

**Contrôle optimal
des équations aux dérivées partielles**

Ecole Polytechnique

N. Burq et P. Gérard

Table des Matières

CHAPITRE I. Rappels et compléments sur les opérateurs linéaires

1.1. Théorèmes de prolongement	1
1.2. Principe de la borne uniforme	4
1.3. Le théorème de l'application ouverte et ses variantes	5

CHAPITRE II. Semi-groupes d'opérateurs linéaires

2.1. Généralités	9
2.2. Générateur infinitésimal	11
2.3. Construction de semi-groupes : le théorème de Hille-Yosida	19
2.4. Le cas des espaces de Hilbert	26

CHAPITRE III. Problèmes variationnels. Equations d'ondes

3.1. Rappels sur la résolution du problème de Dirichlet	32
3.2. Décomposition spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints	34
3.3. Equations d'ondes	39

CHAPITRE IV. Problèmes de contrôle et de stabilisation

4.1. Stabilisation de l'équation des ondes	44
4.2. Contrôle de l'équation des ondes (méthode HUM)	48

CHAPITRE V. Opérateurs pseudo-différentiels

5.1. Opérateurs différentiels	52
5.2. Le calcul pseudo-différentiel	54
5.3. Estimations L^2	60
5.4. Application : une inégalité de Gårding	61
5.5. Mesures de défaut microlocales	62

CHAPITRE VI. Conditions de contrôle géométrique

6.1. Préliminaires géométriques	67
6.2. Inégalités d'observation	70
ANNEXE. Un théorème d'unicité	80

Introduction

Un problème fondamental dans plusieurs champs d'applications des Mathématiques est le contrôle ou l'amortissement des vibrations de grandes structures. C'est ainsi que, dans les trente dernières années, s'est développée, sous l'impulsion de J.-L. Lions et de son école, une théorie mathématique du contrôle optimal pour les solutions de l'équation des ondes dans un milieu non homogène. Plus récemment, un certain nombre de ces questions ont trouvé des solutions géométriques remarquables grâce à l'utilisation ingénieuse de l'analyse microlocale, développée à partir des années 1960 par L. Hörmander et son école. Le but de ces notes est de présenter ces résultats, sous une forme accessible à un élève connaissant un minimum d'analyse fonctionnelle et de théorie des distributions.

Dans une première partie, nous établissons quelques résultats classiques d'analyse fonctionnelle, remontant pour l'essentiel au mémoire de S. Banach (1932) sur les opérateurs linéaires.

Le second chapitre fournit un cadre abstrait à la résolution de nombreuses équations d'évolution linéaires grâce à un célèbre théorème démontré indépendamment par E. Hille et K. Yosida dans les années 1950. Il est suivi d'un court chapitre appliquant ces résultats à l'équation des ondes.

Le chapitre IV présente les problèmes de stabilisation et de contrôle pour l'équation des ondes, en particulier la méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method) de J.-L. Lions.

Le chapitre V propose une introduction auto-contenue aux méthodes d'analyse microlocale : opérateurs pseudo-différentiels, mesures de défaut microlocales.

Enfin, la combinaison de ces différents outils débouche au chapitre VI sur les "théorèmes de contrôle géométrique" de J. Rauch, M. Taylor, C. Bardos et G. Lebeau, que nous démontrons dans leur version la plus simple.

Il va de soi que ces quelques notes n'ont pu aborder beaucoup d'autres aspects importants de la théorie du contrôle optimal, dépassant largement le cadre d'un tel cours. Nous espérons néanmoins qu'elles fourniront au lecteur quelques clefs de compréhension de l'interaction féconde de deux domaines importants de l'analyse mathématique.

Nous tenons à remercier chaleureusement Madame Antoinette Bardot, qui a assuré la saisie de notre manuscrit avec une patience et une compétence exemplaires.

Orsay, Décembre 2002

Nicolas Burq

Patrick Gérard

CHAPITRE I

RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR LES OPÉRATEURS LINÉAIRES

• Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , muni d'une norme, est un **espace de Banach** s'il est complet.

• Si E, F sont des espaces vectoriels normés, on désigne par $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E vers F , que l'on munit de la norme définie par

$$\|T\|_{E \rightarrow F} = \sup_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Tu\|_F}{\|u\|_E}.$$

On vérifie que, si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

• Le but de ce chapitre est de passer en revue trois types de résultats importants concernant les opérateurs linéaires, qui nous seront très utiles dans la suite du cours.

1.1. Théorèmes de prolongement

Théorème 1.1. *Soient E un espace vectoriel normé, D un sous-espace vectoriel dense de E , F un espace de Banach. Toute application linéaire continue de D vers F a un unique prolongement linéaire continu de E vers F .*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{L}(D, F)$. Si $u \in E$, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D convergeant vers u . Puisque

$$\|Tu_n - Tu_p\|_F = \|T(u_n - u_p)\|_F \leq \|T\|_{D \rightarrow F} \|u_n - u_p\|_E,$$

la suite $(Tu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F , donc converge puisque F est complet. La limite $\lim_{n \rightarrow \infty} Tu_n$ ne dépend pas de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ choisie pour approcher u : en effet, si $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une autre suite d'éléments de D approchant u , la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$v_{2p} = u_p, \quad v_{2p+1} = \tilde{u}_p, \quad p \in \mathbb{N},$$

est une suite de D approchant u , donc Tv_n a une limite, ce qui assure

$$\lim_{p \rightarrow \infty} Tu_p = \lim_{p \rightarrow \infty} T\tilde{u}_p.$$

Posons

$$(1.1) \quad \overline{T}u = \lim_{n \rightarrow \infty} Tu_n.$$

Alors on vérifie aisément que $\overline{T} \in \mathcal{L}(E, F)$ et prolonge T . Enfin, un prolongement continu de T à E est nécessairement donné par la formule (1.1), ce qui assure l'unicité de \overline{T} .

q.e.d.

Exemple 1.2. Intégrale de fonctions réglées à valeurs dans un espace de Banach. Soit F un espace de Banach, et soit $[a, b]$ un intervalle compact de \mathbb{R} . On vérifie aisément que l'espace vectoriel $\mathcal{B}([a, b], F)$ des fonctions bornées sur $[a, b]$ à valeurs dans F , muni de la norme

$$(1.2) \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} \|f(x)\|_F$$

est un espace de Banach. Soit D le sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a, b], F)$ constitué des fonctions en escaliers; on dit qu'une fonction de $[a, b]$ dans F est **régulée** si elle appartient à l'adhérence E de D dans $\mathcal{B}([a, b], F)$. On peut montrer qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow F$ est réglée si et seulement si elle admet des limites à gauche et à droite en tout point de $[a, b]$. Pour toute fonction en escaliers $f : [a, b] \rightarrow F$, on définit aisément l'intégrale

$$\int_a^b f(x) dx \in F,$$

de sorte qu'on dispose d'une application linéaire

$$T : D \longrightarrow F \\ f \longmapsto \int_a^b f(x) dx$$

caractérisée par la formule

$$\int_a^b g(x) v dx = \left(\int_a^b g(x) dx \right) v$$

pour toute fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ en escaliers, et tout vecteur $v \in F$. La double inégalité

$$(1.3) \quad \left\| \int_a^b f(x) dx \right\|_F \leq \int_a^b \|f(x)\|_F dx \leq (b-a) \|f\|_\infty$$

est, elle aussi, élémentaire.

On peut donc appliquer le théorème 1.1 et en déduire un unique prolongement de T à E , ce qui définit, pour toute fonction réglée f de $[a, b]$ vers F , l'intégrale $\int_a^b f(x) dx \in F$; de plus, la double inégalité (1.3) se prolonge à de telles fonctions.

Un cas particulier très important de fonction réglée, que nous utiliserons à plusieurs reprises dans la suite, est bien sûr celui des fonctions continues.

Théorème 1.3 (prolongement de la convergence). *Soient E, F des espaces vectoriels normés, D un sous-espace vectoriel dense de E et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E, F)$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que*

$$(1.4) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|T_n\|_{E \rightarrow F} \leq C$$

et que, pour tout élément u de D , la suite $T_n u$ a une limite Tu quand n tend vers l'infini. Alors l'application $T : D \rightarrow F$ ainsi définie est linéaire continue, et, si T admet un prolongement $\bar{T} \in \mathcal{L}(E, F)$ (par exemple si F est complet) alors, pour tout $u \in E$,

$$(1.5) \quad T_n u \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \bar{T}u.$$

Démonstration. La linéarité de T est immédiate, et sa continuité provient de l'inégalité

$$\|Tu\|_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n u\|_F \leq C \|u\|_E,$$

qui se déduit de (1.4). Supposons qu'il existe un prolongement linéaire continu \bar{T} de T à E . Soit $u \in E$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $v \in D$ tel que $\|u - v\|_E \leq \varepsilon$. Alors, pour tout n ,

$$\begin{aligned} \|T_n u - \bar{T}u\|_F &\leq \|T_n u - T_n v\|_F + \|T_n v - Tv\|_F + \|Tv - \bar{T}u\|_F \\ &\leq C \|u - v\|_F + \|T_n v - Tv\|_F + \|\bar{T}\| \|v - u\|_F \end{aligned}$$

de sorte que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T_n u - \bar{T}u\|_F \leq (C + \|\bar{T}\|) \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui achève la démonstration. **q.e.d.**

Exemple 1.4. Soit $p \in [1, +\infty[$, et soit $E = L^p(\mathbb{R})$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , de puissance $p^{\text{ième}}$ sommable. Muni de la norme

$$(1.6) \quad \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

E admet pour sous-espace dense l'espace D des fonctions continues à support compact.

Pour tout réel h , soit $\tau_h : E \rightarrow E$ l'opérateur de translation défini par

$$(1.7) \quad \tau_h f(x) = f(x - h).$$

Alors τ_h est une isométrie de E et, pour toute fonction f continue à support compact

$$(1.8) \quad \|\tau_h f - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

En appliquant le théorème 1.8 à la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $T_n = \tau_{h_n}$, où $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite quelconque de réels tendant vers 0, on en déduit que (1.8) reste vraie pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$.

1.2. Principe de la borne uniforme

Théorème 1.5 (Banach-Steinhaus). Soient E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé, et $(T_j)_{j \in J}$ une famille d'opérateurs linéaires de E vers F vérifiant

$$(1.9) \quad \forall u \in E, \quad \sup_{j \in J} \|T_j u\|_F < +\infty.$$

Alors (1.9) a lieu uniformément sur la boule unité de E , i.e.

$$(1.10) \quad \sup_{j \in J} \|T_j\|_{E \rightarrow F} < +\infty.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$A_n = \left\{ u \in E, \sup_{j \in J} \|T_j u\|_F \leq n \right\}.$$

L'ensemble A_n est fermé dans E (c'est une intersection de fermés) et l'hypothèse (1.9) assure que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = E.$$

Puisque E est complet, il possède la propriété de Baire : une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide. En conséquence, l'un des A_n est d'intérieur non vide. Comme $A_n = nA_1$, A_1 est d'intérieur non vide. Puisque A_1 est égal à $-A_1$ et est convexe, $\overset{\circ}{A}_1$ a les mêmes propriétés ; si $u_0 \in \overset{\circ}{A}_1$, on a donc

$$0 = \frac{1}{2}(u_0 - u_0) \in \frac{1}{2}(\overset{\circ}{A}_1 - \overset{\circ}{A}_1) \subset \overset{\circ}{A}_1 .$$

Soit alors $r > 0$ tel que la boule fermée de centre 0 et de rayon r soit contenue dans A_1 . Pour tout élément u de la boule unité de E , on a donc $ru \in A_1$, et

$$\forall j \in J, \quad r \|T_j u\|_F \leq 1$$

soit

$$\forall j \in J, \quad \|T_j\|_{E \rightarrow F} \leq \frac{1}{r} .$$

q.e.d.

Corollaire 1.6. Soient E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé, et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $u \in E$, $T_n u$ ait une limite. Alors

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{E \rightarrow F} < +\infty .$$

En particulier, une limite simple d'applications linéaires continues de E vers F est continue.

1.3. Le théorème de l'application ouverte et ses variantes

Théorème 1.7 (Banach). Soient E, F des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que T est surjective. Alors T est ouverte, i.e. l'image par T de tout ouvert de E est un ouvert de F .

Démonstration. Notons B_E, B_F les boules unité fermées de E, F respectivement. Puisque T est linéaire, il suffit de montrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$(1.11) \quad r B_F \subset T(B_E) .$$

Pour tout entier naturel n , notons

$$A_n = \overline{T(nB_E)} .$$

Alors A_n est un fermé de F et

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = F$$

puisque T est surjective. Puisque F est complet, la propriété de Baire assure que l'un des A_n a un intérieur non vide; puisque T est linéaire $A_n = nA_1$, donc $\overset{\circ}{A}_1 \neq \emptyset$. De plus, $\overset{\circ}{A}_1 = -\overset{\circ}{A}_1$ et $\overset{\circ}{A}_1$ est convexe, donc

$$0 \in \frac{1}{2}(\overset{\circ}{A}_1 - \overset{\circ}{A}_1) \subset \overset{\circ}{A}_1 .$$

Il existe donc $R > 0$ tel que

$$(1.12) \quad RB_F \subset \overline{T(B_E)}.$$

La deuxième étape de la démonstration consiste à passer de (1.12) à (1.11), quitte à choisir $r < R$. En utilisant une fois encore la linéarité de T , on peut traduire la propriété (1.12) sous la forme suivante :

(1.13) pour tout $v \in F$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \in E$ tel que

$$\|v - Tu\|_F \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \|u\|_E \leq \frac{1}{R} \|v\|_F .$$

Appliquons cette propriété à $v \in \frac{R}{2} B_F$. Il existe $u_1 \in E$ tel que

$$\|u_1\|_E \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \|v - Tu_1\|_F \leq \frac{R}{4} .$$

En appliquant la propriété (1.13) à $v_1 = v - Tu_1$, il existe $u_2 \in E$ tel que

$$\|u_2\|_E \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \|v - Tu_1 - Tu_2\|_F \leq \frac{R}{8} .$$

On construit ainsi par récurrence une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de E vérifiant

$$\|u_n\|_E \leq 2^{-n} \quad \text{et} \quad \left\| v - \sum_{k=1}^n Tu_k \right\|_F \leq \frac{R}{2^{n+1}} .$$

Puisque la série des $\|u_n\|_E$ est convergente, la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^n u_k \right)_{n \geq 1}$ vérifie le critère de Cauchy. L'espace E étant complet, elle est convergente. Posons

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k .$$

Alors $\|u\|_E \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_E \leq 1$ et, puisque l'application T est continue,

$$Tu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n Tu_k = v .$$

On a donc montré (1.11) avec $r = \frac{R}{2}$.

q.e.d.

Corollaire 1.8 (théorème de l'isomorphisme). *Soient E, F des espaces de Banach. Toute bijection linéaire continue de E sur F a un inverse continu. En particulier, si deux normes rendent un même espace vectoriel complet et sont comparables, elles sont équivalentes.*

En effet, si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective et $U \subset E$ est ouvert, $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ est ouvert donc T^{-1} est continue. Si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont deux normes sur un espace vectoriel E qui le rendent complet et s'il existe $C > 0$ tel que $\|\cdot\|_2 \leq C\|\cdot\|_1$, l'application identique $(E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2)$ est une bijection linéaire continue. La continuité de son inverse assure l'existence de $D > 0$ tel que $\|\cdot\|_1 \leq D\|\cdot\|_2$, de sorte que ces deux normes sont équivalentes.

Corollaire 1.9 (théorème du graphe fermé). *Soient E, F des espaces de Banach et $T : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors T est continue si et seulement si le graphe de T est fermé dans $E \times F$, c'est-à-dire : pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E vérifiant $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u$ dans E et $Tu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v$ dans F , on a $v = Tu$.*

Démonstration. Soit $\Gamma = \{(u, Tu), u \in E\} \subset E \times F$ le graphe de T . Puisque T est linéaire, Γ est un sous-espace vectoriel de $E \times F$. Il est clair que la continuité de T assure que Γ est fermé dans $E \times F$. Il s'agit donc de montrer la réciproque. Puisque E, F sont des espaces de Banach, $E \times F$ est un espace de Banach. Si Γ est fermé, Γ est donc également un espace de Banach. Soient p_1, p_2 la première et la seconde projection de $E \times F$ sur E, F respectivement. L'application p_1 est continue et sa restriction à Γ est une bijection linéaire continue de Γ sur E . Sa réciproque q est donc continue en vertu du corollaire 1.8; en conséquence, $p_2 \circ q = T$ est continue. **q.e.d.**

Exemple 1.10. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et soient E, F des sous-espaces vectoriels de l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur Ω . On suppose que E, F sont munis respectivement de normes $\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F$ qui les rendent complets, et telles que toute suite de E (resp. de F) qui converge vers 0 pour $\|\cdot\|_E$ (resp. $\|\cdot\|_F$) converge vers 0 au sens des distributions.

On suppose que $E \subset F$. Alors il existe $C > 0$ tel que $\|\cdot\|_F \leq C\|\cdot\|_E$.

En effet, appliquons le théorème du graphe fermé à l'injection canonique $j : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$. Si (u_n) est une suite de E convergeant vers u pour $\|\cdot\|_E$ et telle que u_n converge vers $v \in F$ pour $\|\cdot\|_F$, alors $u_n - u$ et $u_n - v$ tendent vers 0 au sens des distributions, donc $v = u$.

Plus généralement, on montre par la même méthode qu'une application linéaire "naturelle" entre deux espaces de Banach de distributions est automatiquement continue. Au niveau plus général encore des espaces de Banach abstraits, on peut montrer (travaux de Solovay) que, sans l'axiome du choix, il est impossible de montrer l'existence d'une application linéaire discontinue entre deux espaces de Banach !

CHAPITRE II

SEMI-GROUPES D'OPÉRATEURS LINÉAIRES

2.1. Généralités

Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , dont la norme sera notée $\| \cdot \|$. On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires continus de E dans E . Remarquons que, muni du produit de composition des applications, $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre dont l'élément unité est l'application identique. Pour cette raison, nous noterons simplement $T_1 T_2$ le produit de composition $T_1 \circ T_2$ des éléments T_1, T_2 de $\mathcal{L}(E)$, et 1 l'application identique. Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, nous noterons

$$\|T\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Tu\|$$

la norme sur $\mathcal{L}(E)$, qui en fait un espace de Banach. On vérifie aisément l'inégalité

$$(2.1) \quad \|T_1 T_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\|$$

pour tous $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E)$. On traduit l'ensemble de ces propriétés en disant que $(\mathcal{L}(E), \| \cdot \|)$ est une algèbre de Banach.

Définition 2.1. *Un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires sur E (en abrégé semi-groupe sur E) est une application*

$$S : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $S(0) = 1$.
- (ii) Pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$.
- (iii) Pour tout $u \in E$, l'application

$$t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto S(t)u \in E$$

est continue.

Remarque et exemple 2.2. On prendra soin de noter que la condition (iii) n'entraîne pas en général la continuité de l'application $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(E)$ lorsque $\mathcal{L}(E)$ est munie de sa norme naturelle. Cette distinction apparaîtra plus clairement au paragraphe suivant, mais voici d'ores et déjà un exemple qui l'illustre bien.

Soit $E = L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty[$ et, pour tout $t \geq 0$, $S(t) = \tau_t$ défini par

$$\tau_t u(x) = u(x - t).$$

On a déjà vu (exemple 1.4) que τ_t était une isométrie de E et que la propriété (iii) était vérifiée. Quant aux propriétés (i) et (ii), elles sont triviales. Soit $t > 0$, et soit u la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, t[\subset \mathbb{R}$. Alors $\tau_t u$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[t, 2t[$, de sorte que

$$\|\tau_t u - u\|_p^p = 2t, \quad \|u\|_p^p = t$$

et donc

$$\|\tau_t - 1\| \geq \frac{\|\tau_t u - u\|_p}{\|u\|_p} = 2^{1/p}$$

ce qui contredit la continuité en 0 de l'application $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \tau_t \in (\mathcal{L}(E), \|\cdot\|)$.

Proposition 2.3 (estimation *a priori*). Soit S un semi-groupe sur E . Il existe $C > 0$ et $\omega \geq 0$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$(2.2) \quad \|S(t)\| \leq C e^{\omega t}.$$

Démonstration. Appliquons le principe de la borne uniforme (théorème 1.5) de Banach-Steinhaus à la famille $(S(t))_{t \in [0,1]}$. D'après la propriété (iii), pour tout $u \in E$,

$$\sup_{t \in [0,1]} \|S(t)u\| < +\infty.$$

En conséquence

$$\sup_{t \in [0,1]} \|S(t)\| = C < +\infty.$$

Soit alors $t \in \mathbb{R}_+$ quelconque; désignons par n la partie entière de t , et $\tau = t - n \in [0, 1[$. Alors la propriété (ii) assure que

$$S(t) = S(\tau)S(n) = S(\tau)S(1)^n$$

donc, d'après l'inégalité (2.1),

$$\|S(t)\| \leq \|S(\tau)\| \|S(1)\|^n \leq C \cdot C^n \leq C e^{\omega t}$$

en notant $\omega = \text{Log } C \geq 0$ (car $C \geq \|S(0)\| = 1$).

q.e.d.

2.2. Générateur infinitésimal

Commençons par clarifier la distinction introduite dans la remarque 2.2 en caractérisant les semi-groupes S sur E vérifiant **de plus** la propriété suivante, strictement plus forte que (iii),

$$(iv) \quad S = \mathbb{R}_+ \longrightarrow (\mathcal{L}(E), \| \cdot \|) \text{ est continue.}$$

Dans ce cas, on va voir que S a une forme très particulière. Pour cela, intégrons de 0 à ε l'identité

$$(2.3) \quad S(\tau + t) = S(\tau)S(t),$$

l'intégrale étant prise au sens de l'exemple 1.2. Il vient

$$(2.4) \quad \int_t^{\varepsilon+t} S(\lambda) d\lambda = \left(\int_0^\varepsilon S(\tau) d\tau \right) S(t).$$

Toujours d'après l'exemple 1.2, on a

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon S(\tau) d\tau \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} S(0) = 1.$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, l'opérateur $\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon S(\tau) d\tau$ est donc inversible dans $\mathcal{L}(E)$, en vertu du lemme suivant :

Lemme 2.4 (série de Neumann). *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|1 - T\| < 1$. Alors T est inversible, et*

$$T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - T)^n.$$

Démonstration du lemme. D'après l'inégalité (2.1),

$$\|(1 - T)^n\| \leq \|1 - T\|^n,$$

donc la série de terme général $(1 - T)^n$ est convergente dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(E)$. Puisque

$$T \sum_{n=0}^N (1 - T)^n = \left(\sum_{n=0}^N (1 - T)^n \right) T = 1 - (1 - T)^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$$

le lemme en résulte. **q.e.d.**

Revenons à la formule (2.4). Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\int_0^\varepsilon S(\tau) d\tau = \varepsilon \times \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon (S(\tau) d\tau)$ est donc inversible, et

$$S(t) = \left(\int_0^\varepsilon S(\tau) d\tau \right)^{-1} \left(\int_t^{\varepsilon+t} S(\lambda) d\lambda \right)$$

définit une application de classe C^1 de \mathbb{R}_+ dans $\mathcal{L}(E)$. En posant $B = S'(0)$ et en prenant la dérivée de (2.3) en $\tau = 0$, il vient

$$(2.5) \quad S'(t) = BS(t).$$

Il est aisé de démontrer que l'équation différentielle (2.5) a une unique solution vérifiant $S(0) = 1$. Celle-ci est donnée explicitement à l'aide de l'application exponentielle, définie sur $\mathcal{L}(E)$ par

$$(2.6) \quad \exp(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!}.$$

La convergence de la série ci-dessus est assurée par l'inégalité $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ et le fait que $\mathcal{L}(E)$ est complet. On vérifie alors, comme dans le cas matriciel, que $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E)$ vérifient $T_1 T_2 = T_2 T_1$, $\exp(T_1 + T_2) = \exp(T_1) \exp(T_2)$. En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $A \in \mathcal{L}(E)$,

$$(2.7) \quad \frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA) = \exp(tA) A.$$

En revenant à (2.5), on conclut, pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{d}{dt} (\exp(-tB) S(t)) = 0$$

d'où

$$(2.8) \quad S(t) = \exp(tB).$$

Réciproquement, si B est un élément quelconque de $\mathcal{L}(E)$, l'application S définie par (2.8) vérifie les propriétés (i), (ii) et (iv).

