Pôles de diffusion engendrés par un coin

N. Burq,
Centre de Mathématiques,
URA 169 du CNRS,
Ecole Polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex,
FRANCE.

Table des matières

I. Introduction

On se propose dans cet article de donner une localisation précise des pôles de diffusion dans un cas modèle pour le problème de Dirichlet à l'extérieur d'un obstacle contenant des coins et une trajectoire captive connectant ce coin à lui même. Précisons le problème étudié. On considère Θ un obstacle borné de $\mathbf{R}^2$, on note $\Omega = \Theta^c$ et on suppose que Ω est connexe. On note $R_\Omega(\lambda)$, la résolvante sortante du Laplacien avec conditions de Dirichlet, holomorphe dans $\mathrm{Im}\lambda < 0$, définie par la construction suivante. Soit $U_\Omega(t)$ le propagateur du problème

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\partial_t^2 - \Delta)\, U_\Omega(t)f & = & 0, \text{ dans } \Omega \times \mathbf{R}_t \\ U_\Omega(t)f \mid_{\partial\Omega} & = & 0 \\ U_\Omega(t)f \mid_{t=0} & = & 0 \\ \partial_t U_\Omega(t)f \mid_{t=0} & = & f \in C_0^\infty(\Omega) \end{array} \right.$$

qu'on étend comme opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. L'opérateur $R_\Omega(\lambda)$ est défini par la relation :

$$R_\Omega(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t} U_\Omega(t) dt,$$

pour tout $\lambda \in \{\mathrm{Im}\lambda < 0\}$.

Comme l'opérateur $U\,(t)$ est une contraction de $L^2\,(\Omega)$ dans $H_0^1\,(\Omega)$, il est clair que cette relation définit une famille d'opérateurs bornés de $L^2\,(\Omega)$ dans $H_0^1\,(\Omega)$, holomorphe dans $\{\mathrm{Im}\lambda < 0\}$. Il est classique que la résolvante sortante R_Ω, considérée comme opérateur de $L^2_{\mathrm{comp}}(\Omega)$ dans $H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})$, holomorphe dans $\{\mathrm{Im}\lambda < 0\}$, s'étend en un opérateur méromorphe dans le revêtement simplement connexe de $\mathbf{C}^*$. Le problème qui nous intéresse est celui de la localisation des pôles de ce prolongement, qu'on appelle pôles de diffusion. L'intérêt de cette question est que ces pôles ont de multiples interprétations : outre le fait que ce sont les pôles de la résolvante, ce sont aussi les points pour lesquels il existe une solution sortante non triviale de l'équation

$$\left(\Delta + \lambda^2\right) u = 0 \;\; u \mid_{\partial\Omega} = 0 \;; \tag{1.1}$$

ce sont également (en dimension impaire d'espace) les pôles de la matrice de diffusion (scattering) divisés par le complexe i et les valeurs propres du générateur infinitésimal du semi-groupe de Lax et Phillips. Enfin, si on a également des estimations sur la résolvante, ils permettent (en dimension d'espace impaire) de donner un développement asymptotique en grand temps pour les solutions de l'équations des ondes dans Ω du type

$$U(t)\,f = \sum_{\mathrm{Im}\lambda < C} e^{it\lambda}\Pi_\lambda(f) + \mathcal{O}\left(e^{-(C-\varepsilon)t}\right)$$

où Π_λ est le projecteur spectral sur la "fonction propre" associée au pôle λ vérifiant (1.1). Nous donnerons également dans cet article une version affaiblie de ce résultat (le théorème 4) vraie en dimension d'espace paire.

Dans un cadre C^∞ le problème de la localisation des pôles de diffusion a été étudié par de nombreux auteurs. Dans le cas où l'obstacle est non captif (c'est à dire que tout rayon issu d'une boule contenant l'obstacle et se réfléchissant sur l'obstacle selon les lois de l'optique géométrique sort en temps fini de cette boule), le résultat le plus frappant est certainement le suivant qui est une conséquence des résultats de R. Melrose et J. Sjöstrand [19] sur la propagation des singularités :

Théorème (R. Melrose J. Sjöstrand). — *Soit Θ un obstacle C^∞, non captif. Pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe $C_N > 0$ tel que la résolvante sortante du Laplacien avec conditions de Dirichlet dans Ω est holomorphe dans l'ensemble*

$$\{\lambda \in \mathbf{C};\ |Im\lambda| < N\log(|\lambda|)\,;\ |\lambda| > C_N\} \cup \{Im\lambda < 0\}.$$

Par ailleurs en dehors de travaux de V. Petkov et L. Stoyanov [22, 23], le seul cas captif connu précisement est celui où $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$ avec Θ_i des convexes stricts de classe C^∞. La trajectoire captive est alors celle qui minimise la distance entre Θ_1 et Θ_2. Cette situation a été étudiée par M. Ikawa [13], [14], [12] (qui a aussi étudié le cas non strictement convexe) puis par C. Gérard [7]. Ces auteurs montrent que dans ce cas qui est celui pour lequel la trajectoire est "le moins captive possible" donc pour lequel les pôles seront le plus loin possible de l'axe réel, ces pôles se répartissent asymptotiquement sur des droites horizontales et C. Gérard donne un développement asymptotique explicite de tous les pôles dans les régions du type $\{\lambda \in \mathbf{C};\ \mathrm{Im}\lambda \leq C;\ C > 0\}$.

Théorème (C. Gérard). — *Il existe $\nu > 1$ tel que, pour tout $A > 0$, il existe $C > 0$ tel que, si on note $\lambda_{i,n} = n\frac{\pi}{d} + \sqrt{-1}\frac{i+1/2}{2d}\log(\nu)$, alors il existe des développements asymptotiques $a_{k,i}$ tels que les pôles situés dans la région*

$$\{\lambda \in \mathbf{C}; Im\lambda < A,\ |\lambda| > C\}$$

sont tous dans des boules

$$\left|\lambda - \left(\lambda_{i,n} + \sum_{N>k\geq 1} a_{i,k}\lambda_{i,n}^{-k}\right)\right| \leq C_N|\lambda_{i,k}|^N$$

et chaque boule en contient exactement un. (En toute rigueur, le résultat de C. Gérard est démontré en dimension impaire d'espace alors que nous l'énonçons ici en dimension 2, mais la démonstration est exactement la même et l'énoncé légèrement plus simple)

Nous allons étudier un cas modèle intermédiaire entre la situation non captive de R. Melrose et J. Sjöstrand et la situation de M. Ikawa et C. Gérard. Pour cela, il faut nécessairement sortir de la catégorie C^∞. Notre situation géométrique est la suivante : on considère $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$, un compact de $\mathbf{R}^2$. On suppose que le bord de l'obstacle Θ_1, $\partial\Theta_1$, est analytique et que $\partial\Theta_2$ est aussi analytique sauf en un point O au voisinage duquel il existe des fonctions a et b, analytiques au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$, telles que localement Θ_2 est défini par l'équation $\Theta_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R};\ b(x) \leq y \leq a(x)$. On suppose également que les obstacles Θ_i sont strictement convexes. Il n'y a donc qu'une seule trajectoire captive dans l'ouvert $\Omega = (\Theta_1 \cup \Theta_2)^c$, celle qui minimise la distance entre Θ_1 et Θ_2. Enfin on suppose que cette trajectoire connecte le coin à un point de Θ_1, A, et que Θ_2 est strictement d'un seul coté de la normale à $[A, O]$ au point O (exceptée la dernière ces hypothèses pourraient être affaiblies en "Θ_1 pas trop concave au voisinage de A et $[A, O]$ est la seule trajectoire captive", supprimant l'hypothèse de convexité de Θ_i, mais ceci compliquerait inutilement l'article). On notera d la distance entre les obstacles Θ_1 et Θ_2.

d

Θ_1 Θ_2

Fig. 1.1 – *Les obstacles*

Dans ce cadre la géométrie est dans un certain sens beaucoup plus favorable que dans le cas C^∞ étudié par C. Gérard et M. Ikawa. En effet une trajectoire captive de type hyperbolique (dans l'espace cotangent) possède une variété stable rentrante et une variété stable sortante alors qu'il est facile de voir que dans notre situation un rayon qui rebondit un nombre suffisament grand de fois (mais fixe) sur les obstacles a nécessairement rencontré le coin (et non pas un voisinage du coin comme dans le cas C^∞). Cette géométrie particulièrement favorable va nous permettre de donner un résultat plus complet que celui de C. Gérard et de calculer (presque) tous les pôles localisés sous une courbe logarithmique arbitraire $\{\lambda \in \mathbf{C};\ \mathrm{Im}\lambda \leq C\log(|\lambda|)\};\ C > 0\}$.

