Contrôle de l'équation des ondes dans des ouverts peu réguliers

N. Burq,
Centre de Mathématiques,
URA 169 du CNRS,
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex

1 Introduction

On s'intéresse, dans cet article au contrôle de l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet. Soient Ω, un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de classe C^2, Γ, un ouvert du bord de Ω, $\partial\Omega$, et $T > 0$ un réel. Soit $A(x) = (a^{i,j}(x)) \in C^2(\overline{\Omega})$ une métrique définie positive sur $\overline{\Omega}$ (c'est à dire que ${}^tA = A$ et qu'il existe $c > 0$ tel que $A \geq c\mathrm{Id}$. On notera $\widetilde{\Delta} = \sum_{i,j} \partial_i a_{i,j} \partial_j$ le Laplacien associé $((a_{i,j}) = (a^{i,j})^{-1})$. Pour $g \in L^2(]0,T[\times\Gamma)$, $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, le problème

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} (\partial_t^2 - \widetilde{\Delta})u & = & 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_t \\ u\mid_{\partial\Omega} & = & g \times 1_{\Gamma\times]0,T[} \\ u\mid_{t=0} = u_0 & & \partial_t u\mid_{t=0} = u_1 \end{cases}$$

possède une solution unique dans $C^0(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_t; H^{-1}(\Omega))$. Le problème de la contrôlabilité exacte est de savoir à quelles conditions sur Γ et T, pour tout $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, il existe $g \in L^2(]0,T[\times\Gamma)$ tel que la solution du système (1.1) vérifie $u\mid_{t\geq T} \equiv 0$. Dans le cas où Ω et les coefficients $a_{i,j}$ sont de classe C^∞, ce problème a été complètement résolu, dans un cadre plus général qu'une simple équation d'onde avec conditions de Dirichlet, par Bardos, Lebeau et Rauch [1] qui donnent des conditions essentiellement nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une telle fonction g. Dans le cas où l'ouvert Ω est seulement de classe C^2, et $A = \mathrm{Id}$, ce problème a été étudié par des méthodes de multiplicateurs par Lions [8] et résolu sous des hypothèses fortes sur Γ et T. Le but de cet article est de généraliser les résultats de Bardos, Lebeau et Rauch [1] au cas où l'ouvert Ω est peu régulier (de classe C^3). Le résultat principal obtenu est le suivant :
Théorème 1. — *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^3, $a_{i,j} \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, Γ, un ouvert de $\partial\Omega$ et $T > 0$ tels que (Γ, T) contrôle géométriquement l'ouvert Ω ; alors, pour tout $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, il existe $g \in L^2(]0,T[\times\Gamma)$ tel que la solution du système (1.1) vérifie $u\mid_{t\geq T} \equiv 0$. (On donnera la définition de la contrôlabilité géométrique dans la partie 2)*

Remarque 1.1. — *Sous les hypothèses du théorème 1, le symbole principal de l'équation des ondes* $p(x,t,\xi,\tau) = ^t \xi A(x)\,\xi - \tau^2$ *est une fonction de classe* C^2 *sur* $T^*\Omega$ *et son champ Hamiltonien* H_p *est donc de classe* C^1*. Pour définir la notion de contrôlabilité géométrique on utilise la propriété que* H_p *possède un flot, l'hypothèse minimale naturelle serait donc de supposer seulement* H_p *de classe Lipschitz, soit les coefficients de classe* $W^{2,\infty}$ *(A de classe* C^1 *avec une dérivé deuxième dans* L^∞*) ; de ce point de vue, notre résultat est presque optimal.*

Nous allons également donner une condition nécessaire pour la contrôlabilité exacte :
Théorème 2. — *S'il existe un point intérieur, x, et une direction,* ξ*, tels qu'aucun des rayons bicaractéristiques issus de x dans la direction* ξ *à l'instant* $t = 0$*, parcourus à vitesse 1, ne rencontre* $\overline{\Gamma} \times [0,T]$*, en particulier si* Ω *est de classe* C^k*, avec* $k \geq 3$*, et s'il existe un rayon bicaractéristique généralisé,* γ*, ne rencontrant pas* $\overline{\Gamma} \times [0,T]$ *et tel qu'en aucun point de* $\partial\Omega \times [0,T] \cap \gamma$*,* $\partial\Omega \times \mathbb{R}_t$ *n'a de contact d'ordre* $k-1$ *avec la géodésique de la métrique* $(a^{i,j})$ *tangente au rayon en ce point, alors la conclusion du théorème 1 est fausse.*

La régularité de l'ouvert Ω étant trop faible pour pouvoir utiliser les techniques microlocales standart, nous allons transformer notre problème de contrôlabilité exacte en un problème de localisation du support d'une mesure de défaut microlocale (ou H-mesure) de P. Gérard [2] et L. Tartar [10] ; puis on utilisera une équation vérifiée par cette mesure pour conclure. Pour des raisons techniques dues à la faible régularité du bord, nous avons préféré utiliser une version semi-classique, beaucoup plus maniable techniquement, de ces mesures de défaut. Les mesures de défaut semi-classiques ont été introduites par P. Gérard et E. Leichtnam [3] (voir aussi B. Helffer, A. Martinez et D. Robert [4]) et nous reprendrons d'ailleurs ligne à ligne leur stratégie pour établir l' équation vérifiée par notre mesure dans la partie 3.2.

Un autre intéret de notre approche, outre la faible régularité du bord, est que la preuve présentée est autocontenue, exceptés quelques résultats de géométrie. En contre-partie, nous ne pouvons traiter que le cas des conditions au bord de Dirichlet.

Le plan de l'article est le suivant : dans la deuxième partie, nous rappelons les notions géométriques nécessaires à l' énoncé des résultats et nous démontrons que si deux mesures positives, μ et ν, définies sur $T^*(\mathbb{R}^{n+1})$ et $T^*(\partial\Omega \times \mathbb{R}_t)$ respectivement, vérifient une certaine équation, alors le support de μ est réunion de rayons bicaractéristiques généralisés. Nous nous inspirerons pour cela des travaux de R.B. Melrose et J. Sjöstrand [9]. Dans la troisième partie, nous introduisons les mesures de défaut micro-locales semi-classiques d'une suite de solutions d'une équation d'ondes avec conditions de Dirichlet suivant [3] et montrons qu'elles vérifient l'équation étudiée précédemment. Dans la quatrième partie, nous réduisons le problème de la contrôlabilité à l'obtention d'estimations de type semi-classiques et nous démontrons les théorèmes 1 et 2. Enfin, nous avons rassemblé dans un appendice quelques résultats sur les rayons bicaractéristiques généralisés, classiques dans un cadre C^∞ et que nous redémontrons dans notre cadre moins régulier.

Pour conclure cette introduction, nous voulons rappeler que l'idée d'utiliser des mesures de défaut micro-locales pour étudier des problèmes de stabilisation est due à G. Lebeau [7], qui démontre que la mesure de défaut associée à une suite de solutions de l'équation des ondes est, dans un cadre C^∞, invariante par le flot bicaractéristique généralisé, et nous voulons remercier tout particulierement P. Gérard pour les discussions que nous avons eues avec lui sur cet article.

Table des matières

2 Géométrie

2.1 Rayons bicaractéristiques généralisés

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de classe C^3. Soient $M = \Omega \times \mathbb{R}_t$ et $T_b^*M = T^*M \cup T^*\partial M$. On munit ∂M de la métrique induite par celle de $\mathbb{R}^{n+1}$. On a une projection naturelle :

$$\pi \ : \ T^*\mathbb{R}^{n+1} \mid_{\overline{\Omega}} \rightarrow T_b^*M \tag{2.1}$$

On munit T_b^*M de la topologie induite. On note Σ_b la projection de la variété caractéristique de l' opérateur des ondes $\Box = \widetilde{\Delta} - \partial_t^2$ d' équation $\tau^2 = {}^t\xi A\,(x)\,\xi$, $p(x,t,\xi,\tau) = \tau^2 -{}^t\,\xi A\,(x)\,\xi$, le symbole principal de $\Box$ et $H_p = 2\tau\partial_t - 2^t\xi A\,(x)\,\partial_x + \sum_i\ {}^t\xi\partial_{x_i}A\,(x)\,\xi\partial_{\xi_i}$ son champ Hamiltonien. On définit les sous-ensembles de $T^*\partial\Omega$, elliptiques $(\mathcal{E})$, hyperbolique $(\mathcal{H})$ et glissant $(\mathcal{G})$ par :

$$\#\{\pi^{-1}(\rho) \cap \mathrm{car}(\Box)\} = \begin{array}{l} 0 \ \text{ si } \rho \in \mathcal{E} \\ 1 \ \text{ si } \rho \in \mathcal{G} \\ 2 \ \text{ si } \rho \in \mathcal{H} \end{array} \tag{2.2}$$

L'application π permet d' identifier $\mathcal{G}$ à un sous ensemble de $T^*\mathbb{R}^{n+1}$. En tout point $x \in \partial\Omega$, il existe une fonction $\varphi(x)$ de classe C^3 telle qu'au voisinage de x, $\nabla\varphi \neq 0$ et on a

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \varphi(x) > 0\} \tag{2.3}$$

DÉFINITION 2.1. — *On dit que le point $\rho \in \mathcal{G}$ est strictement diffractif si et seulement si $H_p^2(\varphi)(\rho_0) > 0$, ce qui revient à dire dans le cas où $A = \mathrm{Id}$ que Ω est strictement concave en $x(\rho)$ dans la direction $\xi(\rho)$. On rappelle que cette notion est intrinsèque et on notera $\mathcal{G}_d$ l'ensemble des points strictement diffractifs.*

DÉFINITION 2.2. — *On dit qu'un point $\rho \in T^*(\mathbb{R}^{n+1})\,|_{\partial M}$ est non diffractif si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $-\varepsilon < s < \varepsilon$ tel que le point $\gamma(s)$ sur la courbe intégrale de H_p issue de ρ_0 pour $s = 0$, parcourue à vitesse 1 n'est pas dans $\overline{\Omega}$.*

DÉFINITION 2.3. — *On appellera rayon bicaractéristique généralisé toute application continue :*

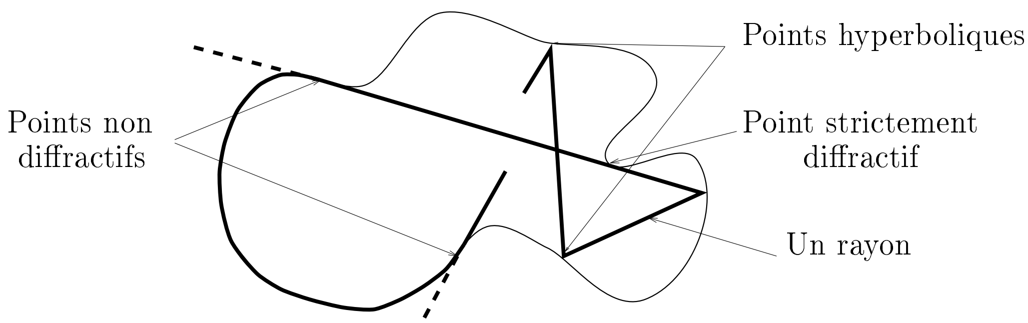
$$\mathbb{R} \supset I \smallsetminus B \ni s \mapsto \gamma(s) \in T^*M \cup \mathcal{G} \subset T^*\mathbb{R}^{n+1}$$

telle que I est un intervalle de $\mathbb{R}$, B est un ensemble de points isolés, pour tout $s \in I \smallsetminus B$, $\gamma(s) \in \Sigma_b$ et γ est différentiable (comme application à valeurs dans $T^*\mathbb{R}^{n+1}$) et :

1. *Si $\gamma(s_0) \in T^*M \cup \mathcal{G}_d$, on a $\dot\gamma(s_0) = H_p(\gamma(s_0))$ (H_p est le champ de vecteur Hamiltonien de p).*
2. *Si $\gamma(s_0) \in \mathcal{G} \smallsetminus \mathcal{G}_d$, on a $\dot\gamma(s_0) = H_p^G(\gamma(s_0))$ ($H_p^G = H_p + (H_p^2\varphi/H_\varphi^2 p)H_\varphi$, où φ vérifie (2.3) est le champ de vecteur Hamiltonien glissant de p).*
3. *En tout point $s_0 \in B$, $\gamma(s_0 \pm 0)$ existent et sont les deux points distincts de la même fibre hyperbolique de l'application π.*

On peut donc considérer γ comme une application continue sur I à valeurs dans T_b^*M.

DÉFINITION 2.4. — *On appellera rayon bicaractéristique fermé, l'adhérence dans $T^*\mathbb{R}^{n+1}$ d'un rayon bicaractéristique défini comme précedemment.*



Projection sur l'espace des x d'un rayon
bicaractéristique généralisé
dans le cas où $A = \mathrm{Id}$

REMARQUE 2.5. — *Au voisinage de tout point $\gamma(s_0) \in T^*\Omega$, la projection sur l'espace Ω du rayon γ est un arc de géodésique de la métrique $(a_{i,j})$.*

Définition 2.6. — *Soient Γ un ouvert de $\partial\Omega$ et $T > 0$. On dit que (Γ, T) contrôle géométriquement l'ouvert Ω si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ et K un compact de Γ tel que tout rayon bicaractéristique généralisé rencontre $K \times [\varepsilon, T-\varepsilon]$ en un point non diffractif.*

Nous rappelons les résultats suivants, dus à Melrose et Sjöstrand [9] dans le cas C^∞ et dont on trouvera une démonstration dans l'appendice (corollaire A.4 et proposition A.6) :
Proposition 2.7. — *Par tout point $(x_0, t_0, \xi_0, \tau_0) \in T_b^* M$, il passe au moins un rayon bicaractéristique généralisé, qui est obtenu au voisinage de ρ_0 comme limite uniforme de rayons n'ayant que des points de reflexions transverses avec le bord. Il en passe exactement un (localement) si au voisinage de x_0, l'ouvert Ω est de classe C^k et n'a pas avec la droite de vecteur directeur ξ_0 de contact d'ordre maximal (c'est à dire d'ordre $k-1$). Tout rayon bicaractéristique généralisé peut se prolonger en un rayon défini sur $I = \mathbb{R}$ (cette dernière propriété est due au fait que nous étudions une équation d'ondes).*

2.2 Géométrie et mesures

L'objet principal de cette partie est la démonstration du résultat suivant :
Théorème 3. — *Soient μ et ν deux mesures positives sur $T^*(\mathbb{R}^{n+1})$ et $T^*(\partial M)$ respectivement telles que*

1. *Il existe $0 < \alpha < 1$ tel que le support de μ est inclu dans l'intersection de l'ensemble $\mathcal{C} = \{|\tau|^2 = {}^t\xi A(x)\xi \in [\alpha, \alpha^{-1}]\}$ avec $T^*\mathbb{R}^{n+1}|_{\overline{\Omega}}$.*
2. *Si on note pour $\rho \in \mathcal{H} \cup \mathcal{G}$, $\xi_\pm(\rho)$ les deux points (éventuellement confondus) de $T^*\mathbb{R}^{n+1}$ se projetant sur ρ et $n(x)$ la normale extérieure à l'ouvert Ω en x, on a, au sens des distributions,*

$$ {}^t H_p(\mu) = \int_{\rho \in \mathcal{H}\cup\mathcal{G}} \frac{\delta(\xi - \xi_+(\rho)) - \delta(\xi - \xi_-(\rho))}{\langle \xi_+ - \xi_-, n(x(\rho))\rangle} \nu(d\rho). \tag{2.4}$$

Alors le support de la mesure μ est réunion de rayons bicaractéristiques généralisés fermés.
Corollaire 2.8. — *Si on suppose de plus que tout rayon bicaractéristique généralisé fermé rencontre le bord $\partial\Omega \times \mathbb{R}_t$ en un point non diffractif qui n'est pas dans le support de la mesure ν alors $\mu \equiv 0$.*

Pour démontrer le corollaire, il suffit de vérifier qu'au voisinage d'un tel point diffractif, ρ_0, $\mu \equiv 0$; or comme $\nu \equiv 0$ au voisinage de $\pi(\rho_0)$, la mesure μ est au voisinage de ce point invariante par le flot bicaractéristique du champ Hamiltonien H_p défini sur $T^*\mathbb{R}^{n+1}$. Le rayon issu de ρ_0 sort d'après l'hypothèse "ρ_0 non diffractif" de $T^*\mathbb{R}^{n+1}|_{\overline{\Omega}}$ donc rentre dans le complémentaire du support de μ d'après hypothèse 1, d'où le résultat.