Récapitulons ces résultats dans la proposition suivante.

Proposition 2.5. *Les applications $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(E)$ vérifiant les propriétés (i), (ii), (iv) sont les applications de la forme (2.8), où $B \in \mathcal{L}(E)$.*

Pour des raisons qui apparaîtront plus claires dans l'étude des semi-groupes de contractions sur un espace de Hilbert, on a coutume d'introduire l'opérateur $A = -B$ et de l'appeler **générateur infinitésimal** du semi-groupe S vérifiant (i), (ii), (iv). La formule $S(t) = e^{-tA}$ se traduit alors par le fait que, pour tout élément u de E , la fonction $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ définie par $u(t) = S(t)u_0$ est l'unique solution du "problème de Cauchy"

$$(2.9) \quad u'(t) + Au(t) = 0, \quad u(0) = u_0.$$

En d'autres termes, $S(t)$ est la "résolvante" de l'équation différentielle $u' + Au = 0$. C'est cette interprétation qui sera notre point de départ pour l'étude générale des semi-groupes. Elle débouche notamment sur la définition suivante.

Définition 2.6. *Soit S un semi-groupe sur E (au sens de la définition 2.1). On appelle **générateur infinitésimal** de S l'application linéaire $A : D(A) \rightarrow E$, où $D(A)$ est le sous-espace vectoriel de E constitué des vecteurs u tels que l'application $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto S(t)u$ soit dérivable à droite en 0, avec*

$$Au = -\frac{d}{dt}(S(t)u)|_{t=0+}.$$

Exercice 2.7. Montrer que le générateur infinitésimal du semi-groupe des translations sur $L^p(\mathbb{R})$ (exemple 2.2) est donné par

$$D(A) = \{u \in L^p(\mathbb{R}), u' \in L^p(\mathbb{R})\}, \quad Au = u'$$

(la dérivée étant prise au sens des distributions sur \mathbb{R}).

Proposition 2.8. *Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe S sur E . Alors, pour tout $t \geq 0$, $D(A)$ est stable par $S(t)$ et, pour tout $u \in D(A)$,*

$$AS(t)u = S(t)Au.$$

De plus, $D(A)$ est dense dans E et le graphe de A est fermé dans $E \times E$.

Démonstration. Soient $t \geq 0$ et $u \in D(A)$. Pour tout $h > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1 - S(h)}{h} S(t)u &= \frac{S(t) - S(h+t)}{h} u \\ &= S(t) \frac{1 - S(h)}{h} u \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} S(t) Au, \end{aligned}$$

puisque $S(t)$ est continue. On en déduit la première assertion de la proposition. Les autres assertions reposent sur le lemme suivant.

Lemme 2.9. Pour tout $u \in E$, pour tout $\varepsilon > 0$, posons

$$(2.10) \quad J_\varepsilon u = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon S(t)u dt.$$

Alors l'application $J_\varepsilon : E \rightarrow E$ ainsi définie est linéaire continue, et $J_\varepsilon u \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} u$. De plus, pour tout $h > 0$, on a l'identité

$$(2.11) \quad \frac{S(h) - 1}{h} J_\varepsilon = \frac{S(\varepsilon) - 1}{\varepsilon} J_h = J_h \frac{S(\varepsilon) - 1}{\varepsilon}.$$

Démonstration du lemme. Le fait que $J_\varepsilon u \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} u$ est conséquence de la continuité en 0 de l'application $t \mapsto S(t)u$. La linéarité de l'application J_ε provient de celle de $S(t)$ pour tout t , tandis que sa continuité résulte de l'inégalité

$$\|J_\varepsilon u\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \|S(t)u\| dt$$

et de l'estimation *a priori* (2.2) (proposition 2.3). Enfin, si $h > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{S(h) - 1}{h} J_\varepsilon u &= \frac{1}{\varepsilon h} \left[S(h) \int_0^\varepsilon S(t)u dt - \int_0^\varepsilon S(t)u dt \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon h} \left[\int_0^\varepsilon S(h+t)u dt - \int_0^\varepsilon S(t)u dt \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon h} \left[\int_h^{h+\varepsilon} S(\tau)u d\tau - \int_0^\varepsilon S(t)u dt \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon h} \left[\int_\varepsilon^{h+\varepsilon} S(\tau)u d\tau - \int_0^h S(t)u dt \right], \end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles. On constate alors que les rôles de h et de ε sont inversés dans les deux dernières identités, ce qui conduit à la première partie de (2.11). La seconde partie résulte de ce que J_h et $S(\varepsilon)$ commutent pour tous h, ε . **q.e.d.**

Achevons la démonstration de la proposition 2.8. Soit $u \in E$. D'après le lemme 2.9 et la continuité de $S(\varepsilon)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{S(h) - 1}{h} J_\varepsilon u = \frac{S(\varepsilon) - 1}{\varepsilon} J_h u \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \frac{S(\varepsilon) - 1}{\varepsilon} u.$$

On en déduit que $J_\varepsilon u \in D(A)$, avec

$$(2.12) \quad A J_\varepsilon u = \frac{1 - S(\varepsilon)}{\varepsilon} u.$$

Puisque $J_\varepsilon u \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} u$, il en résulte que $D(A)$ est dense. Notons que la deuxième partie de (2.11) et la continuité de J_h entraînent, pour tout $u \in D(A)$,

$$(2.13) \quad J_h A u = A J_h u.$$

Soit alors (u_n) une suite de $D(A)$ vérifiant

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u, \quad A u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v.$$

Alors, pour tout $h > 0$, le passage à la limite quand $n \rightarrow \infty$ dans la formule

$$J_h A u_n = \frac{1 - S(h)}{h} u_n$$

entraîne

$$J_h v = \frac{1 - S(h)}{h} u$$

d'où, en passant à la limite quand h tend vers 0^+ , $u \in D(A)$ et $v = Au$. Le graphe de A est donc fermé. **q.e.d.**

Le résultat suivant montre en quoi un semi-groupe S peut être considéré comme la résolvante d'une équation différentielle.

Théorème 2.10. *Soit S un semi-groupe sur E , et soit A son générateur infinitésimal. Soit $u_0 \in E$, et soit u la fonction continue de \mathbb{R}_+ dans E définie par $u(t) = S(t)u_0$.*

- a) *Si $u_0 \in D(A)$, alors u est de classe C^1 et, pour tout $t \geq 0$, $u'(t) + Au(t) = 0$. Réciproquement, si $v :]0, T[\rightarrow E$ est une fonction continue, dérivable sur $]0, T[$ et vérifiant, pour tout $t \in]0, T[$,*

$$(2.14) \quad v(t) \in D(A) \text{ et } v'(t) + Av(t) = 0,$$

alors $v(t) = S(t)v(0)$ pour tout $t \in [0, T]$.

b) (On ne suppose plus $u_0 \in D(A)$). Pour toute fonction $\psi :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1 à support compact, le vecteur $\int_0^\infty \psi(t)u(t)dt$ appartient à $D(A)$ et

$$A\left(\int_0^\infty \psi(t)u(t)dt\right) = \int_0^\infty \psi'(t)u(t)dt.$$

Réciproquement, si $v : [0, T] \rightarrow E$ est une fonction continue vérifiant, pour toute fonction $\psi :]0, T[\rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1 à support compact,

$$(2.15) \quad \int_0^T \psi(t)v(t)dt \in D(A) \text{ et } A\left(\int_0^T \psi(t)v(t)dt\right) = \int_0^T \psi'(t)v(t)dt,$$

alors $v(t) = S(t)v(0)$ pour tout $t \in [0, T]$.

Démonstration. Montrons d'abord la partie a). Si $u_0 \in D(A)$, on sait déjà par la proposition 2.8 que $u(t) \in D(A)$. Si $h > 0$,

$$(2.16) \quad \frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \frac{S(h) - 1}{h} u(t) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} -Au(t),$$

tandis que, pour $t \geq h$,

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \frac{u(t-h) - u(t)}{-h} &= \frac{S(t) - S(t-h)}{h} u_0 = S(t-h) \frac{S(h) - 1}{h} u_0 \\ &= -S(t-h) Au_0 + r_h, \end{aligned}$$

où

$$r_h = S(t-h) \left(\frac{S(h) - 1}{h} u_0 + Au_0 \right).$$

Compte tenu de la proposition 2.3, pour $t > 0$ fixé et $h \leq t$, on a $\|S(t-h)\| \leq M$, donc

$$\|r_h\| \leq M \left\| \frac{S(h) - 1}{h} u_0 + Au_0 \right\| \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0.$$

En revenant à (2.17), on observe que u est dérivable à gauche en tout $t > 0$, avec $u'(t^-) = -S(t)Au_0$, qui n'est autre que $-Au(t)$ d'après la proposition 2.8. En comparant avec (2.16), on conclut que u est dérivable sur \mathbb{R}_+ , avec

$$u'(t) = -Au(t) = -S(t)Au_0,$$

la dernière expression assurant que u est de classe C^1 . Pour montrer l'unicité, nous avons recours au lemme suivant.

Lemme 2.11. Soit w une fonction définie au voisinage de $t_0 > 0$, à valeurs dans E , dérivable en t_0 et telle que $w(t_0) \in D(A)$. Alors la fonction $t \mapsto S(t)w(t)$ est dérivable en t_0 , avec

$$\frac{d}{dt}(S(t)w(t))|_{t=t_0} = S(t_0)(w'(t_0) - Aw(t_0)).$$

Démonstration du lemme. Pour $h \neq 0$ assez petit, on écrit

$$(2.18) \quad \frac{S(t_0 + h)w(t_0 + h) - S(t_0)w(t_0)}{h} \\ = S(t_0 + h) \frac{w(t_0 + h) - w(t_0)}{h} + \frac{S(t_0 + h)w(t_0) - S(t_0)w(t_0)}{h}.$$

Puisque $w(t_0) \in D(A)$, on vient de voir que le deuxième terme du second membre de (2.18) tend vers $-S(t_0)Aw(t_0)$. Quant au premier terme, il s'écrit $S(t_0 + h)w'(t_0) + o(1)$, en utilisant à nouveau l'estimation *a priori* sur $\|S(t)\|$. **q.e.d.**

Soit $v : [0, T] \rightarrow E$ satisfaisant à (2.14), et soit $t_1 \in]0, T[$. D'après le lemme 2.11, on a, pour tout $t \in]0, t_1[$,

$$\frac{d}{dt} S(t)v(t_1 - t) = -S(t)(v'(t_1 - t) + Av(t_1 - t)) = 0,$$

donc, en comparant les valeurs de la fonction continue $t \mapsto S(t)v(t_1 - t)$ en $t = 0$ et $t = t_1$,

$$v(t_1) = S(t_1)v(0).$$

Cette identité, vraie pour tout $t_1 \in]0, T[$, se prolonge aux bornes de l'intervalle par continuité.

Passons à la partie b) du théorème. On utilise la famille $(J_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ introduite au lemme 2.9. Notons $u_\varepsilon(t) = J_\varepsilon u(t) = S(t)J_\varepsilon u_0$. Puisque $J_\varepsilon u_0 \in D(A)$, on peut appliquer la partie a) du théorème : la fonction u_ε est de classe C^1 et $u'_\varepsilon + Au_\varepsilon = 0$. En intégrant contre $\psi \in C_0^1(]0, \infty[)$, il vient

$$\int_0^\infty \psi(t) Au_\varepsilon(t) dt = \int_0^\infty \psi'(t) u_\varepsilon(t) dt.$$

Mais $u_\varepsilon(t) = J_\varepsilon u(t)$ et

$$Au_\varepsilon(t) = AJ_\varepsilon u(t) = \frac{1 - S(\varepsilon)}{\varepsilon} u(t).$$

Il en résulte que

$$\frac{1 - S(\varepsilon)}{\varepsilon} \int_0^\infty \psi(t) u(t) dt = J_\varepsilon \int_0^\infty \psi'(t) u(t) dt,$$

et la propriété voulue s'obtient en passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Réciproquement, soit $v : [0, T] \rightarrow E$ vérifiant (2.15) pour toute fonction $\psi \in C_0^1([0, T])$. Posons, pour tout $t \in [0, T]$,

$$v_\varepsilon(t) = J_\varepsilon v(t).$$

Alors $v_\varepsilon(t) \in D(A)$ pour tout t ,

$$Av_\varepsilon(t) = AJ_\varepsilon v(t) = \frac{1 - S(\varepsilon)}{\varepsilon} v(t)$$

est une fonction continue de t , et

$$\begin{aligned} (2.19) \quad \int_0^\infty \psi(t) Av_\varepsilon(t) dt &= AJ_\varepsilon \left(\int_0^\infty \psi(t) v(t) dt \right) \\ &= J_\varepsilon A \left(\int_0^\infty \psi(t) v(t) dt \right) \\ &= J_\varepsilon \left(\int_0^\infty \psi'(t) v(t) dt \right) \\ &= \int_0^\infty \psi'(t) v_\varepsilon(t) dt. \end{aligned}$$

Introduisons alors la fonction continue $w_\varepsilon : [0, T] \rightarrow E$ par

$$w_\varepsilon(t) = v_\varepsilon(t) + \int_0^t Av_\varepsilon(\tau) d\tau.$$

Alors (2.19) et une intégration par parties entraînent, pour toute fonction $\psi \in C_0^0([0, T])$,

$$(2.20) \quad \int_0^T \psi(t) w_\varepsilon(t) dt = 0.$$

Appliquons l'identité (2.20) à la fonction ψ_δ définie par

$$(2.21) \quad \psi_\delta(t) = \frac{1}{\delta} \int_0^t \left[\chi\left(\frac{\tau - t_0}{\delta}\right) - \chi\left(\frac{\tau - t_1}{\delta}\right) \right] d\tau,$$

où $t_0, t_1 \in]0, T[$, $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue à support compact d'intégrale 1, et $\delta > 0$ est assez petit. On obtient

$$(2.22) \quad \frac{1}{\delta} \int_0^T \chi\left(\frac{t - t_0}{\delta}\right) w_\varepsilon(t) dt = \frac{1}{\delta} \int_0^T \chi\left(\frac{t - t_1}{\delta}\right) w_\varepsilon(t) dt,$$

soit, en faisant tendre δ vers 0,

$$w_\varepsilon(t_0) = w_\varepsilon(t_1).$$

La fonction w_ε est donc constante sur $[0, T]$, ce qui se traduit sur v_ε par

$$(2.23) \quad v_\varepsilon(t) = v_\varepsilon(0) - \int_0^t Av_\varepsilon(\tau) d\tau$$

soit encore : v_ε est de classe C^1 et, pour tout $t \in [0, T]$,

$$v'_\varepsilon(t) + Av_\varepsilon(t) = 0.$$

En appliquant l'unicité de la partie a), il vient $v_\varepsilon(t) = S(t)v_\varepsilon(0)$, et la conclusion s'obtient en faisant tendre ε vers 0^+ . **q.e.d.**

En conclusion, un semi-groupe sur E est nécessairement la résolvante d'une équation différentielle $u' + Au = 0$, comprise au sens faible indiqué dans le théorème 2.10 b), à condition de considérer des opérateurs linéaires A définis sur des sous-espaces denses $D(A)$ de E . Un tel opérateur A est appelé **opérateur non borné** sur E . Un prototype (exercice 2.7) en est l'opérateur de dérivation sur $L^p(\mathbb{R})$, ou plus généralement un opérateur différentiel sur $L^p(\Omega)$ si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d .

Pour achever le parallèle avec la proposition 2.5, il reste à examiner une question importante : étant donné un opérateur non borné sur E , à quelle condition est-il le générateur infinitésimal d'un semi-groupe sur E ? La réponse à cette question fournira des conditions suffisantes pour résoudre le problème de Cauchy pour des équations différentielles du type $u' + Au = 0$ qui, lorsque A est un opérateur différentiel, se traduiront en équations aux dérivées partielles au sens des distributions.

2.3. Construction de semi-groupes : le théorème de Hille-Yosida

On dit qu'un opérateur linéaire $T : E \rightarrow E$ est une **contraction** si $\|T\| \leq 1$.

Le but de ce paragraphe est de donner une condition nécessaire et suffisante sur un opérateur non borné $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ pour que A soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions. Cette restriction par rapport à la question générale posée à la fin du paragraphe précédent n'est pas très importante, comme le suggère le résultat suivant.

Proposition 2.12. *Soit S un semi-groupe sur E , de générateur infinitésimal A . Alors il existe une norme équivalente $\|\cdot\|'$ sur E et $\omega \geq 0$ tels que $A + \omega$ engendre un semi-groupe de contractions sur $(E, \|\cdot\|')$.*

Esquisse de démonstration. Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, posons $S_\omega(t) = e^{-\omega t} S(t)$. On vérifie que S_ω est un semi-groupe sur E , de générateur infinitésimal $A + \omega$ (avec $D(A + \omega) = D(A)$).

D'après la proposition 2.3, il existe $\omega \geq 0$ tel que $\sup_{t \geq 0} \|S_\omega(t)\| < +\infty$. Pour tout $u \in E$, on pose alors

$$\|u\|' = \sup_{t \geq 0} \|S_\omega(t)u\|.$$

Il est clair que $\|\cdot\|'$ est une norme équivalente sur E . En effet, la sous-additivité et l'homogénéité sont triviales, l'inégalité $\|u\|' \geq \|u\|$ vient de ce que $S_\omega(0) = 1$, tandis que

$$\|u\|' \leq \sup_{t \geq 0} \|S_\omega(t)\| \|u\|.$$

Alors $\|S_\omega(\tau)u\|' = \sup_{t \geq 0} \|S_\omega(\tau + t)u\| \leq \|u\|'$, donc $S_\omega(\tau)$ est une contraction pour tout $\tau \geq 0$. **q.e.d.**

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 2.13 (Hille-Yosida). *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur non borné sur E , de domaine $D(A)$ dense dans E . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur E .*
- (ii) *Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que, pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, l'application $A + \lambda : D(A) \rightarrow E$ est bijective, et son inverse vérifie, pour tout $u \in E$,*

$$(2.24) \quad \|(A + \lambda)^{-1}u\| \leq \frac{1}{\lambda} \|u\|.$$

Dans ce cas, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, l'application $A + \lambda : D(A) \rightarrow E$ est bijective et son inverse vérifie, pour tout $u \in E$,

$$(2.25) \quad \|(A + \lambda)^{-1}u\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda)} \|u\|.$$

Démonstration. Montrons d'abord (i) \Rightarrow (ii) sous la forme forte (2.25). Supposons donc que A soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur E , noté S . Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. Pour tout $u \in E$, posons

$$(2.26) \quad R_\lambda u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)u dt,$$

l'intégrale dans le second membre de (2.26) devant être interprétée comme la limite dans E , quand $T \rightarrow +\infty$, de $\int_0^T e^{-\lambda t} S(t) u dt$. Cette limite existe car

$$(2.27) \quad \|e^{-\lambda t} S(t) u\| \leq e^{-\operatorname{Re}(\lambda)t} \|u\|$$

puisque $S(t)$ est une contraction. Il suffit donc d'appliquer le critère de Cauchy. L'application $R_\lambda : E \rightarrow E$ ainsi définie est linéaire, et l'estimation (2.27) entraîne que

$$(2.28) \quad \|R_\lambda u\| \leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}(\lambda)t} \|u\| dt = \frac{\|u\|}{\operatorname{Re}(\lambda)}.$$

Par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$, calculons

$$(2.29) \quad \begin{aligned} \frac{1 - S(\varepsilon)}{\varepsilon} R_\lambda u &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(\varepsilon + t) u dt \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u dt - \int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda(\tau - \varepsilon)} S(\tau) u d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon e^{-\lambda t} S(t) u dt + \frac{1}{\varepsilon} (1 - e^{\lambda\varepsilon}) \int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t} S(t) u dt. \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on en déduit $R_\lambda u \in D(A)$ et

$$(2.30) \quad A R_\lambda u = u - \lambda R_\lambda u.$$

Par ailleurs, (2.29) assure également que

$$\frac{1 - S(\varepsilon)}{\varepsilon} R_\lambda u = R_\lambda \frac{1 - S(\varepsilon)}{\varepsilon} u$$

donc, si $u \in D(A)$,

$$(2.31) \quad A R_\lambda u = R_\lambda A u.$$

On peut donc réécrire (2.30) et (2.31) sous la forme

$$\begin{cases} (\lambda + A) R_\lambda u = u & \text{pour tout } u \in E \\ R_\lambda (\lambda + A) u = u & \text{pour tout } u \in D(A) \end{cases}$$

ce qui assure que $\lambda + A : D(A) \rightarrow E$ est bijective, et que $R_\lambda = (\lambda + A)^{-1}$. Compte tenu de (2.28), on a montré la première implication.

Passons à la démonstration de (ii) \Rightarrow (i).

Pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, notons $R_\lambda = (\lambda + A)^{-1}$. Pour tout $u \in D(A)$, on a donc

$$\lambda R_\lambda u = -R_\lambda Au + u \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} u,$$

compte tenu de (2.24) appliqué au vecteur Au . De plus, (2.24) assure que $(\lambda R_\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0}$ est une famille de contractions sur E ; puisque $D(A)$ est dense dans E , le théorème 1.3 de prolongement de la convergence entraîne, pour tout $u \in E$,

$$(2.32) \quad \lambda R_\lambda u \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} u.$$

Posons alors, pour tout $\lambda \geq \lambda_0$,

$$(2.33) \quad A_\lambda = \lambda A R_\lambda = \lambda - \lambda^2 R_\lambda \in \mathcal{L}(E).$$

D'après (2.32), on a, pour tout $u \in D(A)$,

$$(2.34) \quad A_\lambda u = \lambda R_\lambda Au \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} Au.$$

Puisque $A_\lambda \in \mathcal{L}(E)$, on peut définir, pour tout t ,

$$(2.35) \quad S_\lambda(t) = \exp(-t A_\lambda)$$

au sens de (2.6).

Lemme 2.14. *Pour tout $t \geq 0$, pour tout $u \in E$, pour tous $\lambda, \mu \geq \lambda_0$,*

$$\|S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u\| \leq t \|A_\lambda u - A_\mu u\|.$$

Démonstration du lemme. En utilisant le fait que R_λ et R_μ commutent, on a $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$, donc

$$\begin{aligned} S_\lambda(t) - S_\mu(t) &= \exp(-t A_\mu)(\exp(-t(A_\lambda - A_\mu)) - 1) \\ &= -\exp(-t A_\mu) \int_0^t \exp(-\tau(A_\lambda - A_\mu))(A_\lambda - A_\mu) d\tau \\ &= -\int_0^t \exp(-\tau A_\lambda) \exp(-(t - \tau) A_\mu)(A_\lambda - A_\mu) d\tau \end{aligned}$$

soit encore, pour tout $u \in E$,

$$(2.36) \quad S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u = -\int_0^t S_\lambda(\tau) S_\mu(t - \tau)(A_\lambda u - A_\mu u) d\tau.$$

Or $S_\lambda(t) = \exp(-t(\lambda - \lambda^2 R_\lambda)) = e^{-\lambda t} \exp(t\lambda^2 R_\lambda)$, donc, d'après l'inégalité triangulaire dans (2.6)

$$(2.37) \quad \|S_\lambda(t)\| \leq e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 \|R_\lambda\|} \leq 1$$

compte tenu de (2.24). En revenant à (2.36) il vient, en tenant compte de (2.37),

$$\begin{aligned} \|S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u\| &\leq \int_0^t \|S_\lambda(\tau)\| \|S_\mu(t-\tau)\| \|A_\lambda u - A_\mu u\| d\tau \\ &\leq t \|A_\lambda u - A_\mu u\|. \end{aligned}$$

q.e.d.