Le résultat principal que nous obtenons est le suivant:

Théorème 1. — *Pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe $C_N > 0$ tel que*

i) Il existe $C'_N > 0$, $M \leq N^2$, $(a_p, q_p)_{0 \leq p \leq M} \in \mathbf{C} \times \mathbf{Q}^+$ tels que, si on note, pour *tout p,* $(\lambda_{j,p})_{j\in\mathbf{Z}}$*, la suite des solutions de l'équation*

$$\frac{e^{-2i\lambda d}}{\lambda^{1/2+q_p}} = a_p,$$

qui vérifie alors

$$Re\left(\lambda_{j,p}\right) \sim j\frac{\pi}{d}\ ,\ \ Im\left(\lambda_{j,p}\right) \sim \frac{(1/2+q_p)}{2d}\log\left(|j|\right),$$

pour chaque p, il existe un developpement asymptotique $(b_{k,p})_{k\in\mathbf{N}}$*, un exposant* $r_p \in \mathbf{Q}_*^+$ *tels que pour tout* $m \in \mathbf{N}$*, il existe* C_m *tel que chaque boule d'équation*

$$\left|\lambda - \left(\lambda_{j,p} + \sum_{k=1}^{m}\left(\lambda_{j,p}^{-1/r_p}\right)^k b_{k,p}\right)\right| \leq C_m \left|\lambda_{j,p}\right|^{-(m+1)/r_p}$$

contient un pôle de diffusion (avec multiplicité si plusieurs de ces boules sont d'intersection non vide) et sur l'ensemble

$$\left\{Im\lambda \leq \frac{N+1/2}{2d}\log\left(|\lambda|\right) - C_N';\ \ |\lambda| \geq C_N\right\},$$

tous les pôles de diffusion sont dans une telle boule.

ii) Si on suppose q_p *rangés par ordre croissant,* $q_0 = 0$*,* $r_0 = 1$

$$a_0 = -\sqrt{\frac{\pi}{d\left(1+d\kappa\right)}}e^{-i\pi/4}\Psi(\alpha,\theta),$$

où Ψ *est une fonction analytique de* α*, l'angle extérieur au coin et de* θ*, l'angle entre le coin et la trajectoire captive et* $q_1 \geq 1/2$*.*

$$\Psi\left(\alpha,\theta\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi^2}{2\alpha}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right)}{\alpha\sin\left(\frac{\pi^2}{2\alpha}\right)\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta+\frac{\pi^2}{2\alpha}\right)\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta-\frac{\pi^2}{2\alpha}\right)}.$$

Cet énoncé montre que comme annoncé les pôles de diffusion se repartissent asymptotiquement sur des courbes logarithmiques.

Remarque 1.1. *— Dans le cas où l'obstacle est de classe* C^∞ *la situation est très différente puisque, d'une part le résultat de R. Melrose et J. Sjöstrand montre que s'il n'y a pas de trajectoire captive il n'y a qu'un nombre fini de pôles sous toute courbe logarithmique, et d'autre part les résultats de C. Gérard et M. Ikawa montrent que s'il n'y a qu'une trajectoire captive de type hyperbolique alors on a une infinité de pôles à distance fixe de l'axe réel.*

Remarque 1.2. *— D'un point de vue numérique notre résultat est à rapprocher d'un résultat de O. Poisson [24] qui calcule numériquement les pôles de diffusion pour le problème de Neumann à l'extérieur d'une fissure rectiligne dans* $\mathbf{R}^2$*. En effet, l'ouvert possède aussi dans ce cas une unique trajectoire captive reliant un coin (dégénéré) à un*

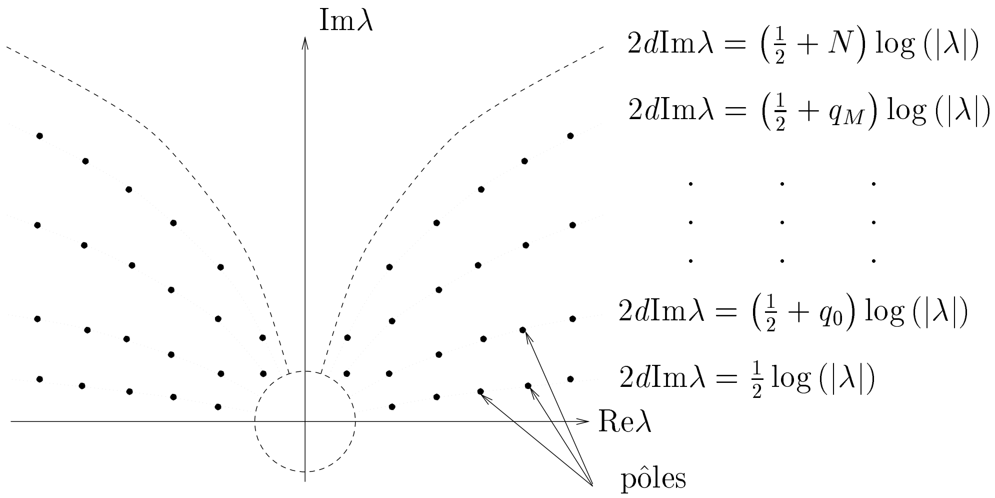

Fig. 1.2 – *Pôles situés sous une courbe* $2dIm\lambda = \left(\frac{1}{2}+N\right)\log(|\lambda|)$.

autre (celle qui connecte une extrémité de la fissure à l'autre) et les calculs de O. Poisson (antérieurs à notre résultat) font clairement apparaitre des pôles de diffusion situés asymptotiquement sur des courbes logarithmiques (au moins pour les trois premières courbes), de manière remarquablement précise puisque la répartition asymptotique apparait pour des fréquences de l'ordre de 5 *(si la longueur de la fissure est* 1*). Enfin on peut vérifier numériquement sur ces résultats la pente logarithmique en* $\frac{1}{4d}$ *de la première rangée de pôles qui est celle que notre résultat annonce (si on l'extrapole au cadre étudié par O. Poisson)*

La démonstration de ce résultat a été rendue possible par le calcul extrèmement précis de l'onde diffractée par un coin quand l'onde incidente est conormale analytique, réalisé par P. Gérard et G. Lebeau [8]. Notre démonstration repose de façon cruciale sur ces résultats. Le plan de l'article est le suivant. Dans une deuxième partie nous définissons des fronts d'onde Sobolev et Gevrey pour les solutions H^1 de l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet dans un ouvert à coins et nous démontrons un théorème de propagation des singularités le long des rayons C^∞ ou analytiques selon le cas pour ces fronts d'onde. Dans la troisième partie nous démontrons un résultat analogue à celui de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [1] pour un ouvert à coins non captif, c'est à dire que dans ce cas la résolvante sortante tronquée admet un prolongement analytique sous un courbe inverse cubique $\mathrm{Im}\lambda < \varepsilon e^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}$, $|\lambda| > C$. La quatrième partie est consacrée à la construction des opérateurs associés au rebond microlocal le long de la trajectoire captive. Nous résolvons un problème de Grushin associé à ces opérateurs dans la cinquième partie. Dans la sixième partie nous calculons des développements asymptotiques pour les zéros d'une matrice qui résoud ce problème de Grushin, nous montrons qu'ils correspondent aux pôles de diffusion et nous démontrons le théorème 1. Enfin dans une annexe nous avons rassemblé des parties plus techniques ou en particulier nous établissons d'une part de façon systématique un lien entre front d'onde et ensemble de fréquence et d'autre part nous utilisons ce lien pour déduire à partir des résultats de propagation des singularités, des résultats de propagation des ensembles de fréquence.

Terminons cette introduction en remarquant que $R\left(-\overline{\lambda}\right) = \overline{R(\lambda)}$, ce qui nous permettra de limiter notre étude à l'ensemble Re$\lambda > 0$.

Remerciements. Je voudrais remercier J.M. Schlenker pour les discussions qui ont permis la rédaction de l'annexe D et tout particulièrement G. Lebeau qui m'a indiqué ce problème, pour les discussions que j'ai eues avec lui sur cet article.

II. Propagation des singularités dans les ouverts à coins

Nous allons dans cette partie étendre les résultats de propagation des singularités de R. Melrose et J. Sjöstrand [19] dans le cadre C^∞, de J. Sjöstrand [27] dans le cas analytique et de G. Lebeau [16] dans le cas Gevrey au cas où l'ouvert considéré comporte des coins. On se limitera à l'étude d'une équation d'ondes en dimension 2 d'espace. Dans le cadre analytique ce travail a déja été réalisé par G. Lebeau ([18]), dans le cas plus général d'un dièdre.

2.1 Géométrie

Soient a et b deux fonctions réel-analytiques, telles que $a(0) = b(0) = 0$, $b'(0) < 0 < a'(0)$. On supposera que l'ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ coïncide avec l'un des ouverts Ω^i et Ω^e définis par :

$$\left\{ \begin{array}{c} \Omega^i = \{(x,y)\,;\ x > 0,\ b(x) < y < a(x)\}, \\ \Omega^e = \{(x,y)\,;\ x < 0 \text{ ou } x > 0, y \notin [b(x)\,; a(x)]\}. \end{array} \right. \tag{2.1}$$

On notera

$$\begin{cases} \Delta_1 = \{(x,y)\,;\ x > 0,\ y = a(x)\}, \\ \Delta_2 = \{(x,y)\,;\ x > 0, y = b(x)\}, \\ O = (0,0)\,, \qquad L = O \times \mathbf{R}_t, \\ \partial\Omega^{i,e} = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup O, \\ M = \Omega \times \mathbf{R}_t,\ \text{avec } \Omega = \Omega^{i,e}, \\ \widetilde{\Delta}_{1,2} = \Delta_{1,2} \times \mathbf{R}_t, \end{cases} \tag{2.2}$$

On notera T_b^*M le fibré cotangent jusqu'au bord à Ω dont on a retiré la section nulle. Au voisinage des coins on a

$$T_b^*M = T^*M \setminus 0 \cup T^*\widetilde{\Delta}_1 \setminus 0 \cup T^*\widetilde{\Delta}_2 \setminus 0 \cup T^*L \setminus 0.$$