Pour démontrer le théorème 3, nous allons montrer que le support de la mesure μ vérifie les hypothèses de la proposition 2.9. On va étudier cet ensemble au voisinage d'un point $\rho_0 \in T^*(\mathbb{R}^{n+1}) \mid_{\overline{\Omega}}$. On distingue donc quatre cas :

$$\rho_0 \in T^*M \tag{1}$$

$$\pi(\rho_0) \in \mathcal{H} \tag{2}$$

$$\pi(\rho_0) \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_d \tag{3}$$

$$\pi(\rho_0) \in \mathcal{G}_d \tag{4}$$

Dans le cas (1), il est clair d'après l'équation vérifiée par la mesure μ qu'elle est au voisinage de ρ_0 invariante par le flot Hamiltonien. Pour étudier les trois autres cas, nous allons faire un changement de coordonnées. Soit $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^{n-1};\mathbb{R})$ telle qu'au voisinage de x_0 on a

$$\Omega = \{x_n > \varphi(x')\} \tag{2.5}$$

Soient $s = x_n - \varphi(x')$ et $y = x' - x'_0$. Dans ce nouveau système de coordonnées, on a, avec $B(y,s) = A(y + x'_0, s + \varphi(y + x'_0))$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} & \Omega = \{s > 0\}, & \\ & p(t,s,y,\tau,\sigma,\eta) = \tau^2 - (\eta - \sigma\nabla\varphi, \sigma)\, B(y,s)\ {}^t(\eta - \sigma\nabla\varphi, \sigma) & \\ \mathcal{H} & = & \{(t, s=0, y, \tau, \sigma, \eta);\ 0 < (-\nabla\varphi, 1)\, B(y,s)\ {}^t(\eta, 0)^2 \\ & & + \Big(\tau^2 - (\eta,0)\, B(y,s)\ {}^t(\eta,0)\Big) \times (-\nabla\varphi,1)\, B(y,s)\ {}^t(-\nabla\varphi,1)\}, \\ \mathcal{G} & = & \{(t, s=0, y, \tau, \sigma, \eta);\ 0 = (-\nabla\varphi, 1)\, B(y,s)\ {}^t(\eta, 0)^2 \\ & & + \Big(\tau^2 - (\eta,0)\, B(y,s)\ {}^t(\eta,0)\Big) \times (-\nabla\varphi,1)\, B(y,s)\ {}^t(-\nabla\varphi,1)\}, \end{array}\right. \tag{2.6}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} H_p & = & 2\tau\dfrac{\partial}{\partial t} + 2\,(-\nabla\varphi,1)\, B(y,s)\ {}^t(-\eta + \sigma\nabla\varphi, -\sigma)\,\dfrac{\partial}{\partial s} \\ & & +2\,(\sigma\nabla\varphi - \eta, -\sigma)\, B(y,s)\ {}^t\left(\dfrac{\partial}{\partial y}, 0\right) \\ & & +\,(\eta - \sigma\nabla\varphi, \sigma)\, B(y,s)\ {}^t\left(-\sigma \mathrm{Hess}\varphi\dfrac{\partial}{\partial \eta}, 0\right) \\ & & +\,(\eta - \sigma\nabla\varphi, \sigma)\, \partial_y B(y,s)\, (\eta - \sigma\nabla\varphi, \sigma)\cdot\dfrac{\partial}{\partial \eta} \\ & & +\,(\eta - \sigma\nabla\varphi, \sigma)\, \partial_s B(y,s)\ {}^t(\eta - \sigma\nabla\varphi, \sigma)\,\dfrac{\partial}{\partial \sigma} \\ H_p(s) & = & 2\,(-\nabla\varphi,1)\, B(y,s)\ {}^t(-\eta + \sigma\nabla\varphi, -\sigma) \\ H_s^2(p) & = & -2\,(-\nabla\varphi,1)\, B(y,s)\ {}^t(-\nabla\varphi,1) \\ H_p^G & = & H_p + \dfrac{H_p^2(s)}{H_s^2(p)} H_s. \end{array}\right. \tag{2.7}$$

On notera

$$\sigma_0(y,\eta) = -\frac{(-\nabla\varphi,1)\, B(y,s)\ {}^t(\eta,0)}{(-\nabla\varphi,1)\, B(y,s)\ {}^t(-\nabla\varphi,1)}$$

et

$$H_r \;=\; H_p \mid'_{\substack{s=0\\ \sigma=\sigma_0}} . \tag{2.8}$$

où l'exposant $'$ indique qu'on a supprimé les composantes sur ∂_s et ∂_σ.

On vérifie facilement que dans ce système de coordonnées, les champs H_p, H_p^G et H_r sont de classe C^1. L'application qui identifie $\mathcal{G}$ avec son image réciproque par la projection (2.1) est :

$$(y,t,\eta,\tau)\in\mathcal{G}\mapsto(s=0,y,t,\sigma=\sigma_0,\eta,\tau)\in T^*\mathbb{R}^{n+1}. \tag{2.9}$$

La variété caractéristique $\mathcal{C}$ est donnée par:

$$\begin{aligned}\mathcal{C} \;=\; &\{(t,s,y,\tau,\sigma,\eta);\; 0\le\Delta\stackrel{\text{def}}{=}\left[(-\nabla\varphi,1)\,B\,(y,s)\;{}^t\,(\eta,0)\right]^2\\ &+\left(\tau^2-(\eta,0)\,B\,(y,s)\;{}^t\,(\eta,0)\right)\times(-\nabla\varphi,1)\,B\,(y,s)\;{}^t\,(-\nabla\varphi,1)\},\end{aligned}$$

et sur $\mathcal{C}$, on a :

$$\sigma=\sigma_0\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{(-\nabla\varphi,1)\,B\,(y,s)\;{}^t\,(-\nabla\varphi,1)} \tag{2.10}$$

Nous rappelons le résultat suivant dont nous donnons une démonstration dans l'appendice (proposition A.7), qui sera d'une importance cruciale par la suite

PROPOSITION 2.9. — *Soit $F\subset T^*\mathbb{R}^{n+1}$ un sous ensemble fermé de la variété caractéristique inclu dans $T^*\mathbb{R}^{n+1}\mid_{\overline{\Omega}}$ tel que*

1. *Si $\rho\in T^*\Omega$, F contient un voisinage de ρ dans la bicaractéristique passant par ρ.*
2. *Si $\rho\in\mathcal{H}\cup\mathcal{G}_d$, F contient un voisinage de ρ dans la bicaractéristique brisée fermée passant par ρ.*
3. *Pour tout compact K de $F\cap(\mathcal{G}\setminus\mathcal{G}_d)$ et $\varepsilon>0$ assez petit, il existe $\delta>0$ et $\gamma_\varepsilon(t,\gamma_0)\in F$, $-\delta\le t\le\delta$, $\gamma_0\in K$ tels que*

   $$\mid(\gamma_\varepsilon(t,\gamma_0)-\gamma_0)/t-H_p^G(\gamma_0)\mid'<\varepsilon;\qquad 0<|t|\le\delta. \tag{2.11}$$

   où $\mid\;\mid'$ désigne la norme usuelle dont on supprime la coordonnée σ,

alors F est réunion de rayons bicaractéristiques fermés généralisés (c'est à dire que par tout point de F il passe un rayon bicaractéristique généralisé fermé défini sur $I=\mathbb{R}$, qui est inclu dans F).

Nous pouvons maintenant aborder l'étude du cas (2). Nous reprenons des arguments de [3] On notera $S:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ la symétrie orthogonale par rapport au plan tangent au bord de l'ouvert (dans notre système de coordonnées, $S(y,t,\sigma,\eta,\tau)=(y,t,2\nabla\varphi\cdot\eta/(1+\mid\nabla\varphi\mid^2)-\sigma,\eta,\tau)$. Il est clair que le second membre de (2.4) est, sur $\mathcal{H}$, une mesure antiinvariante par l'involution S. D'autre part, comme sur Ω, la mesure μ vérifie ${}^tH_p\,(\mu)=0$, comme, au voisinage de tout point $\rho_0\in\mathcal{H}$, $T^*\mathbb{R}^{n+1}\mid_{\partial M}$ est non caractéristique pour le champ de vecteur H_p, la mesure μ possède une trace sur $T^*\mathbb{R}^{n+1}\mid_{\partial M}$ au voisinage de tout point $\rho_0\in\mathcal{H}$, $\mu\mid_{\partial M}$ qui vérifie

$$\left({}^tH_p\mu\right)=-H_p\cdot n(x)\mu\mid_{\partial M}\otimes\delta_{\partial M}. \tag{2.12}$$

Comme $H_p \cdot n \circ S = -H_p \cdot n$, on en déduit que $\mu \mid_{\partial M}$ est invariante par l'involution S et revenant à l'équation vérifiée par μ à l' intérieur, on voit que si une des deux demi bicaractéristiques (dont on exclue les points $\pi^{-1}(\rho_0) = \rho_0^{\pm}$) issues de $\rho_0 \in \mathcal{H}$ ne rencontre pas, au voisinage de ρ_0, le support de μ alors l'autre non plus et $\mu \mid_{\partial M}$ est identiquement nulle au voisinage de ρ_0, donc, revenant à l'équation (2.12), on voit que μ est identiquement nulle , au voisinage de $\rho_0^{\pm}$, ce qui démontre le

LEMME 2.10. — *Soit $\rho_0 \in \mathcal{H}$. Alors, si l'une des deux demi bicaractéristiques fermées issues de ρ_0 rencontre le support de μ, au voisinage de ρ_0, alors les demi-bicaractéristiques fermées issues de ρ_0 sont inclues, au voisinage de ρ_0 dans ce support.*

L'étude des cas (3) et (4) est très proche de celle de [9] ; les seules différences étant que nous ne pouvons pas utiliser de système de coordonnées géodésiques qui consommerait trop de régularité, mais qu'en contre-partie, l'utilisation des mesures de défaut nous permet de ne pas avoir à quantifier les symboles que nous utilisons, ce qui permet de travailler avec des symboles seulement de classe C^0. On commence par l'étude du cas (3). On notera (z, ζ) le point courant sur $T^*\partial M$.

LEMME 2.11. — *Soit $(z_0, \zeta_0) \in \mathcal{G}$, alors il existe K, un compact de $\mathcal{G}$ tel que $(z_0, \zeta_0) \in \mathring{K}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$, tel que pour tout $(z_1, \zeta_1) \in K$, s'il existe $\delta \in (0, \delta_\varepsilon)$ tel que,*

$$s < \delta\varepsilon, \ \mid (z, \zeta) - (z_1, \zeta_1) - \delta H_r(z_1, \zeta_1) \mid < \delta\varepsilon \Rightarrow \forall \sigma \in \mathbb{R}(s, z, \sigma, \zeta) \notin supp(\mu)$$

alors $\forall \sigma \in \mathbb{R}, \ (0, z_1, \sigma, \zeta_1) \notin supp(\mu)$.

Le champ de vecteur H_r, de classe C^1, ne s'annule pas au point (z_0, ζ_0), on peut donc supposer quitte à réstreindre K qu'il existe sur K un système de coordonnées (x_1, x'), de classe C^1 tel que $H_r = \frac{\partial}{\partial x_1}$ et $(z_0, \zeta_0) = (0, 0)$. Soient (x_1^1, x_1') les coordonnées du point (z_1, ζ_1).

Posons $\chi(u) = 1_{(1-u)>0} \exp(1/(u-1))$. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, telle que

$$f \equiv 0 \text{ sur }]-\infty, 1/2] \tag{2.13}$$
$$f' > 0 \text{ sur }]1/2, +\infty[, \tag{2.14}$$
$$f'' \geq 0 \text{ sur }]1/2, +\infty[, \tag{2.15}$$
$$f(x) > x \text{ pour } x \geq 1 \tag{2.16}$$

Soit $\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$, telle que

$$\beta \equiv 0 \text{ sur }]-\infty, -1], \tag{2.17}$$
$$\beta' > 0 \text{ sur }]-1, -1/2[, \tag{2.18}$$
$$\beta \equiv 1 \text{ sur } [-1/2, +\infty[. \tag{2.19}$$

Posons

$$\begin{cases} q_\varepsilon(x, s) = \beta\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{x_1 - x_1^1}{\delta\varepsilon}\right) \chi\left(\frac{1}{2} - \frac{x_1 - x_1^1}{\delta} + \frac{(x' - x_1')^2}{\delta^2\varepsilon^2} + f\left(\frac{s}{\delta\varepsilon}\right)\right) \\ g_\varepsilon = \beta \times H_p(\chi) \\ h_\varepsilon = (H_p(\beta)) \times \chi \end{cases}$$

Dans notre système de coordonnées, si x_1 est assez proche de x_1^1, on a

$$(x_1, x' = x_1', s = 0, \sigma_0) \in \mathcal{G}, \tag{2.20}$$

de plus, si $\rho \in \mathcal{G}$, si on supprime la composante sur ∂_σ, $H_p(\rho) = H_r(\rho)$, donc

$$\left\{ \begin{aligned} & g_\varepsilon = \beta\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{x_1 - x_1^1}{\delta\varepsilon}\right) \\ & \qquad \times \left[\frac{-1}{\delta} + \mathcal{O}\left(|x' - x_1'| + |s| + |\sigma - \sigma_0|\right) \times \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta\varepsilon} + \frac{|x' - x_1'|}{\delta^2\varepsilon^2}\right)\right] \end{aligned} \right.$$

or, sur le support de $\beta\chi$, on a

$$-\frac{\delta}{2} \le x_1 - x_1^1 \le \delta + \delta\varepsilon$$

donc

$$\frac{(x' - x_1')^2}{\delta^2\varepsilon^2} < \frac{3}{2} + \varepsilon;\ \frac{s}{\delta\varepsilon} < \frac{3}{2} + \varepsilon$$

de plus sur la variété caractéristique, on a

$$(\sigma - \sigma_0)^2 = \mathcal{O}\left(\Delta\left(y, s, \tau, \eta\right)\right)$$

comme cette dernière expression s'annule sur $\mathcal{G}$ (et qu'elle ne dépend pas de σ), on a, d'après (2.20), $|\sigma - \sigma_0|^2 = \mathcal{O}\left(|x' - x_1'| + |s|\right)$, sur la variété caractéristique.

Finalement, on en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta \in]0, \delta_\varepsilon[$, $g_\varepsilon \ge 0$ sur l'intersection de la variété caractéristique avec $\overline{\Omega}$ et $g_\varepsilon(x_1^1, x_1', s = 0) > 0$.

Etudions maintenant la fonction h_ε ; sur le support de h_ε, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \le \dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{x_1 - x_1^1}{\delta\varepsilon} \le -\dfrac{1}{2} \\ \Rightarrow -\delta\varepsilon \le \delta - (x_1 - x_1^1) \le -\dfrac{\delta\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow \mid x_1 - x_1^1 - \delta \mid \le \delta\varepsilon \\ \dfrac{s}{\delta\varepsilon} < \dfrac{3}{2} + \varepsilon \end{array} \right. \tag{2.21}$$

donc, par hypothèse, le support de h_ε ne rencontre pas le support de μ, si δ est assez petit.