Nous pouvons maintenant achever la démonstration de (ii) \Rightarrow (i). Pour tout $T > 0$, l'espace vectoriel F_T des fonctions continues de $[0, T]$ dans E , muni de la norme

$$\|f\|_T = \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|,$$

est complet. Pour tout $u \in E$, pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, désignons par $\tilde{S}_\lambda u$ l'élément de F_T défini par

$$(2.38) \quad \tilde{S}_\lambda u(t) = S_\lambda(t)u.$$

L'application $\tilde{S}_\lambda : E \rightarrow F_T$ ainsi définie est linéaire, et vérifie

$$(2.39) \quad \|\tilde{S}_\lambda u\|_T = \max_{0 \leq t \leq T} \|S_\lambda(t)u\| = \|u\|$$

d'après (2.37) et le fait que $S_\lambda(0) = 1$. Enfin, le lemme 2.14 entraîne

$$(2.40) \quad \|\tilde{S}_\lambda u - \tilde{S}_\mu u\|_T \leq T \|A_\lambda u - A_\mu u\|.$$

Soit alors $u \in D(A)$. D'après (2.34), $A_\lambda u$ converge quand $\lambda \rightarrow +\infty$, donc est de Cauchy, et (2.40) implique que $\tilde{S}_\lambda u$ est de Cauchy dans F_T , donc converge. Puisque $D(A)$ est dense dans E , le théorème 1.3 de prolongement de la convergence assure que $\tilde{S}_\lambda u$ a une limite $\tilde{S}u \in F_T$ pour tout $u \in E$. Ceci étant vrai pour tout $T > 0$, on en déduit l'existence, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, d'une application linéaire $S(t) : E \rightarrow E$ vérifiant, pour tout $u \in E$,

$$(2.41) \quad S_\lambda(t)u \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} S(t)u$$

uniformément en $t \in [0, T]$, pour tout $T > 0$. Puisque S_λ est un semi-groupe de contractions, il en est de même pour S .

Il reste à montrer que A est le générateur infinitésimal de S . Désignons par \tilde{A} Ce générateur infinitésimal. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'identité

$$\frac{1}{\varepsilon}(u - S_\lambda(\varepsilon)u) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon S_\lambda(t) A_\lambda u dt$$

devient, si $u \in D(A)$ et $\lambda \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{\varepsilon}(u - S(\varepsilon)u) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon S(t) A u dt.$$

En faisant tendre ε vers 0^+ , on en déduit que $D(A) \subset D(\tilde{A})$ et $\tilde{A}|_{D(A)} = A$. Soit alors $u \in D(\tilde{A})$. Puisque $\lambda_0 + A : D(A) \rightarrow E$ est surjectif, il existe $v \in D(A)$ tel que

$$(\lambda_0 + A)v = (\lambda_0 + \tilde{A})u$$

soit encore $(\lambda_0 + \tilde{A})v = (\lambda_0 + \tilde{A})u$. Or, d'après l'implication (i) \Rightarrow (ii) déjà montrée, $\lambda_0 + \tilde{A} : D(\tilde{A}) \rightarrow E$ est injectif, donc $v = u$, et $D(\tilde{A}) = D(A)$, $\tilde{A} = A$. **q.e.d.**

En combinant les théorèmes 2.10, 2.13 et en tenant compte du lien déjà observé entre les générateurs infinitésimaux de $t \mapsto S(t)$ et de $t \mapsto e^{-\omega t} S(t)$, on obtient le résultat suivant d'existence et d'unicité de solutions au problème de Cauchy pour des équations du type $u' + Au = 0$.

Corollaire 2.15. *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur non borné de domaine $D(A)$ dense dans E . On suppose qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $\lambda_0 > \omega$ tels que, pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, l'application*

$$\lambda + A : D(A) \longrightarrow E$$

soit bijective et vérifie, pour tout $v \in E$,

$$(2.42) \quad \|(\lambda + A)^{-1}v\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega} \|v\|.$$

Alors, pour tout $u_0 \in E$, il existe une unique fonction $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ continue vérifiant $u(0) = u_0$ et, pour toute fonction $\psi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1 à support compact,

$$(2.43) \quad \int_0^\infty \psi(t) u(t) dt \in D(A) \quad \text{et} \quad A \left(\int_0^\infty \psi(t) u(t) dt \right) = \int_0^\infty \psi'(t) u(t) dt.$$

Lorsque $u_0 \in D(A)$, on peut remplacer (2.43) par

$$(2.44) \quad u \in C^1(\mathbb{R}_+, E) \text{ et } \forall t \geq 0, \quad u(t) \in D(A), \quad u'(t) + Au(t) = 0.$$

De plus, pour tout $t \geq 0$, on a l'estimation

$$(2.45) \quad \|u(t)\| \leq e^{\omega t} \|u_0\|.$$

Remarque 2.16. Génération d'un groupe d'opérateurs. Il arrive que les hypothèses du corollaire 2.15 soient vraies simultanément pour A et pour $-A$. Alors, en désignant par S_+ le semi-groupe engendré par A et par S_- le semi-groupe engendré par $-A$, on vérifie aisément que $S_-(t)$ et $S_+(t)$ sont inverses l'un de l'autre. Dès lors, l'application $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par

$$S(t) = \begin{cases} S_+(t) & \text{si } t \geq 0 \\ S_-(-t) & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

satisfait aux propriétés suivantes :

- (i) $S(0) = 1$.
- (ii) Pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$.
- (iii) Pour tout $u \in E$, l'application

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto S(t)u \in E$$

est continue.

Le corollaire 2.15 s'étend alors sans difficulté sous la forme suivante : pour tout $u_0 \in E$, la fonction $u : t \in \mathbb{R} \mapsto S(t)u_0 \in E$ est l'unique fonction continue de \mathbb{R} dans E satisfaisant à $u(0) = u_0$ et, pour toute fonction $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, C^1 à support compact,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)u(t)dt \in D(A) \quad \text{et} \quad A\left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)u(t)dt\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(t)u(t)dt,$$

cette dernière condition pouvant être remplacée, si $u_0 \in D(A)$, par

$$u \in C^1(\mathbb{R}, E) \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) \in D(A), \quad u'(t) + Au(t) = 0.$$

L'application S est appelée le **groupe** engendré par A . Un cas particulier intéressant est celui où chaque $S(t)$ est une isométrie de E (comme dans l'exemple 2.2) ce qui équivaut

au fait que $S_+(t)$ et $S_-(t)$ soient des contractions pour tout $t \geq 0$, c'est-à-dire, d'après le théorème de Hille-Yosida, au fait que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda + A : D(A) \rightarrow E$ soit bijection et vérifie, pour tout $u \in E$,

$$\|(\lambda + A)^{-1}u\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|u\|.$$

Notation 2.17. Par analogie avec la proposition 2.4, si A vérifie les hypothèses du corollaire 2.15 et S est le semi-groupe engendré par A , on note

$$S(t) = \exp(-tA),$$

de sorte que la solution u de (2.43) vérifiant $u(0) = u_0$ s'écrit

$$u(t) = \exp(-tA)u_0.$$

2.4. Le cas des espaces de Hilbert

Dans ce paragraphe, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que $E = \mathcal{H}$ est un espace de Hilbert (voir par exemple le cours de G. Lebeau, *Théorie des distributions et analyse de Fourier*). Rappelons que \mathcal{H} est muni d'une application

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\longmapsto (u|v) \end{aligned}$$

appelée produit scalaire, \mathbb{C} linéaire en v , anti- \mathbb{C} linéaire en u , et vérifiant les propriétés suivantes :

- a) $(u|v) = \overline{(v|u)}$ (symétrie hermitienne)
- b) $(u|u) > 0$ pour tout $u \neq 0$.

On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|(u|v)|^2 \leq C(u|u)(v|v)$$

qui assure que l'application $u \mapsto \|u\| = (u|u)^{1/2}$ est bien une norme. Nous supposons enfin que \mathcal{H} , muni de cette norme, est complet. Cette structure entraîne plusieurs propriétés remarquables (projection orthogonale sur un convexe fermé, décomposition orthogonale associée à un sous-espace fermé, caractérisation des formes linéaires continues, ...) pour

lesquelles nous renvoyons au cours de G. Lebeau déjà cité. Nous nous contenterons ici de rappeler sans démonstration l'une de ces propriétés, très utile en théorie des opérateurs.

Proposition 2.18 (lemme des opérateurs coercifs). *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel qu'il existe $C > 0$ vérifiant, pour tout $u \in \mathcal{H}$,*

$$|(Tu|u)| \geq C \|u\|^2.$$

Alors T est bijectif.

Le but de ce paragraphe est de donner une nouvelle caractérisation des générateurs infinitésimaux de semi-groupes de contractions sur \mathcal{H} . Pour cela, introduisons une définition.

Définition 2.19. *Soit $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur non borné dans \mathcal{H} . On dit que A est **accréatif** si, pour tout $u \in D(A)$,*

$$\operatorname{Re}(Au|u) \geq 0.$$

*On dit que A est **maximal accréatif** s'il est accréatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 + A$ soit surjectif de $D(A)$ sur \mathcal{H} .*

Remarque 2.20. Si A est accréatif, alors, pour tout $\lambda > 0$, pour tout $u \in D(A)$,

$$(2.46) \quad \operatorname{Re}((\lambda + A)u|u) = \lambda \|u\|^2 + \operatorname{Re}(Au|u) \geq \lambda \|u\|^2,$$

de sorte que $\lambda + A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ est injectif. Ainsi, si A est maximal accréatif, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 + A$ soit bijectif de $D(A)$ sur \mathcal{H} .

Par ailleurs, si A est maximal accréatif, $D(A)$ est toujours dense. En effet, soit v un vecteur orthogonal à $D(A)$. Par hypothèse, il existe $u \in D(A)$ tel que $v = (\lambda_0 + A)u$. Alors

$$0 = \operatorname{Re}(v|u) = \operatorname{Re}((\lambda_0 + A)u|u) \geq \lambda_0 \|u\|^2$$

donc $u = 0$, et finalement $v = 0$.

Théorème 2.21. *Sur un espace de Hilbert, les générateurs infinitésimaux de semi-groupes de contractions sont les opérateurs maximaux accréatifs.*

Démonstration. Supposons que A soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions S sur \mathcal{H} . Alors $D(A)$ est dense dans \mathcal{H} (proposition 2.8), et, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$(2.47) \quad \operatorname{Re}(S(t)u|u) \leq \|S(t)u\| \|u\| \leq \|u\|^2.$$

Si $u \in D(A)$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(Au|u) &= -\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(S(t)u|u)|_{t=0^+} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|u\|^2 - \operatorname{Re}(S(t)u|u)}{t} \geq 0 \end{aligned}$$

en vertu de (2.47). L'opérateur A est donc accréatif. Enfin, d'après le théorème 2.13, $\lambda + A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ est bijectif pour tout $\lambda > 0$.

Réciproquement, soit A un opérateur maximal accréatif sur \mathcal{H} , et soit $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 + A$ soit bijectif de $D(A)$ sur \mathcal{H} . Pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, considérons l'application linéaire $T_\lambda : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ définie par

$$T_\lambda u = u + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 + A)^{-1}u.$$

On remarque que $T_\lambda \circ (\lambda_0 + A) = \lambda + A$, de sorte que $\lambda + A$ est bijectif de $D(A)$ sur \mathcal{H} si et seulement si T_λ est bijectif de \mathcal{H} sur \mathcal{H} .

De plus, pour tout $\lambda > 0$, pour tout $u \in D(A)$, l'inégalité (2.46) combinée à l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$(2.48) \quad \|(\lambda + A)u\| \geq \lambda \|u\|,$$

de sorte, si $\lambda + A$ est bijectif de $D(A)$ sur \mathcal{H} , on a, pour tout $v \in \mathcal{H}$,

$$(2.49) \quad \|(\lambda + A)^{-1}v\| \leq \frac{1}{\lambda} \|v\|.$$

Compte tenu du théorème de Hille-Yosida (et de la remarque 2.20 assurant la densité de $D(A)$), il nous suffit donc de montrer que T_λ est bijectif de \mathcal{H} sur \mathcal{H} pour tout $\lambda \geq \lambda_0$. En vertu de (2.49) pour $\lambda = \lambda_0$, $T_\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. De plus, pour tout $v \in \mathcal{H}$,

$$(2.50) \quad |(T_\lambda v|v)| \geq \operatorname{Re}(T_\lambda v|v) = \|v\|^2 + (\lambda - \lambda_0) \operatorname{Re}((\lambda_0 + A)^{-1}v|v).$$

Mais, en appliquant l'inégalité (2.46) à $\lambda = \lambda_0$ et à $u = (\lambda_0 + A)^{-1}v$, on constate que

$$\operatorname{Re}((\lambda_0 + A)^{-1}v|v) \geq \lambda_0 \|(\lambda_0 + A)^{-1}v\|^2 \geq 0,$$

donc, en revenant à (2.50), pour $\lambda \geq \lambda_0$,

$$|(T_\lambda v|v)| \geq \|v\|^2.$$

L'opérateur T_λ est donc coercif, donc bijectif d'après la proposition 2.18.

q.e.d.

En tenant compte du théorème 2.21, le corollaire 2.15 et la fin de la remarque 2.16 se traduisent par les résultats suivants.

Corollaire 2.22. *Soit $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ de domaine $D(A)$ dense dans \mathcal{H} . On suppose qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $\lambda_0 > \omega$ tels que $\lambda_0 + A$ soit surjectif de $D(A)$ sur \mathcal{H} et, pour tout $u \in D(A)$,*

$$\operatorname{Re}(Au|u) \geq -\omega \|u\|^2.$$

Alors on a les conclusions du corollaire 2.15.

Corollaire 2.23. *Sur un espace de Hilbert, les générateurs infinitésimaux de groupes d'isométries sont les opérateurs non bornés vérifiant les deux propriétés suivantes :*

(i) *pour tout $u \in D(A)$, $\operatorname{Re}(Au|u) = 0$.*

(ii) *Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 + A$ et $\lambda_0 - A$ soient surjectifs de $D(A)$ sur \mathcal{H} .*

Terminons ce chapitre par une remarque sur le problème inhomogène

$$(2.51) \quad \frac{du}{dt} + Au = f, \quad u(0) = u_0.$$

Le cadre des espaces de Hilbert séparables se prête bien à des conditions raisonnablement optimales sur la fonction f pour que (2.51) admette une solution u continue à valeurs dans \mathcal{H} .

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable, c'est-à-dire admettant une partie dénombrable dense (c'est le cas de $L^2(\Omega)$ pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^d). Si I est un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction I dans \mathcal{H} , nous conviendrons de dire que f est **mesurable** si, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, l'application

$$(2.52) \quad t \in I \longmapsto (f(t)|\varphi) \in \mathbb{C}$$

est mesurable. Dans ces conditions, l'application

$$(2.53) \quad \|f\| : t \in I \longmapsto \|f(t)\| \in \mathbb{R}_+$$

est également mesurable, car

$$(2.54) \quad \|f(t)\| = \sup_n |(f(t)|\varphi_n)|$$

si (φ_n) est une suite dense dans la boule unité de \mathcal{H} .

On dira alors que f est **intégrable** sur I si

$$(2.55) \quad \int_I \|f(t)\| dt < +\infty.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il s'ensuit que chacune des fonctions (2.52) est intégrable, et que la forme linéaire

$$(2.56) \quad L : \varphi \in \mathcal{H} \longmapsto \int_I (f(t)|\varphi) dt$$

vérifie

$$|L(\varphi)| \leq \left(\int_I \|f(t)\| dt \right) \|\varphi\|.$$

D'après le théorème de représentation des formes linéaires continues sur \mathcal{H} , on en déduit l'existence d'un élément unique J de \mathcal{H} tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, $L(\varphi) = (J | \varphi)$. On appellera J l'intégrale de f sur I , et on notera

$$(2.57) \quad J = \int_I f(t) dt.$$

Remarquons que

$$(2.58) \quad \left\| \int_I f(t) dt \right\| \leq \int_I \|f(t)\| dt.$$

A titre d'exercice, le lecteur pourra étendre à ce cadre les résultats classiques de théorie de l'intégration : convergence dominée, complétude de l'espace $L^1(I, \mathcal{H})$, théorème de Fubini, ... Il pourra également vérifier que, si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d , l'espace $L^1(I, L^2(\Omega))$ ainsi défini s'identifie aux éléments $f \in L^1_{\text{loc}}(I \times \Omega)$ vérifiant

$$(2.59) \quad \int_I \left(\int_{\Omega} |f(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} dt < +\infty,$$

et que l'intégrale (2.57) n'est autre que l'intégrale usuelle par rapport à t .

Compte tenu de ces définitions, il est facile de démontrer le résultat suivant, dont nous laissons également la démonstration au lecteur.

Proposition 2.24. *Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe sur l'espace de Hilbert séparable \mathcal{H} . Pour tout $u_0 \in \mathcal{H}$, pour tout $f \in L^1(]0, T[, \mathcal{H})$, il existe $u \in C([0, T], \mathcal{H})$ unique tel que $u(0) = u_0$ et, pour tout $\psi :]0, T[\rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1 à support compact, $\int_0^T \psi(t) u(t) dt$ appartient à $D(A)$ et*

$$(2.60) \quad A \left(\int_0^T \psi(t) u(t) dt \right) = \int_0^T \psi'(t) u(t) dt + \int_0^T \psi(t) f(t) dt.$$

De plus, u est donné par la “formule de Duhamel”

$$(2.61) \quad u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)A} f(\tau) d\tau.$$

Terminons ce chapitre par quelques commentaires sur la régularité des solutions de (2.60). Soit \mathcal{H}_1 un espace de Hilbert séparable. On suppose donnée une application linéaire continue

$$j : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}.$$

Il est facile de vérifier que, si $f_1 \in L^1(I, \mathcal{H}_1)$ au sens précédent, alors $f = j \circ f_1$ est dans $L^1(I, \mathcal{H})$, et

$$(2.62) \quad j\left(\int_I f_1(t) dt\right) = \int_I f(t) dt.$$

Supposons de plus j injective, et plaçons-nous sous les hypothèses de la proposition 2.24. Supposons enfin que e^{-tA} laisse invariante l’image de j . On définit alors une application linéaire $S_1(t) : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ par $j \circ S_1(t) = e^{-tA} \circ j$. D’après le théorème du graphe fermé, $S_1(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. Supposons de plus que, pour tout élément v_1 de \mathcal{H}_1 , l’application de $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto S_1(t)v_1 \in \mathcal{H}_1$ soit continue, de sorte que S_1 soit un semi-groupe sur \mathcal{H}_1 . Notons A_1 son générateur infinitésimal. Alors, si $u_0 = j(u_{0,1})$, on conclut, en utilisant par exemple la formule de Duhamel (2.61), que $u(t) = j(u_1(t))$, où u_1 est donnée par la proposition 2.24 en remplaçant \mathcal{H} , A , u_0 , f par \mathcal{H}_1 , A_1 , $u_{0,1}$, f_1 .

CHAPITRE III

PROBLÈMES VARIATIONNELS

ÉQUATIONS D'ONDES

3.1. Rappels sur la résolution du problème de Dirichlet

Rappelons d'abord un résultat abstrait classique. Soit $a(u, v)$ une forme sesquilinéaire sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . On dit que a est coercive si et seulement si :

$$\exists C > 0; \forall u \in \mathcal{H}, \quad |a(u, u)| \geq C \|u\|^2.$$

Théorème 3.1 (Lax–Milgram). *Soit a une forme sesquilinéaire continue et coercive sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . Alors pour toute forme linéaire continue φ sur \mathcal{H} , il existe un unique vecteur $u \in \mathcal{H}$ tel que*

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle.$$

Le théorème 3.1 est une conséquence immédiate du théorème de représentation des formes linéaires continues sur un espace de Hilbert, et du lemme des opérateurs coercifs (proposition 2.18).

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . On note

$$H^1(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega); u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega)\}.$$

Alors $H^1(\Omega)$, muni du produit scalaire

$$(u|v)_{H^1} = (u|v)_{L^2} + (\nabla u|\nabla v)_{L^2} = \int_{\Omega} \overline{u(x)} v(x) + \overline{\nabla u(x)} \cdot \nabla v(x) \, dx$$

est un espace de Hilbert.

On note $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$ son espace dual. L'application

$$\varphi \in H^{-1}(\Omega) \longmapsto T_\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

définie par

$$\langle T_\varphi, \psi \rangle_{\mathcal{D}'^0}^{C_0^\infty} = \langle \varphi, \psi \rangle_{H^{-1}}^{H_0^1}, \quad \forall \psi \in C_0^\infty$$

est injective puisque $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$.

Cette application permet donc d'identifier $H^{-1}(\Omega)$ à un sous espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$, ce que nous ferons désormais.

Théorème 3.2. *Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, pour tout $\lambda > 0$, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que*

$$(3.1) \quad -\Delta u + \lambda u = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

De plus, si Ω est borné, ce résultat est encore vrai pour $\lambda = 0$.

Preuve. L'équation (3.1) s'écrit

$$\begin{aligned} & \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \langle u, -\Delta \psi + \lambda \psi \rangle_{\mathcal{D}'^0}^{C_0^\infty} = \langle f, \psi \rangle_{\mathcal{D}'^0}^{C_0^\infty} \\ \iff & \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle_{\mathcal{D}'^0}^{C_0^\infty} + \lambda \langle u, \psi \rangle_{\mathcal{D}'^0}^{C_0^\infty} = \langle f, \psi \rangle_{\mathcal{D}'^0}^{C_0^\infty} \\ \iff & \forall \psi \in H_0^1(\Omega), \quad (\nabla \bar{u} | \nabla \psi)_{L^2} + \lambda (\bar{u} | \psi)_{L^2} = \langle f, \psi \rangle_{H^{-1}}^{H_0^1} \end{aligned}$$

et le théorème de Lax–Milgram donne le résultat. Pour $\lambda = 0$, la coercivité est fournie par le lemme suivant.

Proposition (Inégalité de Poincaré). *Soit Ω un ouvert borné. Alors il existe $C > 0$ tel que $\forall u \in H_0^1(\Omega)$*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Preuve. Les deux termes de l'inégalité étant continus pour la norme H^1 , il suffit de démontrer cette inégalité sur un ensemble dense dans $H_0^1(\Omega)$, soit $C_0^\infty(\Omega)$.

Supposons $\Omega \subset \{x = (x_1, \dots, x_d); |x_1| \leq R\}$ alors pour $u \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$u(x) = \int_{-R}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_d) dt$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx &= \int_{\Omega} \left| \int_{-R}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_1, \dots, x_d) dt \right|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_d \\ &\leq \int \int_{x_1=-R}^R \int_{t=-R}^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_d) \right|^2 dt \times (x_1 + R) dx \\ &\leq \int_{x_2, \dots, x_d} \int_{t=-R}^R \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_d) \right|^2 dt dx_2 \dots dx_d \times \int_{x_1=t}^R (x_1 + R) dx_1 \\ &\leq 2R^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice. Soit Ω un ouvert borné.

Montrer que $-\Delta$ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

On munit $H_0^1(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

et H^{-1} de la norme

$$\|v\|_{H^{-1}} = \sup_{\|u\|_{H_0^1}=1} |\langle v, u \rangle|_{H_0^1} = \sup_{\substack{\varphi \in C_0^\infty \\ \|\varphi\|_{H_0^1}=1}} |\langle v, \varphi \rangle|.$$

Montrer que si $v = -\Delta u$, $u \in H_0^1(\Omega)$ alors $\|v\|_{H^{-1}} = \|u\|_{H_0^1}$, c'est à dire

$$\|v\|_{H^{-1}} = \|\nabla \Delta_D^{-1}(v)\|_{L^2}$$

Que se passe-t-il si on munit $H_0^1(\Omega)$ de la norme $\|u\|_{H^1}^2 = \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2$?

3.2. Décomposition spectrale des opérateurs compacts autoadjoints

Définition Soient $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ deux Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un opérateur continu de \mathcal{H}_1 dans \mathcal{H}_2 . On dit que T est compact si et seulement si $\overline{T(B(0, 1))}$ est un ensemble compact dans \mathcal{H} .