On a une projection naturelle :

$$T^*\mathbf{R}^{2+1}\,|_{\overline{M}} \xrightarrow{\pi} T_b^*M$$

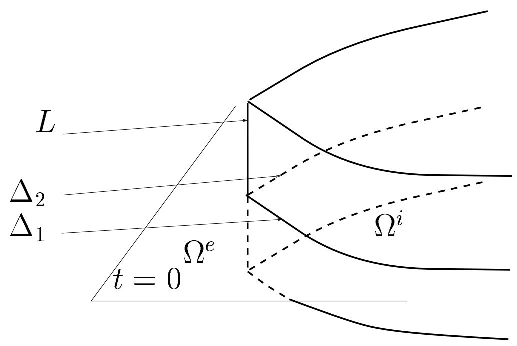

FIG. 2.1 – *La géométrie au voisinage des coins*

et on munit T_b^*M de la topologie induite. On note Σ_b la projection sur T_b^*M de la variété caractéristique (Car $(\Box)$) de l'équation des ondes, d'équation $\tau^2 = |\xi|^2$. On définit dans T_b^*M les régions elliptique ($\mathcal{E}$), hyperbolique ($\mathcal{H}$) et glissante ($\mathcal{G}$) par :

$$\begin{cases} \mathcal{E} = T_b^*M \setminus \Sigma_b, \\ \mathcal{H} = \{\rho \in T_b^*M \setminus 0;\ \sharp\{\pi^{-1}(\rho) \cap \mathrm{Car}(\Box)\} \neq 1\}, \\ \mathcal{G} = \{\rho \in T_b^*M \setminus 0;\ \sharp\{\pi^{-1}(\rho) \cap \mathrm{Car}(\Box)\} = 1\}. \end{cases}$$

Définition 2.1. — *On appelle rayon analytique (respectivement C^∞) toute application γ, définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs dans Σ_b, continue, telle que pour tout $t_0 \in I$,*

- *si $\gamma(t_0) \notin T^*L$ alors γ est un rayon analytique (respectivement C^∞) au sens usuel au voisinage de t_0,*
- *si $\gamma(t_0) \in T^*L$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma(s) \notin T^*L$, $\forall 0 < |s - t_0| < \varepsilon$.*

On pourra également par abus de notation appeler dans la suite rayons les projections des rayons sur l'espace des x, ξ. On gardera alors comme orientation des rayons celle qui vient de l'orientation dans l'espace des $t, \tau = |\xi|, x, \xi$. C'est à dire qu'on appelera, si x est un point intérieur, demi-rayon issu de (x, ξ) vers $t < 0$, le rayon qui au voisinage de x coïncide avec $(x - t\xi, \xi)$; $t < 0$, pour $|t|$ assez petit.

On rappelle les propriétés suivantes des rayons:

Proposition 2.2. — *Soit K un compact de Σ_b et $a < b$, alors l'ensemble des rayons définis sur $[a, b]$, à valeurs dans K est soit compact pour la topologie de la convergence uniforme, soit vide.*

Dans le cas analytique cette propriété est démontrée par G. Lebeau ([18]), Proposition 2.1, et dans le cas C^∞ il suffit de vérifier que l'ensemble des rayons C^∞ est fermé pour la topologie de la convergence uniforme; or si une suite de rayons γ_n converge uniformément vers γ sur $[a, b]$ et si $\gamma(t_0) \notin T^*L$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout n assez grand et pour tout $|t - t_0| \leq \varepsilon$ $\gamma_n(t) \notin T^*L$. D'après L. Hörmander [11], théorème 24.3.12, $\gamma\,|_{[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]}$ est un rayon C^∞.

2.2 Front d'onde, propagation des singularités

Soient $u \in C^1(\mathbf{R}_t\,; L^2) \cap C^0(\mathbf{R}_t\,; H_0^1)$ et $v \in L^2_{loc}\left(\overline{\Omega} \times \mathbf{R}_t\right)$ nulle au voisinage des coins, solutions de

$$\Box u = v \text{ dans } \Omega \times \mathbf{R}_t.$$

Définition 2.3. — *On notera pour $s \geq 1$, $WF_b^s(u) \subset T_b^*M$, le front d'onde Sobolev d'ordre s de u défini par $\rho_0 \notin WF_b^s(u)$ si et seulement si :*

- *si $\rho_0 \notin T^*L$ alors ρ_0 n'appartient pas au front d'onde Sobolev d'ordre s jusqu'au bord au sens usuel,*
- *si $\rho_0 \in T^*L$, il existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}_t)$ et $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}_x^2)$ telles que $\varphi(t_0) \neq 0$ et $\psi(O) \neq 0$ et*

$$\int_{\tau/\tau_0 \geq 0} \|\psi \mathcal{F}_{t\to\tau} \varphi u(\tau,\cdot)\|^2_{H^1(\Omega)} \left(1+|\tau|^2\right)^{s-1} d\tau < +\infty, \tag{2.3}$$

  c'est à dire que u est microlocalement en (t_0,τ_0) de classe H_t^{s-1} à valeurs H_x^1 au voisinage de O et donc, comme u est solution de l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet, u est microlocalement en (t_0,τ_0) de classe H_t^s à valeurs L_x^2 et de classe H_t^{s-1} à valeurs $H_{0,x}^1$ au voisinage de O.

Définition 2.4. — *On notera $WF_b^\infty(u) = \overline{\cup_{s\geq 1} WF_b^s(u)}$ le front d'onde C^∞ jusqu'au bord de u.*

On rappelle qu'une fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ est de classe Gevrey σ $(1 < \sigma)$ si et seulement si elle vérifie l'estimation suivante:

$$\forall K \subset\subset \mathbf{R}^n\ \exists C > 0;\ \forall \alpha \in \mathbf{N}^n\ \forall x \in K\ \ |\,\partial_x^\alpha f(x) \leq C^{|\alpha|+1}(3\alpha!).$$

On note $f \in G^\sigma(\mathbf{R}^n)$.

Définition 2.5. — *On notera, pour $\sigma \geq 1$, $SS_b^\sigma(u) \subset T_b^*M$, le front d'onde Gevrey d'ordre σ de u défini par $\rho_0 \notin SS_b^\sigma(u)$ si et seulement si :*

- *si $\rho_0 \notin T^*L$, alors ρ_0 n'appartient pas au front d'onde Gevrey d'ordre σ au sens usuel,*
- *si $\rho_0 \in T^*L$, il existe $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}_x^2)$, telle que $\psi \equiv 1$ au voisinage de O, et si*

$$T_0\psi u(w,x,\lambda) = \int e^{\lambda\left(w\cdot t - t^2/2\right)} \psi(t)\, u(t,x)\, dt,$$

  il existe un voisinage W de $w_0 = t_0 - i\tau_0$, $\varepsilon_0 > 0$ tels que pour tout $w \in W$ on a

$$\|T_0\psi u(w,.,\lambda)\|_{H^1(\Omega)} \leq e^{\lambda\varphi_0(w) - \varepsilon_0\lambda^{1/\sigma}},$$

  avec $\varphi_0(w) = \frac{1}{2}(\mathrm{Re} w)^2$. C'est à dire que u est microlocalement en (t_0,τ_0) de classe Gevrey σ en temps à valeurs H^1 en espace au voisinage de O.

On commence par rappeler quelques propriétés vérifiées par la transformation de F.B.I., T_0

Lemme 2.6. — *La transformation T_0 vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a, pour $H = L^2(\Omega)$ ou $H^1(\Omega)$,*

$$\|T_0 u(t - i\alpha, x, \lambda)\, e^{-\lambda \frac{t^2}{2}}\|_{L^2(\mathbf{R}_\alpha;\ H)} \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \|u\|_{L^2(\mathbf{R}_t;\ H)}. \tag{2.4}$$

2. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a*

$$\|T_0 u(t - i\alpha, x, \lambda) \left(1 + |\alpha|^2\right)^{1/2} e^{-\lambda \frac{t^2}{2}}\|_{L^2(\mathbf{R}_\alpha \times \Omega)} \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \|u\|_{H^1(\mathbf{R}_t; L^2(\Omega))}. \tag{2.5}$$

3. *On a les formules d'inversion suivantes :*

$$\psi u(t, x) = \frac{\lambda}{2\pi} \int e^{i\lambda t\alpha - \lambda \frac{t^2}{2}} T_0 \psi u(t - i\alpha, x, \lambda)\, d\alpha.$$

4. *Si on note $\widehat{u}$ la transformée de Fourier partielle de u par rapport à t, on a, si $u \in L^\infty(\mathbf{R}_t)$,*

$$\widehat{\psi u}(\lambda\tau, x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int e^{-\lambda \frac{t^2}{2}} T_0 \psi u(t - i\tau, x, \lambda)\, dt. \tag{2.6}$$

5. *Enfin, si u est à support compact en t*

$$\begin{aligned} \|T_0 u(s - i\alpha, x)\|_{L^\infty(\mathbf{R}_t)} & \\ \leq \operatorname{diam}\ & (\operatorname{supp}(u))^{1/2} e^{\frac{\lambda}{2}\left(s^2 - \operatorname{dist}(s, \operatorname{supp}(u))^2\right)} \|u(t, x)\|_{L^2(\mathbf{R}_t)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

On commence en effet par remarquer que

$$e^{i\lambda t\alpha - \lambda \frac{t^2}{2}} T_0 \psi u(t - i\alpha) = \mathcal{F}_{s \to \tau}\left(e^{-\lambda \frac{s^2}{2}} \psi(t + s)\, u(t + s)\right)(\tau = \lambda\alpha).$$

La première inégalité est donc conséquence directe de la continuité L^2 de la transformation de Fourier et la troisième est juste une réécriture de la formule de transformation de Fourier inverse en $s = 0$. On a donc également

$$\begin{aligned} i\lambda\alpha e^{i\lambda t\alpha - \lambda \frac{t^2}{2}} T_0 \psi u(t - i\alpha) &= \mathcal{F}_{s \to \tau}\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-\lambda \frac{s^2}{2}} \psi(t + s)\, u(t + s)\right)\right)(\tau = \lambda\alpha) \\ &= \mathcal{F}_{s \to \tau}\Big(-\lambda s e^{-\lambda \frac{s^2}{2}} \psi(t + s)\, u(t + s) \\ &\qquad + e^{-\lambda \frac{s^2}{2}} \partial_s\left(\psi(t + s)\, u(t + s)\right)(\tau = \lambda\alpha)\Big). \end{aligned}$$

Comme $\lambda s e^{-\lambda\frac{s^2}{2}} \leq C\sqrt{\lambda}$, on en déduit la deuxième inégalité. On a également, si $\theta \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ et $\theta(0) = 1$,

$$\begin{aligned}\int e^{-\lambda\frac{t^2}{2}} \psi T_0 u(t - i\tau, x, \lambda)\, dt &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int e^{-\lambda\frac{t^2}{2}} \theta(\varepsilon t)\, dt \int e^{\lambda(t-i\tau)s-\lambda\frac{s^2}{2}} \psi(s)\, u(s)\, ds \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int e^{-i\lambda\tau s} \psi u(s)\, ds \int e^{-\lambda\frac{(t-s)^2}{2}} \theta(\varepsilon t)\, dt.\end{aligned}$$

La quatrième proposition est donc conséquence du théorème de convergence dominée. Enfin la dernière proposition se démontre facilement en estimant brutalement l'intégrale définissant T_0.