On revient au système de coordonnées standart sur $T^*\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t\right)$, (x, t, ξ, τ). On notera encore q_ε, g_ε et h_ε les fonctions exprimées dans ce système de coordonnées. On a donc

$$H_p q_\varepsilon = g_\varepsilon + h_\varepsilon,$$

d'après l'équation vérifiée par la mesure μ, on a

$$\langle \mu, H_p(q_\varepsilon)\rangle = \int_{\mathcal{H}\cup\mathcal{G}} \frac{q_\varepsilon(\xi^+, \tau^+, x, t) - q_\varepsilon(\xi^-, \tau^-, x, t)}{\langle \xi^+ - \xi^-, n(x(\rho))\rangle} d\nu(\rho)$$

or, par construction, il existe un système de coordonnées tel que dans ce système, la fonction $q_\varepsilon(x,t,\xi,\tau)$ est tangentielle, donc $q_\varepsilon(x,t,\xi^+,\tau^+) = q_\varepsilon(x,t,\xi^-,\tau^-)$, donc $\langle \mu, H_p q_\varepsilon\rangle = 0 = \langle \mu, g_\varepsilon + h_\varepsilon\rangle$. Comme le support de h_ε ne rencontre pas celui de μ, on a $\langle \mu, h_\varepsilon\rangle = 0$. Or $g_\varepsilon \geq 0$ sur le support de μ et $g_\varepsilon(x_1,t_1,\xi_1,\tau_1) > 0$, d'où le lemme 2.11 □

On étudie maintenant le cas (4). On fait le changement de coordonnées (2.6). Dans ce système, on a $\rho_0 = (s = 0, y_0 = 0, t_0 = 0, \sigma_0, \eta_0, \tau_0)$. L'hypothèse ρ_0 strictement diffractif se traduit par :

$$\exists c > 0, \Gamma, \text{ un voisinage de } \rho_0 \text{ tel que } \forall \rho \in \Gamma, H_p^2(s)(\rho) > c. \tag{2.22}$$

Nous allons montrer le

Lemme 2.12. — *Soit $\rho_0 \in T^*\partial M$, un point strictement diffractif. Alors, si l'une des deux demi bicaractéristiques généralisées (dont on exclue ρ_0), issues du point ρ_0 ne rencontre pas le support de la mesure μ au voisinage de ρ_0, alors l'autre non plus et ρ_0 non plus.*

On note (z,ζ) les variables (t,y,τ,η). On posera

$$\phi(s,z,\sigma,\zeta) = H_p\,(s) + \phi_0(s,z,\zeta) \tag{2.23}$$

avec

$$\phi_0(s,z,\zeta) = s^2 + |z - z_0|^2 + \mid \zeta - \zeta_0 \mid^2$$

on a donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} H_p(\phi) & = & H_p\phi_0 + H_p^2\,(s) \\ & = & (1) \;+\; (2) \end{array} \right.$$

Or d'après (2.22), il existe $c > 0$ tel que dans un voisinage de $(y = 0, \eta_0)$, on a $H_p^2(s) \geq c/2$. On a de plus

$$|(1)| = \mathcal{O}\left(|s| + |z - z_0| + \mid \zeta - \zeta_0 \mid\right).$$

Il existe donc un voisinage, Γ, de $(y = 0, s = 0, t = 0, \sigma = 0, \eta_0, \tau_0)$ tel que $H_p(\phi) > 0$ sur Γ.

Soient

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_0(t) = 1_{t>0} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \\ \chi_1 \in C_0^\infty(]-3,3[);\ \chi_1 \equiv 1 \text{ sur } [-2,2] \end{array} \right.$$

Posons, pour $\delta > 0$,

$$f = \chi_1\left(\frac{\phi_0}{\delta}\right)^2 \chi_0(1 - \phi/\delta).$$

Sur le support de f , on a $\phi \leq \delta$, donc

$$H_p\,(s) \leq \delta - \phi_0 \leq \delta \tag{2.24}$$

de plus sur l'intersection des supports de f et de $d\chi_1(\phi_0/\delta)$, on a $\phi \leq \delta$ et $\phi_0 \geq 2\delta$; donc sur l'intersection des supports de f, de $d\chi_1(\phi_0/\delta)$ et de la variété caractéristique, on a

$$H_p\,(s) \leq -\delta. \tag{2.25}$$

et comme

$$H_p\,(s) = 2(\sigma - \sigma_0)\,(-\nabla\varphi, 1)\,B\,(y, s)\ {}^t\,(-\nabla\varphi, 1)\,,$$

on a donc

$$\text{(2.26)}\qquad \begin{cases} (\sigma - \sigma_0) < 0 \Rightarrow \Delta > 0 \\ \text{et } \sigma = \sigma_0 - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{(-\nabla\varphi, 1)\,B\,(y, s)\ {}^t\,(-\nabla\varphi, 1)} \end{cases}$$

(car l'autre racine est éliminée par la condition (2.25). On a également sur le support de f, $|\phi_0| \leq 3\delta$. Donc, si δ est assez petit, on a $H_p(\phi) > 0$ sur l'intersection du support de f et de la variété caractéristique et

$$\begin{cases} H_p(f) &= \frac{1}{\delta}\chi_1^2\chi_0'\,(-H_p\phi) + 2\chi_1 H_p\,(\chi_1\,(\phi_0/\delta)) \times \chi_0 \\ &= (1)\ +\ (2) \end{cases}$$

avec $(1) \leq 0$ sur $\mathcal{C}$ et (2) à support dans un petit voisinage de ρ_0. Si on suppose maintenant que le support de μ ne rencontre pas une des deux demi-bicaractéristiques ouvertes issues du point ρ_0 (celle qui, au voisinage de ρ_0 correspond à la racine $\sigma = \sigma_0 - \sqrt{\Delta})/(-\nabla\varphi, 1)B(y, s)\,{}^t(-\nabla\varphi, 1))$, on a alors, si δ est assez petit, $\langle\mu, (2)\rangle = 0$, d'après (2.26), donc, d'après l'équation vérifiée par la mesure μ,

$$\text{(2.27)}\qquad \langle\mu, (1)\rangle = \int_{\mathcal{H}\cup\mathcal{G}} \frac{f(\rho^+) - f(\rho^-)}{\langle\xi^+ - \xi^-, n(x)\rangle} d\nu$$

avec $\rho^\pm = (t, x, s = 0, \sigma^\pm = \sigma_0 \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{(-\nabla\varphi,1)B(y,s)\,{}^t(-\nabla\varphi,1)}, \eta, \tau)$ et $\langle\mu, (1)\rangle \leq 0$ puisque $(1) \leq 0$ sur $\mathcal{C}$. Or

$$\begin{cases} \dfrac{f(\rho^+) - f(\rho^-)}{\langle\xi^+ - \xi^-, n(x)\rangle} \\ = \chi_2(\phi_0/\delta)^2 \dfrac{\chi_0\,(1 - \phi(\rho^+/\delta)) - \chi_0\,(1 - \phi(\rho^-/\delta))}{-2\sqrt{\Delta}}(-\nabla\varphi, 1)B(y, s)\,{}^t(-\nabla\varphi, 1) \end{cases}$$

et la fonction χ_0 est croissante. Comme $\phi(\rho^\pm) = \phi_0 \pm \sqrt{\Delta}$, on en déduit que

$$\frac{f(\rho^+) - f(\rho^-)}{\langle\xi^+ - \xi^-, n(x)\rangle} \geq 0$$

avec inégalité stricte en ρ_0 si δ est assez petit.

Comme μ et ν sont des mesures positives, les deux termes de l'équation (2.27) sont nécessairement nuls, ce qui implique que la mesure ν est identiquement nulle au voisinage du point ρ_0 dans $T^*\partial M$, et, revenant à l'équation (2.4) vérifiée par la mesure μ, on en déduit que la mesure μ est invariante au voisinage de ρ_0 (dans $T^*\mathbb{R}^{n+1}$) par le flot géodésique usuel; ce qui démontre le lemme 2.12

Le théorème 3 se déduit des lemmes 2.10, 2.11 et 2.12 et de la proposition 2.9. En effet, notons F le support de la mesure μ. Il est clair que F vérifie le point 1) de la proposition 2.9, d'après les lemmes 2.10 et 2.12, il vérifie également le point 2). Il reste à vérifier que F vérifie également le point 3). Si $\gamma_1 = (s_1 = 0, z_1, \sigma_1, \zeta_1) \in F \cap \mathcal{G}$ alors on a $\sigma_1 = \frac{\nabla\varphi \cdot \eta}{(1+\nabla\varphi^2)}$. D'après le lemme 2.11, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel qu'on peut construire $\gamma_\varepsilon(t, \gamma_1) = (s_\varepsilon(t, \gamma_1), z_\varepsilon(t, \gamma_1), \sigma_\varepsilon(t, \gamma_1), \zeta_\varepsilon(t, \gamma_1)) \in F$ telle que :

$$0 < \frac{s_\varepsilon(t, \gamma_1)}{t} < \varepsilon, \quad \left| \frac{(z, \zeta)_\varepsilon(t, \gamma_1) - \gamma_1}{t} - H_r(\gamma_1) \right| < \varepsilon. \tag{2.28}$$

Comme $\gamma_1 \in \mathcal{G}$, on a $H_r(\gamma_1) = H_p(\gamma_1) = H_p^G(\gamma_1)$, si on supprime la composante sur ∂_σ.

3 Mesures de défaut microlocales

3.1 Définition des mesures

Nous allons dans cette partie rappeler quelques résultats sur les mesures de défaut microlocales semi classiques telles qu'elles sont introduites dans [3]. Les résultats que nous énoncerons dans cette partie sont tous démontrés dans cette référence.

On notera par la suite h un petit paramètre et $o(1)$ toute expression dont la limite quand h tend vers 0 est 0. Pour toute fonction $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$ telle que

$$M(a) = \max_{|\alpha| \le n+1} \operatorname{esssup}_{(x,\xi)} \left| \partial_\xi^\alpha a(x, \xi) \right| < +\infty, \tag{3.1}$$

On posera, pour $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$a(x, hD)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} a(x, h\xi)\hat{u}(\xi) d\xi. \tag{3.2}$$

On notera

$$k_a(z, v) = (2\pi)^{-(n+1)} \int e^{iv\cdot\zeta} a(z, \zeta) d\zeta \tag{3.3}$$

alors

$$a(z, hD_z)u(z) = h^{-(n+1)} \int k_a\left(z, \frac{z-y}{h}\right) u(y) dy.$$

Lemme 3.1 ([3], lemme 1.1). — *Si la fonction a vérifie les estimations (3.1), alors l'opérateur défini par (3.2) est continu de L^2 dans L^2 et il existe une constante C_n ne dépendant que de la dimension n telle que*

$$\|a(x, hD)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \le \int \operatorname{supess}_x |k_a(x, v)| dv \le C_n M(a).$$

On notera $\Sigma(\mathbb{R}^{2n})$ l'espace des fonctions a qui vérifient (3.1) et qui tendent vers 0 à l'infini. On notera, pour $u \in L^2$ et $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, W l'isométrie de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ définie par :

$$Wu(x, \xi, h) = 2^{-n/2}(\pi h)^{-3n/4} \int e^{-(x-y)^2/2h + i(x-y)\cdot\xi/h} u(y) dy.$$

Lemme 3.2 ([3], lemme 1.2). — *Soit $a \in \Sigma(\mathbb{R}^{2n})$. Alors*

$$\|a(x, hD) - W_h^* a W_h\|_{\mathcal{L}(L^2)} = o(1).$$

On se donne maintenant une suite $U = (u_k)$ bornée dans L^2 et une suite d'échelles $H = (h_k)$, telle que pour tout k, $h_k > 0$ et $\lim_{k\to+\infty} h_k = 0$. On note $\mu_k(x,\xi) = |Wu_k(x,\xi,h_k)|^2$. Cette suite est bornée dans $L^1(\mathbb{R}^{2n})$.

DÉFINITION 3.3. — *On notera $\mathcal{M}(U,H)$ l'ensemble des points d'adhérence de cette suite dans l'espace des mesures de Radon muni de la topologie de la convergence vague. On dira qu'un élément $\mu \in \mathcal{M}(U,H)$ est une mesure de défaut microlocale (m.d.m) de la suite U à l'échelle H. On a clairement $\mathcal{M}(U,H) \neq \emptyset$ et quitte à extraire une sous suite, on peut toujours se ramener à $\#\{\mathcal{M}(U,H)\} = 1$; ce qu'on supposera toujours par la suite.*

PROPOSITION 3.4 ([3], proposition 1.4). — *Soit $\mathcal{F}$ un sous espace de $\Sigma(\mathbb{R}^{2n})$ dense dans l'espace $C_0(\mathbb{R}^{2n})$ des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini, pour la topologie de la convergence uniforme. On a l'équivalence entre :*

1. *La mesure μ est la mesure de défaut microlocale de la suite (U,H)*
2. *Pour tout $a \in \mathcal{F}$, $(a(x,h_kD)u_k,u_k)_{L^2}$ a une limite $l(a)$ quand a tend vers l'infini.*

On a alors

$$\forall a \in \mathcal{F},\ \ l(a) = \langle a,\mu\rangle.$$

PROPOSITION 3.5 ([3], proposition 1.6). —

1. *Si la suite u_k converge fortement vers la fonction u dans L^2 alors $\mathcal{M}(U,H) = \{|u(x)|^2 dx\delta(\xi)\}$.*
2. *Si $u_k \rightharpoonup u$ (dans L^2) alors pour $\mu \in \mathcal{M}(U,H)$, $\mu \geq |u(x)|^2 dx\delta(\xi)$. En particulier, si $\mu(\xi = 0) = 0$ alors $u_k \rightharpoonup 0$.*
3. *Si la suite U vérifie les deux hypothèses suivantes:*

$$\limsup_{k\to+\infty} \int_{|x|\geq R} |u)(x)|^2 dx \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.4}$$

$$\limsup_{k\to+\infty} \int_{h_k|\xi|\geq R} |\widehat{u})(\xi)|^2 dx \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.5}$$

   alors si μ est la m.d.m de (U,H), on a convergence étroite; ce qui est équivalent à :

$$\|u_k\|_{L^2}^2 \longrightarrow \mu(\mathbb{R}^{2n}).$$

   De plus, si $\mu(\xi = 0) = 0$ alors pour tout A opérateur Pseudo-différentiel (classique) polyhomogène d'ordre 0, on a

$$(Au_k,u_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \langle \sigma_0(A)(x,\xi),\mu\rangle,$$

   où on a noté $\sigma_0(A)$ le symbole principal de l'opérateur A.

4. *Si θ est continue bornée sur $\mathbb{R}^n$, si μ est la m.d.m de (U,H) alors $|\theta|^2$ est la m.d.m de $(\theta U,H)$.*

On notera $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées sur $\mathbb{R}^n$.

LEMME 3.6 ([3], lemme 1.7). — *Pour tout $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ et $\theta \in C^0(\mathbb{R}^n)$, bornée, on a :*

$$\| [a(x, hD), \theta] \|_{\mathcal{L}(L^2)} = o(1).$$

L'invariance par changement de variable de la notion de m.d.m est fournie par le

LEMME 3.7 ([3], lemme 1.10). — *Soit $\chi : V \to U$ un difféomorphisme de classe C^1 entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in C_c(U \times \mathbb{R}^n)$ (espace des fonctions continues à support compact dans $U \times \mathbb{R}^n$), telle que $\partial_\xi^\alpha a$ est continue pour $|\alpha| \leq n+1$. Soit $b(y, \eta) = a(\chi(y), {}^t d\chi^{-1}(\eta)) \in C_c(V \times \mathbb{R}^n)$. Alors pour tout compact $K \subset U$ on a*

$$\|A(x, hD_x)u \circ \chi - B(y, hD_y)(u \circ \chi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = o(1)$$

uniformément par rapport à $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, de norme inférieure à 1, à support dans K.

Soit M une variété de classe C^1, muni d'une densité continue positive, ρ. On note $\mathcal{B}(M)$ l'algèbre des opérateurs bornés, B_h, sur $L^2(M, \rho)$ dépendant de h comme d'un paramètre, $\mathcal{N}(M)$ l'idéal de $\mathcal{B}$ formé des opérateurs B_h tels que $\|B_h\|_{L^2} = o(1)$. Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre quotient de $\mathcal{B}$ par $\mathcal{N}$.

Par ailleurs, on note $\Sigma_c(T^*M)$ l'espace des fonctions $a \in C^0(T^*M)$, à support compact telles que pour tout $|\alpha| \leq n+1$, on a $\partial_\xi^\alpha a \in C^0(T^*M)$. Cette définition a bien un sens car M est de classe C^1.