Exemple. Un opérateur de rang fini est compact. Plus généralement, une limite, pour la norme d'opérateurs, d'une suite d'opérateurs de rang fini, est un opérateur compact. En effet, montrons que toute limite en norme d'opérateurs compacts est compacte. Soient $T_n, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tels que

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)} \longrightarrow 0$$

avec T_n compact pour tout n . Fixons $\varepsilon > 0$ et T_n tel que $\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{2}$; comme $\overline{T_n(B(0, 1))}$ est compacte, on peut la recouvrir par un nombre fini de boules de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$

$$\overline{T_n(B(0, 1))} \subset \bigcup_{i=1}^N B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

donc

$$\overline{T(B(0, 1))} \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \varepsilon).$$

On peut donc recouvrir $\overline{T(B(0,1))}$ par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon > 0$, c'est donc un ensemble compact et l'opérateur T est donc compact.

Enfin, il est facile de montrer qu'une composée d'opérateurs continus dont l'un au moins est compact, est un opérateur compact.

Voyons tout de suite un exemple d'opérateur compact.

Proposition. *Soit Ω un ouvert borné. Alors l'injection $i : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ est compacte.*

Preuve.

i) On remarque d'abord que le prolongement par 0 envoie isométriquement $H_0^1(\Omega)$ dans $H^1(\mathbb{R}^d)$. En effet, si $u \in H_0^1(\Omega)$, alors il existe $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned}\varphi_n &\longrightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega) \\ \nabla\varphi_n &\longrightarrow \nabla u \text{ dans } L^2(\Omega).\end{aligned}$$

La suite $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est donc de Cauchy dans $H^1(\mathbb{R}^d)$ et elle converge donc vers $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Or il est clair que

$$\varphi_n \longrightarrow \underline{u} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^d)$$

où

$$\begin{aligned}\underline{u}(x) &= u(x) \text{ si } x \in \Omega \\ &= 0 \text{ sinon}\end{aligned}$$

donc $\underline{u} = \varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

ii) $\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, l'application $j : u \in H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow u \times \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ est compacte. En effet, supposons que $\psi \in C_0^\infty(]-R, R[^d)$. Notons $(u\psi)^\#$ le prolongement par périodicité sur \mathbb{R}^d , de période $2R\mathbb{Z}^d$ de ψu . Supposons (pour simplifier le calcul) $R = \frac{1}{2}$. Notons pour $\alpha = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$

$$T_\alpha(u\psi) = \int_{]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^d} e^{-2i\pi(x \cdot \alpha)} u\psi(x) dx$$

alors

$$(u\psi)^\#(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} e^{2i\pi\alpha \cdot x} T_\alpha(\psi u)$$

et la série est convergente dans $L^2(\prod_{i=1}^d [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$

$$\|(u\psi)^\#\|_{L^2(\prod_{i=1}^d [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])}^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} |T_\alpha(u\psi)|^2$$

$$\|\nabla(u\psi)^\#\|_{L^2(\prod_{i=1}^d [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])}^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} |T_\alpha(u\psi)|^2 \times \sum_1^d 4\pi^2 |\alpha_i|^2.$$

Notons

$$j_N : u \mapsto \sum_{|\alpha| \leq N} e^{2i\pi\alpha \cdot x} T_\alpha(\psi u) \times 1_{x \in \prod_{i=1}^d [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$$

d'après ce qui précède

$$\|j - j_N\|_{\mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}^d); L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{C}{N}.$$

Les opérateurs j_N sont compacts (car de rang fini) donc j est un opérateur compact.

iii) Finalement, en choisissant $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $\psi|_\Omega = 1$ l'injection $i : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ se décompose en

$$\begin{array}{ccccccc} H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ u & \longmapsto & \underline{u} & \longmapsto & \psi \underline{u} & \longmapsto & \psi \underline{u}|_\Omega \end{array}$$

et comme le composé d'un opérateur compact et d'un opérateur continu est compact, on obtient la compacité de i .

L'un des avantages des opérateurs compacts est qu'ils possèdent une décomposition spectrale très simple.

Théorème 3.3. *Soient \mathcal{H} un Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur compact autoadjoint. Alors les valeurs propres de T non nulles sont de multiplicité finie; elles sont en nombre fini ou forment une suite tendant vers 0. De plus, \mathcal{H} admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T .*

Preuve.

i) Si λ est une valeur propre non nulle de T , de sous-espace propre E_λ , alors l'application identique de E_λ coïncide avec T/λ , donc est compacte. Le théorème de Riesz assure alors que E_λ est de dimension finie.

ii) Supposons que T admette une infinité de valeurs propres non nulles. Soit (λ_n) une suite injective de telles valeurs propres convergeant vers λ . Pour chaque n , soit e_n un

vecteur propre unitaire associé à λ_n . Alors les e_n sont deux à deux orthogonaux puisque T est autoadjoint. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que Te_n converge; si on suppose de plus que $\lambda \neq 0$, alors $e_n = Te_n/\lambda_n$ converge vers un vecteur e , qui est donc lui aussi unitaire. Mais ceci est absurde, puisque $(e|e_n)$ est la limite de $(e_p|e_n)$ quand p tend vers l'infini, donc est nul, de sorte que, en passant à la limite en n , on conclut que $e = 0$. Il en résulte que 0 est le seul point d'accumulation possible des valeurs propres de T , qui forment donc une suite tendant vers 0.

iii) Montrons d'abord que, si $T \neq 0$, alors T a au moins une valeur propre non nulle. En effet, soient $M = \|T\|$ et $u_n \in B(0, 1)$ tel que $\|Tu_n\| \rightarrow M$ ($n \rightarrow +\infty$). Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer (puisque l'opérateur T est compact) que $Tu_n \rightarrow v$ dans \mathcal{H} . On a $\|v\| = M$ et

$$(Tv|u_n)_{\mathcal{H}} = (v|Tu_n) \longrightarrow (v|v) = M^2.$$

Notons $u_n = p_n + q_n$, $p_n = \lambda_n Tv$, $(q_n, Tv) = 0$. On a

$$|(v|Tu_n)_{\mathcal{H}}| = |(Tv|u_n)_{\mathcal{H}}| = |(Tv|p_n)| \leq \|T\| \|v\| \|p_n\| = M^2 \|p_n\|$$

donc $\liminf_n \|p_n\| = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|q_n\| = 0$ et, quitte à extraire encore une sous suite, on peut supposer que λ_n converge vers λ , de sorte que $u_n \rightarrow \lambda Tv$. Il en résulte que $\|\lambda Tv\| = 1$ et $\lambda \|Tv\|^2 = M^2$, d'où $\lambda = 1/M^2$. Mais $v = \lim_n Tu_n = \lambda T^2 v$ et $v \in \text{Ker}(T^2 - M^2) = \text{Ker}(T - M)(T + M)$; les deux opérateurs $T \mp M$ ne sont donc pas tous les deux injectifs; l'opérateur T a donc une valeur propre dont la valeur absolue est M .

iv) Soit (λ_n) , la suite (éventuellement finie) des valeurs propres non nulles de l'opérateur T . Notons $E_n = \text{Ker}(T - \lambda_n \text{Id})$. Les E_n sont orthogonaux deux à deux. Soit $E = \text{Vect}(\bigoplus_n E_n)$ l'espace vectoriel engendré et $F = E^\perp$ son orthogonal. Alors F est stable par T . En effet, si $(u|v) = 0 \forall v \in E_n$, alors

$$(Tu|v) = (u|Tv) = \lambda_n (u|v) = 0.$$

De plus F est fermé et $T|_F \in \mathcal{L}(F)$ est autoadjoint compact. Par construction, $T|_F$ ne peut avoir de valeur propre non nulle, donc, par iii), $T|_F = 0$. Pour conclure il suffit maintenant de prendre une base orthonormée dans chaque E_n , et une base hilbertienne dans F . On obtient ainsi, d'après ce qui précède, une base hilbertienne de \mathcal{H} . **q.e.d.**

Application : le spectre du laplacien de Dirichlet sur un ouvert borné. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d . On considère l'opérateur T , qui à $u \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ associe l'unique solution $Tu \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ de l'équation

$$-\Delta(Tu) = u \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on vérifie facilement que

$$\|\nabla Tu\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}$$

donc T est continu de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. L'opérateur $i \circ T$ est donc un opérateur compact sur $L^2(\Omega)$. On vérifie également (en revenant à la définition de T) que $i \circ T$ est autoadjoint et injectif. Il existe donc une base hilbertienne (e_n) de $L^2(\Omega)$ formée de vecteurs propres de $i \circ T$; notons $Te_n = \mu_n e_n$. On remarque que

$$(e_n | Te_n)_{L^2} = \|\nabla Te_n\|_{L^2}^2$$

d'où

$$1 = \mu_n \|\nabla e_n\|_{L^2}^2$$

et $\mu_n > 0$ pour tout n .

Considérons l'opérateur non borné sur $L^2(\Omega)$, de domaine

$$D(-\Delta_D) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega), -\Delta u \in L^2(\Omega) \right\},$$

et défini par $-\Delta_D u = -\Delta u$. Alors l'opérateur $i \circ T$ est l'inverse de $-\Delta_D$ et on a la caractérisation suivante.

Proposition 3.4.

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &= \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega); u = \sum u_n e_n, \quad \sum |u_n|^2 < +\infty \right\} \\ H_0^1(\Omega) &= \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega); u = \sum u_n e_n, \quad \sum |u_n|^2 \times \frac{1}{\mu_n} < +\infty \right\}. \\ D(-\Delta_D) &= \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega); u = \sum u_n e_n, \quad \sum |u_n|^2 \times \frac{1}{\mu_n^2} < +\infty \right\}. \end{aligned}$$

Preuve. La première égalité provient du fait que (e_n) est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$. En remarquant de plus que, pour tout $u \in H_0^1$, $(\nabla u | \nabla e_n)_{L^2} = (u | e_n)_{L^2} / \mu_n$, on en déduit

que $(\sqrt{\mu_n} e_n)$ est une base hilbertienne de H_0^1 , d'où la deuxième égalité. Enfin, la troisième égalité découle du fait qu'un élément v de H^{-1} appartient à L^2 si et seulement si

$$\sum |\langle v, \bar{e}_n \rangle_{H^{-1}}^{H_0^1}|^2 < +\infty .$$

La suite des $\lambda_n = 1/\mu_n$ décrit les valeurs propres de $-\Delta_D$. C'est une suite de nombres positifs tendant vers l'infini. Si Ω est connexe, on peut montrer de plus que λ_1 est simple.

3.3. Equations d'ondes

Soit Ω un ouvert borné. On munit, comme ci-dessus, $H_0^1(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx .$$

Par ailleurs, on désigne par a une fonction L^∞ sur Ω , à valeurs réelles.

Théorème 3.5. *Pour tout $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, il existe une unique fonction*

$$u \in C^1(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}_t; H_0^1(\Omega))$$

solution du système

$$(3.1) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + a(x) \frac{\partial}{\partial t} \right) u = 0, & \mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R}_t) \\ u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u|_{t=0} = u_1. \end{cases}$$

De plus, en notant

$$(3.2) \quad E(u, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_t u(t, x)|^2 + |\nabla u(t, x)|^2 dx ,$$

on a l'identité

$$(3.3) \quad E(u, t) = E(u, 0) - \int_0^t \int_{\Omega} a(x) |\partial_t u|^2 dx dt .$$

Preuve. Notons $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ -\Delta & a(x) \end{pmatrix}$ de domaine

$$D(A) = D(-\Delta_D) \times H_0^1(\Omega).$$

On munit \mathcal{H} de la norme

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

et du produit scalaire associé. On a alors

$$\begin{aligned} \left(A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} &= (-\nabla v \mid \nabla u)_{L^2} + (-\Delta u + a(x)v \mid v)_{L^2} \\ &= -(\nabla v \mid \nabla u)_{L^2} + (\nabla u \mid \nabla v)_{L^2} + (a(x)v \mid v)_{L^2} \\ \Rightarrow \operatorname{Re} \left(A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} &= (a(x)v \mid v) \geq -\|a\|_{\infty} \|v\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Ainsi l'opérateur $A + \|a\|_{\infty}$ est accréatif. Soit $\lambda > 0$. Etudions la surjectivité de $(A + \lambda)$ de $D(A)$ sur \mathcal{H} . Soient $(f, g) \in \mathcal{H}$. Alors

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -v + \lambda u = f \\ -\Delta u + (a(x) + \lambda)v = g \end{cases}$$

avec $(u, v) \in D(A)$. Ce problème équivaut à trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$-\Delta u + \lambda a u + \lambda^2 u = g + (a + \lambda)f = k \in L^2(\Omega).$$

On conclut par le théorème de Lax–Milgram, en remarquant que, pour $\lambda > \|a\|_{\infty}$, la forme sesquilinéaire

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \nabla \bar{u} \cdot \nabla v + (\lambda a + \lambda^2) \bar{u} v \, dx$$

est continue et coercive sur $H_0^1(\Omega)$. Il en résulte que $A + \|a\|_{\infty}$ est maximal accréatif. De plus, un raisonnement analogue montre de même que $-A + \|a\|_{\infty}$ est maximal accréatif. D'après le corollaire 2.22 et la remarque 2.16, l'opérateur A engendre un groupe d'opérateurs sur \mathcal{H} .

Nous allons montrer que l'unique solution du système (3.1) est la fonction u définie par

$$\begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} = e^{-tA} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Soit $u \in C(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$ vérifiant $u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1$. Un argument élémentaire de théorie des distributions assure que l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + a(x) \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

équivalent à

$$(3.4) \quad \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + a(x) \frac{\partial u}{\partial t}, \psi(t) \varphi(x) \right\rangle = 0$$

pour tout $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ à support compact et tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. En notant

$$V = \int_0^{+\infty} \psi(t) \begin{pmatrix} u(t) \\ \partial_t u(t) \end{pmatrix} dt,$$

on constate que $V \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et que l'équation (3.4) équivaut à l'équation suivante au sens des distributions sur Ω ,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\Delta & a \end{pmatrix} V = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi'(t) \begin{pmatrix} u(t) \\ \partial_t u(t) \end{pmatrix} dt$$

soit encore à

$$V \in D(A)$$

et

$$AV = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi'(t) \begin{pmatrix} u(t) \\ \partial_t u(t) \end{pmatrix} dt.$$

Le corollaire 2.15 et la remarque 2.16 complètent la démonstration.

Il reste à établir l'identité d'énergie (3.3). Supposons d'abord $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in D(A)$. Alors $u \in C^2(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_t; H_0^1(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}_t; H^2(\Omega))$ donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(u, t) &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |\partial_t u|^2 dx \\ &= \operatorname{Re} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \partial_t \nabla \bar{u} + \partial_t u \cdot \partial_t^2 \bar{u} dx \\ &= \operatorname{Re} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \partial_t \nabla \bar{u} + \partial_t u (-a(x) \partial_t \bar{u} + \Delta \bar{u}) dx \\ &= - \int_{\Omega} a(x) \left| \frac{\partial}{\partial t} u \right|^2 dx. \end{aligned}$$

L'identité (3.3) est donc vraie pour $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in D(A)$; elle est donc vraie en général par passage à la limite et densité de $D(A)$.

q.e.d.

Remarque 3.6. Le théorème 3.5 est susceptible de nombreuses généralisations. D'une part, en utilisant la proposition 2.24, il est possible d'ajouter à l'équation (3.1) un

second membre $f \in L^1(]0, T[, L^2(\Omega))$, l'identité d'énergie (3.3) devant être alors modifiée en

$$(3.5) \quad E(u, t) = E(u, 0) - \int_0^t \int_{\Omega} a(x) |\partial_t u|^2 dx dt - \operatorname{Re} \int_0^t \int_{\Omega} f \partial_t \bar{u} dx dt .$$

Une autre généralisation, qui nous sera utile au chapitre 6, concerne le cas d'une équation à coefficients variables, décrivant la propagation d'une onde dans un milieu inhomogène occupant l'ouvert Ω . Soient $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $k_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i, j \leq d$, des fonctions mesurables vérifiant, pour presque tout $x \in \Omega$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$(3.6) \quad a \leq \rho(x) \leq b, \quad k_{ij}(x) = k_{ji}(x), \quad \alpha |\xi|^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq d} k_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \beta |\xi|^2 ,$$

où a, b, α, β sont des constantes strictement positives. On désigne par $K(x)$ la matrice symétrique définie positive de coefficients $k_{ij}(x)$. En raisonnant comme au paragraphe 3.1, on montre que l'opérateur

$$u \mapsto \operatorname{div}(K \nabla u)$$

est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$, et possède sur $L^2(\Omega)$ une décomposition spectrale analogue à celle du laplacien de Dirichlet. Enfin, on considère, sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ muni de la norme

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\Omega} K \nabla u \cdot \nabla \bar{u} + |v|^2 \rho(x) dx ,$$

l'opérateur

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{Id} \\ -\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(K \nabla u) & \frac{a}{\rho} \end{pmatrix}$$

de domaine

$$D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega), \operatorname{div}(K \nabla u) \in L^2(\Omega)\} \times H_0^1(\Omega) .$$

On étend alors sans difficulté le théorème 3.5 à l'équation

$$(3.7) \quad \frac{\partial^2(\rho u)}{\partial t^2} - \operatorname{div}(K \nabla u) + a(x) \frac{\partial u}{\partial t} = 0 .$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier, à titre d'exercice, les détails de la démonstration, et achevons ce chapitre en énonçant une dernière généralisation du théorème 3.5, pour des données moins régulières.

Théorème 3.7. *Avec les notations ci-dessus, pour tout $(u_0, v_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, il existe une unique fonction u vérifiant*

$$u \in C^0(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega)), \quad \rho u \in C^1(\mathbb{R}_t; H^{-1}(\Omega))$$

solution du système

$$\left(\frac{\partial^2(\rho u)}{\partial t^2} - \operatorname{div}(K\nabla u) \right) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R}_t)$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \partial_t(\rho u)|_{t=0} = v_1$$

et $u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t} = 0$ au sens suivant

$$\forall \psi \in C_c^1(\mathbb{R}_t), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) u(t) dt \in H_0^1(\Omega).$$

Schéma de preuve. La faible régularité de la fonction ρ nous obligent à définir un groupe d'opérateurs légèrement différent du précédent. On désigne par $T_K : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ l'opérateur inverse de $-\operatorname{div}(K\nabla) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$. On munit l'espace $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ de la norme

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle \bar{v}, T_K v \rangle_{H_0^1} + \int_{\Omega} |u|^2 \rho(x) dx.$$

Soit B l'opérateur sur $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ de domaine $D(B) = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ défini par $B = \begin{pmatrix} 0 & -1/\rho \\ -\operatorname{div}(K\nabla) & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie alors, comme à la preuve du théorème 3.5, que $\pm B$ est maximal accréatif sur $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, et que le système étudié est équivalent à

$$\begin{pmatrix} u \\ \partial_t(\rho u) \end{pmatrix} = e^{-tB} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

q.e.d.

CHAPITRE IV

PROBLÈMES DE CONTRÔLE ET DE STABILISATION

Le but de ce chapitre est de présenter quelques problèmes de contrôle sur l'équation des ondes ainsi que la méthode H.U.M. qui permet d'en aborder l'étude. Dans toute la suite, on désigne par Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d .

4.1. Stabilisation de l'équation des ondes

On se donne une fonction $a \in L^\infty(\Omega)$ à valeurs positives ou nulles. Nous avons vu au théorème 3.5 comment résoudre le système

$$(4.1) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + a(x) \frac{\partial}{\partial t} \right) u = 0, & \mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R}_t) \\ u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad \frac{\partial}{\partial t} u|_{t=0} = u_1 \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Nous allons maintenant étudier le comportement de l'énergie $E(u, t)$ d'une solution u de ce système lorsque t tend vers $+\infty$. Rappelons l'identité d'énergie : en notant

$$(4.2) \quad E(u, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_t u(t, x)|^2 + |\nabla u(t, x)|^2 dx ,$$

on a l'identité

$$(4.3) \quad E(u, t) = E(u, 0) - \int_0^t \int_{\Omega} a(x) |\partial_t u|^2 dx dt .$$

Notons que, puisque $a \geq 0$, l'énergie $E(u, \cdot)$ est une fonction décroissante du temps.

Théorème 4.1. (Stabilisation forte). *On a équivalence entre :*

i) *il existe $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ telle que, pour toute solution u de (4.1),*

$$(4.4) \quad E(u, t) \leq E(u, 0) \times f(t).$$

ii) Il existe $T > 0$, $C > 0$ tels que, pour toute solution u de (4.1),

$$(4.5) \quad E(u, 0) \leq C \int_0^T \int_{\Omega} a(x) \left| \frac{\partial}{\partial t} u \right|^2 dx dt.$$

De plus si i) (ou ii)) est vérifiée, alors il existe A et $\alpha > 0$, tels que l'on puisse choisir dans (4.4)

$$f(t) = A e^{-\alpha t}.$$

Preuve.

i) \Rightarrow ii). Soit T tel que $f(T) < 1$; d'après (4.3), on obtient

$$E(u, 0)(1 - f(T)) \leq \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |\partial_t u|^2 dx dt.$$

ii) \Rightarrow i). D'après l'identité d'énergie (4.3), on obtient

$$\begin{aligned} E(u, T) &\leq E(u, 0)(1 - C^{-1}) \\ &\leq B E(u, 0) \text{ avec } 0 < B < 1 \end{aligned}$$

en appliquant cette relation entre $t = 0$ et T puis entre T et $2T, \dots, (n-1)T$ et nT , on obtient

$$E(u, nT) \leq B^n E(u, 0)$$

Comme l'énergie est décroissante, on vérifie que $\alpha = \frac{-\ln B}{T}$ et $A = B^{-1}$ donnent

$$E(u, t) \leq A e^{-\alpha t}.$$

q.e.d.

Théorème 4.2. (Stabilisation faible). On a équivalence entre :

- i) Pour toute solution u de (4.1), $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(u, t) = 0$.
- ii) $\forall \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ vecteur propre de l'opérateur A , de valeur propre λ , la solution u de (4.1) vérifie $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(u, t) = 0$.
- iii) $\forall \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ vecteur propre de l'opérateur A , $a(x) \times |u_1|^2 = 0 \Rightarrow u_0 \equiv 0, u_1 \equiv 0$.

iv) $\forall u$ vecteur propre de l'opérateur $-\Delta_D$ sur $L^2(\Omega)$, de domaine

$$D(-\Delta_D) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2\}$$

alors $au \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$.

Preuve.

i) \Rightarrow ii) est évident

ii) \Rightarrow iii). Pour un vecteur propre $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ de A , $e^{-tA} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = e^{-t\lambda} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ et

$$\frac{d}{dt} E(u, t) = - \int_{\Omega} a(x) |\partial_t u(t, x)|^2 dx = -e^{-2t \operatorname{Re} \lambda} \int_{\Omega} a(x) |u_1(x)|^2 dx ,$$

ce qui montre que $E(u, \cdot)$ est constante si $au_1 = 0$. Mais $E(u, t) \rightarrow 0$ donc $E(u, 0) = 0$ et $u_0 = u_1 = 0$.

iii) \Rightarrow iv). Soit u un vecteur propre de l'opérateur $-\Delta_D$ associé à la valeur propre z et vérifiant $a(x)u(x) \equiv 0$. On sait que $z > 0$ et on voit facilement que $\begin{pmatrix} u \\ i\sqrt{z}u \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $-i\sqrt{z}$, qui vérifie $\sqrt{z}a(x) \times |u_1|^2 = 0$; il en résulte que $u \equiv 0$.

iv) \Rightarrow i). On remarque tout d'abord qu'il suffit de démontrer i) pour $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in D(A)$, le résultat pour $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ s'en déduisant par densité de $D(A)$ dans \mathcal{H} .

