 + T_2$$

où T_i est un opérateur d'ordre i et T_2 est à support dans $x_n < -\varepsilon$. On a donc, comme $\underline{u}_k$ est à support dans $x_n \geq 0$ et d'après (2.4), (2.5) et comme $\underline{u}_k$ est bornée dans H^1 :

$$(2.6) \qquad \|C(\underline{u}_k)\|_{L^2} = 2\mathrm{Re}\left(\partial_n \underline{u}_k \mid_{\partial\Omega\times\mathbb{R}_t}, R(\underline{u}_k) \mid_{\partial\Omega\times\mathbb{R}_t}\right)_{L^2} + o(1)$$

D'après le théorème de division de Malgrange appliqué à R, on a :

$$(2.7) \qquad R = R_1 + R_0\partial_n + R_{-1}\left(\partial_t^2 - \Delta\right)$$

où les opérateurs R_i sont tangentiels d'ordre i, le terme de droite dans (2.6) s'écrit donc

$$(2.8) \qquad 2\mathrm{Re}\left(\partial_n \underline{u}_k \mid_{\partial\Omega\times\mathbb{R}_t}, R_0(\partial_n \underline{u}_k) \mid_{\partial\Omega\times\mathbb{R}_t}\right)_{L^2} + o(1)$$

D'après l'hypothèse, si on a pris le support de c assez petit (et donc le support de r_1 dans $\Gamma\times]0, T[$ assez petit), ce terme tend vers 0, ce qui implique qu'il en est de même du terme de droite de (2.6).

La conservation de l'énergie pour les solutions de l'équation des ondes et le choix comme opérateur tangentiel test de $Q = \varphi(x)\psi(t)$ avec $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t)$ et $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}_x^2\right)$; $\varphi \equiv 1$ sur Ω, montrent que, si on suppose

$$(2.9) \qquad E(u_k) = \int_\Omega |\nabla_x u_k|^2 + |\partial_t u_k|^2 = 1, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

alors, la mesure μ vérifie $\mu(SZ\cap]a, b[_t) = b - a > 0$ si $b > a$.

Supposons maintenant que la proposition 1.5 n'est pas vérifiée. Il existe donc une suite u_k contredisant (1.5) donc, quitte à la renormaliser, telle que

$$E\left(u_k\right) = 1, \tag{2.10}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\Gamma\times]0,T[}\left|\frac{\partial u_k}{\partial n}\right|^2 dtd\sigma\left(x\right) = 0 \tag{2.11}$$

et

$$\lim_{k\to+\infty}\left\|u_k\right\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} = 0. \tag{2.12}$$

Quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que la suite u_k converge faiblement vers 0 dans $H^1_{loc}\left(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}_t\right)$ et qu'une mesure de défaut micro locale lui est associée.

Nous allons démontrer, dans la suite de cet article le résultat suivant :

PROPOSITION 2.2. — *Sous les hypothèses du théorème 1, pour toute suite u_k de solutions de (1.3), d'énergie uniformément bornée, convergeant faiblement vers 0 dans H^1, de mesure de défaut de compacité μ, si le support de μ n'est pas vide, alors il existe un point non diffractif dans l'intersection du support de μ avec $\Gamma\times]0,T[$.*

Cette proposition et le lemme de relèvement montrent que nécessairement le support de la mesure μ est vide, donc que la proposition 1.5 ne peut pas être contredite, ce qui implique le théorème 1.

3. Propagation faible du support de la mesure de défaut

On se propose dans cette partie de donner une conséquence d'un résultat sur la propagation des singularités de [**Bur97b**] que nous utiliserons par la suite.

Nous commençons par définir les espaces fonctionnels que nous allons utiliser. On note $\left(e_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la base orthonormale de $L^2\left(\Omega\right)$ formée des vecteurs propres du Laplacien avec conditions de Dirichlet sur Ω associés aux valeurs propres λ_n. On note, pour $s\geq -1$, $\widetilde{H}^s$ l'espace de Hilbert formé des distributions sur Ω, $u = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n e_n$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left|u_n\right|^2\left|\lambda_n\right|^s < +\infty$, muni de sa norme naturelle (pour $-1\leq s\leq 1/2$, $\widetilde{H}^s$ coïncide avec l'espace $H^s\left(\Omega\right)$ usuel et avec l'espace $H^s_0\left(\Omega\right)$ pour $1/2 < s\leq 1$).

On notera, pour $s\geq 0$, $\mathcal{H}^s = \widetilde{H}^s\times\widetilde{H}^{s-1}$ et on identifiera, pour $s\geq 0$ les distributions $\left(u_0,u_1\right)\in\mathcal{H}^s$ avec la solution de l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet associée aux données initiales $\left(u_0,u_1\right)$:

$$u\left(t,x\right) = \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}^*} e^{\left(\varepsilon(n)it\sqrt{\lambda_{|n|}}\right)}\left(u_{0,n} + \tfrac{\varepsilon(n)u_{1,n}}{i\sqrt{\lambda_n}}\right)e_n\left(x\right) \tag{3.1}$$

(avec $\varepsilon\left(n\right) = \text{signe}\left(n\right)$).

Pour $u \in \mathcal{H}^s$, on notera

$$u^{\pm} = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} e^{\left(\mp it\lambda_{|n|}\right)} \left(\frac{u_{0,n} \mp u_{1,n}/\left(i\sqrt{\lambda_n}\right)}{2}\right) e_n\left(x\right). \tag{3.2}$$

On notera $(u_0, u_1)^{\pm}_t$ les données associées à l'instant t

$$\begin{cases} (u_{0,n})^{\pm}_t = e^{\left(\mp it\lambda_{|n|}\right)} \left(\frac{u_{0,n} \pm u_{1,n}/\left(i\sqrt{\lambda_n}\right)}{2}\right) \\ (u_{1,n})^{\pm}_t = e^{\left(\mp it\lambda_{|n|}\right)} \left(\frac{\mp i\lambda_{|n|}u_{0,n} \mp \left(i\sqrt{\lambda_n}\right) \pm u_{1,n}}{2}\right) \end{cases} \tag{3.3}$$

.

Définition 3.1. — *Pour $u \in \mathcal{H}^1$, on dira que u est microlocalement de classe H^s au voisinage du point $(x \in K, t_0, \tau = \pm 1/2) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_t \times \{1/2, -1/2\}$ si et seulement s'il existe $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^2_x\right)$, égale à 1 au voisinage du point x telle que $\left(\varphi u^{\pm}_{0,t}, \varphi u^{\pm}_{1,t}\right) \in \mathcal{H}^s$.*

La vitesse finie de propagation du support pour l'équation des ondes montre que $u \in \mathcal{H}^1$ est microlocalement de classe H^s au point $(x_0, t_0, \tau = \pm 1/2)$ si et seulement si $WF^s_b(u) \cap \{(x = x_0, t = t_0, \tau = \pm 1/2)\} = \emptyset$, où on utilise la notion de front d'onde sobolev d'ordre s jusqu'au bord donnée dans [**Bur97b**] (voir aussi [**Leb94**]). Enfin on a le résultat suivant :

Lemme 3.2. — *L'injection naturelle $\mathcal{H}^s \to \mathcal{H}^{s'}$, $(s > s')$ est compacte.*

En effet, pour $0 \leq s' < s < 1/2$, comme $\mathcal{H}^s$ et $\mathcal{H}^{s'}$ coïncident avec les espaces de Sobolev usuels, qu'on peut voir comme des sous espaces fermés des espaces correspondant définis sur $\mathbb{R}^2$, et comme Ω est borné, ce résultat est bien connu ; et le cas général se déduit facilement de ce cas particulier en utilisant par exemple les isométries de $\mathcal{H}^r$ sur $\mathcal{H}^{r'}$, $J^{r'}_r$ définies par

$$\left(J^{r'}_r\left(u_0, u_1\right)\right)_n = (u_{0,n}, u_{1,n}) \times \left|\lambda_{|n|}\right|^{\frac{r-r'}{2}}. \tag{3.4}$$

Définition 3.3. — *On appelle pseudo bicaractéristique généralisée dans Ω, toute application continue $\gamma : \mathbb{R} \to T^*_b M$ telle que, si $P_x\gamma(s_0) \notin K$, g est, au voisinage de s_0, une bicaractéristique généralisée C^∞ au sens usuel (voir* [**Hör85**] *et* [**MS78**]*)*

(La différence par rapport aux bicaractéristiques est qu'une pseudo bicaractéristique rencontrant un coin peut repartir dans n'importe quelle direction)