Soient U un ouvert de M et $a \in \Sigma_c(T^*M)$ à support dans $T^*M \mid_U$. Si κ est un système de coordonnées sur U, on pose $a_\kappa(x, \xi) = a(\kappa(x), {}^t d\kappa^{-1}(\xi))$. Il est clair que $a_k \in C_c\left((V = \chi^{-1}(U)) \times \mathbb{R}^n\right)$ et vérifie les hypothèses du lemme 3.7. Soit $\theta \in C_c(U)$, $\theta \equiv 1$ au voisinage du support en x de a. On pose, pour $u \in L^2(M, \rho)$:

$$A(\theta, \kappa)u = a_\kappa(x, hD_x)(\theta u \circ \kappa).$$

D'après le lemme 3.7, la classe de $A(\theta, \kappa)$ dans $\mathcal{A}$ est indépendante du choix de κ et θ. On la note $[Op](a)$. On a clairement pour tout $\varphi \in C^0(M)$,

$$[Op](\varphi a) = [\varphi][Op](a). \tag{3.6}$$

En utilisant des partitions de l'unité, on obtient :

PROPOSITION 3.8 ([3], proposition 1.11). — *Il existe une unique application linéaire $[Op] : \Sigma_c(T^*M) \to \mathcal{M}$ prolongeant la précédente et vérifiant (3.6) pour toute fonction φ continue et tout symbole $a \in \Sigma_c(T^*M)$.*

Soit $\lambda = l^\infty/c_0$ l'espace des suites bornées modulo les suites convergeant vers 0. Soit u_k une suite bornée de $L^2(M, \rho)$. Pour $a \in \Sigma_c(T^*M)$, on note $S(a)$ la classe dans λ de la suite $([Op](a)u_k, u_k)$.

DÉFINITION 3.9. — *On note $\mathcal{M}(U, H)$ l'ensemble des mesures μ sur T^*M telles qu'il existe une suite k_n telle que pour tout $a \in \Sigma_c(T^*M)$ la suite $S(a)_{k_n}$ converge quand n tend vers l'infini vers $\langle a, \mu\rangle$*

Proposition 3.10. — *Soit $U=(u_k)$, une suite bornée de $L^2(M,\rho)$ et $H=(h_k)$ une suite d'echelles qui tend vers 0, alors l'ensemble $\mathcal{M}(U,H)$ est non vide.*

On supposera toujours par la suite que $\#\{\mathcal{M}(U,H)\}=1$.

3.2 Mesures et équations d'ondes

On va dans cette partie associer des mesures de défaut à des suites de solutions de l'équation des ondes.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de classe $W^{2,\infty}$. Soit (e_ν) la base orthonormale de $L^2(\Omega)$ formée de vecteurs propres du Laplacien, $\widetilde{\Delta}$ avec conditions de Dirichlet et (λ_ν) les valeurs propres associées.

Soient $0<\alpha<1$ et $\varrho\in]1,1/\alpha[$. On notera pour $k\in\mathbb{N}^*$, $J_k=\{\nu;\ \alpha\varrho^k\le\sqrt{\lambda_\nu}<\varrho^k/\alpha$ et pour $-k\in\mathbb{N}^*$, $J_k=J_{-k}$. On notera $E_k=\{u=(u_\nu)_{\nu\in J_k}\}$.

On identifiera les éléments $u\in E_k$ avec la distribution $u=\sum_{\nu\in J_k}e^{\pm it\sqrt{\lambda_\nu}}u_\nu e_\nu$, où on prend le signe égal à $+$ si $k>0$ et à $-$ si $k<0$, solution de l'équation $\Box u=0$, $u\mid_{\partial\Omega}=0$. On identifiera également l'espace $\mathcal{H}=H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ avec l'ensemble des solutions de

$$(3.7)\qquad \left\{\begin{array}{lll}\Box u=0 \text{ dans } \Omega\times\mathbb{R}_t & , & u\mid_{\partial\Omega}=0\\ u\mid_{t=0}=u_0\in H_0^1(\Omega) & , & \partial_t u\mid_{t=0}=u_1\in L^2(\Omega)\end{array}\right.$$

On note $h_k=\varrho^{-|k|}$ et pour $u_k\in E_k$, $E(u_k)=h_k^{-1}\sum_\nu\mid u_\nu\mid^2$, $B=\{U=(u_k)_{k\in\mathbb{Z}^*};\ \forall n\ u_n\in E_n$ et $E(u_n)\le 1\}$ et $B^\pm=\{U=(u_k)_{k\in\pm\mathbb{N}^*};\ \forall n\ u_n\in E_n$ et $E(u_n)\le 1\}$.

Soit $W=(w_k)_{k\in\mathbb{N}}\in B^+$. Soient $T>0$ et $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}_t)$ telle que $\varphi\equiv 1$ au voisinage de $[-T,2T]$. On désigne par w'_k le prolongement par 0 à l'extérieur de Ω de w_k. La suite $U=(u_k=\varphi(t)h_k w'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$. On peut donc, quitte à extraire une sous suite, lui associer une m.d.m., μ. Si $n(x)$ est la normale extérieure au bord de Ω, il est classique qu'il existe $C>0$ tel que

$$\left\|\frac{\partial u_k}{\partial n}\right\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}_t)}\le C\|u_k\|_{H^1(\mathbb{R}^{n+1})}$$

Remarque 3.11. — *Sur E_k les normes $\|\ \|_{H^1_{loc}}$ et $h_k^{-1}\times\|\ \|_{L^2_{loc}}$ sont (uniformément par rapport à k) équivalentes.*

La suite $v_k=h_k\frac{\partial u_k}{\partial n}$ est donc bornée dans $L^2(\partial\Omega\times\mathbb{R}_t)$. On peut donc également lui associer une m.d.m, ν.

Proposition 3.12. — *On a les trois propriétés suivantes :*

$$(3.8)\qquad h_k^2\left(\partial_t^2-\Delta\right)u_k=h_kv_k\otimes\delta_{\partial\Omega}\text{ sur }]-T,2T[.$$

$$(3.9)\qquad \mu\left(]0,T[\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n+1}\right)>0$$

(3.10) *Le support de $\mu\mid_{]-T,2T[}$ est inclu dans l'ensemble* $\left\{\tau^2=\ {}^t\xi A(x)\xi\in[\alpha^2,\alpha^{-2}]\right\}$.

En effet, la relation (3.8) est juste la formule des sauts. Il est clair que la suite U vérifie (3.4); on a également

$$\left\{\begin{array}{rcl} \int_{|\zeta|\geq R/h_k} |\widehat{u_k}(\zeta)|^2 & \leq & \int |\zeta|^2 \frac{h_k^2}{R^2} |\widehat{u_k}(\zeta)|^2 \\ & \leq & \frac{h_k^2}{R^2} \|u_k\|_{H^1}^2 \\ & \leq & \frac{C}{R^2} \|u_k\|_{L^2}^2 \end{array}\right.$$

l'hypothèse (3.5) est donc vérifiée. La relation (3.9) est donc conséquence de la proposition 3.5. Soit maintenant $a \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}_{z,\zeta}^{2(n+1)}\right)$ et $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t)$ à support inclu dans l'ensemble $\{\varphi \equiv 1\}$ et telle que $\psi \equiv 1$ sur $[-T, 2T]$. On a

$$\left(a(z, h_k D_z)\psi(t) h_k^2(\partial_t^2 - \widetilde{\Delta}_x) u_k, u_k\right) = \left(a\left(z, h_k D_z\right) \psi(t) \left(h_k v_k \otimes \delta_{\partial\Omega}\right), u_k\right),$$

or, si $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2(n+1)})$ et $s > 0$, on a

$$\|a\|_{\mathcal{L}(H^{-s}, L^2)} \leq C_s h^{-s} \|a(x, hD)(1 - h^2\Delta)^{s/2}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_s' h^{-s}$$

donc $\lim_{k\to+\infty}\left(a(z, h_k D_z)\psi(t) h_k^2(\partial_t^2 - \widetilde{\Delta}_x) u_k, u_k\right) = 0$, ce qui donne en passant aux symboles, si $\psi \equiv 1$ sur la projection en t du support de a,

$$\langle a(x, t, \xi, \tau) \left({}^t\xi A\left(x\right) \xi - \tau^2 \right), \mu \rangle = 0$$

d'où la première partie de la relation (3.10). On choisit maintenant $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t)$ telle que $\psi \equiv 0$ au voisinage de $[\alpha, \alpha^{-1}]$. On a alors

$$\psi(h_k D_t) u_k = \sum_{\nu \in F_k} \psi(h_k D_t) \left(\varphi(t) e^{it\sqrt{\lambda_\nu}} u_\nu e_\nu(x)\right)$$

or,

$$\psi(h_k D_t) \widehat{\left(\varphi(t) e^{it\sqrt{\lambda_\nu}}\right)}(\tau) = \int \psi(h_k \tau) \widehat{\varphi}\left(\tau - \sqrt{\lambda_\nu}\right) d\tau \tag{3.11}$$

$$= \int \psi(\tau) \widehat{\varphi}\left(\frac{1}{h_k}\left(\tau - \sqrt{\lambda_\nu} h_k\right)\right) \frac{d\tau}{h_k} \tag{3.12}$$

et pour tout $\nu \in F_k$, $\sqrt{\lambda_\nu} h_k \in [\alpha, \alpha^{-1}]$. On en déduit que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe C_N tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\nu \in F_k$, on a

$$\left\|\psi(h_k D_t) \left(\varphi(t) e^{it\sqrt{\lambda_\nu}}\right)\right\|_{L^2} \leq C_N h_k^N.$$

On en déduit en utilisant la formule de Weil que

$$\|\psi(h_k D_t) u_k\|_{L^2} \leq C_N h_k^N$$

d'où la deuxième partie de la relation (3.10).

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette partie. On reprend les notations de la partie 2. On rappelle que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ désignent les régions Hyperboliques et Glissantes du bord et que pour $\rho \in \mathcal{H} \cup \mathcal{G}$, $\rho_\pm$ sont les deux points, (éventuellement confondus), de la variété caractéristique, au dessus de ρ.

Théorème 4. — *Les mesures μ et ν vérifient au sens des distributions l'équation suivante sur* $]-T,2T[$ *:*

$$
{}^tH_p(\mu) = \int_{\rho\in\mathcal{H}\cup\mathcal{G}} \frac{\delta(\xi-\xi_+(\rho))-\delta(\xi-\xi_-(\rho))}{<\xi_+-\xi_-,n(x(\rho))>}\nu(d\rho). \tag{3.13}
$$

La démonstration de ce résultat se fait en reprenant mot à mot la preuve du théorème 2.3 de [3]. Pour être complets, nous allons en rappeler les grandes lignes :

3.3 Schéma de la preuve du théorème 4

Soit $a\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2(n+1)})$, à support en t dans $[-T,2T]$.
Lemme 3.13. — *Le commutateur* $\left[a(x,hD_x), h^2\partial_t^2-\widetilde{\Delta}\right]$ *est, modulo un opérateur de norme L^2 bornée par Ch^2, égal à $-ihH_p(a)(x,hD_x)$ (ceci a bien un sens car $p=\tau^2-{}^t\xi A(x)\xi$ est polynomial en ξ, de classe C^2 en x)*

Le noyau distribution de cet opérateur est, si on note $(t,x)=z$ et $(s,y)=z'$:

$$
\begin{aligned}
l(z,z') = \sum_{i,j} h^2\left(\partial_s^2-\partial_{y_j}a_{i,j}(y)\partial_{y_i}\right)k_a\left(z,\frac{z-z'}{h}\right)&\\
-h^2\left(\partial_t^2-\partial_{x_j}a_{i,j}(x)\partial_{x_i}\right)k_a\left(z,\frac{z-z'}{h}\right)&
\end{aligned}
$$

Etudions par exemple

$$
L_{i,j}(z,z') = h^2\partial_{y_i}a_{i,j}(y)\partial_{y_j}k_a\left(z,\frac{z-z'}{h}\right) - h^2\partial_{x_i}a_{i,j}(x)\partial_{x_j}k_a\left(z,\frac{z-z'}{h}\right)
$$

on considère ici t,s comme des paramètres que nous n'écrirons pas pour plus de concision. On a donc

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
L_{i,j}(x,y) & = & (a_{i,j}(y)-a_{i,j}(x))\,\partial_{2,i}\partial_{2,j}(k_a)\left(x,\frac{x-y}{h}\right)\\
 & & -h\partial_{y_i}(a_{i,j}(y))\,\partial_{2,j}(k_a)\left(x,\frac{x-y}{h}\right)\\
 & & -h^2\partial_{x_i}(a_{i,j}(x))\,\partial_{1,j}(k_a)\left(x,\frac{x-y}{h}\right)\\
 & & -h^2a_{i,j}(x)\,\partial_{1,i}\partial_{1,j}(k_a)\left(x,\frac{x-y}{h}\right)\\
 & & -ha_{i,j}(x)\,\partial_{1,i}\partial_{2,j}(k_a)\left(x,\frac{x-y}{h}\right)\\
 & & -ha_{i,j}(x)\,\partial_{1,j}\partial_{2,i}(k_a)\left(x,\frac{x-y}{h}\right)\\
 & & -h\partial_{x_i}(a_{i,j})(x)\,\partial_{2,j}(k_a)\left(x,\frac{x-y}{h}\right)\\
 & = & (1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(6)+(7)
\end{array}
\right.
$$

$$
(1) = -k_{\xi_i\xi_j a}\left(h\nabla(a_{i,j})(x)\cdot\left(\frac{y-x}{h}\right)+h^2\mathcal{O}\left(|x|+|\frac{x-y}{h}|\right)\right)
$$

donc, d'après le lemme 3.1, modulo le noyau d'un opérateur de norme $\mathcal{O}(h^2)$, on a

$$(1) = k_{ih\nabla_x (a_{i,j}) \cdot \nabla_\xi (\xi_i \xi_j a)}$$

De la même façon, modulo le noyau d'un opérateur de norme $\mathcal{O}(h^2)$, on a

$$(2) = (7) = k_{-hi\xi_j \partial_{x_i} (a_{i,j})\, a}$$

(3) et (4) sont les noyaux d' opérateurs de norme $\mathcal{O}(h^2)$ et

$$(5) + (6) = k_{-h a_{i,j}(x) \left(i\xi_j \partial_{x_i}(a) + i\xi_i \partial_{x_j}(a) \right)}$$

On obtient donc, modulo le noyau d'un opérateur de norme $\mathcal{O}(h^2)$,

$$\sum_{i,j} L_{i,j}(x,y) = ihk_{\nabla_x ({}^t\xi A(x)\xi) \cdot \nabla_\xi(a) - 2\, {}^t\xi A(x) \nabla_x(a)} \tag{3.14}$$

d'où le lemme 3.13. On en déduit :

$$\langle H_p(a), \mu \rangle = \lim_{k \to +\infty} L_k(a)$$

$$L_k(a) = i\left(a(z, h_k D_z)\left(v_k \otimes \delta_{\partial\Omega}\right), u_k\right) - i\left(a(z, h_k D_z) u_k, (v_k \otimes \delta_{\partial\Omega})\right) \tag{3.15}$$

On remarque ensuite que le théorème 4 est un résultat local. On peut supposer que k_a est à support compact dans $V \times \mathbb{R}^{n+1}$ où V est arbitrairement petit. On notera $\mathcal{S}_V(\mathbb{R}^{2(n+1)})$ l'ensemble des symboles a vérifiant cette propriété. Pour $h > 0$ assez petit, le support du noyau distribution de $a(z, hD_z)$ est donc compact dans $V \times V$. On suppose maintenant que V est de la forme $W_t \times \omega_{x_n} \times \omega_{x'}$ et que sur $\omega_{x'}$ il existe une fonction $\phi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^{n-1}$ telle que $\Omega = \{x_n > \phi(x')\}$. On fait le changement de variables:

$$s = x_n - x' \ , \ y = x'. \tag{3.16}$$

Dans ce système de coordonnées, si on pose

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \widetilde{u_k}(s,y,t) & = & u_k(s - \phi(y), y, t), \\ \widetilde{v_k}(y,t) & = & -m(y) h_k v_k(y,t), \\ m(y) & = & (1 + |\phi'(y)|^2)^{1/2}, \end{array} \right. \tag{3.17}$$

l'équation (3.8) devient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Q_k \widetilde{u_k} & = & h_k w_k \otimes \delta_{s=0} + \mathcal{O}(h_k) \\ w_k(y) & = & -h_k \frac{\partial \widetilde{u_k}}{\partial n}(s = 0, y) \\ Q_k & = & (h_k^2 D_s^2 - h_k D_y \lambda_1(y) h_k D_s - h_k D_s \lambda_1(y) h_k D_y \\ & & \qquad + h_k D_y \lambda_2(y) h_k D_y - \lambda_3(y) D_t^2. \end{array} \right. \tag{3.18}$$

avec $\lambda_{1,2}, \lambda_3(y) = \frac{1}{m(y)^2}$, des fonctions de classe Lipschitz et le $\mathcal{O}(h_k)$ étant estimé en norme L^2. Le symbole principal de l'opérateur Q_k est

$$q(\sigma, y, \eta, \tau) = \sigma^2 - 2\lambda_1(y) \cdot \eta\sigma + \lambda_2(y)|\eta|^2 - \lambda_3(y)\tau^2 \tag{3.19}$$