Supposons que i) ne soit pas vérifié. Alors il existe $t_n \rightarrow +\infty$ tel que $E(u, t_n) \not\rightarrow 0$. On remarque, comme l'énergie est décroissante, qu'alors

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} E(u, s) = \alpha > 0.$$

Ecrivons $\begin{pmatrix} u(t_n) \\ \partial_t u(t_n) \end{pmatrix} = e^{-t_n A} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$. Cette suite est bornée dans $D(A)$. En effet,

$$\left\| \begin{pmatrix} u(t_n) \\ \partial_t u(t_n) \end{pmatrix} \right\|_{H_0^1 \times L^2}^2 = 2E(u, t_n) \leq 2E(u, 0)$$

et

$$\left\| A \begin{pmatrix} u(t_n) \\ \partial_t u(t_n) \end{pmatrix} \right\|_{H_0^1 \times L^2}^2 = 2E(\tilde{u}, t_n) \leq 2E(\tilde{u}, 0)$$

où \tilde{u} désigne la solution de (4.1) avec les données

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

En vertu de la proposition 3.4, l'injection $D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ est compacte, donc il existe une sous-suite (t_{n_k}) telle que $\begin{pmatrix} u(t_{n_k}) \\ \partial_t u(t_{n_k}) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$ dans \mathcal{H} . On a alors, si on note

$$\begin{pmatrix} v(t) \\ \partial_t v(t) \end{pmatrix} = e^{-tA} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix},$$

$$e^{-tA} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = \lim_{k \rightarrow +\infty} e^{-tA} \begin{pmatrix} u(t_{n_k}) \\ \partial_t u(t_{n_k}) \end{pmatrix} = \lim_{k \rightarrow +\infty} e^{-(t_{n_k}+t)A} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

et, comme $E(u, t)$ est décroissante, on en déduit

$$(4.6) \quad E(v, t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} E(u, s) = E(v, 0) = \alpha > 0.$$

On obtient ainsi, pour tout $t > 0$, $\int a(x) |\partial_t v|^2(t) = 0$. La fonction v est donc solution de

$$(\partial_t^2 - \Delta)v = 0$$

$$v|_{t=0} = v_0, \quad \partial_t v|_{t=0} = v_1$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Décomposons v sur une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de vecteurs propres de $-\Delta_D$:

$$(4.7) \quad v(t) = \sum_1^{+\infty} (v_{\nu,+} e^{it\sqrt{\lambda_\nu}} + v_{\nu,-} e^{-it\sqrt{\lambda_\nu}})$$

avec $-\Delta_D v_{\nu,\pm} = \lambda_\nu v_{\nu,\pm}$, $\lambda_\nu \neq \lambda_\mu$ si $\nu \neq \mu$, et

$$v|_{t=0} = \sum (v_{\nu,+} + v_{\nu,-}) = v_0 = \sum v_{\nu,0}$$

et

$$\partial_t v|_{t=0} = \sum i\sqrt{\lambda_\nu} (v_{\nu,+} - v_{\nu,-}) = v_1 = \sum v_{\nu,1}.$$

Enfin, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ se traduisent par

$$\frac{1}{2} \sum_1^{+\infty} (\|v_{\nu,+}\|_{L^2}^2 + \|v_{\nu,-}\|_{L^2}^2) \lambda_\nu = \|v_0\|_{H_0^1}^2 + \|v_1\|_{L^2}^2 < +\infty$$

Fixons $\nu_0 \geq 1$ et posons $w(T, x) = \frac{1}{T} \int_0^T \partial_s v(s, x) e^{-is\sqrt{\lambda_{\nu_0}}} ds$; notons $\omega = \{x; a(x) > 0\}$. La condition $\partial_s v|_\omega = 0$ implique

$$w|_\omega = 0 .$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} w(T, x) = & i\sqrt{\lambda_{\nu_0}} v_{\nu_0,+}(x) + \sum_{\nu \neq \nu_0} \frac{i\sqrt{\lambda_\nu}}{iT(\sqrt{\lambda_\nu} - \sqrt{\lambda_{\nu_0}})} (e^{iT(\sqrt{\lambda_\nu} - \sqrt{\lambda_{\nu_0}})} - 1) v_{\nu,+} \\ & - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{i\sqrt{\lambda_\nu}}{iT(\sqrt{\lambda_\nu} + \sqrt{\lambda_{\nu_0}})} (e^{-iT(\sqrt{\lambda_\nu} + \sqrt{\lambda_{\nu_0}})} - 1) v_{\nu,-} \end{aligned}$$

ce qui implique que $w(T, x) - i\sqrt{\lambda_{\nu_0}} v_{\nu_0,+}$ tend vers 0 dans $L^2(\Omega)$ quand T tend vers l'infini. Comme $w|_\omega = 0$, on en déduit $v_{\nu_0,+} = 0$ sur ω , donc $v_{\nu_0,+} = 0$ d'après iv). On obtient de la même façon $v_{\nu_0,-} = 0$, et finalement $v = 0$, ce qui contredit (4.7). **q.e.d.**

Remarque 4.3. Les théorèmes 4.1 et 4.2 se généralisent sans difficulté au cas de l'équation des ondes inhomogène (3.7). De plus, lorsque la fonction K n'est pas trop singulière (lipschitzienne), on peut montrer qu'une fonction propre de l'opérateur $-\rho^{-1} \operatorname{div}(K\nabla)$ qui est nulle dans un ouvert connexe ω de Ω , est nulle dans la composante connexe de ω dans Ω . Une démonstration d'une propriété un peu plus faible (suffisante pour les applications du chapitre VI) est donnée en appendice. Au vu du théorème 4.2, il en résulte que, si chaque composante connexe de Ω contient un ouvert non vide sur lequel la fonction a ne s'annule pas, l'énergie de toute solution de (3.7) tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

4.2. Contrôle de l'équation des ondes (méthode HUM)

Soient $T > 0$, $\omega \subset \Omega$ et $\theta(x, t) = \mathbf{1}_{]0, T[}(t) \mathbf{1}_\omega(x)$. On considère le problème d'évolution suivant

$$(4.8) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) u = \theta \times g \\ u|_{t=T} = 0, \quad \partial_t u|_{t=T} = 0. \end{cases}$$

L'existence et l'unicité d'une solution $u \in C^1(\mathbb{R}; L^2(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega))$ de (4.5) découlent des résultats du chapitre III (voir remarque 3.6). En outre, il est facile de constater, à l'aide de la formule de Duhamel (2.61), que l'opérateur

$$R : g \in L^2(]0, T[\times \omega) \longmapsto (u|_{t=0}, \partial_t u|_{t=0}) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

est continu.

On s'intéresse alors au problème de contrôle suivant : quelle est l'image par l'opérateur R de $L^2(]0, T[\times \omega)$? Autrement dit, quelles sont les données $(u_0, u_1) \in H_0^1 \times L^2$ pour lesquelles qu'il existe $g \in L^2(]0, T[\times \omega)$ tel que la solution $u \in C^0(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ de

$$(\partial_t^2 - \Delta)u = g \times \theta(x, t), \quad u|_{t=0} = u_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = u_1$$

vérifie $u|_{t=T} = 0$, $\partial_t u|_{t=T} = 0$ (et donc $u|_{t \geq T} \equiv 0$) ? Nous allons voir que cette question se ramène à l'étude d'un problème dual. Soient $(v_0, v_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ et soit $v \in C^1(\mathbb{R}_t; H^{-1}(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega))$ la solution de l'équation

$$(\partial_t^2 - \Delta)v = 0, \quad v|_{t=0} = v_0, \quad \partial_t v|_{t=0} = v_1, \quad v|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t} = 0$$

donnée par le théorème 3.7.

Notons $S(v_0, v_1) = v \times \theta(x, t)$. Alors S est continu $L^2 \times H^{-1} \rightarrow L^2(]0, T[\times \omega)$. L'estimation clé de la méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method) est le résultat suivant de dualité entre les opérateurs S et R .

Théorème 4.4. *Soit $g \in L^2(]0, T[\times \omega)$ et soit $(v_0, v_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Alors, en notant $Rg = (u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ on a*

$$(4.9) \quad \langle u_0, v_1 \rangle_{H_0^1}^{H^{-1}} - \langle u_1, v_0 \rangle_{L^2} = \int_0^T \int_\omega g \times S(v_0, v_1) dt dx.$$

Preuve. Il suffit de démontrer cette relation pour $g \in C_c^0(]0, T[; H_0^1(\Omega))$ et $(v_0, v_1) \in H_0^1 \times L^2$. En effet ces espaces sont denses dans $L^2(]0, T[\times \omega)$ et $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ et on peut passer à la limite dans l'égalité (4.9). Pour $g \in C_c^0(]0, T[; H_0^1(\Omega))$, on vérifie facilement que

$$u \in C^0(\mathbb{R}_t; D(-\Delta_D)) \cap C^1(\mathbb{R}_t; H_0^1(\Omega)) \cap C^2(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega))$$

et, pour $(v_0, v_1) \in H_0^1 \times L^2$,

$$v \in C^0(\mathbb{R}_t; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega)) \cap C^2(\mathbb{R}_t; H^{-1}(\Omega)).$$

Il vient

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t^2 u(t), v(t) \rangle dt &= \left[\int_\Omega \langle \partial_t u(t), v(t) \rangle - \langle u(t), \partial_t v(t) \rangle \right]_0^T + \int_0^T \langle u(t), \partial_t^2 v(t) \rangle_{H_0^1}^{H^{-1}} dt \\ &= -\langle u_1, v_0 \rangle_{L^2} + \langle u_0, v_1 \rangle_{H_0^1}^{H^{-1}} + \int_0^T u(t) \times \partial_t^2 v(t) dt. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_0^T \int_{\Omega} -\Delta u v \, dx \, dt = \int_0^T \langle -\Delta u, v \rangle_{L^2} \, dt = \int_0^T \langle u, -\Delta v \rangle_{H_0^1}^{H^{-1}} \, dt.$$

Finalement, en regroupant les termes on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \theta(x, t) \times g \times v \, dx \, dt &= \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t^2 - \Delta) u \times v \, dx \, dt = \int_0^T \langle u, (\partial_t^2 - \Delta) v \rangle_{H_0^1}^{H^{-1}} \, dt \\ &\quad - \langle u_1, v_0 \rangle_{L^2} + \langle u_0, v_1 \rangle_{H_0^1}^{H^{-1}} = \langle u_1, v_0 \rangle_{L^2} - \langle u_0, v_1 \rangle_{H_0^1}^{H^{-1}}. \end{aligned}$$

ce qui implique la relation (4.9).

Nous allons maintenant déduire du théorème 4.4, deux résultats de contrôle.

Corollaire 4.5. *On a équivalence entre :*

- i) *L'image de l'opérateur R est dense (on peut contrôler un ensemble dense de données initiales (u_0, u_1)).*
- ii) *Le noyau de l'opérateur S est réduit à $\{(0, 0)\}$.*

Preuve. Soit $F = \mathfrak{S}(R) \subset H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Les espaces de Hilbert $H_0^1 \times L^2$ et $H^{-1} \times L^2$ sont en dualité par l'application bilinéaire

$$\langle (u_0, u_1), (v_1, v_0) \rangle_{H_0^1 \times L^2}^{H^{-1} \times L^2} = \langle u_0, v_1 \rangle - \langle u_1, v_0 \rangle.$$

(Le signe $-$ qui change par rapport aux conventions habituelles simplifie l'exposition).

L'espace F est dense si et seulement si son orthogonal (pour cette dualité par exemple) est réduit à $\{(0, 0)\}$. Or

$$F^\perp = \left\{ (v_1, v_0); \forall g \in L^2(]0, T[\times \omega), \langle u_0, v_1 \rangle - \langle u_1, v_0 \rangle = 0 \right\}$$

donc d'après le théorème 4.4

$$F^\perp = \left\{ (v_0, v_1); \forall g \in L^2(]0, T[\times \omega), \int_0^T \int_{\omega} g(x, t) S(v_0, v_1) \, dt \, dx = 0 \right\}$$

$$F^\perp = \{(v_0, v_1); S(v_0, v_1) = 0\} = \text{Ker } S.$$

q.e.d.

Le deuxième résultat de contrôle est plus précis et donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'image de l'opérateur R soit l'espace tout entier : $\mathfrak{S}(R) = H_0^1 \times L^2$.

Théorème 4.6. *On a équivalence entre :*

i) $\mathfrak{S}(R) = H_0^1 \times L^2$

ii) $\exists C > 0; \forall (v_0, v_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$

$$\int_0^T \int_{\Omega} |S(v_0, v_1)|^2 dx dt \geq C [\|v_0\|_{L^2}^2 + \|v_1\|_{H^{-1}}^2].$$

Preuve.

i) \Rightarrow ii). On remarque d'abord, d'après le théorème de l'application ouverte 1.7, que si $\mathfrak{S}(R) = H_0^1 \times L^2$, alors $\exists \eta > 0$ tel que

$$R(B(0, 1)_{L^2(\]0, T[\times \omega)}) \supset B(0, \eta)_{H_0^1 \times L^2}.$$

Fixons $(v_0, v_1) \in L^2 \times H^{-1}$. Soit $(u_0, u_1) \in H_0^1 \times L^2$ tel que

a) $\|u_0\|_{H_0^1}^2 + \|u_1\|_{L^2}^2 = 1$.

b) $\langle u_0, v_1 \rangle - \langle u_1, v_0 \rangle = (\|v_0\|_{L^2}^2 + \|v_1\|_{H^{-1}}^2)^{1/2}$.

Soit $g \in L^2(\]0, T[\times \omega)$ tel que $R(g) = (u_0, u_1)$ et $\|g\|_{L^2(\]0, T[\times \omega)} \leq \frac{1}{\eta}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} (\|v_0\|_{L^2}^2 + \|v_1\|_{H^{-1}}^2)^{1/2} &= \langle u_0, v_1 \rangle - \langle u_1, v_0 \rangle = \int_0^T \int_{\omega} g(x, t) S(v_0, v_1) dt dx \\ &\leq \|g\|_{L^2(\]0, T[\times \omega)} \times \|S(v_0, v_1)\|_{L^2(\]0, T[\times \omega)} \\ &\leq \frac{1}{\eta} \|S(v_0, v_1)\|_{L^2(\]0, T[\times \omega)}. \end{aligned}$$

ii) \Rightarrow i). Considérons l'opérateur $R \circ S$, $L^2 \times H^{-1} \rightarrow H_0^1 \times L^2$. Puisque $S(\bar{v}_0, \bar{v}_1) = \overline{S(v_0, v_1)}$, on a

$$\begin{aligned} \langle R \circ S(v_0, v_1), (\bar{v}_0, \bar{v}_1) \rangle_{H_0^1 \times L^2}^{H^{-1} \times L^2} &= \int_0^T \int_{\Omega} |S(v_0, v_1)|^2 dx dt \\ &\geq C [\|v_0\|_{L^2}^2 + \|v_1\|_{H^{-1}}^2]. \end{aligned}$$

L'opérateur $R \circ S$ est donc coercif, donc bijectif et $\mathfrak{S}(R) = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. **q.e.d.**

Remarque 3.8. Comme dans la remarque 4.3, il n'est pas difficile d'étendre les théorèmes 4.4 et 4.6 au cas d'une équation des ondes dans un milieu inhomogène (ρ, K) .

CHAPITRE V

OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

Dans ce chapitre, Ω désigne un ouvert non vide de \mathbb{R}^d .

5.1. Opérateurs différentiels

Un **opérateur différentiel** sur Ω est une application linéaire $P : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ de la forme

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x)$$

où les fonctions a_α sont C^∞ sur Ω . Le plus grand entier m tel que les fonctions a_α , $|\alpha| = m$, soient non toutes nulles est appelé **ordre** de P , et la fonction $p : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (i\xi)^\alpha$$

est appelée **symbole** de P . On remarquera que p est caractérisé par l'identité

$$(5.1) \quad P(e_\xi)(x) = p(x, \xi) e_\xi(x),$$

où $e_\xi(x) = e^{ix \cdot \xi}$. On a coutume d'introduire le multivecteur symbolique $D = (D_1, \dots, D_d)$ par $D_j = \frac{1}{i} \partial_j$, de sorte que l'opérateur P s'écrit, en posant $b_\alpha = i^{|\alpha|} a_\alpha$,

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} b_\alpha(x) D^\alpha = p(x, D).$$

La formule (5.1) se généralise alors sous la forme suivante : pour tous $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^d$, pour toute distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

$$(5.2) \quad p(x, D)(e_\xi u) = e_\xi p(x, \xi + D)(u) = e_\xi \sum_{\alpha} \frac{\partial_\xi^\alpha p(x, \xi)}{\alpha!} D^\alpha u,$$

la somme précédente étant finie puisque p est polynomiale dans la variable ξ .

Proposition 5.1. *Si $P = p(x, D)$ et $Q = q(x, D)$ sont des opérateurs différentiels sur Ω , d'ordres m, n respectivement, alors le composé PQ est un opérateur différentiel d'ordre au plus $m + n$, et son symbole est donné par*

$$(5.3) \quad p\#q(x, \xi) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} p(x, \xi) D_x^{\alpha} q(x, \xi),$$

la somme étant finie.

Démonstration. Si P, Q sont des monômes différentiels aD^{α}, bD^{β} , $P \circ Q$ est un opérateur différentiel à cause de la formule de Leibniz, qui fournit la formule (5.3) dans ce cas. Le reste de la proposition s'en déduit par bilinéarité. Si l'on préfère, on peut aussi déduire (5.3) de (5.2), puisque

$$\begin{aligned} P \circ Q(e_{\xi})(x) &= p(x, D)(q(\cdot, \xi)e_{\xi}) = e_{\xi}p(x, \xi + D)(q(\cdot, \xi)) \\ &= e_{\xi} \sum_{\alpha} \frac{\partial_{\xi}^{\alpha} p(x, \xi)}{\alpha!} D_x^{\alpha} q(x, \xi). \end{aligned}$$

q.e.d.

On dispose d'un résultat analogue pour l'adjoint formel.

Proposition 5.2. *Si $P = p(x, D)$ est un opérateur différentiel d'ordre m sur Ω , alors il existe un opérateur différentiel P^* d'ordre m sur Ω tel que, pour toutes fonctions $u, v \in C^{\infty}(\Omega)$ dont l'une est à support compact,*

$$(5.4) \quad (Pu \mid v)_{L^2(\Omega)} = (u \mid P^*v)_{L^2(\Omega)}.$$

Le symbole de P^* est donné par la somme finie

$$(5.5) \quad p^*(x, \xi) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\alpha} \bar{p}(x, \xi).$$

Démonstration. Là encore, il suffit de traiter le cas où $P = aD^{\alpha}$, et la proposition résulte de la formule d'intégration par parties et de la formule de Leibniz. La formule (5.5) se déduit également de (5.2) comme suit,

$$\begin{aligned} (P^*(\cdot, \xi) \mid u) &= (P^*(e_{\xi}) \mid ue_{\xi}) = (e_{\xi} \mid P(ue_{\xi})) \\ &= \sum_{\alpha} \left(1 \mid \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} p(\cdot, \xi) D_x^{\alpha} u \right) \\ &= \left(\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\alpha} \bar{p}(\cdot, \xi) \mid u \right). \end{aligned}$$

q.e.d.

Si P est un opérateur différentiel d'ordre au plus m , de symbole p , on appelle **symbole principal d'ordre m** de P , et on note $\sigma_m(P)$, la partie homogène de degré m en ξ de la fonction polynomiale $p(x, \xi)$, soit

$$(5.6) \quad \sigma_m(P) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) (i\xi)^\alpha$$

$$\text{si } P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha.$$

Les propositions 5.1, 5.2 ont alors le corollaire suivant.

Corollaire 5.3. *Si P est d'ordre au plus m , et Q d'ordre au plus n , alors*

$$(5.7) \quad \sigma_{m+n}(PQ) = \sigma_m(P) \sigma_n(Q),$$

$$(5.8) \quad \sigma_{m+n-1}([P, Q]) = \frac{1}{i} \{ \sigma_m(P), \sigma_n(Q) \},$$

$$(5.9) \quad \sigma_m(P^*) = \overline{\sigma_m(P)}.$$

Si f, g sont des fonctions C^∞ sur un ouvert de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$, la quantité $\{f, g\}$ intervenant dans (5.8) est définie par

$$(5.10) \quad \{f, g\}(x, \xi) = \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \right).$$

On l'appelle le **crochet de Poisson** des fonctions f et g .

Les formules (5.3), (5.5), (5.7), (5.8), (5.9) permettent de décrire les opérations classiques sur les opérateurs différentiels (produit, commutateur, adjoint) en termes de leurs symboles (principaux). On les appelle couramment **formules de calcul symbolique**. Notre but est d'étendre ces formules à des opérateurs associés à des symboles non polynomiaux.

5.2. Le calcul pseudo-différentiel

Commençons par une remarque exprimant le lien entre opérateurs différentiels et transformation de Fourier. Si $u \in C_0^\infty(\Omega)$, on a bien sûr

$$\widehat{D^\alpha u}(\xi) = \xi^\alpha \hat{u}(\xi)$$

de sorte que, si $P = \sum_{\alpha} a_{\alpha} D^{\alpha}$ est un opérateur différentiel de symbole $p(x, \xi) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) \xi^{\alpha}$, on peut écrire

$$(5.11) \quad Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi.$$

L'intérêt de la formule (5.11) est qu'elle a un sens pour tout $u \in C_0^{\infty}$ même si p n'est pas polynomiale en ξ . En effet, puisque \hat{u} est à décroissance rapide, il suffit que $p(x, \xi)$ soit à croissance tempérée en ξ pour que l'intégrale converge. Pour obtenir des théorèmes de calcul symbolique, nous aurons besoin de propriétés supplémentaires.

Définition 5.4. Soit $m \in \mathbb{R}$. On appelle symbole d'ordre au plus m dans Ω une fonction $a : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^{∞} , à support dans $K \times \mathbb{R}^d$ où K est une partie compacte de Ω , et vérifiant les estimations suivantes : pour tous $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\beta \in \mathbb{N}^d$, il existe une constante $C_{\alpha\beta}$ telle que

$$(5.12) \quad |\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} a(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |\xi|)^{m-|\beta|}.$$

On note $S_c^m(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ l'espace vectoriel des symboles d'ordre au plus m dans Ω .

Exemple 5.5.

- a) Si p est polynomiale en ξ à coefficients $C_0^{\infty}(\Omega)$, alors $p \in S_c^m(\Omega \times \mathbb{R}^d)$.
- b) Si $h = h(x, \xi)$ est homogène d'ordre m en ξ , de classe C^{∞} sur $\Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, à support dans $K \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ pour un compact K de Ω , alors, pour toute fonction $\chi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ valant 0 près de 0 et 1 au voisinage de l'infini, la fonction a définie par

$$a(x, \xi) = \chi(\xi) h(x, \xi)$$

appartient à $S_c^m(\Omega \times \mathbb{R}^d)$.

Proposition 5.6. Si $a \in S_c^m(\Omega \times \mathbb{R}^d)$, la formule

$$(5.13) \quad Au(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi$$

définit, pour tout $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$, un élément de Au de $C_0^{\infty}(\Omega)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\hat{u}(\xi)$ est à décroissance rapide, $\partial_x^{\alpha} a(x, \xi)$ est à croissance tempérée en ξ , et d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme. **q.e.d.**

La formule (5.13) définit donc une application linéaire $A : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow C_0^\infty(\Omega)$ qu'on appellera **opérateur pseudo-différentiel de symbole a** . On prendra garde au fait que, si Ω n'est pas tout \mathbb{R}^d , l'application $a \mapsto A$ n'est pas injective (le fait que $A = 0$ équivaut à $a(x, \xi) = e^{-ix\xi} b(x, \xi)$, où b a une transformée de Fourier en ξ nulle sur Ω). On ne peut donc pas parler **du** symbole de A , mais **d'un** symbole de A (si $\Omega \neq \mathbb{R}^d$). En revanche, la notion de **symbole principal** est plus intrinsèque, grâce à la proposition suivante.