Proposition 3.4. — *Soit u_n, une suite de solutions de l'équation (1.3) dans Ω, d'énergie bornée, convergeant faiblement vers 0 dans H^1 et de mesure de défaut* *microlocale μ. Alors, le support de la mesure μ associée est réunion de pseudorayons bicaractéristiques, c'est à dire que par tout point du support, passe un pseudorayon inclus dans le support.*

Remarque 3.5. — *Ce résultat reste vrai dans le cas où l'ouvert Ω comporte des coins d'angle inférieurs à π.*

Remarque 3.6. — *Ce résultat permettrait déjà de donner une réponse affirmative à la question de la contrôlabilité exacte des ondes dans le cas ou Ω est obtenu en retranchant d'un ouvert régulier un obstacle strictement convexe, à coins, puisqu'alors, tous les pseudorayons sont géométriquement contrôlés en temps fini. (Evidemment, ce dernier résultat est plus faible que le théorème 1).*

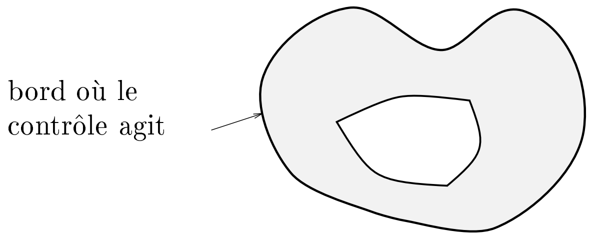

Figure 4. Un exemple où la proposition 3.4 donne un résultat de contrôlabilité exacte.

La proposition 3.4 est un résultat local. Ce résultat est bien connu pour un ouvert de classe C^∞(voir [**Leb96**]), c'est en particulier dans ce cas une conséquence immédiate du théorème 2, et en utilisant [**Leb96**] et [**Bur97a**] on pourrait le démontrer pour un ouvert de classe C^3. Dans la mesure où les supports des mesures $\mu^\pm$ sont disjoints, il est équivalent au résultat analogue sur les mesures $\mu^\pm$. Il nous suffit donc de le démontrer au voisinage d'un coin pour, par exemple, la mesure μ^+.

Nous allons donc supposer qu'aucun des demi-rayons issus d'un coin O à l'instant $t = 0$ vers $t < 0$ associés à $\tau = -1/2$, dont on exclue le point correspondant au coin, n'est inclu dans le support de la mesure μ^+, ce qui, d'après la proposition 3.4, appliquée en dehors d'un coin, implique qu'aucun de ces demi-rayons ne rencontre (au voisinage du coin O et de $t = 0$) le support de la mesure μ. Nous allons montrer qu'alors il en est de même du point $(x = O, t = 0, \tau = -1/2) \in T^*L$ (donc, en appliquant à nouveau la proposition 3.4 en dehors d'un coin qu'il en est également de même des demirayons orientés vers $t > 0$).

Soient, pour $\varepsilon > 0$, C_ε, l'ensemble des points de Ω à distance ε, le long des rayons, du coin O et $\mathcal{C}_\varepsilon$ l'ensemble des couples $(x, \xi)\,; x \in C_\varepsilon, |\xi| = 1/2$

tels que le rayon issu de $x, t = -\varepsilon$ dans la direction $\xi, \tau = -1/2$ rencontre O pour $t = 0$. Soient Q un opérateur pseudodifférentiel en espace, tangentiel d'ordre 0 à support près de $\mathcal{C}_\varepsilon$ tel que le support de $Id - Q$ ne rencontre pas $\mathcal{C}_\varepsilon$ et $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}_t)$ telle que $\Psi\mid_{t<-\varepsilon-\alpha} \equiv 0$,$\Psi\mid_{t>-\varepsilon+\alpha} \equiv 1$ (avec $0 < \alpha << \varepsilon$ que nous fixerons plus tard).

Pour $u \in \mathcal{H}^1$, On note $P_1(u)$ et $P_2(u)$ les solutions des systèmes :

(3.5)
$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \widetilde{\Delta})P_1(u) &= \Psi''(t)Q(u) + 2\Psi'(t)Q(\partial_t u) \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_t \\ P_1(u)\mid_{\partial\Omega} &= 0 \\ P_1(u)\mid_{t<<0} &\equiv 0 \end{cases}$$

(3.6)
$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \widetilde{\Delta})P_2(u) &= \Psi''(t)(Id - Q)(u) + 2\Psi'(t)(Id - Q)(\partial_t u) \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_t \\ P_2(u)\mid_{\partial\Omega} &= 0 \\ P_2(u)\mid_{t<<0} &\equiv 0 \end{cases}$$

On remarque que, pour $t > -\varepsilon + \alpha$, on a $u = P_1(u) + P_2(u)$. D'après le théorème de propagation des singularités C^∞ de R. Melrose et J. Sjöstrand [**MS78**], si on prend α assez petit (en fonction de Q et plus précisement de la taille de l'ensemble où Q est égal à l'identité), aucun des rayons issus d'un point proche de $\mathcal{C}_\varepsilon$ ne rencontre le front d'onde C^∞ du second membre de l'équation définissant $P_2(u)$, pour $t \in]-\varepsilon-\alpha, 0[$. En effet, ces rayons ne rencontrent pas le support de $Id - Q$ pour $t \in [-\varepsilon - \alpha, -\varepsilon + \alpha]$ et cet intervalle contient le support du second membre de (3.5). D'après le théorème de propagation des singularités C^∞ pour les ouverts à coins de [**Bur97b**], le point $(x = O, t = 0, \tau = -1/2)$ n'est donc pas dans le front d'onde C^∞ de $P_2(u)$, ce qui revient à dire (voir [**Bur97b**]) qu'il existe des fonction $\phi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^2)$, $\phi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t)$ égales à 1 au voisinage de $x = O$ et $t = 0$ respectivement et telles que la fonction $\phi_1(t)\phi_2(x)P_2(u)^+$ est de classe C^∞ en temps à valeurs $H_0^1(\Omega)$. Par ailleurs, les conditions que doivent vérifier les fonction $\phi_{1;2}$ sont purement géométriques et il est clair qu'on peut les choisir indépendantes de u (mais pas de l'opérateur Q). On considère alors l'opérateur $\mathcal{P}_2 : u \in \mathcal{H}^1 \mapsto \left(\phi_2 P_2(u)^+_{t=0}, \partial_t(\phi_2(x)P_2(u))\mid^+_{t=0}\right)$. D'après ce qui précède, l'opérateur $\mathcal{P}_2$ envoie $\mathcal{H}^1$ dans $\mathcal{H}^s$ pour tout $s \geq 1$, il est évidemment continu de $\mathcal{H}^1$ dans lui même, le théorème du graphe fermé implique donc que pour tout $s \geq 1$, il existe $C_s > 0$ tel que

$$\|\mathcal{P}_2(u)\|_{\mathcal{H}^s} \leq C_s \|u\|_{\mathcal{H}^1} \tag{3.7}$$

Si (u_n) est une suite bornée de $\mathcal{H}^1$ convergeant faiblement vers 0, l'inégalité (3.7) et l'injection compacte $\mathcal{H}^s \hookrightarrow \mathcal{H}^1$ $(s > 1)$ montre que la suite $\mathcal{P}_2(u_n)$ converge fortement vers 0 dans $\mathcal{H}^1$ donc que le support de la mesure $\widetilde{\mu}^+$ associée à la suite $P_2(u_n)$ ne rencontre pas le point $(t = 0, x = O, \tau = -1/2)$.

Par ailleurs, si on note $U(t)$ le propagateur de l'équation des ondes

$$\tag{3.8} \begin{cases} \left(\partial_t^2 - \Delta\right) U(t)(f) &= 0 \\ U(t)(f)\,|_{\partial\Omega} &= 0 \\ U(0)(f) &= 0 \\ \partial_t U(0)(f) &= f, \end{cases}$$

la solution de l'équation (3.5) s'écrit

$$\tag{3.9} P_1(u)(t) = \int_{s=0}^{t} U(t-s)\,\Psi''(s)(Q)(u) + 2\Psi'(s)(Q)(\partial_s u)\,ds,$$

ce qui montre que $P_1(u)^+$ est la solution d'une équation du type de (3.6) avec comme second membre

(3.10)

$$\left(\Psi''(t)(Q)(u) + 2\Psi'(t)(Q)(\partial_t u)\right)^+ \left(\Psi''(t)(Q)\left(u^+\right) + 2\Psi'(t)(Q)\left(\partial_t u^+\right)\right).$$

Comme, par hypothèse, si α et le support de Q sont tels que $\operatorname{supp}(Q)\times]-\varepsilon-\alpha,-\varepsilon+\alpha[\times\{-1/2\}\cap\operatorname{supp}\mu=\emptyset$ (ce qui est possible si on a choisi α et le support de Q assez petits), le terme de droite de (3.10), est obtenu en appliquant un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1 à une suite ayant une mesure de défaut de compacité H^1 nulle au voisinage du support de cet opérateur, il converge fortement vers 0 dans $L^2(\Omega)$, ce qui implique que la suite $P_1(u_n)^+$ converge fortement vers 0 dans $H^1(\Omega)_{\mathrm{loc}(t)}$; et donc implique que la partie "+" de la mesure de défaut de la suite $P_1(u_n)$ est nulle, donc la mesure μ^+ est égale à la mesure $\widetilde{\mu}^+$ et est nulle au voisinage de $(t=0, x=O, \tau=-1/2)$. La proposition 3.4 est donc démontrée.