Les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sont définis par

$$\begin{cases} \mathcal{H} = \{(\eta \cdot \lambda_1(y))^2 - \lambda_2(y)|\eta|^2 + \lambda_3(y)\tau^2 > 0\} \\ \mathcal{G} = \{(\eta \cdot \lambda_1(y))^2 - \lambda_2(y)|\eta|^2 + \lambda_3(y)\tau^2 = 0\} \end{cases}$$

et si on note $\sigma_\pm$ les deux solutions de $q(\sigma, y, \eta, \tau) = 0$, pour $\rho = (y, t, \eta, \tau) \in \mathcal{H} \cup \mathcal{G}$, on a

$$\langle \xi_+(\rho) - \xi_-(\rho), n(x(\rho)) \rangle = -m(y)\,(\sigma_+ - \sigma_-)\,(y, \eta, \tau).$$

Le théorème 4 est donc conséquence de :
Proposition 3.14. — *La mesure ν est à support dans $\mathcal{H} \cup \mathcal{G}$ et pour toute fonction $a \in \mathcal{S}_V(\mathbb{R}^{2(n+1)})$, il existe $a^\sharp \in \Sigma(\mathbb{R}^{2n})$ à support dans $\omega_{x'} \times \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $(y, \eta, t, \tau) \in \mathcal{H} \cup \mathcal{G}$ on a*

$$a^\sharp(y, \eta, t, \tau) = \frac{a(\phi(y), y, t, \sigma_+, \eta - \sigma_+\nabla\phi(y), \tau) - a(\phi(y), y, t, \sigma_-, \eta - \sigma_-\nabla\phi(y), \tau)}{\sigma_+ - \sigma_-}$$

et

$$L_k(a) = \left(a^\sharp(y, h_kD_y, t, h_kD_t)\widetilde{v_k}, \widetilde{v_k}\right) + o(1). \tag{3.20}$$

On notera $\mathcal{B}$ l'espace des opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n_{y,t})$. Pour $\beta \in C^\infty(\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_\sigma; \mathcal{B})$, à dérivées bornées et dont le support est compact en s, on pose, pour $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}_s; L^2\left(\mathbb{R}^n_{y,t}\right)\right)$

$$\beta(s, hD_s)f(s) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{is\sigma}\beta(s, h\sigma)\widehat{f}(\sigma)d\sigma.$$

On a alors
Lemme 3.15 ([3] lemme 3.2). — *L'opérateur $\beta(s, hD_s)$ se prolonge comme opérateur borné sur l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_s; L^2(\mathbb{R}^n_{y,t}))$ et l'espace $L^2(\mathbb{R}_s; L^2(\mathbb{R}^n_{y,t}))$ et sa norme vérifie :*

$$\|\beta(s, hD_s)\|_{L^2} \leq C \sup_{\sigma\in\mathbb{R}} \sup_{j\leq 2} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\partial_s^j\beta(s, \sigma)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_{y,t})}ds.$$

On notera $\mathcal{R}$ l'espace des fonctions $\rho(h) \in C^\infty(\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_\sigma; \mathcal{B})$, à support dans $]-\varepsilon, \varepsilon[_s$ (ε assez petit) et telles que

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \|\partial_s^j\rho(h)(s, \sigma)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_{y,t})} \leq C_j(1 + |\sigma|)^{-1}h$$

On a alors :
Lemme 3.16 ([3], lemme 3.3). — *Soit $\rho(h) \in \mathcal{R}$, si on pose $R_k = \rho(h_k)(s, h_kD_s)$, et si f_k est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^n_{y,t})$, g_k est bornée dans $L^2(\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}^n_{y,t})$, alors on a*

$$\lim_{k\to+\infty} |(R_k\,(f_k \otimes \delta_{\partial\Omega})\,, g_k)| + |(R_kg_k, f_k \otimes \delta_{\partial\Omega})| = 0.$$

On fait maintenant le changement de variables dans (3.15). On a () :
Lemme 3.17 ([3], lemme 3.4). — *Si* $a \in \mathcal{S}_V(\mathbb{R}^{2(n+1)})$ *et* $I \ : \ L^2(W_t \times]-\varepsilon, \varepsilon[\times \omega_{x'}) \to L^2(V)$ *est donné par* $If(x,t) = f(x_n - \phi(x'), x', t)$,

$$I^{-1}a(z, hD_z)I = \beta_h(s, hD_s) + \rho_h(s, hD_s),$$

avec $\rho_h \in \mathcal{R}$ *et*

$$\beta_h(s,\sigma) = a(s+\phi(y), y, t, \sigma, hD_y - \sigma\nabla\phi(y), hD_t).$$

On pose $B_k = \beta_{h_k}(s, h_k D_s)$, on a d'après ce qui précède, modulo un reste qui tend vers 0 quand k tend vers l'infini :

$$L_k(a) = i\left(B_k\left(m\widetilde{v_k} \otimes \delta_{s=0}\right), \widetilde{u_k}\right) - i\left(B_k\widetilde{u_k}, m\widetilde{v_k} \otimes \delta_{s=0}\right). \tag{3.21}$$

On a également :
Lemme 3.18 ([3], lemme 3.5). — *Soit* λ *une fonction de classe Lipschitz sur* $\mathbb{R}^n$ *et* $b \in \Sigma(\mathbb{R}^{2n})$, *on a alors :*

$$\|[b(y,t,hD), \lambda(y,t)]\|_{L^2} \leq h\|\nabla\lambda\|_{L^\infty} \int \sup_{y,t} |k_b(y,t,x,s)|\,(x,s)dxds,$$

où k_b *est associé à* b *par (3.3).*

Si on applique ce résultat à $b(y,t,\eta,\tau) = a(s+\phi(y), y, t, \sigma, \eta - \sigma\nabla\phi(y), \tau)$ et à ses dérivées par rapport à s, on obtient que si λ est de classe Lipschitz, $[\beta_h(s,\sigma), \lambda] \in \mathcal{R}$. Pour $\lambda = m(y)^2$, revenant à (3.21), on a donc, si on pose $C_k = m^2 B_k$,

$$L_k(a) = i\left(C_k\left(w_k \otimes \delta_{s=0}\right), \widetilde{u_k}\right) - i\left(C_k\widetilde{u_k}, w_k \otimes \delta_{s=0}\right) + o(1)$$

On notera

$$c(s,y,t,\sigma,\eta,\tau) = m^2(y)a\left(s+\phi(y), y, t, \sigma, \eta - \sigma\nabla\phi(y), \tau\right)$$

On remarque que c est à support dans $W_t \times]-\varepsilon, \varepsilon[\times\omega_{x'} \times \mathbb{R}^{n+1}_{\sigma,\eta,\tau}$ et que c'est une fonction entière des variables σ, η, τ à décroissance rapide sur le réel. De plus, c est de classe C^∞ par rapport à (s,t) et de classe $W^{1,\infty}$ par rapport à y. On lui applique le théorème de préparation de Weierstrass, on obtient :

$$c(s,\sigma,y,\eta,t,\tau) = c_0(s,y,\eta,t,\tau) + c_1(s,y,\eta,t,\tau)\sigma + S(s,\sigma,y,\eta,t,\tau)q(s,\sigma,y,\eta,t,\tau), \tag{3.22}$$

où les fonctions c_0, c_1 et S sont C^∞ par rapport à s, σ, t, η, τ et de classe $W^{1,\infty}$ par rapport à y. De plus, on a

$$\forall i = 0,1,\ c_i \in C_0^\infty\left(]-\varepsilon, \varepsilon[; \Sigma\left(\mathbb{R}^n_{y,t} \times \mathbb{R}^n_{\eta,\tau}\right)\right).$$

$$\forall j, \alpha, N,\ \left|\partial^\alpha_{\eta,\tau}\partial^j_s\left(s,y,t,\sigma,\eta,\tau\right)\right| \leq M_{j,\alpha,N}\left(1+|(\eta,\tau)|\right)^{-N}\left(1+|\sigma|\right)^{-1} \tag{3.23}$$

$$\forall j, \alpha, N,\ \left|\partial^\alpha_{\eta,\tau}\partial^j_s\nabla_{y,t}S\left(s,y,t,\sigma,\eta,\tau\right)\right| \leq M_{j,\alpha,N}\left(1+|(\eta,\tau)|\right)^{-N}\left(1+|\sigma|\right)^{-1}$$

de plus, si $(y,\eta,t,\tau)\in\mathcal{H}\cup\mathcal{G}$, on a

$$c_1(s,y,t,\eta,\tau)=\frac{c(s,y,t,\sigma_+,\eta,\tau)-,c(s,y,t,\sigma_-,\eta,\tau)}{\sigma_+-\sigma_-}.$$

On pose

$$\left\{\begin{array}{l} S^h=S(s,hD_s,y,hD_y,t,hD_t)\ ,\ S_k=S^{h_k}\\ g=Sq\ ,\ G^h=g(s,hD_s,y,hD_y,t,hD_t)\ ,\ G_k=G^{h_k}\\ Q^h=(hD_s)^2-hD_s\lambda_1hD_y-hD_y\lambda_1hD_s+hD_y\lambda_2hD_y-\lambda_3(hD_t)^2\ ,\\ Q_k=Qh_k.\end{array}\right.$$

On note $\underline{\mathcal{R}}$ l'ensemble des opérateurs R^h de symboles $\rho_h\in\mathcal{R}$. On a
LEMME 3.19 ([3], lemme 3.6). —

$$\left\{\begin{array}{l} G^h-S^hQ^h\in\underline{\mathcal{R}}hD_s+\underline{\mathcal{R}}hD_{y,t}+\underline{\mathcal{R}},\\ G^h-Q^hS^h\in hD_s\underline{\mathcal{R}}+hD_{y,t}\underline{\mathcal{R}}+\underline{\mathcal{R}}\end{array}\right.$$

Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi\equiv 1$ sur $[-1,1]$ et $\varphi\equiv 0$ sur $]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$. On note ϕ^h l'opérateur $\varphi(h^3D_s)$. On a
LEMME 3.20 ([3], lemme 3.7). —

$$C^h-C^h\phi^h\in\mathcal{R}.$$

La décomposition (3.22) et le lemme 3.20 fournissent une décomposition de $L_k(a)$:

$$L_k(a)=L_k^0(a)+L_k^1(a)+L_k^S(a)+o(1).$$

On étudie d'abord

$$L_k^S(a)=i\left(G_k\phi_k\left(w_k\otimes\delta_{s=0}\right),\widetilde{u_k}\right)-i\left(G_k\phi_k\widetilde{u_k},w_k\otimes\delta_{s=0}\right).$$

D'après les lemmes 3.19 et 3.16, on a

$$L_k^S(a)=i\left(Q_kS_k\phi_k\left(w_k\otimes\delta_{s=0}\right),\widetilde{u_k}\right)-i\left(S_k\phi_kQ_k\widetilde{u_k},w_k\otimes\delta_{s=0}\right)+o(1),$$

et comme $Q_k^*=Q_k$, d'après (3.18), on obtient

$$L_k^S(a)=h_k\left(S_k\phi_k\left(w_k\otimes\delta_{s=0}\right),r_k\right)-h_k\left(S_k\phi_kr_k',w_k\otimes\delta_{s=0}\right)+o(1),$$

avec $\|r_k\|_{L^2}\le C,\ \|r_k'\|_{L^2}\le C.$

D'après (3.1) et (3.23), on obtient $L_k^S(a)=o(1)$. Pour étudier les deux autres termes, nous allons utiliser le lemme suivant :

LEMME 3.21 ([3], lemme 3.8). — *Pout tout* $b \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}_s, \Sigma\left(\mathbb{R}^n_{y,t} \times \mathbb{R}^n_{\eta,\tau}\right)\right)$ *et* φ *comme précedemment, il existe* $M > 0$ *tel que pour tout* $g \in L^2(\mathbb{R}^n_{y,t})$*, tout* $f \in L^2_{s,y,t}$*, à support dans* $s > 0$*, telle que* $\partial_s f \in L^2\left(\mathbb{R}^+_s \times \mathbb{R}^n\right)$*,*

$$\left\{\begin{array}{c}\left(b\left(s,y,t,hD_{y,t}\right)\varphi(h^3D_s)\left(g\otimes\delta_{s=0}\right),f\right)-\left(b\left(s,y,t,hD_{y,t}\right)\varphi(h^3D_s)f,g\otimes\delta_{s=0}\right)\\ =\dfrac{1}{2}\left(b\left(0,y,t,hD_{y,t}\right)g,f\mid_{s=0}\right)_{L^2}-\dfrac{1}{2}\left(b\left(0,y,t,hD_{y,t}\right)f\mid_{s=0},g\right)_{L^2}+\varepsilon(h)\end{array}\right.$$

avec

$$|\varepsilon(h)| \leq Ch^{3/2}\|g\|_{L^2}\left(\|f\|_{L^2} + \|\partial_s f\|_{L^2}\right).$$

Il suffit maintenant d'appliquer ce lemme avec $b = ic_0$, $h = h_k$, $g = w_k$, $f = \widetilde{u_k}$, ce qui donne puisque $\widetilde{u_k}\mid_{s=0}= 0$,

$$L^0_k(a) = \mathcal{O}(h_k^{1/2})$$

Puis on applique encore le lemme 3.21 avec $b = ic_1 - h\partial_s c_1$, $h = h_k$, $g = w_k$, $f = D_s\widetilde{u_k}$, on obtient alors, en utilisant la remarque (3.11) et (3.17)

$$L^1_k(a) = \frac{1}{2}\left(m(y)^{-1}c_1(0,y,t,h_kD_{y,t})w_k, \widetilde{v_k}\right) + \frac{1}{2}\left(c_1(0,y,t,h_kD_{y,t})m(y)^{-1}\widetilde{v_k}, w_k\right) + o(1)$$

et comme $w_k = m(y)^{-1}\widetilde{v_k}$, on obtient :

$$L_k(a) = \left(m(y)^{-1}c_1(0,y,t,h_kD_{y,t})m(y)^{-1}\widetilde{v_k}, \widetilde{v_k}\right) + o(1) \tag{3.24}$$

$$= \left(m(y)^{-2}c_1(0,y,t,h_kD_{y,t})\widetilde{v_k}, \widetilde{v_k}\right) + o(1) \tag{3.25}$$

ce qui démontre la deuxième partie de la proposition 3.14. La démonstration de la première partie est immédiate car si le support de b est inclu dans la région elliptique du bord, on peut factoriser $b\sigma = Sq$ avec S vérifiant les estimations précédentes et on obtiendra donc $L_k(b\sigma) = o(1) = (m(y)^{-2}b(y,t,h_kD_{y,t})\widetilde{v_k}, \widetilde{v_k})$.

4 Réduction semi-classique

4.1 Preuve du théorème 1

On reprend les notations de la partie 3.2. On suppose que (Γ, T) contrôle géométriquement l'ouvert Ω. D'après la définition 2.6, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(\Gamma, (T - 2\varepsilon))$ contrôle encore géométriquement Ω.

PROPOSITION 4.1. — *Il existe* $C > 0$*,* $k_0 > 0$*, tels que pour tout* $U \in B$*, pour tout* $|k| \geq k_0$*, on a*

$$E\left(u_k\right) \leq C\int_\varepsilon^{T-\varepsilon}\int_\Gamma \left|\frac{\partial u_k}{\partial n}\right|^2 d\sigma dt \tag{4.1}$$

Supposons cette inégalité démontrée. Nous allons en déduire la
PROPOSITION 4.2. — *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in \mathcal{H}$, si on note $|||u|||^2 = \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|\partial_t u\|^2_{L^2(\Omega)}$, on a*

$$|||u|||^2 \leq C \int_0^T \int_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt \tag{4.2}$$

REMARQUE 4.3. — *Comme sur E_k les normes $\| \; \|_{H^1}$ et $h_k^{-1} \| \; \|_{L^2}$ sont (uniformément par rapport à k) équivalentes, la proposition 4.1 dit juste que l'inégalité (4.2) est vraie pour $u \in E_k$ et $|k|$ assez grand, si on remplace T par $T - 2\varepsilon$.*
REMARQUE 4.4. — *Il est classique qu'il existe toujours $c > 0$ tel que*

$$|||u|||^2 \geq c \int_0^T \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt. \tag{4.3}$$

Pour démontrer la proposition 4.2, nous allons reprendre une stratégie de G. Lebeau [6]. Les cinq lemmes qui suivent sont tous démontrés dans [6] ; pour être complets, nous reproduisons ces démonstrations.