Nous rappelons également le résultat suivant dû à G. Lebeau,

Lemme 2.7. — *On a la formule d'inversion suivante, dont on trouvera, par exemple une démonstration dans [5], lemme 1.7.*

$$\psi u(s) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} e^{\frac{-\lambda}{2}} d\lambda \sum_{\varepsilon=\pm1} \left(1 + \varepsilon\frac{\partial_t}{i\lambda}\right) \left(e^{-\frac{\lambda}{2}(t-i\varepsilon)^2} T_0 \psi u(t - i\varepsilon\lambda)\right). \tag{2.8}$$

Nous allons donner une définition équivalente du front d'onde Gevrey au coin :

Proposition 2.8. — *Soient $v \in L^2_{loc}(\mathbf{R}_t \times \overline{\Omega})$, $\sigma > 1$, $(t_0, \tau_0) \in T^*\mathbf{R}_t \setminus \{0\}$ et $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}_x^2)$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe $\Psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}_t)$, égale à 1 au voisinage de t_0, $C > 0$ et W un voisinage de $t_0 - i\tau_0$ tels que pour tout $w \in W$ et tout $\lambda > 0$ on a :*

$$\|T_0(\Psi g u)\|_{L^2(\Omega)}(w, \lambda) \leq C e^{\frac{\lambda}{2}(Re w)^2 - \frac{\lambda^{1/\sigma}}{C}}. \tag{2.9}$$

2. *Il existe $\varphi \in G_0^\sigma(\mathbf{R}_t)$, égale à 1 au voisinage de t_0 et $C > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a :*

$$\left(\int_{\frac{\tau}{\tau_0}>0} \|\mathcal{F}_{t\to\tau}(\partial_t^n \varphi g u)\|^2_{L^2(\Omega)}(\tau)\right)^{1/2} \leq C^{n+1}(\sigma n)^{\sigma n}. \tag{2.10}$$

Avant de démontrer la proposition 2.8, on en déduit le résultat suivant :

Corollaire 2.9. — *Soit $\sigma > 1$. On a l'équivalence entre les deux propositions suivantes:*

1. *Le point $\rho_0 = (x_0 = O, t_0, \xi_0 = 0, \tau_0)$ n'appartient pas au front d'onde Gevrey de u.*

2. *Il existe $\varphi \in G_0^\sigma(\mathbf{R}_t)$, égale à 1 au voisinage de t_0, $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ égale à 1 au voisinage du point O et $C > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a :*

$$\left(\int_{\frac{\tau}{\tau_0}>0} \|\mathcal{F}_{t\to\tau}(\partial_t^n \varphi g u)\|^2_{H^1(\Omega)}(\tau)\right)^{1/2} \leq C^{n+1}(\sigma n)^{\sigma n}.$$

Pour démontrer ce corollaire, il suffit en effet d'appliquer la proposition 2.8 à gu et à $\nabla_x (gu)$.

On revient à la preuve de la proposition 2.8. On suppose par exemple $\tau_0 = 1$. On suppose que W est de la forme $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[+i]\tau_0-\varepsilon, \tau_0+\varepsilon[$ (avec $\varepsilon > 0$). On commence par démontrer $1 \Rightarrow 2$. On choisit Ψ vérifiant (2.9), φ à support inclus dans l'intérieur de l'intersection de l'ensemble $\Psi \equiv 1$ avec $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$ et $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}_x^2)$. Le point de départ est la formule d'inversion (2.8). On a donc :

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi u}(\lambda) &= \frac{1}{4\pi}\int e^{-i\lambda t}\varphi(t)\int_{\mu=0}^{+\infty}\sum_{\alpha=\pm1} e^{\frac{-\mu}{2}}\left(1+\alpha\frac{\partial_t}{i\mu}\right)\left(e^{-\frac{\mu}{2}(t-i\alpha)^2}\left(T_0\psi u(t-i\alpha,\mu)\right)\right)\\
&= I_{\alpha=1}+I_{\alpha=-1}.
\end{aligned}$$

Etudions d'abord la contribution de $\alpha = 1$ à cette intégrale :

$$\lambda^n I_{\alpha=1} = \frac{1}{4\pi}\int e^{-i\lambda t}(i\partial_t)^n\left(\varphi(t)\int_{\mu=0}^{+\infty}e^{\frac{-\mu}{2}}\left(1+\frac{\partial_t}{i\mu}\right)\left(e^{-\frac{\mu}{2}(t-i)^2}\left(T_0\psi u(t-i,\mu)\right)\right)\right).$$

Par hypothèse, il existe $C, C' > 0$ tels qu'on a, pour tout z dans un voisinage complexe de $\mathrm{supp}(\varphi)\times\{-i\}$ de taille ε,

$$\left\|e^{-\frac{\mu}{2}z^2}\left(T_0\psi u(z,\mu)\right)\right\|_{L^2(\omega)}| \leq Ce^{\frac{\mu}{2}(\mathrm{Imm} z)^2-\frac{\mu^{1/\sigma}}{C'}}.$$

D'après les formules de Cauchy appliquées sur un cercle centré au point $t-i$ de rayon $1/\mu$, on a donc, quitte à agrandir C, pour tout $t \in \mathrm{supp}(\varphi)$

$$\left\|\partial_t^n\left(1+\frac{\partial_t}{i\mu}\right)\left(e^{-\frac{\mu}{2}(t-i)^2}\left(T_0\psi u(t-i,\mu)\right)\right)\right\| \leq C^{n+1}\mu^n e^{\frac{\mu}{2}-\frac{\mu^{1/\sigma}}{C'}}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale

$$\int_{\lambda>0}\|I_{\alpha=1}\|^2_{L^2(\Omega)}\left(\lambda^{2n}\right)d\lambda \tag{2.11}$$

se majore donc par

(2.12)

$$\begin{aligned}
&\int_t\left\|\sum_{k=0}^n C_n^k\partial_t^k(\varphi(t))\,\partial_t^{n-k}\left(\int_{\mu=0}^{+\infty}e^{\frac{-\mu}{2}}\left(1+\frac{\partial_t}{i\mu}\right)\left(e^{-\frac{\mu}{2}(t-i)^2}\left(T_0\psi u(t-i,\mu)\right)\right)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt\\
&\qquad\leq n\sum_{k=0}^n\int_{t\in\mathrm{supp}(\varphi)}\left(C_n^k\partial_t^k(\varphi(t))\right)^2dt\\
&\qquad\qquad\left|\partial_t^{n-k}\left(\int_{\mu=0}^{+\infty}e^{\frac{-\mu}{2}}\left(1+\frac{\partial_t}{i\mu}\right)\left(e^{-\frac{\mu}{2}(t-i)^2}\left(T_0\psi u(t-i,\mu)\right)\right)\right)\right|^2\\
&\qquad\leq n\sum_{k=0}^n\left(\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\right)^2 C^{2k+2}(k\sigma)^{2k\sigma}\\
&\qquad\qquad\left(\int_{t\in\mathrm{supp}(\varphi)}\int_{\mu>0}C^{(n-k)+1}\mu^{(n-k)}e^{\frac{-\mu^{1/\sigma}}{C'}}d\mu dt\right)^2\\
&\qquad\leq AB^{n+1}(\sigma n)^{2n\sigma},
\end{aligned}$$

puisque l'intégrale

$$\int_{\mu>0} \mu^n e^{\frac{-\mu^{1/\sigma}}{C'}} d\mu$$

se majore aisément par récurence par $AB^n (\sigma n)^{\sigma n}$.

Il reste à étudier la contribution de $I_{\alpha=-1}$:

$$\lambda^n I_{\alpha=-1} = \frac{1}{4\pi} \int e^{-i\lambda t} \lambda^n \Bigg[\varphi(t) \int_{\mu=0}^{+\infty} e^{\frac{-\mu}{2}} \\ \left(1 - \frac{\partial_t}{i\mu}\right) \left(e^{-\frac{\mu}{2}(t+i)^2} \left(\int_s e^{\mu(t+i)s - \mu s^2/2} \psi u(s)) \, ds \right) \right) \Bigg].$$

La contribution de la région $\{\lambda \leq 1\} \cap \{\mu \leq 1\}$ à l'intégrale

$$\int_{\lambda>0} \|I_{\alpha=-1}\|^2_{L^2(\Omega)} \left(\lambda^{2n}\right) d\lambda \tag{2.13}$$

se majore facilement en norme $L^2(\Omega)$ et pour majorer le reste, il suffit d'intégrer par parties en utilisant l'opérateur

$$\left(\frac{\partial_t}{i(\lambda+\mu) - \mu(t-s)} \right)^n,$$

ce qui donne pour

$$\int_{\lambda>0} \lambda^{2n} \left|I_{\alpha=-1}\right|^2 d\lambda,$$

une majoration similaire à (2.12) et donc démontre $1 \Rightarrow 2$.