4. Propagation du support des mesures de défaut

Le but de cette partie est la démonstration de la proposition 2.2. Nous allons, pour cela, contrairement à ce que nous avons fait dans la partie précédente (qui pourrait en fait s'exprimer uniquement en termes de propagation des singularités H^1), utiliser des renseignements fins propagés par les mesures de défaut.

Soit $\varrho_0 \in \operatorname{supp}(\mu)\cap\{t=T/2\}$. Supposons que $\varrho_0 \notin T^*L$. Soit γ le rayon bicaractéristique issu de ϱ_0 défini (et unique) tant qu'il ne rencontre pas le coin. Si γ existe pour $t\in[T/2-T_0/2, T/2+T_0/2]$ (c'est à dire qu'il ne rencontre pas de coin sur cet intervalle de temps), la conclusion de la proposition 2.2 est une conséquence de la proposition 3.4, puisque les pseudo rayons qui ne rencontrent pas de coin sont aussi des rayons bicaractéristiques généralisés. La seule situation à étudier est celle où γ rencontre un coin, O à un instant t_1. On suppose par exemple $0<t_1<T/2$. En propageant le support de la mesure μ vers $t>T/2$ et comme $T>2T_1$, si le demi-rayon issu de ρ_0 vers $t>T/2$ ne rencontre pas de coin pour $s\in]T/2,T[$, alors il rencontre nécessairement Γ en un point non diffractif pour $s_0 \in]T/2, T[$ (puisque sinon, on aurait construit un demi-rayon issu d'un coin et de longueur supérieure à $T - t_1 \geq T/2 > T_1/2 = \max_\gamma(t_\gamma)$ avec t_γ défini à la page 3). Dans ce cas, la conclusion de la proposition 2.2 est encore une conséquence de la proposition 3.4. Le seul cas qu'il nous faut traiter est donc celui où le rayon issu de ρ_0 rencontre un coin pour $t_2 > T/2$ et pour $t_1 < T/2$. On peut également supposer que ce rayon ne rencontre pas Γ en un point non diffractif pour $s \in [t_1, t_2]$. On a alors trois cas

1. Soit il existe une suite de points $\varrho_n \in \operatorname{supp}(\mu)$ convergeant vers ϱ_0 et tels que les rayons associés, γ_n, qui nécessairement ne rencontrent pas le coin avant l'instant $t_1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit si n est assez grand, ne le rencontrent pas non plus pour $t \in [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]$. Alors, en considérant la limite des rayons γ_n définis pour $t \in [t_1 - \varepsilon, T/2]$, il est clair qu'au moins un des deux demi-rayons réfléchis sur les faces du coin O est inclus dans le support de la mesure μ. Soit $T_3 = \min\{\text{distance}\,(O_i, O_j)\,; O_j \neq O_j\}$ où O_i, O_j décrivent l'ensemble (nécessairement fini) des coins. Le rayon γ défini sur $t \in [t_1 - \varepsilon, T/2]$ associé à ce demi-rayon réfléchi peut alors se prolonger à $t \in [t_1 - T_3, T/2[$ en un rayon inclus dans le support de μ.

2. Soit la mesure μ se focalise sur le coin O, c'est à dire qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre non dénombrable de demi-rayons incidents, inclus dans le support de μ, correspondant à un ensemble de mesure non nulle (dans $\frac{1}{2}\mathbb{S}^1$, la sphère) de directions incidentes, qui rencontrent le coin pour $|t - t_1| \leq \varepsilon$. Il suffit alors de propager le support de la mesure μ vers $t > T/2$, l'hypothèse de non focalisation assurant que parmi ces rayons tous ne peuvent pas rencontrer à nouveau un coin avant de rencontrer Γ en un point non diffractif, pour $s_0 \in [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon + T_1/2]$, puis comme $T > T_1$ et $t_1 < T/2$, il suffit de prendre $\varepsilon < T/2 - T_1/2$ pour que dans ce cas, la conclusion de la proposition 2.2 soit encore une conséquence de la proposition 3.4.

3. Le dernier cas qui reste à traiter est le cas général. Soit $\varrho_\varepsilon = (x, y, t, \tau = -1/2, \xi, \eta)_\varepsilon$ le point sur γ correspondant à $t = t_1 + \varepsilon$). Il est clair qu'on peut choisir $\varepsilon > 0$ assez petit, tel que le point ϱ_ε soit un point intérieur et $(\xi, \eta) = \frac{(x,y)}{2|(x,y)|}$, puisque l'hypothèse de contrôlabilité directe des demi-rayons tangents aux faces des coins implique que le rayon γ n'est pas un de ces deux rayons (puisqu'il rencontre à nouveau un coin pour $t_2 > T/2$ sans être contrôlé entre temps). Nous allons montrer qu'alors, si aucun des deux demi-rayons réfléchis associés à γ ainsi qu'aucun des deux demi-rayons tangents aux bords du coin n'appartient, pour $t_1 - \varepsilon < t < t_1$ au support de la mesure μ, alors, nécessairement, au voisinage de ϱ_ε, la mesure μ_+ est supportée par l'ensemble $(t, x, y, \tau, \xi, \eta)\,;\ \xi = -\tau\frac{(x,y)}{|(x,y)|}$ et s'écrit (en coordonnées polaires (r, θ)) sous la forme $\mu_+ = \nu_+(\xi, t, r) \otimes$

$\delta_{\theta=\xi}$ où la mesure ν_+ est absoluement continue par rapport à ξ c'est à dire est une fonction intégrable sur la sphère $\frac{1}{2}\mathbb{S}^1$ à valeurs mesure en t, r. C'est à dire que nécessairement soit on est dans le cas 2, soit on peut prolonger le rayon en un rayon inclus dans le support de μ pour $t \in]t_1 - T_3, T/2[$, soit un des demi-rayons tangents aux bords du coin issu à $t = t_1$ vers $t < t_1$ est inclus dans le support de la mesure μ.

Supposons ce dernier résultat admis, L'application des résultats des cas 1), 2) et 3) permet donc soit de conclure, soit de construire un rayon bicaractéristique généralisé pour $t \in [T/2 - T_3, T/2]$ inclus dans le support de la mesure μ, soit de construire un demi-rayon tangent issu du coin O, pour $t = t_1, \tau = \tau_0$, inclus dans le support de la mesure μ et qui est contrôlé par Γ en un point non diffractif avant de rencontrer à nouveau un coin. En appliquant un nombre fini de fois cette construction à partir de t_1, vers $t < t_1$ et en faisant de même à partir de t_2 vers $t > t_2$, on construit un point non diffractif qui sera dans l'intersection du support de la mesure μ avec $\Gamma \times]0, T[$.