Proposition 5.7. *Soit A un opérateur pseudo-différentiel de symbole $a \in S_c^m(\Omega \times \mathbb{R}^d)$. On suppose qu'il existe une fonction $a_m \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}))$, à support dans $K \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, où K est un compact de Ω , telle que, si $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ vaut 0 près de 0 et 1 près de l'infini,*

$$(5.14) \quad a(x, \xi) = a_m(x, \xi) \chi(\xi) + r(x, \xi),$$

où $r \in S_c^{m-1}(\Omega \times \mathbb{R}^d)$. Alors, pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$(5.15) \quad t^{-m} e^{-itx \cdot \xi} A(u e_{t\xi})(x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} a_m(x, \xi) u(x).$$

Démonstration. Après un changement de variables dans l'intégrale (5.13), il vient

$$\frac{1}{t^m} e^{-itx \cdot \xi} A(u e_{t\xi})(x) = \frac{t^{-m}}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \eta} a(x, \eta + t\xi) \hat{u}(\eta) d\eta$$

et, compte tenu de (5.14),

$$t^{-m} a(x, \eta + t\xi) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} a_m(x, \xi)$$

en restant uniformément borné par un terme à croissance tempérée en η , indépendant de t . La proposition résulte donc du théorème de convergence dominée. **q.e.d.**

Définition 5.8. *Dans les conditions de la proposition 5.7, on dit que A admet un symbole principal d'ordre m ; la fonction a_m caractérisée par (5.15) est appelée le symbole principal d'ordre m de A , et notée $\sigma_m(A)$.*

Remarquons que, d'après l'exemple 5.5. b), toute fonction $h \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}))$ à support compact en x et homogène de degré m en ξ , est le support principal d'ordre m d'un opérateur pseudo-différentiel sur Ω .

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer les théorèmes de calcul symbolique.

Théorème 5.9. *Soit A un opérateur pseudo-différentiel de symbole $a \in S_c^m(\Omega \times \mathbb{R}^d)$, et soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ valant 1 près de la projection en x du support de a . Il existe un opérateur pseudo-différentiel A_χ^* sur Ω tel que, pour tous $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$,*

$$(A(\chi u) \mid v)_{L^2(\Omega)} = (u \mid A_\chi^* v)_{L^2(\Omega)}.$$

De plus, A_χ^* admet un symbole $a_\chi^* \in S_c^m(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ vérifiant, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$(5.16) \quad a_\chi^* - \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \partial_\xi^\alpha \bar{a} \in S_c^{m-N-1}(\Omega \times \mathbb{R}^d).$$

En particulier, si A admet un symbole principal d'ordre m , il en est de même de A^* , et

$$(5.17) \quad \sigma_m(A_\chi^*) = \overline{\sigma_m(A)}.$$

Remarque. L'introduction de la troncature χ dans l'énoncé ci-dessus tient au fait que nous avons délibérément choisi de travailler avec des symboles à support compact en x , ce qui simplifie notablement les démonstrations. Le seul inconvénient est que cette propriété ne se transmet pas à l'adjoint : il faut donc tronquer le symbole de l'adjoint de A pour rester dans la classe S_c^m . Cela dit, comme le montre la formule (5.16), l'introduction de χ n'est pas sensible sur les termes du développement de a_χ^* , de sorte qu'elle ne sera pas gênante dans les applications que nous avons en vue.

Théorème 5.10. *Soient A, B des opérateurs pseudo-différentiels de symbole $a \in S_c^m(\Omega \times \mathbb{R}^d)$, $b \in S_c^n(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ respectivement. Alors le composé AB est un opérateur pseudo-différentiel admettant un symbole $a\#b \in S_c^{m+n}(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ vérifiant, pour tout $N \in \mathbb{N}$,*

$$(5.18) \quad a\#b - \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a D_x^\alpha b \in S_c^{m+n-N-1}(\Omega \times \mathbb{R}^d).$$

En particulier, si A admet un symbole principal d'ordre m , et si B admet un symbole principal d'ordre n , alors AB admet un symbole principal d'ordre $m+n$, et $[A, B]$ admet un symbole principal d'ordre $m+n-1$, donnés par

$$(5.19) \quad \sigma_{m+n}(AB) = \sigma_m(A)\sigma_n(B)$$

$$(5.20) \quad \sigma_{m+n-1}([A, B]) = \frac{1}{i} \{\sigma_m(A), \sigma_n(B)\}.$$

Démonstration du théorème 5.9. Compte tenu de la formule (5.13), il vient

$$\begin{aligned} (A(\chi u) | v) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} a(x, \xi) \widehat{\chi u}(\xi) \overline{v(x)} \frac{d\xi dx}{(2\pi)^d} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\chi u}(\xi) \overline{\widehat{v}(\eta)} \widehat{a}(\eta - \xi, \xi) \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^{2d}} \end{aligned}$$

où $\widehat{a}(\zeta, \xi)$ désigne la transformée de Fourier de $a(x, \xi)$ par rapport à x . On en déduit

$$(A(\chi u) | v) = \int_{\mathbb{R}^d} u(y) \overline{A_\chi^* v(y)} dy,$$

avec

$$\begin{aligned} A_\chi^* v(y) &= \frac{\overline{\chi(y)}}{(2\pi)^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iy \cdot \xi} \overline{\widehat{a}(\eta - \xi, \xi)} \widehat{v}(\eta) \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^{2d}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iy \cdot \eta} a^*(y, \eta) \widehat{v}(\eta) d\eta, \end{aligned}$$

où

$$(5.21) \quad \begin{aligned} a^*(y, \eta) &= \frac{\overline{\chi(y)}}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iy \cdot (\xi - \eta)} \overline{\widehat{a}(\eta - \xi, \xi)} d\xi \\ &= \frac{\overline{\chi(y)}}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iy \cdot \zeta} \widehat{a}(\zeta, \eta + \zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Notons que les applications successives du théorème de Fubini ci-dessus sont justifiées par le fait que $\widehat{a}(\zeta, \xi)$ est à décroissance rapide en ζ et à croissance tempérée en ξ , du fait des estimations (5.12). Précisément, on a

$$(5.22) \quad |\partial_\xi^\beta \widehat{a}(\zeta, \xi)| \leq C_{N,\beta} (1 + |\zeta|)^{-N} (1 + |\xi|)^{m-|\beta|}$$

pour tous $N \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{N}^d$. Il résulte alors de la formule (5.21) que a^* est une fonction C^∞ sur $\Omega \times \mathbb{R}^d$, à support dans $\text{supp}(\chi) \times \mathbb{R}^d$, et vérifiant, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, $N \in \mathbb{N}$

$$|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta \widehat{a}^*(y, \eta)| \leq C_{\alpha,\beta,N} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\eta + \zeta|)^{m-|\beta|} (1 + |\zeta|)^{-N} d\zeta.$$

Le fait que $a^* \in S_c^m(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ provient alors du lemme suivant (appliqué avec $t = 1$).

Lemme 5.11. Soient $m \in \mathbb{R}$, $N > d + |m|$. Alors il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\eta \in \mathbb{R}^d$, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\zeta|)^{-N} (1 + |\eta + t\zeta|)^m d\zeta \leq C(1 + |\eta|)^m.$$

Démonstration. On découpe l'intégrale en deux morceaux, correspondants aux zones $|\zeta| < \frac{1}{2}(1 + |\eta|)$ et $|\zeta| \geq \frac{1}{2}(1 + |\eta|)$. Dans la première zone,

$$\frac{1}{2}(1 + |\eta|) \leq 1 + |\eta + t\zeta| \leq \frac{3}{2}(1 + |\eta|)$$

de sorte que l'intégrale correspondante est majorée par $C(1 + |\eta|)^m$ si $N > d$.

Dans la deuxième zone, si $m \leq 0$, $(1 + |\eta + t\zeta|)^m \leq 1$, et l'intégrale correspondante est majorée par

$$C(1 + |\eta|)^{d-N} \leq C(1 + |\eta|)^m.$$

Si $m \geq 0$, $(1 + |\eta + t\zeta|)^m \leq C|\zeta|^m$ et l'intégrale correspondante est majorée par

$$C(1 + |\eta|)^{d+m-N} \leq C(1 + |\eta|)^m.$$

q.e.d.

Il reste à vérifier les formules (5.16) et (5.17). Ecrivons la formule de Taylor pour \widehat{a} dans l'expression (5.21) de a^* :

$$\begin{aligned} a^*(y, \eta) &= \frac{\overline{\chi(y)}}{(2\pi)^d} \sum_{|\alpha| \leq N} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{iy \cdot \zeta}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \widehat{a}(\zeta, \eta) \zeta^\alpha d\zeta \\ &\quad + \frac{\overline{\chi(y)}}{(2\pi)^d} \sum_{|\beta| = N+1} (N+1) \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{iy \cdot \zeta}}{\beta!} \partial_\xi^\beta \widehat{a}(\zeta, \eta + t\zeta) \zeta^\beta d\zeta dt. \end{aligned}$$

Compte tenu des estimations (5.22) et du lemme 5.11, le terme de reste ci-dessus appartient à S_c^{m-N-1} . Par ailleurs, le terme de rang α dans le développement n'est autre que $\frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \partial_\xi^\alpha \bar{a}$, compte tenu de la formule d'inversion de Fourier et du fait que $\bar{\chi} = 1$ près du support de \bar{a} en y . Enfin, la formule (5.17) découle de (5.16) avec $N = 0$.

Démonstration du théorème 5.10. Elle est analogue à la précédente. De la formule (5.13), on déduit

$$\widehat{Bu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{b}(\xi - \eta, \eta) \hat{u}(\eta) \frac{d\eta}{(2\pi)^d}$$

de sorte que

$$ABu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \eta} c(x, \eta) \hat{u}(\eta) \frac{d\eta}{(2\pi)^d}$$

avec

$$\begin{aligned} (5.23) \quad c(x, \eta) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot (\xi - \eta)} a(x, \xi) \hat{b}(\xi - \eta, \eta) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \zeta} a(x, \eta + \zeta) \hat{b}(\zeta, \eta) d\zeta. \end{aligned}$$

Les estimations (5.12) pour a et b entraînent, pour tous α, β, N ,

$$|\partial_x^\alpha \partial_\eta^\beta (a(x, \eta + t\zeta) \hat{b}(\zeta, \eta))| \leq C_{\alpha, \beta, N} (1 + |\zeta|)^{-N} (1 + |\eta + t\zeta|)^m (1 + |\eta|)^n$$

de sorte que le lemme 5.11 assure que $c \in S_c^{m+n}$. La formule (5.18) pour $c = a \# b$ s'obtient alors par développement de Taylor de $a(x, \eta + \zeta)$ en variable ζ , et on conclut à nouveau par le lemme 5.11 pour le reste, et à l'aide de la formule d'inversion de Fourier pour chaque terme du développement. Enfin, (5.19) et (5.20) sont conséquences de (5.18) avec $N = 0$ et 1 respectivement. **q.e.d.**

5.3. Estimations L^2

Jusqu'ici nous avons fait opérer les opérateurs pseudo-différentiels sur $C_0^\infty(\Omega)$. Il est en fait possible d'étendre leur action aux espaces de Sobolev. Pour tout compact K inclus dans Ω et tout $s \in \mathbb{R}$, on note $H_K^s(\Omega)$ l'espace des distributions à support dans K , dont le prolongement par 0 est dans $H^s(\mathbb{R}^d)$; on pose $H_{\text{comp}}^s(\Omega) = \bigcup_K H_K^s(\Omega)$ lorsque K décrit les compacts de Ω .

Théorème 5.12. *Soit $a \in S_c^m(\Omega \times \mathbb{R}^d)$, et soit K la projection sur Ω du support de a . Alors, pour tout réel s , l'opérateur A défini par (5.13) se prolonge de façon unique en une application linéaire continue de $H_{\text{comp}}^s(\Omega)$ dans $H_K^{s-m}(\Omega)$.*

Démonstration. Compte tenu de la densité de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $H_{\text{comp}}^s(\Omega)$, il suffit de montrer l'inégalité

$$\|Au\|_{H^{s-m}} \leq C \|u\|_{H^s}$$

pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Par définition de la norme H^s à l'aide de la transformation de Fourier, cette inégalité s'écrit

$$\int (1 + |\xi|^2)^{s-m} \left| \int \hat{a}(\xi - \eta, \eta) \hat{u}(\eta) d\eta \right|^2 d\xi \leq C \int (1 + |\eta|^2)^s |\hat{u}(\eta)|^2 d\eta.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \int \hat{a}(\xi - \eta, \eta) \hat{u}(\eta) d\eta \right|^2 \leq \int |\hat{a}(\xi - \eta, \eta)| d\eta \times \int |\hat{a}(\xi - \eta, \eta)| |\hat{u}(\eta)|^2 d\eta.$$

Compte tenu des inégalités (5.22) sur \hat{a} et du lemme 5.11,

$$\int |\hat{a}(\xi - \eta, \eta)| d\eta \leq C_N \int (1 + |\zeta|)^{-N} (1 + |\xi + \zeta|)^m d\zeta \leq C(1 + |\xi|)^m.$$

De même,

$$\begin{aligned} & \int (1 + |\xi|^2)^{s-m} (1 + |\xi|)^m |\hat{a}(\xi - \eta, \eta)| d\xi \\ & \leq C_N \left(\int (1 + |\xi|)^{2s-m} (1 + |\xi - \eta|)^{-N} d\xi \right) (1 + |\eta|)^m \\ & \leq C(1 + |\eta|)^{2s} \leq \tilde{C}(1 + |\eta|^2)^s. \end{aligned}$$

Le théorème 5.12 est donc démontré.

q.e.d.

5.4. Application : une inégalité de Gårding

Théorème 5.13. *Soit A un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 sur Ω , dont le symbole principal $\sigma_0(A)$ existe et est une fonction ≥ 0 sur $\Omega \times \mathbb{R}^d$. Alors il existe $C > 0$ et, pour tout $\delta > 0$, $C_\delta > 0$, tels que pour toute fonction $v \in L^2_{\text{comp}}(\Omega)$,*

$$(5.25) \quad \text{Re}(Av|v)_{L^2} \geq -\delta \|v\|_{L^2}^2 - C_\delta \|v\|_{H^{-1/2}}^2$$

$$(5.26) \quad |\Im(Av|v)_{L^2}| \leq C \|v\|_{H^{-1/2}}^2.$$

Démonstration. Soit $\chi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ valant 1 près de la projection en x du symbole a de A , $0 \leq \chi_1 \leq 1$. Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ valant 1 près du support de χ_1 .

La fonction $b = \chi_1(\sigma_0(A) + \delta)^{1/2}$ est C^∞ sur $\Omega \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, à support compact en x , homogène de degré 0 en ξ . Soit B un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 tel que $\sigma_0(B) = b$. Alors l'opérateur $B_\chi^* B_\chi$ est pseudo-différentiel d'ordre 0 sur Ω d'après les théorèmes 5.9 et 5.10, et

$$\sigma_0(B_\chi^* B_\chi) = |\sigma_0(b)|^2 = \chi_1^2(\sigma_0(A) + \delta) = \sigma_0(A) + \delta \chi_1^2$$

car $\chi_1 \sigma_0(A) = \sigma_0(A)$. Il en résulte que

$$R = A + \delta \chi_1^2 - B_\chi^* B_\chi$$

est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre ≤ -1 sur Ω . Mais alors

$$(Av|v)_{L^2} = -\delta \|\chi_1 v\|_{L^2}^2 + \|B(\chi v)\|_{L^2}^2 + (Rv|v)_{L^2}$$

soit encore

$$(5.27) \quad \text{Re}(Av|v)_{L^2} \geq -\delta \|\chi_1 v\|_{L^2}^2 + \text{Re}(Rv|v)_{L^2}$$

$$(5.28) \quad |\Im(Av|v)_{L^2}| = |\Im(Rv|v)_{L^2}|.$$

En utilisant l'inégalité (5.24) démontrée au théorème 5.12,

$$|(Rv|v)_{L^2}| \leq \|Rv\|_{H^{1/2}} \|v\|_{H^{-1/2}} \leq C_\delta \|v\|_{H^{-1/2}}^2$$

et (5.25), (5.26) découlent de (5.27), (5.28) (avec $\delta = 1$), respectivement.

Remarque. On peut montrer (c'est beaucoup plus dur) que (5.25) a lieu avec $\delta = 0$ pour une certaine constante $C_0 > 0$. Nous n'en aurons pas besoin dans ce cours.

5.5. Mesures de défaut microlocales

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, *i.e.* telle que $\sup_n \int_K |u_n(x)|^2 dx < +\infty$, pour toute partie compacte K de Ω . On suppose que u_n converge faiblement vers 0, au sens où, pour toute fonction $f \in L^2_{\text{comp}}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} u_n(x) f(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On se propose de décrire l'obstruction à la convergence forte de u_n vers 0 (*i.e.* $\int_K |u_n(x)|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ pour tout K) au moyen d'une mesure de Radon positive sur $\Omega \times S^{d-1}$.

Théorème 5.14. *Il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ et une mesure de Radon positive μ sur $\Omega \times S^{d-1}$ telles que, pour tout opérateur pseudo-différentiel A d'ordre ≤ 0 sur Ω admettant un symbole principal d'ordre 0, pour toute fonction $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\chi \sigma_0(A) = \sigma_0(A)$, on a*

$$(5.29) \quad (A(\chi u_{\varphi(n)}) | \chi u_{\varphi(n)})_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \times S^{d-1}} \sigma_0(A)(x, \xi) d\mu(x, \xi).$$

Remarque. Comme on le voit dans (5.29), la troncature χ n'est là que pour donner un sens au premier membre, mais n'a pas d'influence sur la limite.

Démonstration. Elle est basée sur le lemme suivant.

Lemme 5.15. *Si $\sigma_0(A) \geq 0$, alors*

$$\Im(A(\chi u_n) | \chi u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(A(\chi u_n) | \chi u_n) \geq 0.$$

Démonstration. Puisque u_n est bornée dans $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ et converge faiblement vers 0, on a

$$(5.30) \quad \|\chi u_n\|_{H^{-1/2}}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En effet, rappelons que

$$\|\chi u_n\|_{H^{-1/2}}^2 = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{-1/2} |\widehat{\chi u_n}(\xi)|^2 d\xi.$$

Or

$$\widehat{\chi u_n}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi(x) u_n(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$$

tend vers 0 pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et reste bornée uniformément en ξ, n grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'après le théorème de convergence dominée, on a donc, pour tout $R > 0$,

$$\int_{|\xi| \leq R} |\widehat{\chi u_n}(\xi)|^2 d\xi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par ailleurs, d'après le théorème de Plancherel,

$$(2\pi)^{-d} \int_{|\xi| > R} |\widehat{\chi u_n}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^{-1/2} d\xi \leq \frac{1}{R} \|\chi u_n\|_{L^2}^2$$

donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\chi u_n\|_{H^{-1/2}}^2 \leq \frac{1}{R} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\chi u_n\|_{L^2}^2$$

ce qui entraîne (5.30), puisque R est arbitraire. Appliquons alors à $v = \chi u_n$ les inégalités (5.25) et (5.26) du théorème 5.13, et faisons tendre n vers l'infini en tenant compte de (5.30). On obtient

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(A(\chi u_n) | \chi u_n) \geq -\delta \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\chi u_n\|_{L^2}^2$$

$$\Im(A(\chi u_n) | \chi u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

d'où le lemme, puisque $\delta > 0$ est arbitraire. **q.e.d.**

Une conséquence du lemme 5.15 est que, pour tout A d'ordre ≤ 0 ayant un symbole principal, pour tout $\chi \in C_0^\infty$ vérifiant $\chi \sigma_0(A) = \sigma_0(A)$,

$$(5.31) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|A(\chi u_n)\|_{L^2} \leq C(\chi) \max |\sigma_0(A)|.$$

En effet, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|(A(\chi u_n) | \chi u_n)| \leq \|A(\chi u_n)\|_{L^2} \|\chi u_n\|_{L^2}$$

et

$$\|A(\chi u_n)\|_{L^2}^2 = (A_\chi^* A \chi u_n | u_n).$$

L'opérateur $A_\chi^* A \chi$ a pour symbole principal $|\sigma_0(A)|^2 \leq M^2 |\chi|^2$, où $M = \max |\sigma_0(A)|$. L'inégalité (5.31) résulte donc du lemme 5.15, avec $C(\chi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\chi u_n\|_{L^2}^2$.

Pour toute partie compacte K de Ω , notons $C_K^\infty(\Omega \times S^{d-1})$ l'espace vectoriel des fonctions C^∞ sur $\Omega \times S^{d-1}$, à support dans $K \times S^{d-1}$, muni de la norme L^∞ . Cet espace est séparable : c'est un sous-espace fermé de $C_0^\infty(\Omega \times U)$, $U = \{\xi \in \mathbb{R}^d, \frac{1}{2} < |\xi| < 2\}$ que l'on peut lui-même plonger dans $C^\infty(\mathbb{T}^{2d})$ qui est séparable d'après la théorie des séries de Fourier. Soit donc (a_j) une suite de $C_K^\infty(\Omega \times S^{d-1})$ telle que $\text{Vect}\{a_j, j \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $C_K^\infty(\Omega \times S^{d-1})$. Fixons par ailleurs, pour tout j , un opérateur pseudo-différentiel A_j tel que $\sigma_0(A_j) = a_j$, et $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ valant 1 sur K . Par le procédé diagonal de Cantor, il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ telle que les quantités $(A_j(\chi u_{\varphi(n)}) | \chi u_{\varphi(n)})$ aient des limites pour tout j . Par linéarité et prolongement de la convergence, en vertu de l'inégalité (5.31), il existe une forme linéaire L_K sur $C_K^\infty(\Omega \times S^{d-1})$ vérifiant, pour tout A tel que $\sigma_0(A) \in C_K^\infty(\Omega \times S^{d-1})$,

$$(5.32) \quad (A(\chi u_{\varphi(n)}) | \chi u_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L_K(\sigma_0(A))$$

$$(5.33) \quad |L_K(\sigma_0(A))| \leq C_\chi \max |\sigma_0(A)|.$$

De plus, L_K ne dépend pas du choix de χ , car, si $\chi \tilde{\chi} = \chi$,

$$(A(\tilde{\chi} u_n) | \tilde{\chi} u_n) - (A \chi u_n | \chi u_n) = (A((\tilde{\chi} - \chi)u_n) | \chi u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

car $\sigma_0(A(\tilde{\chi} - \chi)) = 0$ d'après le théorème 5.10. Enfin, en faisant varier K parmi une suite exhaustive de compacts, et en utilisant le procédé diagonal, il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ et une forme linéaire L sur $C_0^\infty(\Omega \times S^{d-1})$ telle que l'on ait (5.32) pour tout K avec $L|_{C_K^\infty} = L_K$. Compte tenu de (5.33) et du lemme 5.15, L se prolonge en une mesure de Radon ≥ 0 sur $\Omega \times S^{d-1}$. Le théorème 5.14 est donc complètement démontré.

Définition 5.16. Dans la situation du théorème 5.14, on dit que μ est la mesure de défaut microlocale de la suite $(u_{\varphi(n)})$.

Remarques. Le théorème 5.14 assure donc, pour toute suite bornée (u_n) de $L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ convergeant faiblement vers 0, l'existence d'une sous-suite admettant une mesure de

défaut microlocale. Notons que, si l'on spécialise (5.29) au cas où $A = f \in C_0^\infty(\Omega)$, il vient

$$(5.34) \quad \int_{\Omega} f(x) |u_{\varphi(n)}(x)|^2 dx \longrightarrow \int_{\Omega \times S^{d-1}} f(x) d\mu(x, \xi)$$

de sorte que $u_{\varphi(n)}$ converge vers 0 fortement si et seulement si $\mu = 0$.