On va maintenant montrer $2 \Rightarrow 1$. On a

$$T_0(\varphi u)(t_0 - i\tau_0, x, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int e^{-\frac{\lambda}{2}(\tau-\tau_0)^2 + i\lambda t_0(\tau-\tau_0)} \widehat{\varphi u}(\lambda\tau, x) \, d\tau.$$

La contribution dans cette intégrale de la partie $\tau < \tau_0/2$ se majore aisément en norme L^∞ par $e^{-\frac{\lambda}{2}\tau_0^2} \|u\|_{L^2(\mathbf{R}_t)}$ et on a

$$\begin{aligned} &\left\| \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{\tau>\frac{\tau_0}{2}} e^{-\lambda(\tau-\tau_0)^2 + i\lambda t_0(\tau-\tau_0)} \widehat{\varphi u}(\lambda\tau, x) \, d\tau \right\|^2 \\ &\qquad \leq C\sqrt{\lambda} \int_{\tau>\frac{\tau_0}{2}} (\lambda\tau)^{-2n} e^{-\lambda(\tau-\tau_0)^2} \int_{\tau>\frac{\tau_0}{2}} (\lambda\tau)^{2n} \|\widehat{\varphi u}(\lambda\tau, x)\|^2 \, d\tau \\ &\qquad \leq A^{2n+2} (\sigma n)^{2\sigma n} \times \left(\frac{2}{\lambda\tau_0}\right)^{2n} \\ &\qquad \leq C e^{-\frac{\lambda^{1/\sigma}}{C}}, \end{aligned}$$

si on choisit $n = \frac{\lambda^{1/\sigma}}{C_0}$ avec C_0 assez grand; ce qui conclut la preuve de la proposition 2.8.
Lemme 2.10 (Régularité elliptique). — *Les fronts d'onde Sobolev et Gevrey vérifient les inclusions suivantes:*

$$\forall 1 \leq s \leq +\infty,\ WF_b^s(u) \subset \Sigma_b,$$
$$\forall 1 \leq \sigma < +\infty,\ SS_b^\sigma(u) \subset \Sigma_b.$$

En effet, en dehors des points de T^*L, ce résultat est standard et sur T^*L, il est vide.
Proposition 2.11. — *Les fronts d'onde définis par les définitions (2.3), (2.4) et (2.5) sont fermés, localement compacts dans T_b^*M et coniques pour l'action naturelle de $\mathbf{R}^{*,+}$ sur $T_b^*\Omega$.*

Ce résultat est classique en dehors des coins. Au voisinage d'un coin, la définition des fronts d'onde Sobolev implique qu'ils sont coniques. Dans le cas Gevrey, c'est une conséquence du corollaire 2.9. On vérifie maintenant que ce sont des fermés. Etudions le cas Sobolev: on va montrer que si $\rho_0 \in T^*L$ et si $\rho_0 \notin WF_b^s(u)$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout

$$\rho_1 = (x_1, t_1, \xi_1, \tau_1) \in \pi\left(\{(x,t,\xi,\tau) \in T^*\mathbf{R}^3 \mid_{\overline{M}};\ |x| < \varepsilon, |\tau - \tau_0| < \varepsilon, |t - t_0| < \varepsilon\}\right),$$

alors $\rho \notin WF_b^s(u)$.

1. si $x_1 = O$, la conclusion est triviale puisque la condition définissant $WF_b^s(u)$ est ouverte,

2. si $x_1 \neq O$ et $x_1 \in \Delta_1$, d'après la proposition 2.10, on peut supposer que $\rho_1 \in \Sigma_b$. D'après l'hypothèse, il existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}_t)$ et $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}_x^2)$ telles que $\varphi(t_0) \neq 0$ et $\psi(O) \neq 0$ et

$$\int_{\tau/\tau_0 \geq 0} \|\psi \mathcal{F}_{t\to\tau} \varphi u(\tau, \cdot)\|^2_{H^1(\Omega)} \left(1 + |\tau|^2\right)^{s-1} d\tau < +\infty. \tag{2.14}$$

   On se place dans un système de coordonnées où $\Delta_1 = \{(x = 0, y > 0)\}$, on note $x_1 = (x_0, y_0)$ et on choisit $h_{1,2} \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ telles que $h_1(x)h_2(y)$ est à support dans l'ensemble où la fonction ψ vaut 1, h_2 est à support dans $\mathbf{R}^{*,+}$ et $h_1(x)\, h_2(y)$ ne s'annule pas au point x_1. On a donc par hypothèse,

$$\int_{\tau/\tau_0} \int_\eta \|\mathcal{F}_{\substack{t\to\tau \\ y\to\eta}} \psi\varphi u(\tau, \xi_2, \cdot)\|^2_{L^2\left(\mathbf{R}_x^\pm\right)} \left(1 + |\tau|^2\right)^{s-1} \left(1 + |\eta|^2 + |\tau|^2\right) < +\infty,$$

   où on choisit le signe $+$ ou $-$ selon qu'on est dans le cas de l'ouvert intérieur ou de l'ouvert extérieur, d'après la définition de $WF_b^s(u)$. Comme le front d'onde WF_b^s est inclus dans Σ_b, on a $|\tau_1| \geq c|\eta_1|$. Si Γ est un voisinage conique de (τ_1, η_1) assez petit, on a donc :

$$\int_\Gamma \|\mathcal{F}_{\substack{t\to\tau \\ x_2\to\xi_2}} \psi\varphi u(\tau, \xi_2, \cdot)\|^2_{L^2\left(\mathbf{R}_{x_1}^+\right)} \left(1 + |\tau|^2 + |\xi_2|\right)^s < +\infty,$$

   donc $(x_1, \xi_1, t_1, \tau_1) \notin WF_b^s(u)$ au sens usuel.

Les cas $x \in \Delta_2$ et $x \in M$ se traitent de la même façon; ce qui montre que les fronts d'onde Sobolev sont fermés. On montre que $SS_b^\sigma(u)$ est fermé de la même manière.

On va maintenant montrer que les fronts d'onde sont localement compacts. Soit $\rho_0 \in WF_b^s(u)$ (respectivement $\rho_0 \in SS_b^\sigma(u)$). Si $x_0 \notin \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{O\}$, alors ρ_0 admet un voisinage compact ; le résultat est donc immédiat. Si $x_0 \in \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{O\}$, alors $\rho_0 \in \pi\left(\{|x - x_0| \leq \varepsilon, |t - t_0| \leq \varepsilon, |\tau - \tau_0| \leq \varepsilon, |\xi|^2 \leq 2|\tau|^2\}\right)$ et cet ensemble est un voisinage compact de ρ_0.

2.3 Propagation des singularités

Le but de cette partie est de la démonstration du résultat suivant

Théorème 2. — *Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de $\Box u = 0$ dans $\Omega \times \mathbf{R}_t$. Alors les fronts d'onde $WF_b^s(u), SS_b^\sigma(u)$ sont réunion de rayons (analytiques pour $\sigma < 3$ et C^∞ sinon) maximaux; c'est à dire que par tout point $\rho_0 \in WF_b^s(u)$ (respectivement $SS_b^\sigma(u)$), il passe un rayon C^∞ (respectivement C^∞ si $\sigma \geq 3$ et analytique si $\sigma < 3$) qui est inclus dans $WF_b^s(u)$ (respectivement $SS_b^\sigma(u)$).*

Remarque 2.12. — *Pour $\sigma = 1$, ce résultat est conséquence du théorème 5 de G. Lebeau [18].*

Tous les rayons que nous considérerons seront paramétrés dans le sens des temps croissants. On notera $F = WF_b^s(u)$ ou $F = SS_b^\sigma(u)$, selon le cas considéré. On va montrer que si $\rho_0 \in F \cap T^*L$, alors il existe un rayon, $\gamma : [-a, 0[\to T_b^*M \cap \Sigma_b \cap F$, C^∞ ou analytique suivant le cas, tel que $\lim_{s \to 0^-} \gamma(s) = \rho_0$. Comme on peut faire le même raisonnement pour $s > 0$ et comme les fronts d'onde sont fermés, on aura alors montré le théorème 2 au voisinage d'un point de T^*L. Comme le résultat du théorème 3 est classique en dehors de T^*L, le théorème 2 sera démontré.

On reprend des notations de [18]. On notera $\widehat{\Gamma}^-_{\rho_0,a}$, l'ensemble des rayons analytiques définis sur $[-a, 0[$, tels que $\lim_{s \to 0^-} \gamma(s) = \rho_0$, $\widetilde{\Gamma}^-_{\rho_0,a}$ l'intersection de $\widehat{\Gamma}^-_{\rho_0,a}$ avec l'ensemble des rayons C^∞ et $\Gamma^-_{\rho_0,a}$, l'ensemble égal à $\widehat{\Gamma}^-_{\rho_0,a}$ dans le cas où $F = SS_b^\sigma(u)$, $\sigma < 3$ et à $\widetilde{\Gamma}^-_{\rho_0,a}$ sinon.

Lemme 2.13. — *Tout rayon défini sur un intervalle non vide $]a, b[$, à valeurs dans Σ_b se prolonge en un rayon défini sur $\mathbf{R}$.*

En effet, sur γ, on a $|\tau(\gamma(s))| = Constante$ et $|\xi(\gamma(s))| \leq |\tau(\gamma(s))|$. En dehors des points hyperboliques et du coin qui sont isolés, on a $|\frac{dx}{ds}| = |\xi| = 1$ et $|\frac{dt}{ds}| = |\tau| = 1$. On en déduit que $\operatorname{dist}(\gamma(s), \gamma(r)) \leq |s - r|$. D'après le lemme 7.II de [18], l'intervalle maximum de prolongement, I, de γ est donc fermé dans $\mathbf{R}$, il est également ouvert car au voisinage d'un point n'appartenant pas à T^*L, ce résultat est classique et si $\gamma(c) \in T^*L$, on peut prendre n'importe quel demi-rayon issu de $\gamma(c)$ pour prolonger γ.