Remarque 4.1. — *L'étude du cas 1 à été motivée par un résultat de S. Varjabedian* [**Var**] *qui a remarqué que si la mesure incidente ne charge pas le coin, alors les termes calculés par réflexion en dehors du coin, donnent toute la mesure puisqu'ils sont de masse totale égale à toute l'énergie et que l'équation des ondes conserve cette énergie.*

L'étude du cas 3 va faire intervenir les résultats de P. Gérard et G. Lebeau [**GL93**] sur la diffraction d'une onde par un coin. Le résultat énoncé est un résultat local. On se place dans un système de coordonnées (x, y) donné par les hypothèses sur la régularité analytique du coin. On note $\Omega^{\pm}$ l'intersection des deux ensembles délimités par les tangentes à Ω avec Ω,

$$\Omega^+ = \{(x, y)\,;\ a'(0)\, y < x < b'(0)\, y\} \tag{4.1}$$

(4.2)
$$\Omega^- = \{(x, y)\,;\ a'(0)\, y < x \text{ et } b'(0)\, y \leq x \text{ ou } (x, y)\,;\ a'(0)\, y > x \text{ et } b'(0)\, y \geq x\}$$

et Ω_α l'ensemble obtenu en tournant les tangentes vers l'extérieur de Ω d'un angle $\varepsilon > 0$.

$$\Omega_\alpha = \{(x, y)\,;\ \big(b'(0) - \varepsilon\big)\, y < x < \big(a'(0) + \varepsilon\big)\, y\}^c \tag{4.3}$$

Le résultat suivant est démontré par P. Gérard et G. Lebeau [**GL93**]

Théorème 3. — *Soit $(x, y) \in \Omega_\varepsilon$. Il existe un symbole analytique $\sigma(y, x, x', y', \tau)$ se prolongeant en une fonction holomorphe dans $Im\tau < 0$ tel que*

$$\sup_{\tau} \sup_{(x',y'),(x,y)\in\Omega_\alpha} \left| \frac{\sigma(x', y', x, y, \tau)}{(1 + |\tau|)} \sqrt{|(x, y)|} \right| < +\infty \tag{4.4}$$

FIGURE 5. Les ensembles $\Omega^{\pm}$ et Ω_{α}.

et la solution de l'équation à support dans $t > 0$

$$
\left\{\begin{array}{rcl} (\partial_t^2 - \Delta_{x,y})u & = & \delta_{\substack{t=0\\x=x'\\y=y'}} \qquad \text{dans} \qquad \Omega\times\mathbb{R}_t \\ u\,|_{\partial\Omega} & = & 0 \end{array}\right. \tag{4.5}
$$

vérifie, pour $|(x,y)| <$, $0 < t + |(x',y')|$ assez petits et $(x,y) \in \Omega_{\alpha}$,

$$
u(x,y,t) = \mathcal{F}^{-1}_{\tau\mapsto t} e^{-it\tau(|(x',y')|+|(x,y)|)} \sigma\left(x',y',x,y,\tau\right). \tag{4.6}
$$

en dehors d'un voisinage des deux directions réfléchies à partir de la direction incidente donnée par (x',y'), et on peut choisir $\alpha > 0$ indépendant de (x',y').

REMARQUE 4.2. — *Le sens que nous donnons à l'équation (4.5) est le suivant : on commence par régulariser en temps en appliquant l'opérateur $\left(\partial_t^2 - 1\right)^{-1}$, on résoud alors l'équation des ondes dans l'espace $H^1_0(\Omega)$ avec la donnée correspondante (la solution est alors unique), puis on applique l'opérateur $\partial_t^2 - 1$ pour obtenir notre solution. En effet, la présence du coin fait qu'il est délicat de parler de solutions dans des espaces moins réguliers que l'espace H^1. En fait, nous demandons que notre solution soit H^{-s} en temps à valeurs H^1_0 en espace, ce qui supprime le problème lié à la singularité du coin. Pour une construction détaillée, nous renvoyons à* [**Bur97b**], *§3.4.*

REMARQUE 4.3. — *Ce résultat n'est dans* [**GL93**] *démontré que pour $(x',y') \in \Omega^+$ et pour une solution H^1 de l'équation des ondes, mais il est clair que la démonstration donnée reste valide, modulo quelques modifications mineures pour $(x',y') \in \Omega^- \cap \Omega_{\alpha}$ et, en régularisant en temps pour la fonction de Green que nous calculons.*

Soit u_n, une suite bornée de solutions H^1 de l'équation (1.3). On considère l'ensemble, C_ε des points situés à distance géodésique $\varepsilon > 0$ du coin O. Soient $x^{\pm}_{\varepsilon}$ les deux points de l'intersection de cet ensemble avec les deux demi-rayons tangents et $X^{\pm}_{\varepsilon}$ les deux points sur les deux demi-bicaractéristiques réfléchies associées au rayon γ. On note $\varrho^{\pm}$ et $\rho^{\pm}$ les points correspondants de $SZ^{+}\cap\{t = t_1 - \varepsilon\}$. On suppose qu'aucun de ces quatre points ne rencontre le support de la mesure μ^+. Soient $0 < \eta << \varepsilon$ et W, un voisinage (dans C_ε) de la réunion de ces quatre points tel que $\text{supp}(\mu) \cap W \times [t_1 - \varepsilon - \eta, t_1 - \varepsilon + \eta] \times \{\tau = -1/2\} = \emptyset$ (il en existe si $\eta > 0$ est assez petit car $\varrho^\pm$ et $\rho^\pm$ ne sont pas dans le support de la mesure μ, par hypothèse). Soit V un voisinage (dans $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$) du complémentaire (dans S_ε) de W.

Soient $0 < \eta' < \eta$, $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}_t)$ égale à 0 pour $t < t_1 - \varepsilon - \eta'$ et égale à 1 pour $t > t_1 - \varepsilon + \eta'$ et Q un opérateur pseudodifférentiel elliptique d'ordre 0, à support dans V tel que le support de l'opérateur $Id - Q$ ne rencontre pas le complémentaire dans S_ε de W. Considérons les suites (v_n) et (w_n) solutions des systèmes :

(4.7)
$$\left\{\begin{array}{rcl} (\partial_t^2 - \widetilde{\Delta})v_n & = & \Psi''(t)Q(u_n) + 2\Psi'(t)Q(\partial_t u_n) \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_t \\ v_n\,|_{\partial\Omega} & = & 0 \\ v_n\,|_{t < t_1 - \varepsilon - \eta'} & \equiv & 0 \end{array}\right.$$

(4.8)
$$\left\{\begin{array}{rcl} (\partial_t^2 - \widetilde{\Delta})w_n & = & \Psi''(t)(Id - Q)(u_n) + 2\Psi'(t)(Id - Q)(\partial_t u_n) \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_t \\ w_n\,|_{\partial\Omega} & = & 0 \\ w_n\,|_{t < t_1 - \varepsilon - \eta} & \equiv & 0 \end{array}\right.$$

Comme $\left(\partial_t^2 - \Delta\right)(\Psi u_n) = \Psi''(t)\,u_n + 2\Psi'(t)\,\partial_t u_n$, on a clairement $v_n + w_n = \Psi(t)\,u_n$; donc pour tout $t > +\eta' + t_1 - \varepsilon$, $u_n = v_n + w_n$.

Si on prend $0 < \eta'$ assez petit, on peut supposer qu'aucun des demi rayons issus du coin vers $t > t_1$ à $t = t_1$ associés à $\tau = -1/2$ ne rencontre le support de l'opérateur $Id - Q$. On peut alors montrer comme à la partie 3 que le support de la mesure de défaut associée à la suite w_n (qui est pour $t < t_1 - \varepsilon - \eta'$ une suite de solutions de l'équation des ondes), μ'_+, est inclus dans la réunion des pseudo rayons (pour $\tau = -1/2$) issus pour $t \in [t_1 - \varepsilon - \eta', t_1 - \varepsilon + \eta']$ de l'intersection du support de $Id - Q$ avec le support de la mesure de défaut de la suite u_n. Ce résultat est en effet pour $t \in [t_1 - \varepsilon - \eta, t_1 - \varepsilon + 2\eta]$ un résultat classique puisque par vitesse finie de propagation, la présence du coin n'importe pas et pour $t > t_1 - \varepsilon + 2\eta$, c'est une conséquence de la proposition 3.4. Puisqu'aucun de ces rayons ne peut atteindre le point O à l'instant $t = t_1$ le point $(O, t = t_0, \tau = -1/2)$ n'est donc pas dans le support de la mesure μ'_+. Si on note ν la mesure de défaut de la suite v_n, près de $(O, t = t_1, \tau = -1/2)$, les mesures μ^+ et ν^+ coïcident donc.