Exemples 5.17. Voici quelques exemples de suites (u_n) et de leurs mesures de défaut microlocales (les calculs sont élémentaires et peuvent être faits à titre d'exercice).

a) $u_n(x) = b(x) e^{inx \cdot \xi_0}$, $b \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

$$\mu(x, \xi) = |b(x)|^2 dx \otimes \delta\left(\xi - \frac{\xi_0}{|\xi_0|}\right).$$

b) $u_n(x) = n^{d/2} f(n(x - x_0))$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $x_0 \in \Omega$,

$$\mu(x, \xi) = \delta(x - x_0) h(\xi) d\sigma(\xi),$$

où

$$h(\xi) = (2\pi)^{-d} \int_0^{+\infty} |\hat{f}(r\xi)|^2 r^{d-1} dr$$

et $d\sigma$ est la mesure superficielle sur S^{d-1} .

c) $u_n(x) = n^{d/2} f(n(x - x_0)) e^{in^2 x \cdot \xi_0}$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $x_0 \in \Omega$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

$$\mu(x, \xi) = \|f\|_{L^2}^2 \delta(x - x_0) \delta\left(\xi - \frac{\xi_0}{|\xi_0|}\right).$$

Pour terminer, voici deux résultats fondamentaux concernant les mesures de défaut microlocales (MDM) associées aux suites de solutions d'équations aux dérivées partielles.

Théorème 5.18. Soit P un opérateur différentiel d'ordre m sur Ω , et soit (u_n) une suite bornée de $L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ convergeant faiblement vers 0 et admettant une MDM μ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $Pu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ fortement dans $H_{\text{loc}}^{-m}(\Omega)$.

(ii) $\text{supp}(\mu) \subset \{(x, \xi) \in \Omega \times S^{d-1}, \sigma_m(P)(x, \xi) = 0\}$.

Théorème 5.19. Soit P un opérateur différentiel d'ordre m sur Ω , vérifiant $P^* = P$, et soit (u_n) une suite bornée de $L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ convergeant faiblement vers 0 et admettant une

MDM μ . On suppose que $Pu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ fortement dans $H_{\text{loc}}^{1-m}(\Omega)$. Alors, pour toute fonction $a \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}))$ homogène de degré $1 - m$ en la seconde variable et à support compact en la première,

$$(5.35) \quad \int_{\Omega \times S^{d-1}} \{a, p\}(x, \xi) d\mu(x, \xi) = 0.$$

Démonstration du théorème 5.18. La propriété (i) équivaut, pour tout $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, au fait que $P(\chi u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ dans H^{-m} ; soit encore

$$(5.36) \quad (BP(\chi u_n)|P(\chi u_n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

où B est l'opérateur de symbole $\tilde{\chi}(x)(1 + |\xi|^2)^{-m}$, $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\Omega)$ valant 1 sur le support de χ . Alors $P^*B\tilde{\chi}P$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, de symbole principal $|\xi|^{-2m} |\sigma_m(P)|^2$, de sorte que la limite du premier membre de (5.36) n'est autre que

$$I = \int_{\Omega \times S^{d-1}} |\chi(x)|^2 |\sigma_m(P)(x, \xi)|^2 d\mu(x, \xi)$$

qui est nulle pour tout χ si et seulement si (ii) est réalisée. **q.e.d.**

Démonstration du théorème 5.19. Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ vérifiant $\chi a = a$, et soit A d'ordre ≤ 0 vérifiant $\sigma_0(A) = a$. Alors le second membre de (5.35) n'est autre que

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} ([A, P](\chi u_n)|\chi u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(A(\chi Pu_n)|\chi u_n) - (A(\chi u_n)|\chi Pu_n)].$$

Or $\chi Pu_n \rightarrow 0$ dans H^{1-m} par hypothèse, tandis que A envoie H^{1-m} dans L^2 et L^2 dans H^{m-1} . Il en résulte que chacun des deux produits scalaires ci-dessus tend vers 0, donc $J = 0$. **q.e.d.**

Remarque. Il existe plusieurs variantes du théorème 5.19 ci-dessus, notamment avec un opérateur P non auto-adjoint, mais à symbole principal réel.

CHAPITRE VI

CONDITIONS DE CONTRÔLE GÉOMÉTRIQUE

6.1. Préliminaires géométriques

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d , et soit $p \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}))$ une fonction à valeurs réelles.

On appelle **champ hamiltonien** de p le champ de vecteurs sur $\Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ défini par

$$(6.1) \quad H_p(x, \xi) = \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_1}(x, \xi), \dots, \frac{\partial p}{\partial \xi_d}(x, \xi); -\frac{\partial p}{\partial x_1}(x, \xi), \dots, -\frac{\partial p}{\partial x_d}(x, \xi) \right).$$

La dérivée de Lie d'une fonction f par rapport au champ H_p est donc, avec les notations du chapitre V,

$$(6.2) \quad H_p(f) = \{p, f\}.$$

Une **courbe hamiltonienne** de p est une courbe intégrale du champ de vecteurs H_p , c'est-à-dire une solution maximale $s \in I \mapsto (x(s), \xi(s))$ du système d'équations différentielles ordinaires

$$(6.3) \quad \dot{x} = \frac{\partial p}{\partial \xi}(x, \xi), \quad \dot{\xi} = -\frac{\partial p}{\partial x}(x, \xi),$$

I étant un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

De l'identité $\{p, p\} = 0$ découle que la fonction p garde une valeur constante le long de chacune de ses courbes hamiltoniennes. On dira qu'une telle courbe est une **bicaractéristique** de p (ou, le cas échéant, de l'opérateur pseudodifférentiel dont p est le symbole principal) si cette valeur est nulle.

Soit λ une fonction C^∞ sur $\Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, à valeurs réelles non nulles. Puisque

$$H_{\lambda p} = \lambda H_p + p H_\lambda = \lambda H_p \text{ si } p = 0,$$

il résulte que les bicaractéristiques de λp et de p coïncident (*modulo* une reparamétrisation). Nous pouvons maintenant traduire les théorèmes 5.18 et 5.19 du chapitre V en des termes plus géométriques.

Théorème 6.1. Soit P un opérateur différentiel d'ordre m sur Ω , auto-adjoint, de symbole principal p . Soit (u_n) une suite bornée de $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, convergeant faiblement vers 0, de mesure de défaut microlocale μ . On suppose que Pu_n tend vers 0 dans $H_{\text{loc}}^{-(m-1)}(\Omega)$. Alors le support de μ est une union de courbes du type $s \in I \mapsto (x(s), \frac{\xi(s)}{|\xi(s)|})$, où $s \in I \mapsto (x(s), \xi(s))$ est une bicaractéristique de p .

Démonstration. Tout d'abord, le théorème 5.18 assure que le support de μ est contenu dans l'ensemble $\{p = 0\}$. De plus, le théorème 5.19 précise que, pour toute fonction $a \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, à support compact en la première variable, homogène de degré $1 - m$ en la seconde variable,

$$(6.4) \quad \int_{\Omega \times S^{d-1}} \{a, p\} d\mu = 0.$$

Notons $q(x, \xi) = |\xi|^{1-m} p(x, \xi)$, et désignons par (ϕ_s) le flot du champ hamiltonien H_q de q . Puisque q est homogène de degré 1, il résulte du système d'équations

$$(6.5) \quad \dot{x} = \frac{\partial q}{\partial \xi}(x, \xi), \quad \dot{\xi} = -\frac{\partial q}{\partial x}(x, \xi),$$

que, pour tout s , l'application

$$(6.6) \quad (x_0, \xi_0) \mapsto \phi_s(x_0, \xi_0) = (x_s(x_0, \xi_0), \xi_s(x_0, \xi_0))$$

vérifie, pour tout $\lambda > 0$,

$$(6.7) \quad x_s(x_0, \lambda \xi_0) = x_s(x_0, \xi_0), \quad \xi_s(x_0, \lambda \xi_0) = \lambda \xi_s(x_0, \xi_0).$$

Ainsi, si $a = a(x, \xi)$ est homogène de degré $1 - m$ en ξ , il en est de même de $a \circ \phi_s$.

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (a \circ \phi_s)(x, \xi) &= \frac{d}{d\sigma} (a \circ \phi_{s+\sigma})(x, \xi)|_{\sigma=0} \\ &= \frac{d}{d\sigma} (a \circ \phi_s \circ \phi_\sigma)(x, \xi)|_{\sigma=0} \\ &= \{a \circ \phi_s, q\}(x, \xi) \end{aligned}$$

d'où, pour s assez petit de sorte que $a \circ \phi_s$ est définie sur tout $\Omega \times S^{d-1}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_{\Omega \times S^{d-1}} a \circ \phi_s d\mu &= \int_{\Omega \times S^{d-1}} \{a \circ \phi_s, q\} d\mu \\ &= \int_{\Omega \times S^{d-1}} \{a \circ \phi_s, p\} d\mu \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après (6.4) et le fait que $H_q = |\xi|^{1-m} H_p$ sur le support de μ . Il en résulte que le support de μ est invariant par la projection du flot ϕ_s sur la sphère unité, donc est une union de projetées de courbes bicaractéristiques de q , ou encore de p , puisque $q = |\xi|^{1-m} p$. **q.e.d.**

Terminons ce paragraphe en examinant le cas de l'équation des ondes dans un milieu inhomogène étudiée aux chapitres III et IV. Le symbole principal de l'équation est alors

$$(6.8) \quad p(t, x, \tau, \xi) = K(x)\xi \cdot \xi - \rho(x)\tau^2$$

où $t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}$, $\rho \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$, $0 < a \leq \rho(x) \leq b < +\infty$, et $K(x) = (k_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq d}$ est une fonction C^∞ sur Ω à valeurs dans les matrices symétriques réelles, vérifiant

$$\alpha |\xi|^2 \leq K(x)\xi \cdot \xi \leq \beta |\xi|^2$$

pour $0 < \alpha < \beta < +\infty$.

Décrivons les bicaractéristiques de p . Celles-ci ne changeant pas si l'on multiplie p par une fonction non nulle, étudions plutôt les courbes hamiltoniennes de

$$(6.9) \quad \tilde{p} = \frac{1}{2} \left(\frac{K(x)}{\rho(x)} \xi \cdot \xi - \tau^2 \right).$$

Il vient

$$(6.10) \quad \dot{t} = -\tau, \quad \dot{x} = \frac{K(x)}{\rho(x)} \xi, \quad \dot{\tau} = 0, \quad \dot{\xi} = -\frac{1}{2} \nabla \left(\frac{K}{\rho} \right) (x) \xi \cdot \xi.$$

En introduisant la matrice $G(x) = \left(\frac{K(x)}{\rho(x)} \right)^{-1}$, les équations en (x, ξ) deviennent

$$(6.11) \quad \xi = G(x)\dot{x}, \quad (G(x)\dot{x})' = \frac{1}{2} \nabla G(x)\dot{x} \cdot \dot{x}.$$

De plus, $G(x)\dot{x} \cdot \dot{x} = \frac{K(x)}{\rho(x)} \xi \cdot \xi = \tau^2$ est constante sur la courbe. La dernière équation (6.11) s'écrit donc encore

$$(6.12) \quad \frac{d}{ds} \frac{G(x)\dot{x}}{\sqrt{G(x)\dot{x} \cdot \dot{x}}} = \frac{1}{2} \frac{\nabla G(x)\dot{x} \cdot \dot{x}}{\sqrt{G(x)\dot{x} \cdot \dot{x}}}$$

soit encore, en posant $L(x, \dot{x}) = \sqrt{G(x)\dot{x} \cdot \dot{x}}$,

$$(6.13) \quad \frac{d}{ds} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(x, \dot{x}) = \frac{\partial}{\partial x} L(x, \dot{x}),$$

qui est l'équation d'Euler-Lagrange associée à L , c'est-à-dire l'équation des géodésiques pour la métrique G de Ω . Réciproquement, si $\alpha \mapsto x(\alpha)$ est une géodésique pour la métrique G sur Ω , en reparamétrisant la courbe x suivant l'abscisse curviligne σ définie par

$$(6.14) \quad \frac{d\sigma}{d\alpha} = \sqrt{G(x(\alpha)) \dot{x}(\alpha) \cdot \dot{x}(\alpha)},$$

l'équation (6.12) devient

$$(6.15) \quad \frac{d}{d\sigma} \left(G(x) \frac{dx}{d\sigma} \right) = \frac{1}{2} \nabla G(x) \frac{dx}{d\sigma} \cdot \frac{dx}{d\sigma}$$

avec $G(x) \frac{dx}{d\sigma} \cdot \frac{dx}{d\sigma} = 1$. On retrouve donc (6.11) et (6.10) en posant par exemple $s = -\frac{\sigma}{\tau}$. On notera qu'alors $\frac{dt}{d\sigma} = 1$.

En conclusion, on a montré la :

Proposition 6.2. *A un changement de paramètre près, les bicaractéristiques de (6.8) sont les courbes de la forme*

$$t \mapsto \left(t, x(t), \tau, -\tau \left(\frac{K(x(t))}{\rho(x(t))} \right)^{-1} \dot{x}(t) \right)$$

où $t \mapsto x(t)$ est une géodésique de la métrique $G = \left(\frac{K}{\rho} \right)^{-1}$ sur Ω , paramétrée par l'abscisse curviligne.

6.2. Inégalités d'observation

Dans ce paragraphe, nous montrons comment le théorème 6.1 peut être utilisé pour résoudre les problèmes de contrôle optimal posés au chapitre IV.

Dans tout ce paragraphe, on désigne par Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d . On note $\rho \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ une fonction vérifiant

$$(6.16) \quad 0 < a \leq \rho(x) \leq b < +\infty, \quad \forall x \in \Omega$$

et $K = (k_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ une fonction C^∞ sur Ω , à valeurs dans les matrices symétriques réelles, et vérifiant

$$(6.17) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha |\xi|^2 \leq K(x) \xi \cdot \xi \leq \beta |\xi|^2,$$

pour $0 < \alpha < \beta < +\infty$.

Commençons par donner une condition suffisante de stabilisation pour l'équation des ondes.

Théorème 6.3. *Soit a une fonction continue sur $\bar{\Omega}$, à valeurs dans \mathbb{R}_+ , satisfaisant aux hypothèses suivantes :*

(i) $\forall x \in \partial\Omega, a(x) > 0$.

(ii) *Pour toute géodésique $t \in I \mapsto x(t) \in \Omega$ de la métrique $G = \left(\frac{K}{\rho}\right)^{-1}$, avec $0 \in I$, il existe $t \geq 0$ tel que $a(x(t)) > 0$.*

Alors il existe $C, \alpha > 0$ tels que, pour toute solution $u \in C(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$ de l'équation

$$(6.18) \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(K \nabla u) + a \partial_t u = 0,$$

on ait, pour tout $t \geq 0$,

$$(6.19) \quad E(u, t) \leq C e^{-\alpha t} E(u, 0).$$

Remarque. On notera que, si $K \equiv \operatorname{Id}$ et $\rho \equiv 1$, la condition (i) entraîne la condition (ii), puisque les géodésiques sont alors des segments de droite (figure 1). En revanche, pour une métrique générale, (i) peut très bien être vérifiée sans que (ii) le soit, si par exemple G admet une géodésique fermée (figure 2).

figure 1 : $K = \operatorname{Id}, \rho = 1$ ($a > 0$ dans la région grisée)

figure 2 : ($a > 0$ dans la région grisée)

Dans ce cas, sachant que (i) est vérifiée, on peut montrer que (ii) est également une condition nécessaire à la stabilisation forte (6.19) (voir la remarque 6.4 ci-dessous).

Démonstration. En vertu du théorème 4.1, la stabilisation forte (6.19) est équivalente à l'existence de $C > 0$ et $T > 0$ tels que pour tout u , on ait

$$(6.20) \quad E(u, 0) \leq C \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |\partial_t u(t, x)|^2 dt dx.$$

Nous allons montrer l'inégalité d'observation (6.20) à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

Supposons que l'inégalité (6.20) soit fautive pour tout T . Il existe alors une suite (u_n) de solutions de (6.18) satisfaisant à

$$(6.21) \quad E(u_n, 0) = 1$$

$$(6.22) \quad \forall T > 0, \quad \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |\partial_t u_n(t, x)|^2 dt dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

1ère étape. Identification de la limite faible

Compte tenu de (6.21), la suite (u_n) est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$, et la suite $(\partial_t u_n)$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$. L'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ étant compacte (cf. chapitre III), le théorème d'Ascoli assure l'existence d'une sous-suite, que nous noterons encore u_n , convergeant uniformément sur tout compact de \mathbb{R}_+ vers une fonction $u \in C(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $u(t) \in H_0^1(\Omega)$. En utilisant de même la compacité de l'injection de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ (même démonstration), et d'autre part le fait que $\partial_t(\rho \partial_t u_n)$ est borné dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, H^{-1}(\Omega))$ (à cause de l'équation

(6.18)), on conclut de même que $\partial_t(\rho u) \in C(\mathbb{R}_+, H^{-1}(\Omega))$, avec, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\partial_t u(t) \in L^2(\Omega)$. Enfin, en passant à la limite au sens des distributions dans (6.18), on obtient, compte tenu de (6.22),

$$\partial_t^2(\rho u) - \operatorname{div}(K \nabla u) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega.$$

Il résulte alors de l'unicité dans le théorème 3.7, (et de l'existence dans le théorème 3.5 avec $a = 0$) que $u \in C(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$, et que $E(u, t) = E(u, 0)$ pour tout $t \geq 0$. De plus, puisque $a \partial_t u = 0$ sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ en passant à la limite dans (6.22), u est également solution de (6.18). Puisque $a > 0$ au voisinage de $\partial\Omega$, le résultat de l'appendice, combiné au théorème 4.2, assure la stabilisation faible pour toute solution de (6.18), c'est-à-dire $E(u, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. On conclut que $E(u, 0) \equiv 0$, donc $u = 0$.

2ème étape. Réduction à une information locale sur $(\partial_t u_n)$

Montrons que, si la suite $(\partial_t u_n)$ de $L_{\text{loc}}^2(]0, +\infty[\times \Omega)$ converge vers 0 fortement dans L_{loc}^2 , alors $E(u_n, 0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ce qui fournira bien entendu une contradiction au vu de (6.21). Compte tenu de (6.22) et de l'hypothèse (i),

$$(6.23) \quad \partial_t u_n \longrightarrow 0 \text{ dans } L_{\text{loc}}^2(]0, \infty[\times \Omega) \implies \int_{\gamma}^{\delta} \int_{\Omega} |\partial_t u_n|^2 dt dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

dès que $0 < \gamma < \delta < +\infty$. Choisissons $\chi \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$ à valeurs ≥ 0 telle que $\chi(t) = 1$ pour $t \in [1, 2]$. En multipliant l'équation (6.18) par $\chi(t) \bar{u}(t, x)$ et en intégrant sur $]0, +\infty[\times \Omega$, il vient

$$(6.24) \quad \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \chi(t) K \nabla u_n \cdot \nabla \bar{u}_n dt dx = \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \chi(t) \rho(x) |\partial_t u_n(t, x)|^2 dt dx \\ + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \partial_t u_n(t, x) \bar{u}_n(t, x) [\chi'(t) \rho(x) - \chi(t) a(x)] dt dx$$

et le second membre de (6.24) tend vers 0 compte tenu de (6.23) et de la borne L^2 sur u_n . Il en résulte que ∇u_n tend vers 0 dans $L^2([1, 2] \times \Omega)$. En utilisant à nouveau (6.23), on conclut que

$$(6.25) \quad \int_1^2 E(u_n, t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Enfin, compte tenu de (3.3) et de (6.22), $E(u_n, t) - E(u_n, 0) \rightarrow 0$, donc (6.25) assure que $E(u_n, 0) \rightarrow 0$.

3ème étape. Utilisation de l'hypothèse géométrique

En vertu de l'étape précédente, il nous suffit, pour obtenir une contradiction, de montrer que la mesure de défaut microlocale de $(\partial_t u_n)$ est nulle sur $]0, +\infty[\times \Omega$. Les résultats du chapitre V assurent que, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $(\partial_t u_n)$ admet une mesure de défaut microlocale μ sur $]0, +\infty[\times \Omega$. En dérivant par rapport à t l'équation (6.18), il vient

$$\rho \partial_t^2 (\partial_t u_n) - \operatorname{div}(K \nabla (\partial_t u_n)) = f_n,$$

où $f_n = -\partial_t(a \partial_t u_n)$ tend vers 0 dans H_{loc}^{-1} compte tenu de (6.22). Il résulte alors du théorème 6.1 et de la proposition 6.2 que le support de μ dans $]0, +\infty[\times \Omega \times S^d$ est une union de courbes du type

$$(6.26) \quad t \in I \cap]0, +\infty[\mapsto m_{\pm}(t) = \left(t, x(t), \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + |G(x) \dot{x}|^2}}, \frac{\mp G(x) \dot{x}}{\sqrt{1 + |G(x) \dot{x}|^2}} \right)$$

où $t \in I \mapsto x(t) \in \Omega$ est une géodésique pour la métrique G . Par ailleurs, la propriété (6.22) assure que μ est supportée dans l'ensemble $\{(t, x, \tau, \xi), a(x) = 0\}$. Soit $t_0 \in]0, +\infty[$, et soit x une géodésique de G définie près de t_0 . En appliquant l'hypothèse (ii) à la géodésique $t' \mapsto x(t_0 + t')$, il existe $t \geq t_0$ tel que $a(x(t)) > 0$. On en déduit, avec la notation (6.26), que $m_{\pm}(t)$ n'appartient pas au support de μ , et donc que $m_{\pm}(t_0)$ n'y appartient pas non plus. Le temps t_0 et la géodésique x étant quelconques, on conclut que $\operatorname{supp} \mu$ est vide, ce qui achève la démonstration. **q.e.d.**

Remarque 6.4. La méthode de démonstration ci-dessus suggère également une stratégie pour montrer l'optimalité de la condition géométrique (ii) sous l'hypothèse (i). Supposons en effet que (ii) ne soit pas vérifiée. Il existe alors une géodésique $t \in I \mapsto x(t)$ de la métrique G sur Ω , telle que $0 \in I$ et telle que $a(x(t)) = 0$ pour tout $t \in I \cap \mathbb{R}_+$. Puisque $a > 0$ près de $\partial\Omega$, on en déduit que, pour $t \in \mathbb{R}_+ \cap I$, $x(t)$ reste dans un compact de Ω , donc x est définie sur \mathbb{R}_+ . On montre alors qu'il existe une suite (v_n) de solutions de

$$\rho \partial_t^2 v_n - \operatorname{div}(K \nabla v_n) = f_n,$$

avec $f_n \rightarrow 0$ dans $L^2([0, T] \times \Omega)$ pour tout $T > 0$, $v_n \in C(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$, telle que $\sup_{0 \leq t \leq T} \sup_n E(v_n, t) < +\infty$ pour tout $T > 0$, et telle que $\partial_t v_n \rightarrow 0$ dans L_{loc}^2 ,

avec une mesure de défaut microlocale non nulle et contenue dans $\{m_+(t), t > 0\}$, où m_+ est associé à x par (6.26). On constate alors que $a \partial_t v_n$ tend vers 0 dans $L^2([0, T] \times \Omega)$ pour tout $T > 0$, donc que la suite w_n solution de

$$\begin{cases} \rho \partial_t^2 w_n - \operatorname{div}(K \nabla w_n) + a \partial_t w_n = -a \partial_t v_n \\ w_n(0) = \partial_t w_n(0) = 0, \quad w_n|_{\mathbb{R} \times \partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

satisfait à

$$E(w_n, t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

pour tout t . Il en résulte que $u_n = v_n + w_n$ est solution de (6.18), vérifie $E(u_n, 0) \neq 0$ et (6.22), ce qui contredit la stabilisation forte. **q.e.d.**

On peut, bien entendu, se poser également la question de la pertinence de l'hypothèse (i). Pour simplifier la discussion, supposons que $K \equiv \text{Id}$, $\rho \equiv 1$. Dans le cas d'ouverts Ω ayant une géométrie simple (ouverts étoilés), il est possible d'établir des inégalités d'observation avec des fonctions a qui sont nulles au voisinage de certains points de $\partial\Omega$. Il existe en fait une condition nécessaire et suffisante entièrement géométrique à la stabilisation forte, mais celle-ci, pour être établie (et même énoncée!) nécessite des préparations plus substantielles. *Grosso modo*, si par exemple le bord de Ω est analytique, on remplace la notion de géodésique (ici, des segments) par la notion de **rayon** qui indique comment prolonger un tel segment lorsqu'il atteint le bord de Ω . On montre qu'un tel prolongement est entièrement déterminé par les règles suivantes : (figure 3)

- a) Si le rayon atteint le bord transversalement, il est réfléchi suivant la loi de Descartes.
- b) Si le rayon atteint le bord et si son prolongement en un segment entre à nouveau dans Ω , il suit ce segment tant qu'il reste dans Ω .
- c) Si le rayon atteint le bord et si son prolongement en un segment sort de Ω , il suit une géodésique du bord de $\partial\Omega$, jusqu'à pouvoir entrer à nouveau dans Ω en suivant un segment.

figure 3

Par des méthodes analogues (mais plus difficiles à mettre en oeuvre), on montre alors que la stabilisation forte équivaut au fait que tout rayon rencontre dans le futur la zone où a est non nul.