Nous allons montrer l'analogue du théorème 3 de [18] :

Proposition 2.14. — *Soit u solution de $\Box u = 0$ dans Ω, $u \in H_0^1(\Omega)$, et soit $\rho_0 \in T^*L$. On suppose qu'il existe un voisinage compact W de $\rho_0 = (O, t_0 = 0, \tau_0)$ dans Σ_b et $a_0 > 0$ tels que pour tout $\rho \in W$, s'il existe $\gamma \in \Gamma^-_{\rho_0,a}$, $a \leq a_0$, $\gamma(-a) = \rho$, alors $\rho \notin F$. Alors $\rho_0 \notin F$.*

On notera $\rho_0^s = (x_0 = O, t = s, \xi = 0, \tau_0)$. Sous les hypothèses précédentes, on a:
Lemme 2.15. — *Il existe $a_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout rayon $\gamma : [-a_0, 0]$, tel que $\tau(\gamma) = \tau_0$, si on a $(x(\gamma(0)), t(\gamma(0))) \in B((O, t_0), \varepsilon)$, alors on n'a pas*

$$\gamma([-a_0, 0]) \subset F. \tag{2.15}$$

On raisonne en effet par l'absurde, supposons qu'il existe des rayons $\gamma_n \subset F$ définis sur $[-a_0, 0]$ et tels que $\tau(\gamma_n) = \tau_0$ et $(x(\gamma_n(0)), t(\gamma_n(0))) \in B((O, t_0), \varepsilon)$. Quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que les rayons γ_n convergent quand n tend vers l'infini vers un rayon qu'on note γ, défini sur $[-a_0, 0]$, inclus dans F et tel que $\gamma(0) = (O, t_0, \tau_0)$, ce qui contredit les hypothèses de la proposition 2.14.

Le lemme suivant est une conséquence directe de la conservation de l'énergie et de la vitesse finie de propagation du support pour l'équation des ondes:
Lemme 2.16. — *Soient $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de $\Box u = 0$, et $\alpha, \eta > 0$. Si u est microlocalement en $\tau_0 \neq 0$ de classe Gevrey σ (respectivement H^{s-1}) sur l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$ à valeurs dans $H^1(\Omega \cap B(O, \eta))$, alors, pour tout $s \geq 0, \varepsilon > 0$, u est microlocalement en τ_0 de classe Gevrey σ (respectivement H^{s-1}) sur $[-\alpha - s + \varepsilon, \alpha + s - \varepsilon]$ à valeurs $H^1(\Omega \cap B(O, \eta - \varepsilon - s))$.*

Démontrons d'abord le cas H^s. On fixe $\varepsilon > 0$. Soit $\Theta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ telle que $\mathrm{supp}(\Theta) \subset B(O, \eta)$, $\Theta \equiv 1$ sur $B(O, \eta - \varepsilon)$ et $0 \leq \Theta \leq 1$. Soit $\Psi \in C^\infty(\mathbf{R}_t)$ telle que $\Psi\mid_{t<-\alpha} \equiv 0$, $\Psi\mid_{t>-\alpha+\varepsilon} \equiv 1$. On notera v la solution de

$$\begin{cases} \Box v = \Psi''(s)\,\Theta(x)\,u(x,s) + 2\Psi'(s)\,\Theta(x)\,\partial_t u(s,x), \\ v\mid_{t<-\alpha} \equiv 0, \\ v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.16}$$

c'est à dire

$$v(t,x) = \int_{-\alpha}^{t} U(t-s)\left[\Psi''\Theta u + 2\Psi'\Theta u\right](s,x)\,ds,$$

où U est le propagateur de l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet sur Ω:

$$\begin{cases} \Box U(t)\,u_0 &= 0, \\ U(0)\,u_0 &= 0, \\ \partial_t U(0)\,u_0 &= u_0 \in L^2(\Omega), \\ U(t)\,u_0 &\in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

La fonction $w = v - \Psi u$ vérifie alors l'équation obtenue en remplaçant dans (2.16) Θ par $1 - \Theta$. D'après la vitesse finie de propagation du support pour les solutions de l'équation des ondes, on a

$$w \equiv 0 \text{ sur } \{(x,t);\ t \geq 0, x \in B(O, \alpha - \varepsilon - t)\}. \tag{2.17}$$

Soit $g \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. On note

$$E_\pm(s,u) = \int_{\tau\in\mathbf{R}^\pm}\int_\Omega \left|\mathcal{F}_{t\to\tau}\, g(s+t)\,\nabla u(t)\right|^2 + \left|\mathcal{F}_{t\to\tau}\, g(s+t)\,\partial_t u(t)\right|^2(\tau,x)\,d\tau dx.$$

On a alors:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{ds}E_{\pm}(s,v) &= \int_{\mathbf{R}^{\pm}} \mathrm{Re}\Bigg[\int_{\Omega}\int_{\mathbf{R}} e^{-it\tau}dtg(s+t)\nabla v(x,t)\overline{\int_{\mathbf{R}} e^{-it\tau}\frac{dg}{ds}(s+t)\nabla v dt} \\
&\quad + \int_{\Omega}\int_{\mathbf{R}} e^{-it\tau}dtg(s+t)\partial_t v\overline{\int_{\mathbf{R}} e^{-it\tau}dt\frac{dg}{ds}(s+t)\partial_t v}\Bigg] \\
&= \int_{\mathbf{R}^{\pm}} \mathrm{Re}\Bigg[\int_{\Omega}\int_{\mathbf{R}} e^{-it\tau}dtg(s+t)\nabla v(x,t)\overline{\int_{\mathbf{R}} dte^{-it\tau}g(i\tau\nabla v-\partial_t\nabla v)} \\
&\quad + \int_{\Omega}\int_{\mathbf{R}} e^{-it\tau}dtg(s+t)\partial_t v\overline{\int_{\mathbf{R}} e^{-it\tau}dtg(s+t)(i\tau\partial_t v-\partial_t^2 v)}\Bigg] \\
&= \int_{\mathbf{R}^{\pm}} \mathrm{Re}\Bigg[\int_{\Omega}\int_{\mathbf{R}} e^{-it\tau}dtg(t+s)\partial_t v \\
&\quad \overline{\int_{\mathbf{R}} dte^{-it\tau}g(t+s)\left(-\Psi''(s)\theta(x)u(x,s)-2\Psi'(s)\Theta(x)\partial_t u(s,x)\right)}\Bigg] \\
&\leq E_{\pm}(s,v)^{1/2}\int_{\mathbf{R}^{\pm}}\int_{\Omega}|\mathcal{F}_{t\to\tau}g(s+t) \\
&\quad \left(-\Psi''(s)\Theta(x)u(s,x)-2\Psi'(s)\Theta(x)\partial_s u(s,x)\right| d\tau dx) \\
&\leq CE_{\pm}(s,v)^{1/2}E_{\pm}\left(s,(|\Psi''|+|\Psi'|)\Theta(x)u\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$E_{\pm}(t,v)^{1/2} \leq C\int_{\alpha}^{t} E_{\pm}^{1/2}\left(t,(|\Psi''|+|\Psi'|)\Theta(x)u\right). \tag{2.18}$$

En utilisant cette remarque et l'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\Box\partial_t^k v &=& \partial_t^k\left[\Theta\Psi'' u+2\Psi'\Theta\partial_t u\right], \\
\partial_t^k v\mid_{t<-\alpha} &\equiv& 0, \\
\partial_t^k v\mid_{\partial\Omega} &=& 0,
\end{array}\right.$$

il est clair que sous les hypothèses du lemme 2.16, v est microlocalement en (t,τ_0) de classe H^{s-1} à valeurs $H_0^1(\Omega)$, pour toutes les valeurs de t et uniformément par rapport à t. D'après (2.17), et comme $\psi\mid_{t>-\alpha+\varepsilon}\equiv 1$, il en résulte que u est microlocalement en τ_0 de classe H^{s-1} sur $[-\alpha+s+\varepsilon,\alpha+s-\varepsilon]$ à valeurs $H^1(\Omega\cap B(O,\eta-\varepsilon-s))$.

La démonstration du lemme 2.16 dans le cas Gevrey σ se fait de la même manière en utilisant le corollaire 2.9 et des troncatures de classe Gevrey au lieu de C^∞.

On revient à la démonstration de la proposition 2.14. Soit $x_1\in\overline{\Omega}\cap B(O,\eta)$ et $\gamma\in\Gamma_{\rho_0,a}^-$, $a>0, a<a_0$ tel que $\Pi_x(\gamma(-a))=x_1$. On note

$$\Gamma=\{\gamma,\text{ rayons analytiques}: [-\alpha,s_\gamma[\to\Sigma_b;\ \Pi_{x,\tau}\gamma(-\alpha)=(x_1,\tau_0),\ \Pi_x\gamma(s_\gamma)=O\},$$

l'ensemble des rayons analytiques issus de (x_1,τ_0) à l'instant $-\alpha$ et

$$S_{x_1}=\underset{\gamma\in\Gamma}{\cup}\{s_\gamma\},$$

l'ensemble des instants d'arrivée au coin des rayons analytiques issus de x_1 à l'instant $t = -\alpha$. La proposition suivante qui va nous permettre de déduire la proposition 2.14 dans les cas Sobolev et Gevrey du même résultat démontré par Lebeau [18] dans le cas analytique est démontrée en annexe :

Proposition 2.17. — *Il existe $C > 0, \alpha_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha_0 > \alpha > 0$, $x \in B(O,C) \cap \overline{\Omega}$, S_x est un fermé de mesure nulle dans $\mathbf{R}$.*

Remarque 2.18. — *Ce résultat reste vrai pour tout $x \in \overline{\Omega}$, mais la démonstration est un peu plus délicate.*