On décompose l'opérateur Q en somme de deux termes, $Q = Q_i + Q_e$ le premier correspondant à la partie à support dans l'ombre (c'est à dire située entre l'obstacle est les demi-tangentes au coin) et le deuxième à la partie à support dans Ω_α, avec $\alpha > 0$ assez petit. La contribution du premier terme à la suite v_n est de classe C^∞ en temps à valeurs H^1 en espace au voisinage de $(t = t_1, x = O)$ d'après les théorèmes de propagation des singularités dans les ouverts à coins de [**Bur97b**], puisqu'aucun rayon issu du support de Q_e ne rencontre le coin pour $t = t_1$. Il suffit donc d'étudier celle du deuxième terme. Comme on peut choisir le support de l'opérateur Q_e inclus dans Ω_α, arbitrairement proche de C_ε, il existe $\delta > 0$ tel que pour $t_1 < t < t_1 + \delta$, v_n s'écrit, en dehors de la reunion des rayons réfléchis issus du support de Q_e (donc au voisinage de l'intersection de la projection spatiale du rayon γ avec un voisinage du coin), si on a pris le support de Q_e assez petit, sous la forme (on note $\mathcal{F}_{t\to\tau}$ la transformation de Fourier en variable t),

$$v_n\left(x,y,t\right) = \mathcal{F}^{-1}_{\tau\mapsto t} e^{-i\tau(|(x,y)|)} \int_{\mathrm{supp}(Q_e)} e^{-i\tau(|(x',y')|)} \sigma\left(x',y',x,y,\tau\right) \mathcal{F}_{t\mapsto\tau}\Big(\Psi''(t)Q_e\left(u_n\right) + 2\Psi'(t)Q_e\left(\partial_t u_n\right)\Big)\left(x',y',\tau\right) dx'dy' \tag{4.9}$$

Un calcul standard montre que la mesure de défaut de compacité H^1 de suites de la forme (4.9) est, en dehors du point $(x = 0, y = 0)$, supportée par l'ensemble $(\xi,\eta) = -\tau\frac{(x,y)}{|(x,y)|}$ et d'autre part, la présence du symbôle σ implique que si $\omega \subset\subset \Omega$ est un ensemble de mesure de Lebesgue nulle et $K \subset \mathbb{R}_t$ un compact,

$$\int_{\omega\times K} |\nabla_x v_n|^2 + |\partial_t v_n|^2 dxdydt = 0 \tag{4.10}$$

ce qui implique que la mesure de défaut de compacité H^1 de telles suites est, en dehors de $(x = 0, y = 0)$ absoluement continue par rapport à la mesure de Lebesgue $dxdy$ donc de la forme

$$a\left(t,x,y\right) dxdy \otimes \delta_{\xi=\frac{(x,y)}{2|(x,y)|}} \tag{4.11}$$

ce qui peut aussi s'écrire en coordonnées polaires :

$$a\left(t,r,\xi\right) rdrd\xi \otimes \delta_{\theta=\xi} \tag{4.12}$$

Ceci termine l'étude du cas 3.

Enfin, il reste à nous affranchir de l'hypothèse $\varrho_0 \notin T^*L$ que nous avons fait au début de cette partie. Pour cela, on applique la proposition 3.4 qui permet de construire un demi-rayon, défini pour $t \in [T/2, T/2 + T_3[$, issu de ϱ_0 vers $t > T/2$, inclus dans le support de la mesure μ, puis, à partir d'un point quelconque de ce demi-rayon, qui n'est pas, pour t assez proche mais distinct de $\neq T/2$, dans T^*L, on applique la stratégie précédente, ce qui permet de conclure comme précédement.

Appendice A. Obstacles strictement convexes

Nous donnons dans cet appendice une classe d'exemples explicites où l'hypothèse de non focalisation sur les coins est vérifiée.

Soient $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$, un ouvert borné de classe C^∞ et $\Theta_i,\ i = 1, \cdots, N$ des obstacles analytiques par morceaux, strictement convexes (c'est à dire à courbures strictement positives), inclus dans $\widetilde{\Omega}$. On note $\Omega = \widetilde{\Omega} \setminus \cup_{i=1}^N \Theta_i$ et $\Gamma = \partial\widetilde{\Omega}$ (on contrôle sur le bord extérieur).

On a alors :

Proposition A.1. — *L'ouvert Ω est non focalisant sur les coins.*

On va montrer, pour démontrer ce résultat que les rayons qui connectent un coin à un autre sans rencontrer le bord Γ sont complètement déterminés par la suite formée des obstacles sur lesquels ils se réfléchissent entre temps. Dans toute la démonstration, puisque nous ne considérons que des rayons qui ne rencontrent pas Γ, nous supposerons que $\Omega = \left(\cup_{i=1}^N \Theta_i\right)^c$.On notera $O_0, \cdots, O_m$ les coins. Soit γ, un rayon bicaractéristique joignant les coins O_{i_0} et O_{i_p}. On suppose que la projection spaciale de γ est $g = \cup_{i=1}^p [x_i, x_{i-1}]$ avec $x_j \in \Theta_{i_j}$ $(1 \leq j < p)$. On considère la fonction F définie sur $\Theta = \Theta_{i_1} \times \cdots \times \Theta_{i_{N-1}}$ par

$$F(Y) = (y_1, \cdots, y_{p-1}) = \sum_{i=1}^p \|y_i - y_{i-1}\| \tag{A.1}$$

où $\| \ \|$ désigne la distance Euclidienne et $y_0 = x_0,\ y_p = x_p$. Cette fonction est convexe sur le convexe Θ et une étude locale simple montre que γ est un minimum local (donc global) de F (ce qui ne serait pas le cas si γ était un pseudo rayon). Supposons que ce minimum est atteint en deux points distincts, X correspondant à γ et Y. L'écriture de l'égalité

(A.2)
$$\|\lambda (y_i - y_{i-1}) + (1-\lambda)(x_i - x_{i-1})\| = \lambda \|(y_i - y_{i-1})\| + (1-\lambda)\|(x_i - x_{i-1})\|$$

implique que pour tout $1 \leq i < N$, $x_i - x_{i-1} = \alpha_i (y_i - y_{i-1})$ avec $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{N-1}) \in (\mathbb{R}^+)^{N-1}$ et $\alpha \neq (1, \cdots, 1)$.

Soit j, le plus petit indice tel que $\alpha_j \neq 1$. On a donc $x_{j-1} = y_{j-1}$, $x_j \neq y_j$ et le segment $[x_j, y_j]$ est inclu dans Θ_j. Par ailleurs, comme X est un rayon réfléchi, soit les trois points x_{j-1}, x_j et x_{j+1} ne sont pas alignés, soit le segment $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ est tangent à Θ_j en x_j (ou x_j est un coin). Supposons que le point y_j est à l'intérieur du segment $[x_{j-1}, x_j]$. Alors le segment $[y_j, x_j]$ est inclus dans Θ_j, ce qui n'est pas possible puisque Θ_j est strictement convexe et que le rayon g ne peut pas rentrer à l'intérieur de Θ_j. Donc, nécessairement, le point x_j est à l'intérieur du segment $[y_{j-1}, y_j]$, ce qui montre que le rayon Y rentre à l'intérieur de Θ_j (puisque $[x_j, y_j] \subset \Theta_j$) et donc qu'il ne correspond pas à un rayon bicaractéristique généralisé.

On déduit de ce qui précède qu'il existe un nombre au plus dénombrable de rayons qui connectent deux coins quelconques sans rencontrer le bord Γ.

Nous allons donner comme exemple d'application de la proposition A.1, un exemple peut être anecdotique, mais qui est l'exemple qui a motivé notre étude.

COROLLAIRE A.2. — *Soit L, un réseau de $\mathbb{R}^2$. Soit $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné, de classe C^∞ sans contact d'ordre infini avec ses tangentes. Il existe pour tout point $x \in \widetilde{\Omega} \cap L$ un convexe strict, Θ_x, non vide, à frontière analytique par morceaux, contenant x et $T > 0$ tels que, si on note $\Omega = \widetilde{\Omega} \setminus \cup_x^N \Theta_x$ et $\Gamma = \partial\widetilde{\Omega}$, alors*

- *Le couple (Γ, T) contrôle géométriquement Ω*
- *L'ouvert Ω est non focalisant sur les coins.*

Il résulte de ce corollaire que, si Ω est ainsi défini, l'équation des ondes sur Ω est exactement contrôlable avec un contrôle agissant sur le bord extérieur seulement. Il faut remarquer que l'obtention d'un tel résultat avec des méthodes de multiplicateurs suivant J.L. Lions et P. Grisvard, indépendamment de l'optimalité du temps nécessaire, est à peu près desespérée puisque ces méthodes de multiplicateurs impliquent nécessairement que le contrôle agisse sur "au moins la moitié" des obstacles.

La deuxième partie du corollaire A.2 étant, d'après ce qui précède automatiquement vérifiée, il suffit de démontrer la première.