On note pour $l \in \mathbb{Z}$, $I_l = \{t;\; lT \leq t < (l+1)T\}$ et pour $a \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_t \times \partial\Omega)$, $a_l = 1_{I_l}(t)\, a$, $\|a\|_H = \sup_{l \in \mathbb{Z}} \|a_l\|_{L^2}$. Soient $F \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ et $F_p(\tau) = F(\varrho^{-p}\tau)$ $(p > 0)$ $F_p(\tau) = F(-\varrho^{p}\tau)$ $(p < 0)$. On note

$$F_p(a_l)(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\tau t} F_p(\tau)\, \widehat{a}_l(\tau, x)\, d\tau$$

LEMME 4.5. — *Pour tout $N > 0$, il existe $C_N > 0$ tel que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et tout $l \in \mathbb{Z}$ tel que $\operatorname{dist}(I_l, \operatorname{support}(\varphi)) \geq \delta > 0$ on a*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varphi(t)\, F_p(a_l)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_N \varrho^{-|p|(N-1)} \delta^{-N} T^{1/2} \|a\|_H \|\varphi\|_{L^\infty}$$

On a pour $p > 0$

$$\begin{aligned} \varphi(t)\, F_p(a_l)(t,x) &= \frac{1}{2\pi} \int\int e^{i\tau(t-s)} F\left(\varrho^{-p}\tau\right) \varphi(t)\, a_l(s,x)\, ds d\tau && (4.4) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\int e^{i\tau(t-s)} i^N \partial_\tau^N \left[F\left(\varrho^{-p}\tau\right)\right] \frac{\varphi(t)\, a_l(s,y)}{(t-s)^N} ds d\tau && (4.5) \end{aligned}$$

donc pour $v \in L^2(\partial\Omega)$,

$$|(\varphi(t)\, F_p(a_l)(t,x), v)| \leq \frac{\varrho^{-|p|(N-1)}}{2\pi} \delta^{-N} \|\varphi\|_{L^\infty} \|a\|_H T^{1/2} \|v\|_{L^2} \int \left| F^{(N)}(\tau) \right| d\tau.$$

Le cas $p < 0$ se traite de la même façon. La série $\sum_l F_p(a_l)$ est donc, pour $a \in H$, localement convergente dans $L^\infty(\mathbb{R}; L^2(\partial\Omega))$. On notera $F_p(a)$ sa limite.
LEMME 4.6. — *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $a \in H$ et tout $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ on a*

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \|F_p(\psi a)\|^2_{L^2(\mathbb{R} \times \partial\Omega)} \leq C \|\psi a\|^2_{L^2(\mathbb{R} \times \partial\Omega)}.$$

En effet

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}^*}\|F_p(\psi a)\|^2_{L^2(\mathbb{R}\times\partial\Omega)} = Cte\sum_{p\in\mathbb{Z}^*}\int_{\mathbb{R}\times\partial\Omega}|F_p(\tau)|^2\left|\widehat{(\psi a)}(\tau,x)\right|^2(\tau,x)\,d\tau dx$$

or $\sup_\tau \sum_{p\in\mathbb{Z}^*}|F_p(\tau)|^2\leq C$ car F est à support compact dans $\mathbb{R}^*_+$.

Lemme 4.7. — *Soient $\varphi\in C_0^\infty(]0,T[)$ et $\psi\in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\psi\equiv 1$ sur I_0. Pour tout $M>0$, il existe $C_M>0$ tel que pour tout $a\in H$ et tout p on a*

$$\|\varphi(t)\left(F_p(a)-F_p(\psi a)\right)\|_{L^2(\mathbb{R}_t\times\partial\Omega)}\leq C_M\varrho^{-|p|M}\|a\|_H.$$

En effet, on a

$$\left(F_p(a)-F_p(\psi a)\right)=\sum_{|l|\geq 1}F_p(a_l)-F_p\left((\psi a)_l\right),$$

comme $\psi a\in H$ et $\operatorname{supp}(\varphi)\subset\mathring{I}_0$, d'après le lemme 4.5, pour $b\in H$ et $N\geq 2$ on a, avec $\delta_0=\operatorname{dist}\left(\operatorname{supp}(\varphi),I_0^c\right)$,

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{|l|\geq 1}\|\varphi(t)F_p(b_l)\|_{L^\infty(\mathbb{R};L^2(\partial\Omega))}\\&\qquad\leq C_N\varrho^{-|p|(N-1)}\|b\|_H T^{1/2}\|\varphi\|_{L^\infty}\left[\sum_{|l|\geq 2}\frac{T^{-N}}{(|l|-1)^N}+\frac{2}{\delta_0^N}\right],\end{aligned}\right.$$

d'où le lemme.

On pose pour $u\in B$, $u=\sum e^{\pm it\sqrt{\lambda_\nu}}u_\nu e_\nu$,

$$\chi_p(D)u=\sum F_p\left(\pm\sqrt{\lambda_\nu}\right)e^{\pm it\sqrt{\lambda_\nu}}u_\nu e_\nu.$$

On suppose maintenant que le support de F est inclu dans $]\alpha,\alpha^{-1}[$ et que

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}^*}F_p^2(\tau)\geq 1 \text{ si } |\tau|\geq 1. \tag{4.6}$$

Il est alors clair que $u_p=\chi_p(D)u\in E_p$. On a donc d'après la proposition 4.1, si on suppose que $\varphi\equiv 1$ sur $[\varepsilon,T-\varepsilon]$ et $\theta=1_\Gamma$.

$$|||u_p|||^2\leq C\int_{\mathbb{R}\times\partial\Omega}\left|\varphi(t)\,\theta(x)\,\frac{\partial u_p}{\partial n}\right|^2. \tag{4.7}$$

D'après la remarque 4.4, on a $\partial_n u\in H$ et $\|\partial_n u\|_H\leq C|||u|||$.

Lemme 4.8. — *Pour tout $u\in\mathcal{H}$, on a*

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\chi_p(D)u\right)|_{\partial\Omega}=F_p\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)$$

En effet, si les coefficients u_ν sont tous nuls à partir d'un certain rang, ce résultat est trivial et le cas général est conséquence du lemme 4.5 qui implique que F_p est continue de H dans $L^\infty\left(\mathbb{R}; L^2\left(\partial\Omega\right)\right)$.

On obtient donc

$$\varphi\left(t\right)\theta\left(x\right)\partial_n\chi_p\left(D\right)u\mid_{\partial\Omega}=\varphi\left(t\right)F_p\left(\theta\left(x\right)\partial_n u\right). \tag{4.8}$$

On pose $a=\theta\partial_n u\mid_{\partial\Omega}$, on a alors d'après le lemme 4.7, si $\psi=1_{[0,T]}$

$$\|\varphi\left(t\right)F_p\left(a\right)\|_{L^2}^2\leq 2\|\varphi\left(t\right)F_p\left(\psi a\right)\|_{L^2}^2+2C_M^2\varrho^{-2|p|M}\|a\|_H^2$$

donc, d'après le lemme 4.6, pour tout $p_1>p_0$,

$$\sum_{|p|\geq p_1}\|\varphi\left(t\right)F_p\left(a\right)\|_{L^2}^2\leq C\|\psi a\|_{L^2}^2+C'_M\varrho^{-2p_1M}|||u|||^2 \tag{4.9}$$

D'après (4.6), on a pour tout $u\in\mathcal{H}$

$$|||u|||^2\leq\sum_{p\in\mathbb{Z}^*}|||u_p|||^2+|||u_0|||^2 \tag{4.10}$$

avec $u_0=\sum_{\lambda_\nu\leq 1}\left(u_\nu^0e^{it\lambda_\nu}+u_\nu^1e^{-it\lambda_\nu}\right)e_\nu$.

Finalement, on obtient d'après (4.10), (4.7), (4.8) et (4.9)

$$|||u|||^2\leq C\int_0^T\int_\Gamma\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2+\sum_{0\leq|p|<p_1}|||u_p|||^2+C'_M\varrho^{-2p_1M}|||u|||^2$$

ce qui donne pour p_1 assez grand :

$$|||u|||^2\leq 2C\int_0^T\int_\Gamma\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2+2\sum_{0\leq|p|<p_1}|||u_p|||^2. \tag{4.11}$$

Lemme 4.9. — *Toute fonction $u\in\mathcal{H}$ telle que $u\mid_{[0,T]\times\Gamma}\equiv 0$ est en fait identiquement nulle.*

En effet, Posons $N=\{u\in\mathcal{H};\ u\mid_{[0,T]\times\Gamma}\equiv 0\}$. D'après la relation(4.11), $\sum_{0\leq|p|<p_1}|||u_p|||^2$ est une norme sur N qui est donc de dimension finie. Il est d'après (4.11) clair que N est invariant par ∂_t qui possède donc un vecteur propre, u, qui vérifie donc $\partial_t^2u=z^2u=\Delta u$ et les résultats d'unicité pour les problèmes elliptiques réels d'ordre deux impliquent que $u\equiv 0$, donc que $N=\emptyset$. La proposition 4.2 est alors conséquence de (4.11) et du théorème du graphe fermé.

On revient à la démonstration de la proposition 4.1.

Remarque 4.10. — *Pour démontrer la proposition 4.1, il suffit de démontrer que pour tout $U\in B$, il existe $C>0$, $k_0>0$, tels que pour tout $|k|\geq k_0$, on a*

$$E\left(u_k\right)\leq C\int_\varepsilon^{T-\varepsilon}\int_\Gamma\left|\frac{\partial u_k}{\partial n}\right|^2d\sigma dt. \tag{4.12}$$

En effet, supposons que la proposition 4.1 ne soit pas vérifiée. Il existe donc une suite $(v_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} k_n = \pm\infty$ et

$$E(v_{k_n}) > n\int_\varepsilon^{T-\varepsilon}\int_\Gamma \left|\frac{\partial v_{k_n}}{\partial n}\right|^2 d\sigma dt$$

On étudie le cas $k_n \to +\infty$, le cas $k_n \to -\infty$ se traitant de la même manière. Quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que la suite k_n est strictement croissante. On définit une nouvelle suite $U \in B^+$ par

$$\begin{cases} u_k &= v_{k_n} \text{ si } k = k_n, \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que cette suite contredit (4.12).

On va démontrer l'inégalité (4.12) par l'absurde. Pour simplifier les notations, on fait une translation du temps d'epsilon et on remplace $T - 2\varepsilon$ par T (si (Γ, T) contrôle géométriquement l'ouvert Ω, il en est de même de $(\Gamma, T-2\varepsilon)$ si ε est assez petit). Soit U telle que pour tout (C, k_0), il existe $k \geq k_0$ tel que

$$E(u_k) > C\int_0^T\int_\Gamma \left|\frac{\partial u_k}{\partial n}\right|^2 d\sigma dt. \tag{4.13}$$

Quitte à extraire une sous suite et à diviser u_k par $E(u_k)$, on peut supposer que $E(u_{k_n}) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty}\int_0^T\int_\Gamma \left|\frac{h_k\partial v_{k_n}}{\partial n}\right|^2 d\sigma dt = 0$. Pour alléger les notations, on notera encore cette suite u_n bien que tous ses termes ne soient pas définis. On peut appliquer à cette suite les constructions du paragraphe 3.2. Il existe donc deux mesures positives μ et ν sur $T^*\mathbb{R}^{n+1}$ et $T^*(\partial\Omega\times\mathbb{R})$ respectivement, vérifiant (3.8), (3.9), (3.10), (3.13).

Comme $\lim_{n\to+\infty}\int_0^T\int_\Gamma \left|\frac{h_k\partial v_{k_n}}{\partial n}\right|^2 d\sigma dt = 0$, on sait à prioris que le support de la mesure ν ne rencontre pas $\Gamma\times]0,T[$. D'après le corollaire 2.8, la mesure μ est identiquement nulle sur $]-T, 2T[$, ce qui contredit (3.9). La proposition 4.1 est donc démontrée. Comme elle entraine la proposition 4.2 et que cette dernière est équivalente à la controlabilité exacte de l'équation (1.1), d'après la méthode H.U.M. de J.L. Lions ([8]), le théorème 1 est donc démontré.

4.2 Preuve du théorème 2

Le cas Ω de classe C^k est une conséquence simple du cas général et de la proposition 2.7. On suppose donc maintenant qu'il existe un point intérieur, x_0 et une direction ξ_0 tels qu'aucun des rayons bicaractéristiques issus de $(x_0, t_0 = 0, \xi_0, \tau_0)$ dans la direction ξ_0 à l'instant $t = 0$, parcourus à vitesse 1, ne rencontre $\overline{\Gamma}\times[0,T]$. On peut supposer que $|\xi_0| = 1$. Nous allons construire une suite $U \in B$ qui nie l'inégalité obtenue en remplaçant dans (4.12) ε par 0, ce qui contredira la proposition 4.2 qui est équivalente à la controlabilité exacte en temps T, ce qui démontrera le théorème 2.

Il suffit en fait de démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $U \in B^+$ telle que $\limsup_{k\to+\infty} E(u_k) = 1$ dont le support de la mesure de défaut semi-classique associée, μ, est, pour $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ le rayon (unique si $\varepsilon > 0$ est assez petit) issu de $(x_0, t = 0, \xi_0, \tau_0)$, qu'on notera γ . D'après le théorème 3, le support de la mesure de défaut sera, pour tout $t \in]-T, 2T[$ inclu dans la réunion des rayons issus de $(x_0, t = 0, \xi_0, \tau_0)$. Comme aucun de ces rayons ne rencontre $\overline{\Gamma} \times [0, T]$, on a $\mu \equiv 0$ au voisinage de $\overline{\Gamma} \times [0, T]$, donc $\nu \equiv 0$ sur $\overline{\Gamma} \times [0, T]$, d'après (3.13) ; ce qui par passage à la limite contredit toute inégalité du type (4.12).

Soit $\Psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\Psi \equiv 1$ au voisinage de x_0. Soient

$$\varphi(x) = x \cdot \xi_0 + i(x - x_0)^2$$

et

$$w_k(x) = \frac{C}{h_k^{n/4}} e^{i\frac{\varphi(x)}{h_k}} \Psi(x), \ \frac{1}{C} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2x^2} dx$$

de telle façon que $\lim_{k\to+\infty} \|w_k\|_{L^2} = 1$. Un calcul simple montre que la suite (w_k) admet une mesure de défaut microlocale, $m = \delta_{\substack{x=x_0\\ \xi=\xi_0}}$.

On note, pour $k \in \mathbb{N}$, Π_k le projecteur orthogonal sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(e_\nu)_{\nu \in F_k}$. On a :

Proposition 4.11. — *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C_N > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\|w_k - \Pi_k w_k\|_{L^2} \le C_N h_k^N. \tag{4.14}$$

Soient $l, g, \in C_0^\infty(\Omega)$ telles que $l \equiv 1$ au voisinage du support de Ψ, $g \equiv 1$ au voisinage du support de l et soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, telle que $\chi \equiv 1$ sur un petit voisinage de $\{|\xi| \in [0, \alpha]\}$ et support $(\chi) \subset\subset \{|\xi| < 1\}$(on prend le réel α ayant servi à la définition de l'espace E_k).