On peut maintenant démontrer la proposition (2.14) dans le cas H^s, $s > 1$. On reprend les notations du lemme 2.15. On prend $C > 0, \alpha = C/2$ vérifiant les conclusions de la proposition 2.17, qu'on pourra éventuellement diminuer et $\varepsilon > 0$ et a_0 vérifiant les conclusions du lemme 2.15. Soit $x_1 \in B(O,C) \cap \overline{\Omega}$. D'après la proposition 2.17, il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $t_1 < 0$ tels que $]t_1 - \varepsilon_1, t_1[\subset S^c_{x_1} \cap] - \varepsilon, \varepsilon[$. Un raisonnement par l'absurde montre qu'on peut supposer qu'il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_1, \varepsilon_2) \cap \overline{\Omega}$, on a

$$]t_1 - 2\varepsilon_1/3, t_1 - \varepsilon_1/3[\subset S_x \cap] - \varepsilon, \varepsilon[. \tag{2.19}$$

On remplace pour plus de simplicité t_1 par $t_1 + \varepsilon_1/3$ et $\varepsilon_1/3$ par ε_1, ce qui implique le lemme :

Lemme 2.19. — *Pour tout $x_1 \in \overline{\Omega} \cap B(O,C)$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tels que pour tout $x \in B(x_1, \varepsilon_2) \cap \overline{\Omega}$, on a:*

$$]t_1 - \varepsilon_1, t_1[\subset S^c_x \cap] - \varepsilon, \varepsilon[.$$

Les constantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ étant ainsi fixées, on prend $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ et $\Psi \in C^\infty(\mathbf{R}_t)$ telles que

$$\begin{cases} \operatorname{supp}(\chi) \subset B(x_1, \varepsilon_2), \\ \chi \equiv 1 \text{ sur } B\left(x_1, \frac{\varepsilon_2}{2}\right), \\ \Psi \mid_{t<-\alpha} \equiv 0, \\ \Psi \mid_{t>-\alpha+\varepsilon/2} \equiv 1 \ (\varepsilon > 0). \end{cases}$$

Soit v la solution de

$$\begin{cases} \Box v = \Psi''(s)\chi(x)u(x,s) + 2\Psi'(s)\chi(x)\partial_t u(s,x), \\ v \mid_{t<-a_0} \equiv 0, \\ v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.20}$$

D'après les résultats de propagations des singularités avec second membre, en temps petit (c'est à dire tant qu'on ne rencontre pas le coin), les seuls rayons porteurs de singularités analytiques de v sont ceux qui sont, pour $t \in [-\alpha, -\alpha + \varepsilon/2]$ issus du support de χ, or, d'après (2.19) et comme à tout rayon analytique issu du point (x,t) et rencontrant le coin (O,t'), on peut par translation du temps associer un rayon analytique issu du point $(x, t+s)$ et rencontrant le coin $(O, t'+s)$, aucun de ces rayons porteurs de singularités analytique de v n'arrive sur le coin pour $t \in]t_1 - \varepsilon_1 + \varepsilon_1/2, t_1[$. D'après le théorème 5 de [18], v est microlocalement en analytique en temps à valeurs $H_0^1(\Omega)$ en tout point $(t, x = O, \tau_0)$; $t \in [t_1 - \varepsilon_1/2, t_1]$. Par compacité, il existe donc $\eta > 0$, $g \equiv 1$ sur $B(O,\eta)$ et $\varphi \equiv 1$ sur $[t_1 - \varepsilon_1/3, t_1 - \varepsilon_1/4]$ tels qu'on a l'estimation (2.3) pour la fonction v. On dira qu'alors v est sur $[t_1 - \varepsilon_1/3, t_1 - \varepsilon_1/4]$ microlocalement en τ_0 de classe H^{s-1} à valeurs H^1_0 sur $\Omega \cap B(O,\eta)$ et on notera

$$v \in H^{s-1}_{\tau_0}\left([t_1 - \varepsilon_1/3, t_1 - \varepsilon_1/4];\ H^1_0\left(\Omega \cap B\left(O,\eta\right)\right)\right).$$

On note

$$T = \sup\{T > t_1 - \varepsilon_1/3\ ;\ v \in H^{s}_{\tau_0}\left([t_1 - \varepsilon_1/3, T];\ H^1_0\left(\Omega \cap B\left(O,\eta\right)\right)\right).$$

On supposera que la constante η est inférieure à la constante ε du lemme 2.15. D'après ce qui précède, $T \geq t_1 - \varepsilon_1/4$. On veut montrer que $T > 0$. On va en fait montrer que $T \geq \varepsilon$. Si ce résultat n'était pas vrai, alors $v \notin H^s_{\tau_0}\left(\mathbf{R}_t; H^1_0\left(\Omega \cap B\left(O,\eta\right)\right)\right)$ au voisinage de $t = T$ ce qui donne deux possibilités :

$$\begin{cases} v \notin H^s_{\tau_0}\left(\mathbf{R}_t; H^1_0\left(\Omega \cap B\left(O,\eta\right) \setminus B\left(O,\varepsilon\right)\right)\right) \text{ au voisinage de } t = T, \\ v \notin H^s_{\tau_0}\left(\mathbf{R}_t; H^1_0\left(\Omega \cap B\left(O,\varepsilon\right)\right)\right) \text{ au voisinage de } t = T. \end{cases}$$

Le deuxième cas est impossible d'après la définition de T et le lemme 2.16. Dans le premier cas, il existe nécessairement $\rho_0 = (x_0 \neq O, T, \xi_0\tau_0) \in \Sigma_b \cap WF^s_b(v)$. D'après les résultats usuels de propagation des singularités en dehors des coins, on peut propager cette singularité vers le passé tant qu'on ne rencontre ni le coin O ni le front d'onde WF^{s-1}_b du second membre de (2.20). D'après la définition de T, le rayon ainsi construit ne contient pas de point dans $B(O,\eta)$ pour $T - t > 0$ assez petit, il sort donc de $B(O,\eta)$ tout de suite, et on peut le prolonger sur un intervalle de temps fixe, qu'on peut supposer supérieur à $-\alpha$ sans qu'il rencontre à nouveau un coin. Nécessairement, ce rayon a rencontre le front d'onde H^{s-1} de la distribution $\Psi''(s)\chi(x)u(x,s) + 2\Psi'(s)\chi(x)\partial_t u(s,x)$, donc le front d'onde H^s de u d'après les résultats de propagation des singularités H^s avec second membre dans les ouverts réguliers appliqués à v. En appliquant à nouveau les résultats de propagation des singularités à la fonction u, on obtient que ce rayon est, tant qu'il ne rencontre pas à nouveau un coin, inclus dans $WF^s_b(u)$. Nous avons donc construit un rayon, $\gamma : [-a_0, 0]$ inclus dans F et tel que $x(\gamma(0)) \in B(O,\eta)$ et $t(\gamma(0)) = T \in B(0,\varepsilon)$ (puisque $-\varepsilon < t_1 < T < \varepsilon$). Cette dernière propriété contredit le lemme 2.15.

Nous avons donc démontré le résultat suivant :

Proposition 2.20. — *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \overline{\Omega} \cap B(O,C)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\chi \in C^\infty_0(\mathbf{R}^2)$ égale à 1 sur $B(x,\varepsilon/2)$ et à support dans $B(0,\varepsilon)$, la solution du système (2.20) est au voisinage de $t = 0, x = O$ microlocalement en τ_0 de classe H^{s-1} à valeurs H^{1_0}.*

On recouvre maintenent $\overline{B}(O, 2C/3)$ par un nombre fini de boules de type $B(x,\varepsilon)$ et par compacité, on obtient qu'il existe $\chi \in C^\infty_0(\mathbf{R}^2)$ égale à 1 au voisinage de $B(O, 2C/3)$ et telle que la solution du système (2.20) est au voisinage de $t = 0, x = O$ microlocalement en τ_0 de classe H^{s-1} à valeurs H^1_0. Enfin, comme la solution de (2.20) associée à $1 - \chi$ est, par vitesse finie de propagation du support pour les solutions de l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet, égale à 0 au voisinage de $(x = O, t = 0)$, nous avons démontré la proposition 2.14 dans le cas sobolev.

La démonstration de la proposition 2.14 dans le cas Gevrey se fait de la même manière en utilisant la caractérisation du front d'onde Gevrey donnée par le corollaire 2.9, la relation (2.18), en prenant dans (2.20) Ψ et χ de classe Gevrey σ et en dérivant l'équation (2.20) par rapport au temps.

III. La résolvante à l'extérieur d'un obstacle à coin

Dans cette partie, nous allons étudier la résolvante dans le cas où l'ouvert Ω est le complémentaire d'un seul obstacle, non captif et comportant éventuellement des coins.

3.1 Hypothèse, résultat

On considère un obstacle Θ à frontière analytique, sauf éventuellement près d'un nombre fini de points au voisinage desquels, l'ouvert $\Omega = \Theta^c$ coïncide avec un ouvert Ω^i ou Ω^e de la forme (2.1). On suppose également que l'obstacle Θ est non captif, c'est à dire que si $\Theta \subset B(O,R)$ alors il existe $T > 0$ tel que tout rayon C^∞ issu d'un point $x \in \Omega \cap B(O,R)$ en sort après un parcours de longueur au plus égale à T. Soient $R_1 > R > 0$ tels que $\Theta \subset B(0,R)$.

L'objet de cette partie est la démonstration du résultat suivant :

Théorème 3. — *Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ telle que $\chi \equiv 1$ au voisinage de $B(0,R)$ et $\chi \equiv 0$ au voisinage de $B(0,R_1)^c$. Il existe $A, B > 0$ tels que l'opérateur $\chi R \chi(\lambda)$, défini pour $Im\lambda < 0$ possède un prolongement analytique dans l'ensemble*

$$U_{A,B} = \{\lambda;\ Im\lambda \leq A|\lambda|^{1/3} - B\}, \tag{3.1}$$

comme opérateur borné de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, et y vérifie l'estimation

$$\exists C, D > 0;\ \|\chi R \chi\|_{\mathcal{L}\left(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega)\right)} \leq C e^{D Im\lambda^+},$$

où $Im\lambda^+ = \max(Im\lambda, 0)$.