On choisit un système de coordonnées sur $\mathbb{R}^2$. Quitte à faire une rotation, on peut supposer que le réseau est de la forme $L = \{(n + \alpha m, m)\,;\ (n, m) \in \mathbb{Z}^2$. On va prendre les obstacles $\Theta_{n,m}$ obtenus par translation de vecteur $(n + \alpha m, m)$à partir d'un même obstacle Θ qui est un losange très plat, rendu par legère déformation strictement convexe. On commence par vérifier qu' on peut choisir ce losange assez petit et assez plat pour que La propriété de contrôle géométrique soit vérifiée. On considère en effet un rayon, s'il rencontre un obstacle, on sait que nécessairement, après un nombre fini de réfléxions, soit il monte vers un obstacle de la rangée supérieur ou inférieure, soit il est controlé. Il suffit donc de prendre le losange de base assez plat et petit pour que tout rayon venant d'une rangée inférieure continue à monter et donc atteigne la rangée encore supérieure, etc.... Enfin, pour vérifier l'hypothèse de contrôlabilité directe des demi-rayons tangents aux faces des losanges il suffit de déplacer légèrement latéralement les rangées les unes par rapport aux autres.

Appendice B. Généricité de l'hypothèse de non focalisation (en collaboration avec J.M. Schlenker)

En dehors des cas particuliers de l'appendice précédent, l'hypothèse de non focalisation sur les coins est à peu près impossible à vérifier "à la main". Nous démontrons donc dans cette appendice un résultat disant que cette hypothèse

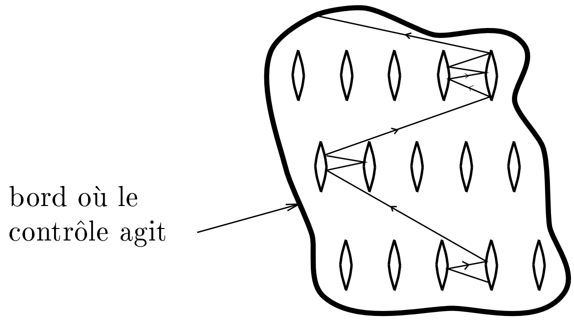

FIGURE 6. Un exemple illustrant l'intérêt d'utiliser des obstacles à coins

est génériquement vérifiée. On choisit Ω_0 un ouvert à coins vérifiant les hypothèses de l'introduction. On note $\mathcal{K} = \{K_1, \cdots K_D\}$ l'ensemble des coins et V un voisinage dans $\mathbb{R}^2$ de Ω. On s'intéresse à des déformations de Ω_0 obtenues de la manière suivante : pour tout difféomorphisme $\Psi \ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ égal à l'identité en dehors de V ($\Psi \in C^\infty_V\left(\mathbb{R}^2\ ; \mathbb{R}^2\right)$), on note $\Omega_\Psi = \Psi\left(\Omega_0\right)$ et on dira que Ω_Ψ est proche de Ω_0 en topologie C^∞ si Ψ est proche de l'identité (en topologie C^∞). On dira qu'une propriété est génériquement vérifiée au voisinage de l'ouvert Ω_0 si elle est (pour un certain choix de V) génériquement vérifiée par les ouverts Ω_Ψ , c'est à dire qu'elle est vérifiée par les ouverts $\Omega_\phi\ ; \phi \in O_d$ où O_d est un ouvert dans l'ensemble des fonctions $C^\infty_V\left(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2\right)$, dense au voisinage de l'identité (pour la topologie C^∞). Nous allons montrer dans cet appendice que si (Γ, T) contrôle géométriquement l'ouvert Ω_0, alors l'hypothèse de non focalisation sur les coins est génériquement vérifiée au voisinage de Ω_0.

On commence par remarquer en faisant un raisonnement par l'absurde que, si les ouverts Ω et Ω_Ψ sont assez proches l'un de l'autre pour la topologie C^∞ et si Γ contrôle géométriquement Ω en temps T_0, alors $\Gamma_\Psi = \Psi\left(\Gamma\right)$ contrôle géométriquement Ω_Ψ en temps T_0 (puisqu'alors, il existe $T' < T_0$ tel que Γ contrôle géométriquement Ω en temps T'). On remarque aussi que l'hypothèse de contrôle direct des demi-rayons tangents aux coins est également stable. Plus précisement, il existe $\theta > 0$ et $\alpha > 0$ tels que si les ouverts Ψ et l'identité sont assez proches l'un de l'autre pour la topologie C^∞, tout rayon de Ω_Ψ issu d'un point à distance inférieure à α d'un coin dans une direction faisant un angle inférieur à θ avec la direction donnée par une des deux demi-tangentes au bord en ce point rencontre Γ_Ψ en un point non diffractif avant de rencontrer à nouveau un coin. Puisque le résultat de généricité que nous voulons démontrer est local, nous nous placerons dans la suite dans un voisinage ouvert (pour la topologie C^∞) de Ω_0 tel que sur ce voisinage on a la propriété précédente.

B.1. Etude des points de contact tangentiel. — On commence par démontrer la propriété suivante :

Proposition B.1. — *Génériquement au voisinage de Ω_0, aucun rayon issu d'un coin ne peut être tangent au bord puis rencontrer un autre coin sans être contrôlé géométriquement entre temps*

Nous allons démontrer ce résultat en utilisant les méthodes standard de transversalité. Nous rappelons un résultat inspiré des méthodes de R. Thom [**Tho56**]. Nous utilisons les notations de F. Laudenbach [**Lau95**], §4. On considère $f \in C^\infty(M;N)$ une application différentiable entre variétés, $P \subset N$ une sous variété propre et $K \subset M$. On dit que f est transversale sur P le long de K si pour tout point $x \in f^{-1}(P) \cap K$, on a

$$T_{f(x)}N = T_{f(x)}P + Tf(T_xM) \tag{B.1}$$

On considère une famille $\mathcal{F} \subset C^\infty(M\,;N)$ d'applications satisfaisant une condition particulière (dans notre cas cette condition sera d'être des flots sur des ouverts obtenus comme déformation de notre ouvert de départ)

Définition B.2. — *On dira que la famille $\mathcal{F}$ est localement transversale sur P si pour tout $f \in \mathcal{F}$ et tout $a \in M$ il existe un voisinage K de a dans M et un voisinage W de f dans $\mathcal{F}$ tels que pour tout $g \in W$ il existe une famille $G\;: M \times S \to N$ vérifiant les conditions suivantes*

1. *l'espace des paramètres, S est un voisinage de 0 dans un espace $\mathbb{R}^q$*
2. *pour tout $s \in S$, $G_s \in \mathcal{F}$*
3. *$G_0 = g$*
4. *G est transversale sur P le long de $K \times S$.*

Proposition B.3 ([**Lau95**], **Théorème 4.3**). — *Si la famille $\mathcal{F}$ est localement transversale, alors pour tout compact $K \subset M$, l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ qui sont des applications transversales sur P le long de K est un ouvert dense de $\mathcal{F}$*

On commence par étudier les rayons qui tournent dans la concavité du bord. Ces rayons ne peuvent quitter le bord qu'en des points où la courbure s'annule ou en des points qui sont des coins. D'après l'hypothèse de contrôle direct des demi rayons tangents aux coins, il suffit d'étudier sur un intervalle de temps de longueur T_0 les demi-rayons qui sont issus pour $t = 0$ des points du bord où la courbure s'annule. Ces points sont en nombre fini et les demi-rayons correspondant forment un ensemble de dimension 1. Il est donc facile de voir que génériquement on peut assurer que ces demi-rayons ne rencontrent aucun coin.Si Ω_0 vérifie cette dernière propriété, on en déduit par compacité le lemme suivant :

LEMME B.4. — *Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $\Psi \in C^\infty_V\left(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2\right)$ est assez proche (pour la topologie C^∞) de l'identité, aucun rayon de Ω_Ψ ne peut rencontrer deux coins sans être contrôlé entre temps par $\Psi(\Gamma)$ s'il a aussi au moins N_0 points de reflexion sur le bord entre ces deux coins*

(l'argument pour démontrer ce résultat est simplement que si le rayon n'est pas contrôlé entre les deux coins, alors la distance le long du rayon entre les deux coins est majorée par T et donc, si le nombre de reflexion de ce rayon, N, est assez grand, le rayon est proche d'un rayon qui tourne dans la concavité et est donc contrôlé).