Lemme 4.12. — *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C_N > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\nu \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{\lambda_\nu} \ge \alpha^{-1} h_k^{-1}$, on a, avec $h_\nu = \lambda_\nu^{-1/2}$*

$$\|g(x)(1 - \chi)(h_\nu D_x) w_k\|_{L^2} \le C_N h_\nu^N \tag{4.15}$$

En effet, on a

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}((1-\chi)(h_\nu D_x) w_k)(\xi) = (1-\chi)(h_\nu \xi) \mathcal{F}_{x\to\xi}\left(e^{-\frac{(x-x_0)^2}{h_k}} \Psi(x)\right)\left(\xi - \frac{\xi_0}{h_k}\right)$$

or, il est clair que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C_N > 0$ tel que

$$\left|\mathcal{F}_{x\to\xi}\left(e^{-\frac{(x-x_0)^2}{h_k}} \Psi(x)\right)(\eta)\right| \le C_N h_k^{-N/2} |\eta|^{-N}.$$

et sur le support de $1 - \chi(h_\nu \xi)$, on a $\left|\xi - \dfrac{\xi_0}{h_k}\right| \ge c h_\nu^{-1}$; d'où le lemme 4.12.

LEMME 4.13. — *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C_N > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\nu \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{\lambda_\nu} \geq \alpha^{-1} h_k^{-1}$, on a,*

$$\| l(x) \chi (h_\nu D_x) g(x) e_\nu (x) \|_{L^2} \leq C_N h_\nu^N$$

Pour démontrer ce résultat, nous utilisons le calcul symbolique sur les opérateurs h-pseudodifférentiels :

DÉFINITION 4.14. — *Pour $m \in \mathbb{R}$, on notera S^m l'espace vectoriel des symboles $q(x, \xi, h) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ dépendant de $h \in]0, h_0]$ comme d'un paramètre, tels que pour tous α, β, il existe $C_{\alpha,\beta}$ tel que pour tous x, ξ, h, on a:*

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta q \right| \leq C_{\alpha,\beta} (1 + |\xi|)^{m - |\beta|}$$

Pour $q \in S^m$, on notera $Op(q)$ l'opérateur défini par

$$Op(q) u = \left(\frac{1}{2\pi h} \right)^n \int e^{i(x-y)\cdot\xi/h} q(x, \xi, h) u(y) dy d\xi$$

On rappelle que pour $q \in S^0$, $Op(q)$ est borné dans L^2 et qu'il existe C, N_0, indépendants de q tels que sa norme vérifie :

$$\| Op(q) \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C \sum_{|\alpha| + |\beta| \leq N_0} C_{\alpha,\beta}. \tag{4.16}$$

On rappelle également que si $K_{1,2}$ sont deux compacts disjoints de $\mathbb{R}^n$ et si $u \in L^2$ et $\text{support}(u) \subset K_1$, $\Pi_x(\text{support}(q)) \subset K_2$, alors on a pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\| Op(q) u \|_{L^2} \leq C_{q, K_1, K_2, N} h^N \| u \|_{L^2} \tag{4.17}$$

Enfin, pour $p_1 \in S^{m_1}$ et $p_2 \in S^{m_2}$, on a $Op(p_1) \circ Op(p_2) = Op(q)$ avec $q \in S^{m_1 + m_2}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$q(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{i^{|\alpha|}} \partial_\xi^\alpha p_1 (x, \xi) \partial_x^\beta p_2 (x, \xi) + h^{N+1} r_N$$

avec $r_N \in S^{m_1 + m_2 - (N+1)}$.

On a $h^2 \Delta + 1 = Op(q = 1 - |\xi|^2)$ qui est elliptique pour $|\xi| < 1$, on peut donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$, trouver $e_N \in S^{-2}$ et $r_N \in S^{-2-N}$ tels que

$$l(x) \chi (h D_x) = Op(e_N) \circ \left(h^2 \Delta + 1 \right) + h^{N+1} Op(r_N).$$

Il suffit en effet de résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e_0 & = & \dfrac{l(x) \chi}{q} \\ e_i & = & \dfrac{1}{q} \times - \displaystyle\sum_{\substack{|\alpha| + j = n \\ j \neq n}} \frac{-1}{i^{|\alpha|}} \partial_\xi^\alpha e_j \partial_x^\beta p \end{array} \right.$$

Comme $\left(h_\nu^2\Delta+1\right)(ge_\nu)=\left[h_\nu\Delta,g\right]e_\nu$, on obtient :

$$l\chi\left(h_\nu D_x\right)(ge_\nu)=E_N\left[h_\nu\Delta,g\right]e_\nu+Op\left(r_N\right)(ge_\nu).$$

Comme le support en x de e_N est inclu dans le support de l qui est disjoint du support de $\left[h_\nu\Delta,g\right]e_\nu$, d'après (4.16) et (4.17), on en déduit le lemme 4.13.

Soit $\chi_0\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ égale à 1 au voisinage de l'ensemble $\{\xi;|\xi|=1\}$ et à support dans l'ensemble $\{\xi;|\xi|\in]\alpha,\alpha^{-1}[\}$.

LEMME 4.15. — *Pour tout $N\in\mathbb{N}$, il existe $C_N>0$ tel que pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $\nu\in\mathbb{N}$ tel que $\sqrt{\lambda_\nu}\leq\alpha h_k^{-1}$, on a,*

$$\left\|g(x)\left(1-\chi_0\right)\left(h_kD_x\right)(w_k)\right\|_{L^2}\leq C_Nh_k^N$$

La preuve de ce lemme est identique à celle du lemme 4.12

LEMME 4.16. — *Pour tout $N\in\mathbb{N}$, il existe $C_N>0$ tel que pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $\nu\in\mathbb{N}$ tel que $\sqrt{\lambda_\nu}\leq\alpha h_k^{-1}$, on a,*

$$\left\|h(x)\left(\chi_0\right)\left(h_kD_x\right)(ge_\nu)\right\|_{L^2}\leq C_Nh_k^N$$

La preuve de ce lemme est similaire à celle du lemme 4.13 si on remarque que l'opérateur $h_k\Delta+h_k^2\lambda_\nu$ de symbole $h_k^2\lambda_\nu-|\xi|^2$ est elliptique pour $|\xi|$ dans le support de χ_0 car $h_k^2\lambda_\nu\in]0,\alpha]$. (On considère ici $h_k^2\lambda_\nu$ comme un paramètre).

D'après les lemmes 4.12, 4.13, 4.15 et 4.16, pour tout $N\in\mathbb{N}$, il existe C_N tel que pour tout ν tel que $\lambda_\nu\notin\left[\alpha^2h_k^{-2},\alpha^{-2}h_k^{-2}\right]$,

$$\left\{\begin{array}{rcl}\left|(w_k\cdot e_\nu)_{L^2}\right| & = & \left|(hw_k\cdot ge_\nu)\right|\\ & \leq & C_N\left(\min\{h_k,h_\nu\}\right)^N\end{array}\right. \tag{4.18}$$

D'après la formule de Weyl,

$$\exists N_0,C>0;\forall p\in\mathbb{N},\ \sharp\{\nu\in F_p\}\leq Ch_p^{-N_0}.$$

L'estimation (4.18) implique donc la proposition 4.11.

On notera $u_{k,1}=\Pi_k\left(w_k\right)=\sum_{\nu\in F_k}u_\nu e_\nu$. De la proposition 4.11, on déduit que la suite $\left(u_{k,1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ a pour m.d.m. la mesure m. Soit u_k la solution de l'équation des ondes sur $\Omega\times\mathbb{R}_t$ avec conditions de Dirichlet associée aux données initiales $u\mid_{t=0}=0,\partial_tu\mid_{t=0}=u_{k,1}$. On a $u_k=u_k^++u_k^-$ avec

$$u_k^\pm=\mp\frac{1}{2}\sum_{\nu\in F_k}e^{\mp it\sqrt{\lambda_\nu}}u_\nu e_\nu. \tag{4.19}$$

Quitte à extraire une sous suite, on supposera que ces trois suites ont des m.d.m, μ^0,μ^+ et μ^- respectivement.

LEMME 4.17. — *Les mesures $\mu^\pm$ sont supportées dans l'ensemble $\{\tau=\pm\sqrt{{}^t\xi A(x)\xi}\}$ et $\mu^0=\mu^++\mu^-$.*

On remarque d'abord que la deuxième partie de cet énoncé est conséquence de la première. En effet, pour tout $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, il existe $a^{0,\pm} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ tels que $a = a^0 + a^+ + a^-$, le support de a^0 ne rencontre pas l'ensemble $|\tau| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$ et le support de $a^\pm$ ne rencontre pas l'ensemble $\{\tau = \pm\sqrt{{}^t\xi A(x)\xi}\}$. Il suffit maintenant de remarquer que $\|a^0(x, h_k D_x) u_k\| \to 0$ et $\|a^\pm(x, h_k D_x) u_k^\mp\| \to 0$ quand $k \to +\infty$ et que l'adjoint de $a(x, hD_x)$ est $a(x, hD_x)$ modulo un opérateur de norme majorée par Ch, pour conclure que $\mu^0 = \mu^+ + \mu^-$.

On a, pour $\chi_\pm \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $\pm\tau \leq 0$ et $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\left|\mathcal{F}_{t\to\tau}\left(\chi_\pm(h\tau)\left(\Psi e^{-it\sqrt{\lambda_\nu}}\right)\right)\right| = \left|\chi_\pm(h_k\tau)\,\hat{\Psi}\left(\tau - \sqrt{\lambda_\nu}\right)\right| \leq C_N \lambda_\nu^{-N}$$

ce qui d'après (4.19) et la formule de Weyl implique le lemme 4.17.

D'après (4.14), $u_{k,1}$ est modulo un terme négligeable en norme L^2, à support compact dans Ω. D'après la vitesse finie de propagation et la conservation de l'énergie pour l'équation des ondes, le support de la mesure μ^0 (donc aussi les supports des mesures $\mu^\pm$) est compact, pour t petit, dans $T^*\Omega \times T^*\mathbb{R}_t$. Dans toute la suite, nous allons donc faire comme s'il n'y avait pas de bord, étant entendu que nos résultats s'énoncent pour des temps petits.

Soit $B(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ la racine carrée définie positive de la matrice $A(x)$. On note, $\widetilde{\nabla} = B(x)\nabla_x$ et pour $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$,

$$\varphi_k(t) = \left(a(x, h_k D_x)\left(\widetilde{\nabla} u_k\right), \widetilde{\nabla} u_k\right) + \left(a(x, h_k D_x)(\partial_t u_k), \partial_t u_k\right).$$

La fonction $\frac{d\varphi_k}{dt}$ est uniformément bornée en norme L^2 et par le théorème d'Ascoli et la séparabilité de l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, quitte a' extraire une sous suite de la suite (u_k), il existe une famille continue de mesures, μ_t, telle que pour tout $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et tout t assez petit, $\lim_{k\to+\infty}\varphi_k = \langle a, \mu_t\rangle$. Si on note $\nu^{0,\pm} = (\tau^2 + {}^t\xi A(x)\xi)\,\mu^{0,\pm}$ et $\iota(\tau)(\nu^{0,\pm})$ la mesure obtenue en intégrant en τ la mesure $\nu^{0,\pm}$, on a clairement

$$\iota(\tau)\left(\nu^0\right) = \mu_t^0 dt \tag{4.20}$$

On peut également définir des mesures $\mu_t^\pm$ et $\nu^\pm$ de la même manière et ces mesures vérifient :

$$\iota(\tau)\left(\nu^\pm\right) = \mu_t^\pm dt \tag{4.21}$$

ce qui implique, comme $\nu^0 = \nu^+ + \nu^-$, que $\mu_t = \mu_t^+ + \mu_t^-$. Enfin, comme les mesures $\mu^{0,\pm}$ vérifient l'équation ${}^tH_p(\mu^{0,\pm}) = 0$, il en est de même des mesures $\nu^{0,\pm}$ et d'après le lemme 4.17, on a donc :

$$\left(\partial_t \pm \frac{1}{{}^t\xi A(x)\xi}\,{}^tH_{\widetilde{\Delta}}\right)\left(\mu_t^\pm\right) = 0.$$

La mesure $\mu_t^\pm$ est donc l'image de la mesure $\mu_{t=0}^\pm$ par le flot du champ de vecteur $\pm\dfrac{1}{\sqrt{{}^t\xi A(x)\,\xi}}H_{\widetilde{\Delta}}$. Par raison de symétrie, on a

$$\mu_{t=0}^+ = \mu_{t=0}^- = \frac{1}{2}\mu_{t=0}^0 = \frac{1}{2}\delta_{\substack{x=x_0\\ \xi=\xi_0}}.$$

Le support de la mesure $\mu_{t_0}^\pm$ est donc la projection sur $T^*\mathbb{R}^n$ de l'intersection avec $\{t = t_0\}$ de la bicaractéristique issue de $\left(t=0, \tau = \pm\ \left({}^t\xi A(x)\,\xi\right)^{1/2}, x_0, \xi_0\right)$. D'après (4.21) et le lemme 4.17, le support de la mesure $\mu^\pm$ est donc la bicaractéristique issue de $\left(t=0, \tau = \pm\ \left({}^t\xi A(x)\,\xi\right)^{1/2}, x_0, \xi_0\right)$; ce qui termine la démonstration du théorème 2.

A Quelques résultats sur les rayons bicaractéristiques généralisés

Nous allons établir quelques résultats sur les rayons bicaractéristiques. Dans un cadre C^∞, ces résultats sont bien connus. Notre stratégie consiste à reprendre les démonstrations de Hörmander ([5]), faites dans un système de coordonnées particulier, à les traduire en termes géométriquement intrinsèques et à vérifier que ces démonstrations ne nécessitent pas plus de régularité que nous n'en supposons.

On reprend le système de coordonnées (2.6) de la partie 2. On notera $\mathcal{G}^3 = \{\rho \in T^*\partial M;\ H_p^2(s)(\rho) = 0\}$ et $\mathcal{G}_g = \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_d \setminus \mathcal{G}^3$. Dans cette partie, on notera $(x,\xi) = (s,t,y,\sigma,\tau,\eta) = (s,x',\sigma,\xi')$.

Lemme A.1 ([5], lemme 24.3.4). — *Soient $\rho_0 \in T^*\partial M$ et V un voisinage de ρ_0 dans T_b^*M. On suppose que sur V, on a $H_p^2(s) \geq c > 0$. On considère maintenant $t \to \gamma(t)$ une bicaractéristiquedéfinie pour $0 < |t| < T$, brisée en $t=0$. On a alors $s(\gamma(t)) \geq ct^2$ au voisinage de $t=0$*

On a pour tout $\rho \in T^*\mathbb{R}^{n+1}$

$$(\sigma - \sigma_0)\,H_s^2(p) = \frac{1}{2}H_p(s) \tag{A.1}$$

or, pour $t \neq 0$ on a $\frac{d}{dt}\left(H_p(s)(\gamma(t))\right) = H_p^2(s)(\gamma(t)) > 0$. Comme $(\sigma-\sigma_0)(\gamma(\pm 0)) \gtrless 0$, ceci implique, puisque $H_s^2(p) > 0$,

$$\begin{cases} (\sigma-\sigma_0)(\gamma(t)) \geq ct & (t>0) \\ (\sigma-\sigma_0)(\gamma(t)) \leq ct & (t<0) \end{cases}$$

Comme $\frac{d}{dt}\left(s(\gamma(t))\right) = H_p(s)(\gamma(t))$, on en déduit le lemme A.1

Lemme A.2 ([5], lemme 24.3.5). — *Soient $\rho_0 \in T^*\partial M$ et V un voisinage de ρ_0 dans T_b^*M. On suppose que sur V, on a $H_p^2(s) \leq -c < 0$. Il existe $C_0, C > 0$ tels que si $\gamma(t)$ est une bicaractéristique brisée, alors, tant que $\gamma(t)$ ne sort pas de V, on a*

$$\left((\sigma-\sigma_0)^2 + s\right)(\gamma(t)) \leq C_0 e^{C|t-t'|}\left((\sigma-\sigma_0)^2 + s\right)(\gamma(t')).$$

On note $g(t) = \left(\frac{H_p(s)^2}{2} - sH_p^2(s)\right)(\gamma(t))$. La fonction g est continue aux points hyperboliques et ailleurs, on a $\frac{d}{dt}g = -sH_p^3(s)(\gamma(t))$. Comme d'après (2.7), la fonction $H_p(s)$ est de classe C^2, $H_p^3(s)$ est continue, ce qui implique que $\left|\frac{d}{dt}(g)\right| \leq Cg(t)$, d'où le lemme A.2.