Notre dernier résultat concerne l'équivalent du théorème 6.3 pour la méthode HUM.

Théorème 6.5. Soient $T > 0$, ω un ouvert de Ω , et $\theta(t, x) = \mathbf{1}_{]0, T[}(t) \mathbf{1}_\omega(x)$. On suppose que

- (i) L'adhérence $\bar{\omega}$ de ω dans \mathbb{R}^d contient $\partial\Omega$.
- (ii) Pour toute géodésique $t \in I \mapsto x(t)$ de la métrique $G\left(\frac{K}{\rho}\right)^{-1}$ sur Ω telle que $0 \in I$, il existe $t_0 \in [0, T[$ tel que $x(t_0) \in \omega$.

Alors, pour tout $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, il existe $g \in L^2(]0, T[\times \omega)$ tel que la solution $u \in C(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$ de

$$(6.27) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2(\rho u)}{\partial t^2} - \operatorname{div}(Ku) = \theta g \\ u(0) = u_0, \quad \partial_t u(0) = u_1 \end{cases}$$

vérifie $u(t) = 0$ pour tout $t \geq T$.

Démonstration. D'après le théorème 4.6 (généralisé au cas des milieux inhomogènes, voir remarque 4.7) il revient au même de montrer l'inégalité

$$(6.28) \quad \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_\omega |v(t, x)|^2 dt dx$$

où $v \in C(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$, $\rho v \in C^1(\mathbb{R}, H^{-1}(\Omega))$ est la solution de

$$(6.29) \quad \begin{cases} \partial_t^2(\rho v) - \operatorname{div}(K\nabla v) = 0, \\ v|_{t=0} = v_0, \quad \partial_t(\rho v)|_{t=0} = w_1 \end{cases}$$

conformément au théorème 3.7. Rappelons (voir la démonstration de ce théorème) que le problème (6.29) équivaut à

$$(6.30) \quad V(t) = e^{-tA} V_0,$$

où $V(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ \partial_t(\rho v)(t) \end{pmatrix} \in C(\mathbb{R}, L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega))$, $V_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ w_1 \end{pmatrix}$, et $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\rho} \\ -\operatorname{div} K \nabla & 0 \end{pmatrix}$ est un opérateur maximal accréatif sur $\mathcal{H} = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, de domaine $D(A) = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Ici, \mathcal{H} est muni de la norme

$$(6.31) \quad \left\| \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}} = \left(\int_\Omega |v|^2 \rho dx + \langle \bar{w}, T_K w \rangle_{H_0^1} \right)^{1/2}$$

où $T_K : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ est caractérisé par $-\operatorname{div}(K\nabla w) = w$. Enfin, on rappelle que $-A$ est également maximal accréatif sur \mathcal{H} , de sorte que $t \mapsto e^{-tA}$ est un groupe à un paramètre unitaire sur \mathcal{H} , i.e. $\|e^{-tA} V_0\|_{\mathcal{H}} = \|V_0\|_{\mathcal{H}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

L'inégalité (6.28) à démontrer s'écrit alors

$$(6.32) \quad \|V_0\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\omega)}^2 dt,$$

pour tout $V_0 \in \mathcal{H}$, avec $e^{-tA}V_0 = \begin{pmatrix} v(t) \\ \partial_t(\rho v)(t) \end{pmatrix}$.

Première étape. Nous montrons tout d'abord une inégalité plus faible que (6.32), à savoir

$$(6.33) \quad \|V_0\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \left(\int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\omega)}^2 dt + \|(1+A)^{-1}V_0\|_{\mathcal{H}}^2 \right).$$

Pour établir (6.33), on raisonne par l'absurde comme dans la preuve du théorème 6.3. On construit ainsi une suite (V_0^n) de \mathcal{H} vérifiant

$$(6.34) \quad \|V_0^n\|_{\mathcal{H}} = 1,$$

$$(6.35) \quad \int_0^T \|v_n(t)\|_{L^2(\omega)}^2 dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$$(6.36) \quad \|(1+A)^{-1}V_0^n\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

en notant

$$(6.37) \quad e^{-tA}V_0^n = V^n(t) = \begin{pmatrix} v_n(t) \\ \partial_t(\rho v_n)(t) \end{pmatrix}.$$

(6.34) et (6.36) assurent que (v_n) est bornée dans $L^2(]0, \tilde{T}[\times \Omega)$ pour tout $\tilde{T} > 0$, et converge faiblement vers 0 dans ce même espace. Désignons par μ une mesure de défaut microlocale de (v_n) sur $]0, +\infty[\times \Omega$. Compte tenu du théorème 6.1 et de la proposition 6.2, le support de μ est une union de courbes du type (6.26) où $t \in I \mapsto x(t)$ est une géodésique de la métrique G sur Ω . De plus, (6.35) assure que $\text{supp}(\mu) \subset \{x \in \Omega \setminus \omega\}$. Notons que l'hypothèse (i) équivaut au fait que $\Omega \setminus \omega$ est un compact. En conséquence, il existe $\delta > 0$ tel que l'hypothèse (ii) soit encore vraie en remplaçant T par $T - \delta$. Soit alors $m_0 = m^\pm(t_0)$ un élément de $\text{supp}(\mu)$ avec $t_0 \in]0, \delta[$. Il existe alors $t_1 < T$ tel que $x(t_1) \in \omega$, donc $m^\pm(t_1) \notin \text{supp}(\mu)$, et $m_0 \notin \text{supp}(\mu)$. Il en résulte que $\mu|_{t \in]0, \delta[} = 0$, puis, en tenant compte une nouvelle fois de (6.35),

$$(6.38) \quad \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} \int_{\Omega} |v_n(t, x)|^2 dx dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

pour $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \delta$. En multipliant (6.29) par $\chi(t)T_K \partial_t(\rho\bar{v}(t))$, avec $\chi \in C_0^\infty(]0, \delta[)$, $\chi = 1$ sur $[\frac{\delta}{3}, \frac{2\delta}{3}]$, et en intégrant par parties on obtient également

$$(6.39) \quad \int_{\mathbb{R}} \chi(t) \langle T_K \partial_t(\rho v_n)(t), \partial_t(\rho \bar{v}_n)(t) \rangle dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

d'où finalement

$$(6.40) \quad \frac{\delta}{3} E(V_0^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ce qui contredit (6.34). L'inégalité (6.33) est donc démontrée.

Deuxième étape. Désignons par $\mathcal{N}(T)$ l'espace des $V_0 \in \mathcal{H}$ vérifiant

$$(6.41) \quad (e^{-tA} V_0)(x) = 0 \text{ pour } t \in]0, T[, \quad x \in \omega.$$

En reportant dans (6.33), on a, pour tout $V_0 \in \mathcal{H}$,

$$(6.42) \quad \|V_0\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|(1+A)^{-1} V_0\|_{\mathcal{H}}^2.$$

En introduisant le spectre (μ_n) de l'opérateur compact $(1+A)^{-1}$, on déduit du fait que $\mu_n \rightarrow 0$ et de (6.42) que $\mathcal{N}(T)$ est de dimension finie. Nous allons en fait montrer que $\mathcal{N}(T)$ est réduit à $\{0\}$. Pour cela, observons tout d'abord que, si $\delta > 0$ est tel que l'hypothèse (ii) est encore vérifiée en remplaçant T par $T - \delta$ (cf. la première étape), l'espace $\mathcal{N}(T - \delta)$ défini par (6.41) pour $t \in]0, T - \delta[, x \in \omega$, vérifie encore une inégalité du type (6.42). Si $V_0 \in \mathcal{N}(T)$, il est clair que $e^{-\varepsilon A} V_0 \in \mathcal{N}(T - \delta)$ si $0 < \varepsilon < \delta$. Mais

$$(1+A)^{-1} \frac{1 - e^{-\varepsilon A}}{\varepsilon} V_0 = \frac{1 - e^{-\varepsilon A}}{\varepsilon} (1+A)^{-1} V_0 \rightarrow A(1+A)^{-1} V_0.$$

Il en résulte que la famille $(\frac{1 - e^{-\varepsilon A}}{\varepsilon} V_0)$ est de Cauchy quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ pour la norme

$$V \mapsto \|(1+A)^{-1} V\|_{\mathcal{H}}$$

sur $\mathcal{N}(T - \delta)$, donc aussi pour la norme $V \mapsto \|V\|_{\mathcal{H}}$ par (6.42). Il s'ensuit que $V_0 \in D(A)$. Ainsi $\mathcal{N}(T) \subset D(A)$. En revenant à (6.41), on en déduit que, pour tout $V_0 \in \mathcal{N}(T)$,

$$\partial_t(e^{-tA} V_0) = 0 \text{ si } (t, x) \in]0, T[\times \omega,$$

donc $\mathcal{N}(T)$ est stable par A . Puisque $\mathcal{N}(T)$ est de dimension finie, s'il n'est pas nul, il contient un vecteur propre pour A . Compte tenu de (6.41), un tel vecteur propre V_0

vérifie de plus $V_0|_\omega = 0$, ce qui est absurde compte tenu du théorème 4.2 et du résultat de l'appendice. On a donc

$$(6.43) \quad \mathcal{N}(T) = \{0\}.$$

Troisième étape. Il est maintenant facile de déduire (6.32) de (6.33) et de (6.43). En effet, si (6.32) est fausse, soit (V_0^n) une suite de \mathcal{H} telle que

$$(6.44) \quad \|V_0^n\|_{\mathcal{H}} = 1, \quad \int_0^T \|v_n(t)\|_{L^2(\omega)}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Puisque $(1 + A)^{-1}$ est compact sur \mathcal{H} , il existe une sous-suite, notée encore (V_0^n) pour simplifier, telle que

$$(1 + A)^{-1} V_0^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1 + A)^{-1} V_0$$

dans \mathcal{H} , avec $V_0 \in \mathcal{H}$. En notant

$$e^{-tA} V_0 = \begin{pmatrix} v(t) \\ \partial_t(\rho v)(t) \end{pmatrix},$$

on déduit de (6.44) et de (6.33),

$$(6.45) \quad 1 \leq C \|(1 + A)^{-1} V_0\|^2, \quad \int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\omega)}^2 dt = 0,$$

ce qui est absurde compte tenu de (6.43). Le théorème 6.5 est donc complètement démontré. **q.e.d.**

ANNEXE

UN THÉORÈME D'UNICITÉ

Soit $K = (k_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ une fonction C^∞ sur \mathbb{R}^d à valeurs dans les matrices symétriques définies positives. Soit m une fonction C^∞ sur \mathbb{R}^d . On se propose, dans cette annexe, de démontrer le résultat suivant.

Théorème. Soit $P = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} k_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + m(x)$. Si $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est solution de $Pu = 0$ et s'il existe ω , un ouvert de \mathbb{R}^d tel que $u|_\omega = 0$, alors $u \equiv 0$ sur \mathbb{R}^d .

Remarque. Les hypothèses de régularité sur les coefficients et sur la solution peuvent être affaiblies. D'une part, si les coefficients sont C^∞ , les méthodes du chapitre V permettent de montrer que toute solution distribution de $Pu = 0$ est en fait C^∞ . De plus, la démonstration que nous allons donner s'adapte au cas où K est localement lipschitzienne, m est localement bornée et u est localement H^1 (on montre alors qu'elle est localement H^2 en tant que solution H^1 de $Pu = 0$).

La méthode de démonstration que nous utiliserons est très proche de la preuve initiale de Carleman.

Démonstration. On procède par l'absurde. Soient $x_0 \in \omega$, $R_0 = \sup \{r \geq 0; u|_{B(x_0, r)} \equiv 0\}$; alors $0 < R_0 < +\infty$ par hypothèse et $\exists x_1, |x_1 - x_0| = R_0$ et $x_1 \in \text{supp}(u)$. Nous allons, pour obtenir la contradiction, montrer que u est nulle au voisinage de x_1 . On est dans la situation suivante :

On fait alors un changement de variables qui nous ramène à la situation suivante :

figure 5

Dans ce nouveau système de coordonnées, où l'on peut supposer que $x_1 = 0$, l'opérateur P a la forme suivante

$$(1) \quad P(x, D_x) = \sum \frac{\partial}{\partial x_j} b_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + Q_1(x, D_x)$$

où Q_1 est un opérateur de degré 1 et $(b_{ij}(x)) \gg 0$.

Soit $\varphi(x) = e^{\alpha x_n}$ où $\alpha > 0$ est une constante à fixer.

Pour tout $\tau > 0$, considérons l'opérateur différentiel $P_{\tau, \varphi} = e^{\tau \varphi(x)} P e^{-\tau \varphi(x)}$. On a alors la proposition suivante.

Proposition. *Soit K un compact de \mathbb{R}^d . Il existe $A > 0$, $\alpha > 0$, $\tau_0 > 0$ tels que $\forall \tau > \tau_0$, $\forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support dans K*

$$(2) \quad \tau^3 \|v\|_{L^2}^2 + \tau \|\nabla v\|_{L^2}^2 \leq A \|P_{\tau, \varphi} v\|_{L^2}^2.$$

Nous admettons dans un premier temps la proposition. On en déduit alors le théorème comme suit.

On fixe $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, égale à 1 près de 0. On applique la proposition à

$$v = \chi e^{\tau \varphi} u.$$

On obtient

$$(3) \quad \begin{aligned} \tau^3 \|\chi e^{\tau \varphi} u\|_{L^2}^2 + \tau \|\nabla(\chi e^{\tau \varphi} u)\|_{L^2}^2 &\leq A \|P_{\tau, \varphi}(\chi e^{\tau \varphi} u)\|_{L^2}^2 = A \|e^{\tau \varphi} P(\chi u)\|_{L^2}^2 \\ &\leq A \|e^{\tau \varphi} [P, \chi] u\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

ce qui implique, $\forall \varepsilon > 0$,

$$(4) \quad \tau^3 \|\chi e^{\tau(\varphi(x_n) - \varphi(-\varepsilon))} u\|_{L^2}^2 \leq A \|e^{\tau(\varphi(x_n) - \varphi(-\varepsilon))} [P, \chi] u\|_{L^2}^2.$$

On prend alors $\varepsilon > 0$ assez petit de telle façon que, sur le support de $[P, \chi] u$, qui est contenu dans $\text{supp } u \cap \text{supp } \nabla \chi$, on ait $x_n < -\varepsilon$.

figure 6 : $\nabla \chi$ est supporté dans la région grisée

Sur le support de $[P, \chi] u$, on a donc $\varphi(x_n) - \varphi(-\varepsilon) < 0$ et, quand $\tau \rightarrow +\infty$, le terme de droite dans (4) tend vers 0, ce qui implique que dans le terme de gauche, on a $\text{supp}(\chi u) \subset \{\varphi(x_n) - \varphi(-\varepsilon) \leq 0\}$, donc $\chi u \equiv 0$ près de 0 et $u \equiv 0$ près de 0.

q.e.d.

Revenons à la preuve de la proposition : on remarque d'abord que si la proposition est vraie pour un opérateur P , et si $\tilde{P} = P + Q_1(x, D_x)$ où Q_1 est un opérateur différentiel d'ordre 1, alors la proposition est aussi vraie pour \tilde{P} : en effet

$$(5) \quad \tilde{P}_{\tau, \varphi} = P_{\tau, \varphi} + e^{\tau \varphi} Q_1 e^{-\tau \varphi} = P_{\tau, \varphi} + Q_1 + \tau Q_0(x)$$

$$\text{et } \tau^3 \|v\|_{L^2}^2 + \tau \|\nabla v\|_{L^2}^2 \leq A \|P_{\tau, \varphi} v\|_{L^2}^2,$$

$$(6) \quad \begin{aligned} &\leq A (\|\tilde{P}_{\tau, \varphi} v - Q_1 v - \tau Q_0 v\|_{L^2}^2) \\ &\leq A \|P_{\tau, \varphi} v\|^2 + 4\|Q_1 v\|^2 + 4\tau^2 \|Q_0 v\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

ce qui implique

$$(\tau^3 - C\tau^2)\|u\|_{L^2}^2 + (\tau - C)\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq A\|\tilde{P}_{\tau,\varphi}u\|_{L^2}^2$$

d'où le résultat si τ est assez grand. On peut donc supposer dans la suite que $P = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} b_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$. On a

$$(7) \quad P_{\tau,\varphi} = P + \tau^2 \varphi'^2 b_{n,n}(x) - \tau \sum_j (\varphi' b_{n,j} \partial_j + \partial_j b_{n,j} \varphi')$$

où

$$\operatorname{Re} P_{\tau,\varphi} = P + \tau^2 \varphi'^2 b_{n,n}(x)$$

et

$$\Im P_{\tau,\varphi} = -\frac{1}{i} \tau \sum_j (\varphi' b_{n,j} \partial_j + \partial_j \varphi' b_{n,j})$$

sont auto-adjoints.

On calcule

$$(8) \quad \|P_{\tau,\varphi}v\|_{L^2}^2 = \|\operatorname{Re} P_{\tau,\varphi}v\|_{L^2}^2 + \|\Im P_{\tau,\varphi}v\|_{L^2}^2 \\ -i(\Im P_{\tau,\varphi}v | \operatorname{Re} P_{\tau,\varphi}v) + i(\operatorname{Re} P_{\tau,\varphi}v | \Im P_{\tau,\varphi}v)$$

une intégration par partie donne :

$$(9) \quad \|P_{\tau,\varphi}v\|_{L^2}^2 = \|\operatorname{Re} P_{\tau,\varphi}v\|_{L^2}^2 + \|\Im P_{\tau,\varphi}v\|_{L^2}^2 \\ +i((\Im P_{\tau,\varphi} \operatorname{Re} P_{\tau,\varphi} - \operatorname{Re} P_{\tau,\varphi} \Im P_{\tau,\varphi})v | v)_{L^2}.$$

On a

$$(10) \quad \|\Im P_{\tau,\varphi}v\|^2 = \tau^2 \left\| \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} b_{n,j} \varphi' v + b_{n,j} \varphi' \frac{\partial}{\partial x_j} v \right\|^2 \\ \geq 2\tau^2 \left\| \sum_j \varphi' b_{n,j} \frac{\partial}{\partial x_j} v \right\|^2 - \tau^2 \mathcal{O}_\varphi(\|v\|^2)$$

(où, par convention, on note $\mathcal{O}_\varphi(\|v\|^2)$ une quantité majorée en module par $C\|v\|^2$ avec C dépendant de φ mais pas de τ).

Calculons

$$(11) \quad i([\Im P_{\tau,\varphi}, \operatorname{Re} P_{\tau,\varphi}]v | v) = (4\tau^3 \varphi'^2 \varphi'' b_{n,n}(x)v | v) + \tau \mathcal{O}(\varphi' \nabla v | \nabla v) \\ + \tau \mathcal{O}_\varphi \left(\|\nabla v\| \left\| \sum_k b_{n,k} \partial_k v \right\| \right) + \tau^3 \mathcal{O}(\varphi'^3 v | v) + \tau \mathcal{O}_\varphi(\|\nabla v\| \|v\| + \|v\|^2).$$

Pour absorber le premier terme d'erreur on calcule

$$(12) \quad -(\operatorname{Re} P_{\tau,\varphi} v | \varphi' v) = \sum_{i,j} \left(\varphi' b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v \middle| \frac{\partial}{\partial x_j} v \right) - \tau^2 (\varphi'^2 v | v) + \mathcal{O}_\varphi(\|v\| \|\nabla v\|).$$

On en déduit (avec $\varepsilon > 0$ à choisir plus tard)

$$(13) \quad \begin{aligned} |\tau(\varphi' \nabla v | \nabla v)| &\leq \tau \|\operatorname{Re} P_{\tau,\varphi} v\| \|\varphi' v\| + \tau^3 \|\varphi' v\|^2 + \tau \mathcal{O}_\varphi(\|v\| \|\nabla v\|) \\ &\leq \varepsilon \|\operatorname{Re} P_{\tau,\varphi} v\|^2 + \frac{C 2\tau^3}{\varepsilon} \|\varphi' v\|^2 + \tau \mathcal{O}_\varphi(\|v\| \|\nabla v\|). \end{aligned}$$

Pour contrôler le deuxième terme d'erreur dans (11), on utilise (10) et (13) et on obtient

$$(14) \quad \begin{aligned} \tau \mathcal{O}_\varphi \left(\|\nabla v\| \left\| \sum b_{n,k} \partial_k v \right\| \right) &\leq C \tau^{1/2} \|\nabla v\|^2 + C \tau^{3/2} \left\| \sum b_{n,k} \partial_k v \right\|^2 \\ &\leq C(\varphi) \tau^{1/2} [(\operatorname{Re} P_{\tau,\varphi} v | \varphi' v) + \tau^2 (\varphi'^2 v | v) + \mathcal{O}_\varphi(\|v\| \|\nabla v\|)] \\ + C(\varphi) \tau^{3/2} \left(\frac{\|\Im P_{\tau,\varphi} v\|^2}{\tau^2} + \mathcal{O}_\varphi(\|v\|^2) \right) &\leq C(\varphi) \tau^{1/2} \left[\frac{1}{\tau} \|\operatorname{Re} P_{\tau,\varphi} v\|^2 + \tau \|\varphi' v\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \tau^2 (\varphi'^2 v | v) + \mathcal{O}_\varphi(\|v\| \|\nabla v\|) \right] + C(\varphi) \tau^{-1/2} \|\Im P_{\tau,\varphi} v\|^2 + \tau^{3/2} \mathcal{O}_\varphi(\|v\|^2). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \|P_{\tau,\varphi} v\|^2 &\geq \|\operatorname{Re} P_{\tau,\varphi} v\|^2 + \|\Im P_{\tau,\varphi} v\|^2 + ((4\tau^3 \varphi'^2 \varphi'' b_{n,n}^2(x) - \tau^3 B \varphi'^3) v | v) \\ &\quad - C\varepsilon \|\operatorname{Re} P_{\tau,\varphi} v\|^2 - \frac{C 2\tau^3}{\varepsilon} (\varphi'^2 v | v) + \tau \mathcal{O}_\varphi(\|v\| \|\nabla v\|) \\ &\quad + \mathcal{O}_\varphi \left(\frac{1}{\tau^{1/2}} \|\operatorname{Re} P_{\tau,\varphi} v\|^2 \right) + \mathcal{O}_\varphi \left(\frac{1}{\tau^{1/2}} \|\Im P_{\tau,\varphi} v\|^2 \right) + \mathcal{O}_\varphi(\tau^{5/2} \|v\|^2). \end{aligned}$$

D'après (13), on peut rajouter à droite $\tau(\varphi' \nabla v | \nabla v)$, quitte à changer $C\varepsilon$ en $(C+1)\varepsilon$ et $-\frac{C 2\tau^3}{\varepsilon}$ en $-\frac{(C+1)2\tau}{\varepsilon}$. On prend $(C+1)\varepsilon < \frac{1}{2}$ pour absorber le terme $-(C+1)\varepsilon \|\operatorname{Re} P_{\tau,\varphi} v\|^2$, puis α (avec $\varphi(x) = e^{\alpha x_n}$) assez grand pour que

$$\varphi'^2 \varphi'' b_{n,n}^2(x) - B \varphi'^3 - \frac{2(C+1)\varphi'^2}{\varepsilon} > \frac{\varphi'^2 \varphi''}{2}.$$

Enfin, φ étant fixé, on fait tendre τ vers l'infini, ce qui permet d'absorber tous les autres termes de reste en utilisant simplement qu'ils sont d'homogénéité plus petite en τ . On obtient ainsi la proposition. **q.e.d.**