On suppose maintenant que l'ouvert Ω_0 vérifie le lemme B.4. On va montrer que génériquement les rayons issus d'un coin qui en rencontrent un autre avant d'être contrôlés par $\Psi(\Gamma)$ ne sont jamais tangents au bord. On notera $\Psi_N(x,\xi,t)$ le point sur le N-rayon (dans Ω_0) issu de (x,ξ), situé à distance t (le N-rayon est défini comme le rayon excepté qu'on oublie les reflexions à partir de la $N+1^{\text{iéme}}$, étant entendu qu'on ne s'intéressera à cette application que dans le cas où le rayon correspondant n'a pas de point de contact tangentiel avec le bord avant d'avoir eu N reflexions sur le bord.). En toute rigueur, ce point n'est pas bien défini puisqu'à chaque fois qu'on rencontre un coin, il y a deux manières de prolonger le rayon selon qu'on choisit une ou l'autre des demi tangentes. Néanmoins, si la longueur du rayon est bornée, le nombre de coins rencontrés l'est aussi et donc aussi le nombre de choix faits, donc pour notre propos tout se passera comme s'il n'y avait qu'un seul choix possible. Pour simplifier l'exposition, nous nous placerons par la suite dans le cas plus simple où l'ouvert est de classe C^∞ et où les points K_i sont des points du bord. Néanmoins, la démonstration que nous donnons s'adapte, modulo quelques complications techniques, au cas initial. On notera $\Psi_{N,i}$ la restriction de l'application Ψ_N à l'ensemble $\{K_i\}\times\mathbb{S}^1$ et $\mathcal{T}_{N,i}=\left(\Psi_{N,i},\frac{d\Psi_{N,i}}{dt}\right)$ l'application obtenue à partir de $\Psi_{N,i}$ en rajoutant la direction finale du rayon. Cette application est de classe C^∞ en dehors des points dont l'image par $\Psi_{N,i}$ est un point de reflexion et tant que le rayon n'a pas eu entre l'instant de départ du coin K_i et t de contact tangentiel avec le bord. On notera $S_{N,i}$ l'ensemble des directions et des temps $(\xi,t)\in\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ tels que le rayon issu de K_i dans la direction ξ à un point de premier contact tangentiel avec le bord au temps t, après avoir fait N reflexions et avant d'avoir rencontré un autre coin, et n'est pas contrôlé avant de rencontrer un autre coin. D'après ce qui précède, la distance entre deux points de contact avec le bord le long de tout rayon de ce type est minorée (puisque un tel rayon ne peut pas être proche d'un rayon qui tourne dans la concavité du bord). Il existe donc un voisinage compact $S^{N,i}$ de $S_{N,i}$ sur lequel l'application $\mathcal{T}_{N,i}$ est de classe C^∞ (puisque elle est régulière en dehors des points de reflexion). On choisira aussi ce voisinage assez petit de telle sorte que cette régularité reste vérifiée pour tout ouvert Ω assez proche de Ω_0. On peut aussi supposer (puisque les rayons issus de $S_{N,i}$ n'ont pas rencontré d'autre coin avant leur contact tangentiel avec le bord qui se fait nécessairement en un point distinct des coins d'après l'hypothèse de contrôle direct des rayons tangents) que les rayons issus de $S^{N,i}$ ne rencontrent pas un petit voisinage du coin K_i, V_i. On considère une famille de déformations de l'ouvert Ω_0 de la forme

$$\Omega_a = \{y = x + a_1 f(x)\, n(x) + a_2 g(x)\, t(x) \;\; ; \;\; x \in \Omega_0\} \tag{B.2}$$

où $n(x)$ et $t(x)$ désignent respectivement les normales et les tangentes au bord au point x (avec un choix local arbitraire de l'orientation), $a = (a_1, a_2)$ désigne un paramètre variant dans un petit voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$, f et les fonctions g sont de classe C^∞ et supportées dans V_i. Il est facile de définir une famille $\Psi_a \in C_V^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ dépendant de manière C^∞ du paramètre a telle que $\Omega_{\Psi_a} = \Omega_a$ et $\Psi_a(K_j) = K_j + a_1 f(K_j)\, n(K_j) + a_2 g(K_j)\, t(K_j)$. On définit aussi l'application $\mathcal{T}_{N,i,a} : T^{N,i} \to \mathbb{R}^2$ comme l'application $\mathcal{T}_{N,i}$ sauf que le point de départ du rayon est le point $\Psi_a(K_i)$. En utilisant (à ouvert fixé mais en faisant aussi varier le point de départ du rayon) que le flot bicaractéristique est un difféomorphisme, il est alors très facile de voire que pour tout $(\xi_0, t_0) \in T^{N,i}$, l'application $(a, \xi, t) \mapsto \mathcal{T}_{N,i,a}(\xi, t)$ est un diffomorphisme local d'un voisinage de $(0, \xi_0, t_0)$ sur un voisinage de $\mathcal{T}_{N,i}(\xi_0, t_0)$. La famille $\mathcal{F} = \mathcal{T}_{N,i}^{\Psi}$ des applications obtenue en prenant toutes les déformations de l'ouvert Ω_0 possibles, assez proches de l'identité est donc localement transversale sur $T\partial M$ le long de $T^{N,i}$. L'application $\mathcal{T}_{N,i}$ est donc génériquement transversale sur $T\partial M$ le long de $T^{N,i}$ ce qui implique que génériquement les points de premier contact tangentiels des rayons avec le bord sont isolés, donc en nombre fini. Il est donc facile d'assurer que génériquement ces rayons ne rencontrent pas d'autre coin avant d'être contrôlés. Il suffit en effet pour cela de déformer l'ouvert aux points de contact ultérieurs du rayon avec le bord.

B.2. Etude des points de contact transverse avec le bord. — On suppose dans toute la suite que l'ouvert Ω_0 est tel que pour tout Ψ assez proche de l'identité, aucun rayon de Ω_Ψ issu d'un coin ne peut être tangent au bord puis rencontrer un autre coin sans être contrôlé géométriquement par $\Psi(\Gamma)$ entre temps.

DÉFINITION B.5. — *On dira qu'un rayon issu d'un coin dans la direction ξ_0 et rencontrant un coin, $K = \Psi(K_0, \xi_0, t_0)\,, t_0 \neq 0$ n'est pas focalisant du premier coin sur le second si*

- *soit il est contrôlé entre ces deux coins*
- *soit il n'a que des points de reflexion transverses, en nombre N et la différentielle par rapport à ξ, t de l'application Ψ_N au point (K_0, ξ_0, t_0) est bijective, ce qui implique que l'application $\Psi_N(K_0, \cdot, \cdot)$ est un difféomorphisme*

d'un voisinage de (ξ_0, t_0) *sur un voisinage de* K *et montre qu'il n'y a pas focalisation d'un voisinage de* (ξ_0, t_0) *sur le coin* K.

Nous allons montrer la proposition suivante :

PROPOSITION B.6. — *Génériquement au voisinage de* Ω_0, *tout rayon rencontre au plus deux coins sans être contrôlé et est non focalisant d'un coin sur l'autre.*

Avant de démontrer ce résultat, on va montrer qu'il implique qu'au voisinage de l'ouvert Ω_0 les ouverts sont génériquement non focalisants. En effet, s'il existe un coin K_1 tel qu'il existe une infinité de directions initiales, ξ_n pour lesquelles le rayon issu de K_1 dans la direction ξ_n rencontre un autre coin avant d'être contrôlé, alors ce coin est rencontré pour des temps compris entre $d_{\min}$ (la distance minimale entre deux coins) et T_0 (le temps de contrôle). Par compacité de la sphère S^1, il existe donc une direction ξ_0 telle que le rayon γ issu de (K_0, ξ_0) est tel que

1. il connecte le coin K_0 à un coin K_1 (éventuellement égal à K_0 mais qui est nécessairement unique puisqu'un rayon ne peut pas rencontrer plus de deux coins), à un instant qu'on notera t_1, après N_1 reflexions
2. il est non focalisant
3. il existe une nombre infini de directions ξ_n distinctes, qui convergent quand $n \to +\infty$ vers ξ_0, telles que les rayons associés, γ_n vont du coin K_0 sur un coin K_n.

Nécessairement, sauf pour un nombre fini de directions, on a $K_i = K_1$ (puisque sinon, par passage à la limite, le rayon γ rencontrerait un troisième coin). Le même argument montre que les instants t_n pour lesquels le rayon γ_n rencontre le coin K_1 tendent vers t_1 (puisque sinon, le rayon γ rencontrerait le coin K_1 à deux instants différents). On a aussi nécessairement $K_1 = \Psi_{N,0}(K_0, \xi_n)$, c'est à dire que ces rayons font exactement N reflexions entre les deux coins (on pourrait éventuellement en faire une de plus, disparaissant par passage à la limite, c'est à dire que le point de $N+1^{\text{ième}}$ reflexion tendrait vers le coin, K_1 et donc disparaitrait à la limite, mais ce n'est pas possible puisque le rayon γ_n ne peut pas être proche d'un rayon tangent au bord près des coins). Finalement, le fait que le rayon γ_0 soit non focalisant donne la contradiction attendue.