On suppose maintenant que $|(\sigma - \sigma_0)(\gamma(0))| \leq \varepsilon$ et $|s(\gamma(0))| \leq \varepsilon^2$, d'après ce qui précède, on a $(\sigma - \sigma_0)(\gamma(t)) = O(\varepsilon)$, $s(\gamma(t)) = O(\varepsilon^2)$, donc $\frac{d}{dt}(x', \xi') = H_p = H_r + O(\varepsilon)$; ce qui implique que toute suite de bicaractéristiques brisées, $\gamma_\nu(t)$ définies pour $|t| \leq T$ et convergeant pour $t = 0$ vers $\rho_0(s = 0, x', \sigma_0^0, \xi') \in \mathcal{G}_g$ converge uniformément pour $|t| \leq T$ vers le rayon glissant issu de ρ_0 qui est la courbe intégrale du champ H_p^G (en effet, le champ H_p^G est tangent à $\mathcal{G}$ et sur $\mathcal{G}$, on a $H_r = H_p$).

On va maintenant étudier les bicaractéristiques au voisinage d'un point $\rho_0 = (s_0, x_0', \sigma_0^0, \xi_0') \in \mathcal{G}^3$. On notera $\gamma = (s, x', \sigma, \xi')$ une telle bicaractéristique et $\sigma_0 = \sigma_0(s, x', \xi')$.

Soit $(y, \eta)(t)$ la solution de $\frac{d}{dt}(y, \eta) = H_r(y, \eta)$, associée aux données initiales x_0', ξ_0'. On a donc

$$\left|\frac{d}{dt}(x' - y, \xi' - \eta)(t)\right| \leq C|(x' - y, \xi' - \eta)| + C_1(s + (\sigma - \sigma_0))(t) \tag{A.2}$$

Pour $f = |x' - y| + |\xi' - \eta|$, on a

$$\frac{d}{dt}f \leq C_0 f + C_1(s + |\sigma - \sigma_0|), \; f(0) = 0 \tag{A.3}$$

On note $e(t) = \frac{1}{2}H_p^2(s)(s = 0, y, \sigma_0, \eta)$, on a donc

$$\left|\frac{1}{2}H_p^2(s) - e\right|(t) \leq C_2 f + C_3(s + |\sigma - \sigma_0|), \tag{A.4}$$

ce qui implique

$$\frac{d}{dt}|\sigma - \sigma_0| \leq |e(t)| + C_2 f + C_3(s + |\sigma - \sigma_0|). \tag{A.5}$$

Enfin, on rappelle que

$$\frac{d}{dt}s \leq C_4|\sigma - \sigma_0| \tag{A.6}$$

Un calcul simple montre qu'alors (A.3), (A.4), (A.5) et (A.6) impliquent les inégalités suivantes, pour $t > 0$:

$$s(t) \leq Ce^{\mu t}\int_0^t (t - t')|e|dt' + s(0) + t(s(0) + |\sigma - \sigma_0|(0)) \tag{A.7}$$

$$|(\sigma - \sigma_0)(t)| \leq Ce^{\mu t}\int_0^t |e|dt' + |\sigma - \sigma_0|(0) + t(s(0) + |\sigma - \sigma_0|(0)) \tag{A.8}$$

$$f(t) \leq Ce^{\mu t}\int_0^t (t - t')^2|e|dt' + ts(0) + t^2(s(0) + |\sigma - \sigma_0|(0)) \tag{A.9}$$

On suppose maintenant que l'ouvert Ω est de classe C^{k_0} et les coefficients du Laplacien de classe C^{k_0-1}. Le champ H_p est donc de classe C^{k_0-2} mais d'après (2.7), $H_p(s)$ est de classe C^{k_0-1} et $H_s^2(p)$ de classe C^{k_0-2}. On définit maintenant, pour $k < k_0$

$$\mathcal{G}_k = \{\rho_0 \in T^*\partial M\}; \forall 1 \leq n < k \ H_p^n(s)(\rho_0) = 0,\ H_p^k(s)(\rho_0) \neq 0\} \tag{A.10}$$

$$\mathcal{G}^k = \{\rho_0 \in T^*\partial M\}; \forall 1 \leq n < k,\ H_p^n(s)(\rho_0) = 0\} \tag{A.11}$$

et on notera

$$\mathcal{G}_\infty = \{\rho_0 \in T^*\partial M\}; \forall 1 \leq n \leq k_0 - 1,\ H_p^n(s)(\rho_0) = 0$$

Une récurrence immédiate montre que pour tout $k < k_0$, $\rho \in \mathcal{G}_k$ et tout $n \leq k-2$, on a

$$\left(H_p^G\right)^n \left(H_p^2(s)\right)(\rho) = H_p^{n+2}(s)(\rho)$$

Comme on a par ailleurs

$$\frac{d}{dt}^n(e) = \left(\frac{1}{2}H_p^G\right)^n \left(H_p^2(s)\right)(s = 0, y, \sigma_0, \eta)$$

on obtient, puisque le champ H_p^G est de classe C^{k_0-2} et que la fonction e est de classe C^{k_0-2}

$$\left.\begin{array}{r} \forall n \leq k-3 \left(\frac{d}{dt}^n(e)\right)(0) = 0 \\ \left(\frac{d}{dt}^{k-2}(e)\right)(0) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow e(t) = at^{k-2} + O\left(t^{k-1}\right)$$

ce qui implique $s(t) = O\left(t^k\right)$ et $(\sigma - \sigma_0)(t) = O\left(t^{k-1}\right)$ d'après (A.7) et (A.8). Enfin, on remarque que la fonction e est monotone pour $|t|$ assez petit.

Proposition A.3 ([5], proposition 24.3.8). — *Soit $\gamma_0 \in \mathcal{G}^3$. On suppose que la fonction e est croissante pour $0 < t$ assez petit. Alors, γ est l'orbite du champ H_p issue de ρ_0. Si la fonction e est décroissante pour $0 < t$ assez petit, alors γ est, pour $0 < t$ assez petit un rayon glissant, c'est à dire l'orbite issue de ρ_0 du champ H_p^G.*

La preuve de cette proposition est, compte tenu de ce qui précède la même que celle de la proposition 24.3.8 de [5].

On en déduit le résultat suivant :

Théorème 5 ([5], théorème 24.3.9). — *Soit $t \to \gamma(t)$ une bicaractéristique généralisée. On suppose que $\gamma(t_0) \notin \mathcal{G}_\infty$. Alors, pour $0 < t - t_0$ petit (respectivement $t - t_0 < 0$ petit), $\gamma(t)$ est soit l'orbite de H_p issue de $\gamma(t_0)$ soit le rayon glissant issu de $\gamma(t_0)$ et cette alternative est complètement déterminée par la donnée de l'entier n tel que $\gamma(t_0) \in \mathcal{G}_n$ et de la valeur de $H_p^n(s)(\gamma(t_0))$.*

Corollaire A.4 ([5], corollaire 24.3.10). — *Par tout point $\rho \notin \mathcal{G}_\infty$, il passe (localement) au plus une bicaractéristique généralisée.*

Les deux résultats suivant se montrent comme dans [5], en utilisant ce qui précède :

Proposition A.5 ([5], proposition 24.3.12). — *Soit* $[a,b] \ni t \mapsto \gamma^{\nu}(t) = (x^{\nu}(t), \xi^{\nu}(t))$ *une bicaractéristique généralisée telle que* $x^{\nu}(t), s^{\nu}(t)(\sigma^{\nu} - \sigma_0^{\nu})(t), (\sigma^{\nu} - \sigma_0^{\nu})(t)^2, \xi'^{\nu}$ *sont uniformément convergents. Alors, il existe une bicaractéristique généralisée* γ *définie pour* $t \in [a,b]$ *telle que* $\gamma^{\nu}(t)$ *converge vers* $\gamma(t)$ *uniformément pour* t *dans tout compact de* $[a,b]$ *ne contenant aucun point de reflexion de* γ.

Proposition A.6 ([5], corollaire 24.3.14). — *Par tout point* $\rho_0 \in T_b^*M \cap \Sigma_b$ *(*Σ_b *est la projection de la variété caractéristique de l' équation des ondes), il passe au moins une bicaractéristique généralisée qui est obtenue comme limite rayons bicaractéristiques brisés.*

Proposition A.7 ([5], lemme 24.3.15). — *Soit* $F \subset T^*\mathbb{R}^{n+1}$ *un sous ensemble fermé de la variété caractéristique inclu dans* $T^*\mathbb{R}^{n+1}|_{\overline{\Omega}}$ *tel que*

1. *Si* $\rho \in T^*\Omega$*,* F *contient un voisinage de* ρ *dans la bicaractéristique passant par* ρ*.*
2. *Si* $\rho \in \mathcal{H} \cup \mathcal{G}_d$*,* F *contient un voisinage de* ρ *dans la bicaractéristique brisée fermée passant par* ρ*.*
3. *Pour tout compact* K *de* $F \cap (\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_d)$ *et* $\varepsilon > 0$ *assez petit, il existe* $\delta > 0$ *et* $\gamma_\varepsilon(t,\gamma_0) \in F$*,* $-\delta \leq t \leq \delta$*,* $\gamma_0 \in K$ *tels que*

   $$| (\gamma_\varepsilon(t,\gamma_0) - \gamma_0)/t - H_p^G(\gamma_0) |' < \varepsilon; \qquad 0 < |t| \leq \delta. \tag{A.12}$$

   où $| \ |'$ *désigne la norme usuelle dont on supprime la coordonnée* σ*,*

alors F *est réunion de rayons bicaractéristiques fermés généralisés (c'est à dire que par tout point de* F *il passe un rayon bicaractéristique généralisé fermé défini sur* $I = \mathbb{R}$*, qui est inclu dans* F*).*

Il suffit clairement de démontrer ce résultat localement, c'est à dire de démontrer que pour tout ρ_0 dans un compact $K \subset F$, il existe un rayon bicaractéristique généralisé défini jusqu'au bord de K inclu dans F et passant par ρ_0. On fixe $\varepsilon > 0$ et on choisit δ vérifiant 3). Si $\rho_0 \notin \mathcal{G}_g \cup \mathcal{G}^3$, on définit $\gamma_\varepsilon(t)$ comme la bicaractéristique brisée issue de ρ_0, tant qu'elle ne rencontre ni le bord de K ni $\mathcal{G}_g \cup \mathcal{G}^3$. Si on rencontre le bord de K on a terminé, si on rencontre $\mathcal{G}_g \cup \mathcal{G}^3$, pour $t = t_0$, on définit pour $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$, $\gamma_\varepsilon(t) = \gamma_\varepsilon(t_0) + \frac{(t-t_0)}{\delta}(\gamma_e(\delta, t_0) - \gamma_\varepsilon(t_0))$, où $\gamma_\varepsilon(\delta, t_0)$ est donné par la condition 3). On continue de cette façon jusqu'à ce qu'on rencontre de K ce qui se passe nécessairement au bout d'un nombre fini d'opérations de ce type.

Comme toutes les coordonnées autres que σ sont uniformément de classe Lipschitz, on peut extraire de la suite γ_ε une sous suite $\varepsilon_j \to 0$ telle que $\gamma_{\varepsilon_j}(t)$ converge, comme à la démonstration de la proposition A.5. Comme $\mathcal{G}_g \cup \mathcal{G}^3$ est fermé, la preuve de la proposition A.5 montre que γ est une bicaractéristique brisée en dehors de ses points de $\mathcal{G}_g \cup \mathcal{G}^3$. Si $\gamma(t) \in \mathcal{G}_g$, alors $\gamma(s)$ est la rayon glissant pour $|t' - t|$ assez petit, en effet, si $\gamma(t') \notin \mathcal{G}_g$ pour t' arbitrairement proche de t, d'après le lemme A.2, on sait que γ est une bicaractéristique brisée au voisinage de t. On a donc $\gamma(t') \in \mathcal{G}_g$ pour t' assez proche de t donc $s(t') = 0, \sigma(t') = \sigma_0(t')$ et

$$\frac{d}{dt'}(x', \xi') = H'_p(s = 0, \sigma_0, x', \xi')$$

où H'_p désigne le champ H_p dont on a supprimé la composante sur (s, σ), puisque pour γ_ε, cette dérivée vaut $H'_p(\gamma_\varepsilon(t'))$ ou $H'_p(\gamma_\varepsilon(t')) + O(\delta)$ sauf en un nombre fini de points. Finalement le seul cas restant à étudier est celui de $\gamma(t) \in \mathcal{G}^3$. On montre d'abord de la même façon que les composantes s, x', ξ' vérifient

$$\frac{d}{dt'}(s, x', \xi') = H'_p \tag{A.13}$$

où ici H'_p désigne le champ H_p dont on a supprimé la composante sur σ. Il suffit donc de montrer que $\sigma - \sigma_0$ est dérivable au point t et que sa dérivée vaut 0. En effet, d'après (A.13)

$$\frac{d}{dt}\sigma_0(s, x', \xi')(t) = H_p(\sigma_0) = -\frac{H_p^2(s)}{H_s^2(p)}(\gamma(t)).$$

On a $p = (\sigma - \sigma_0(s, x', \xi'))^2 H_s^2(p)(s, \sigma, x', \xi') - r(s, x', \xi')$, soit

$$\frac{d}{dt'}(\sigma - \sigma_0)^2 H_p^2(p)^2(\gamma(t')) = \frac{d}{dt'}(p(\gamma(t')) + r(\gamma(t')))$$

Or $p(\gamma(t')) \equiv 0$ et comme r ne dépend que de s, x', ξ' et d'après (A.13),

$$\begin{cases} \frac{d}{dt'}(r(\gamma(t'))) & = & H_p(r)(\gamma(t')) \\ & = & H_p\Big((\sigma - \sigma_0(s, x', \xi'))^2 H_s^2(p)(s, \sigma, x', \xi') - p\Big)(\gamma(t')) \\ & = & H_p\left(\left(\frac{H_p(s)}{2}\right)^2\right)(\gamma(t')) \\ & = & H_p(s) H_p^2(s)(\gamma(t')) \end{cases}$$

Or les fonctions $H_p(s)$ et $H_p^2(s)$ sont de classe C^1 donc, comme $H_p(s)(\gamma(t)) = H_p^2(s)(\gamma(t)) = 0$, par hypothèse,

$$H_p(s)(\gamma(t')) = O(|t' - t| + |\sigma - \sigma_0|(\gamma(t')))$$

et

$$H_p^2(s)(\gamma(t')) = O(|t' - t| + |\sigma - \sigma_0|(\gamma(t')))$$

donc

$$\frac{d}{dt'}\left((\sigma - \sigma_0)^2 H_s^2(p)^2(\gamma(t'))\right) = O\left(|t' - t|^2 + |\sigma - \sigma_0|^2\right)$$

ce qui implique, puisque $H_s^2(p) > 0$ que

$$(\sigma - \sigma_0)^2 = O\left(|t' - t|^3\right)$$

d'où le résultat.

Références

[1] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary. *Siam Journal of Control and Optimization*, 305:1024–1065, 1992.

[2] P. Gérard. Microlocal defect measures. *Communications in Partial Differential Equations*, 16:1761–1794, 1991.

[3] P. Gérard and E. Leichtnam. Ergodic properties of eigenfunctions for the dirichlet problem. *Prepublications de l' Université de Paris-Sud*, 44, 1992.

[4] B. Helffer, A. Martinez, and D. Robert. Ergodicité et limite semi-classique. *Communications in Mathematical Physics*, 109:313–326, 1987.

[5] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*, volume 274 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer Verlag, 1985.

[6] G. Lebeau. Contrôle de l'équation de schrödinger. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 71:267–291, 1992.

[7] G. Lebeau. Equation des ondes amorties. In A. Boutet de Montvel and V. Marchenko, editors, *Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics*, pages 73–109. Kluwer Academic, The Netherlands, 1996.

[8] J.L. Lions. *Contrôlabilité exacte. Perturbation et stabilisation des systèmes distribués*, volume 23 of *R.M.A.* Masson, 1988.

[9] R.B. Melrose and J. Sjöstrand. Singularities of boundary value problems I. *Communications in Pure Applied Mathematics*, 35, 1982.

[10] L. Tartar. H-measures, a new approach for studying homogenization, oscillations and concentration effects in partial differential equations. *Proceedings of the Royal Society Edinburgh*, 115-A:193–230, 1990.