Pour démontrer la proposition B.6 nous allons faire une récurrence sur le nombre de reflexions (transverses) entre deux coins consécutifs (sans contrôle entre temps). On sait que ce nombre est borné par le nombre N_0 de la page 23. On va démontrer par récurrence les lemmes suivants, pour $N \in \mathbb{N}$.

LEMME B.7 **(N)**. — *Les rayons connectant un coin à un autre et faisant entre ces deux coins au plus* N *reflexions sont génériquement non focalisant d'un* *coin sur l'autre (c'est à dire que, si $\Psi_{N,i}(\xi_0, t_0) = K_j \in \mathcal{K}$, l'application $\Psi_{N,i}$ est un difféomorphisme d'un voisinage de $(\xi_0, t_0) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_t$ sur un voisinage de $K_j \in \mathbb{R}^2$) et, génériquement, il n'existe pas de rayon connectant trois coins avec entre chacun des coins consécutifs au plus N reflexions.*

La première partie du lemme B.7 (0) est vraie puisque les rayons n'ayant pas de point de reflexion ne sont jamais focalisant. Pour démontrer la deuxième partie, on remarque que pour éliminer les rayons qui vont d'un coin sur un autre puis directement sur un suivant, il suffit d'imposer que trois coins ne sont jamais alignés, puis, cette condition étant vérifiée, d'imposer que les demi-tangentes aux coins K_i ne correspondent pas aux directions (en nombre fini) qui précisement permettent au rayon venant sans reflexion d'un coin K_j d'aller du coin K_i vers le coin K_k, sans reflexion. Il est donc clair que ces conditions sont génériquement vérifiées.

Supposons le lemme B.7 (N) vrai. On peut donc supposer que l'ouvert Ω_0 et les ouverts assez proches vérifient les propriétés jusqu'au rang (N). On note S_i un compact de la sphère unité $\mathbb{S}^1$ tel que aucun rayon issu du coin K_i dans une direction $\xi_i \in S_i$, de longueur inférieure à T_0, n'est tangent au bord de l'ouvert, et tel que tous les rayons issus de K_i dans une direction $\xi_i \notin S_i$ sont contrôlés avant de rencontrer un autre coin. On supposera aussi que ces propriétés restent vérifiées pour Ω assez proche de Ω_0. On notera $\Sigma_i^{N+1} \subset S_i \times \mathbb{R}_t$ l'ensemble des $(\xi, t > 0)$ tels que le rayon issu de K_i à $t = 0$ rencontre un coin K_j au temps t n'est pas contrôlé entre ces deux coins, et a eu exactement $N+1$ points de reflexion entre ces deux coins. Il est clair que Σ_i^{N+1} est un ensemble compact. En effet, la seule chose à vérifier est que toute limite uniforme de rayon ayant exactement $N+1$ points de reflexion entre deux coins en est aussi un, or puisqu'on a éliminé les rayons tangents, deux points de reflexion consécutifs ne peuvent pas être arbitrairement proche l'un de l'autre, il ne peut donc pas y avoir de saut sur le nombre de points de reflexion. On notera $\widetilde{\Sigma}_i^{N+1}$ un voisinage ouvert de Σ_i^{N+1} ne contenant aucun couple (ξ, t) correspondant à un rayon issu de K_i qui rencontre un autre coin K_j au temps t, qui n'est pas contrôlé et a au moins $N+2$ points de reflexion entre ces deux coins.

On considère les applications

$$F_{\Psi,N+1,i} \ : \ \begin{array}{ccc} M = \widetilde{\Sigma}_i^{N+1} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,\xi,t) & \mapsto & \Psi^{-1}(\Psi_{N+1,i}(\xi,t)) \end{array} \tag{B.3}$$

Pour montrer la première partie du lemme B.7 (N+1), il suffit de démontrer que cette application est génériquement un difféomorphisme local. On considère la famille $\mathcal{F}$ des fonctions $F_{\Psi,N+1}$ obtenue quand on fait varier Ψ. On va vérifier que pour tout point $X \in \widetilde{\Sigma}_i^n$ il existe un voisinage K de x, un voisinage S de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et une application $G \ : M \times S \to \mathbb{R}^2$ telle que pour tout $s \in S$, $G_s \in \mathcal{F}$, $G_0 = F_{\mathrm{Id},N+1}$ et telle que la famille G est transversale sur $\{K_j\}$ le long de $K \times S$. On en déduira que pour un ensemble ouvert dense dans $\mathcal{F}$ (donc pour un ouvert dense de fonctions Ψ), l'application $F_{\Psi,N+1}$ est transversale sur $\{K_i\}$ le long de Σ_i^{N+1}, ce qui dit précisement que le rayon n'est pas focalisant.Pour vérifier que l'application G est transversale, il suffira de vérifier que sa différentielle (par rapport à toutes les variables) est surjective, ce qui est assez facile à réaliser, si l'espace des variables s est de dimension assez grande.

Soit X un tel point. Si le rayon ne rencontre pas un autre coin il n'y a rien à démontrer. S'il le rencontre après k ; $k \leq N$ réflexions, d'après l'hypothèse de récurrence, il est non focalisant. S'il le rencontre après $N+1$ reflexions, d'après l'hypothèse de récurrence, il ne rencontre aucun coin entre temps (en particulier il ne rencontre pas le coin initial). Il est alors facile de voir que toute famille de déformations indicée par $s \in S \subset \mathbb{R}^2$ du type (B.2) consistant à déplacer le coin initial $K \mapsto K + s$ avec une déformation localisée dans un voisinage que le rayon ne peut rencontrer éventuellement qu'au départ et à l'arrivée (dans le cas où $K_j = K_i$) convient.

Il reste à démontrer la deuxième partie du lemme B.7 (N+1). Pour cela, on suppose que la première partie est vérifiée (c'est possible puisque elle est génériquement vérifiée). On en déduit que les rayons primitifs qui vont d'un coin à un autre en faisant entre temps un nombre inférieur à $N+1$ de réflexions sans être contrôlés sont en nombre fini. Imposer qu'on ne puisse pas en enchainer un à la suite de l'autre revient donc à éliminer un nombre fini de directions de demi-tangences, ce qui est génériquement possible et démontre le lemme B.7 (N+1). Enfin, puisque le nombre de reflexions (transverses) entre deux coins consécutifs (sans contrôle entre temps) est borné, les lemmes B.7 (k) impliquent la proposition B.6

Références

[BLR92] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary. *Siam Journal of Control and Optimization*, 305 :1024–1065, 1992.

[Bur97a] N. Burq. Contrôle de l'équation des ondes dans des ouverts peu réguliers. *Asymptotic Analysis*, 14 :157–191, 1997.

[Bur97b] N. Burq. Pôles de diffusion engendrés par un coin. *Asterisque*, 242, 1997.

[GL93] P. Gérard and G. Lebeau. Diffusion d'une onde par un coin. *Journal of the American Mathematical Society*, 6 :341–423, 1993.

[Gri89] P. Grisvard. Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes en présence de singularités. *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 68 :215–259, 1989.

[Hör85] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*, volume 274 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer Verlag, 1985.

[Lau95] F. Laudenbach. *Topologie Différentielle*. Cours de l'Ecole Polytechnique. Ecole Polytechnique, 1995. Majeure de Mathématiques.

[Leb94] G. Lebeau. Propagation des ondes dans les dièdres. *Prépublications de l'université de Paris-Sud*, 1994.

[Leb96] G. Lebeau. Equation des ondes amorties. In A. Boutet de Monvel and V. Marchenko, editors, *Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics*, pages 73–109. Kluwer Academic, The Netherlands, 1996.

[Lio88] J.L. Lions. *Contrôlabilité exacte. Perturbation et stabilisation des systèmes distribués*, volume 23 of *R.M.A.* Masson, 1988.

[MS78] R.B. Melrose and J. Sjöstrand. Singularities of boundary value problems I. *Communications in Pure Applied Mathematics*, 31 :593–617, 1978.

[Tho56] R. Thom. Les singularités des applications différentiables. *Annales de l'Institut Fourier*, 6 :43–87, 1956.

[Var] S. Varjabedian. Communication personnelle.

N. BURQ, Centre de Mathématiques, URA 169 du CNRS, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, FRANCE. et J.M. SCHLENKER, Université de Paris Sud, Mathématiques, Bât 425, URA 1169 du CNRS, 91405 Orsay, FRANCE.