La démonstration de ce résultat dans le cas où l'ouvert considéré est à frontière analytique est classique. Dans la suite, on notera R_i les résolvantes obtenues pour $\Omega = \Theta_i^c$, $i = 1;2$. Les obstacles Θ_i sont séparément non captifs (puisque convexes) et on pourra donc appliquer ce résultat à R_1 et R_2.

La démonstration du théorème 3 utilise deux ingrédients:

- Une stratégie de G.Popov [25], qui permet de réduire le problème à l'obtention de résultats de propagation de type Gevrey 3 en temps à valeur H^1 en espace, pour la solution de l'équation des ondes dans l'ouvert Ω
- Les résultats de propagation des singularités démontrés au chapitre 2

3.2 La résolvante et la propagation des singularités

On note $U_0(t)$ le propagateur du problème suivant:

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2 - \Delta\right) U_0(t) f = 0, \text{ dans } \mathbf{R}_x^2 \times \mathbf{R}_t, \\ U_0(t) f \mid_{t=0} = 0, \\ \partial_t U_0(t) f \mid_{t=0} = f \in C_0^\infty(\Omega), \end{cases}$$

qu'on étend comme opérateur de $L^2(\mathbf{R}_x^2)$ dans $C^0(\mathbf{R}_t; H_0^1(\mathbf{R}_x^2)) \cap C^1(\mathbf{R}_t; L^2(\Omega))$.

Soit T plus grand que le temps maximum nécessaire à tout rayon C^∞ parcouru à vitesse 1, issu du support de χ, pour en sortir,(On peut choisir $T < 2R_1$, si l'obstacle Θ est convexe). On supposera par la suite $T \geq R_1$.

Soit $\zeta \in G^3(\mathbf{R}^{2+1})$ telle que:

- $\zeta \equiv 1$ dans $\{\mid |x| - t \mid < T\}$,
- $\zeta \equiv 0$ dans $\{\mid |x| - t \mid > T + 1\}$.

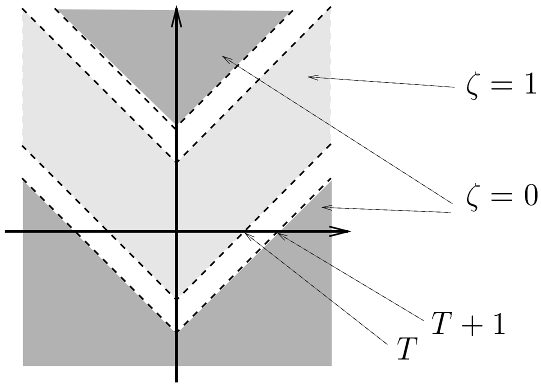

Figure 3.1: Graphe de la fonction ζ

(on choisit la fonction ζ telle que, compte tenu de la vitesse de propagation égale à 1 pour les solutions de l'équation des ondes, une solution, dont les données initiales sont à support dans $B(0, R)$ vit dans la région $\zeta = 1$).

Soient $U_\chi(t) = \chi U_\Omega(t) \chi$ et $E(t) = \zeta U_\Omega(t) \chi$. On note, pour $\text{Im}\lambda < 0$,

$$\chi \widehat{E}(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t} \chi E(t)\, dt.$$

Comme $\chi E(t)$ est à support compact en temps (car $\chi\zeta$ l'est), $\chi \widehat{E}(\lambda)$ admet un prolongement analytique à $\mathbf{C}$, comme fonction à valeur $\mathcal{L}(L^2(\Omega); H_0^1(\Omega))$.

On pose

$$F(t) = \left[\partial_t^2 - \Delta, \zeta\right] U_\Omega(t) \chi. \tag{3.2}$$

L'opérateur $E(t)$ est alors le propagateur du problème:

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2 - \Delta\right) E(t) f = F(t) f, \text{dans } \Omega \times \mathbf{R}_t, \\ E(t) f \mid_{\partial\Omega} = 0, \\ E(t) f \mid_{t=0} = 0, \\ \partial_t E(t) f \mid_{t=0} = \chi f \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Proposition 3.1. — *L'opérateur $F(t)$ est Gevrey 3 en temps à valeurs $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$.*

Nous admettons dans un premier temps ce résultat, nous allons en déduire le théorème 3 en suivant la méthode de G. Popov [25].

On note $F'(t)$ le prolongement par 0 de F comme opérateur $\mathcal{L}(L^2(\Omega)\ ; L^2(\mathbf{R}_x^2))$. Soit $W(t)$ le propagateur du problème

$$\begin{gathered} \left(\partial_t^2 - \Delta\right) W(t) f = F'(t) f \text{ dans } \mathbf{R}_x^2 \times \mathbf{R}_t, \\ W(0) f = \partial_t W(0) f = 0;\ f \in L^2(\Omega), \end{gathered} \tag{3.3}$$

c'est à dire

$$W(t) = \int_0^t U_0(t-s) F'(s)\, ds.$$

Soit $\Psi \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ telle que $\Psi \equiv 0$ au voisinage de $B(0,R)$ et telle que $\chi \equiv 1$ au voisinage du support de $(1-\Psi)$. Soit

$$\begin{aligned} Q(t)(f) &\overset{\text{def}}{=} \left(\partial_t^2 - \Delta\right)[E(t) f - \Psi W(t) f] \\ &= (1-\Psi) F(t) f + [\Delta, \Psi] W(t) f. \end{aligned}$$

On a alors, comme $Q(t) f \mid_{\partial\Omega} = 0$,

$$E(t) f - \Psi W(t) f = U(t) \chi f + \int_0^t U(t-s) \chi Q(s)\, ds f,$$

car $\chi Q(t) = Q(t)$. On en déduit que pour $\mathrm{Im}\lambda < 0$, on a

$$\chi \widehat{E}(\lambda) f = R_\chi(\lambda) f + R_\chi(\lambda) \widehat{Q}(\lambda) f + \Psi \chi \widehat{W}(\lambda). \tag{3.4}$$

On va montrer que $\widehat{Q}(\lambda)$(respectivement $\Psi\chi\widehat{W}(\lambda)$) admet un prolongement analytique à $\mathbf{C} \setminus i\,\mathbf{R}^+$ comme opérateur $L^2(\Omega)$ dans lui même (respectivement comme opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$) et que l'opérateur $Id + \widehat{Q}(\lambda)$ est inversible par une série de Neumann, comme opérateur $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$ dans un ouvert de la forme $U_{A,B}$.

On commence par étudier l'opérateur $W(t)$. Soit $\mathcal{H} \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ telle que $\mathcal{H} \equiv 0$ sur $B(0,T)$ et $\mathcal{H} \equiv 1$ au voisinage de $B(0, T+1)^c$. Soit

$$\begin{aligned} G(t) f &= \left(\partial_t^2 - \Delta\right)[W(t) f - \mathcal{H} E(t) f] \\ &= (1-\mathcal{H}) F'(t) f + [\Delta, \mathcal{H}] E(t) f. \end{aligned} \tag{3.5}$$

L' opérateur $G(t)$ est borné de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\mathbf{R}^2)$; en effet, $E(t)$ est borné de $L^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ et $[\Delta, \mathcal{H}] \equiv 0$ au voisinage de Ω. On a alors

$$W(t) f = \mathcal{H} E(t) f + \int_0^t U_0(t-s) G(s) ds. \tag{3.6}$$

Soient $\chi_2 \in C_0^\infty(B(0,T))$ et $\chi_1 \in C_0^\infty(B(0,T+1))$, égale à 1 sur le support de $1-\mathcal{H}$. Alors

$$\chi_2 W(t) f = \chi_2 \int_0^t U_0(t-s) \chi_1 G(s) f ds, \tag{3.7}$$

en effet, $\chi_2 \mathcal{H} \equiv 0$ et

$$\begin{aligned} \chi_1 G(t) &= \chi_1 (1-\mathcal{H}) F'(t) + \chi_1 [\Delta, \mathcal{H}] E(t) \\ &= (1-\mathcal{H}) F'(t) + [\Delta, \mathcal{H}] E(t) \\ &= G. \end{aligned}$$

Nous allons utiliser le lemme suivant

Lemme 3.2. — *Soit $\chi_2 \in C_0^\infty(B(0,T))$. La fonction:*

$$t \in]2T+3, +\infty[\mapsto \chi_2 U_0(t) \chi_1 \in \mathcal{L}\left(L^2(\boldsymbol{R}^2) ; H_0^1(\boldsymbol{R}^2)\right)$$

admet un prolongement analytique dans $\{t \in \mathbf{C};\ |t| > 2T+3\}$ et pour $j \geq 1$, on a

$$\|D_t^j \chi_2 U_0(t) \chi_1\|_{\mathcal{L}\left(L^2(\boldsymbol{R}^2); H_0^1(\boldsymbol{R}^2)\right)} \leq A j! |t|^{-2}.$$

Le noyau distribution de $U_0(t)$ vaut en effet, sur $\Theta_T = \{(t,x,y) \in \mathbf{C}^5;\ |t| \geq 2T + 3;\ |x| \leq T;\ |y| \leq T+1\}$, $U_0(t,x,y) = C\left(t^2 - |x-y|^2\right)^{-1/2}$, le lemme 3.2 résulte donc des formules de Cauchy appliquées à $\partial_t U_0(x,y,t)$, sur un disque de rayon 1.

Soit $T_2 > 4T+5$. Puisque d'après (3.5), pour $f \in L^2(\Omega)$, le support de $G(t) f$ est inclus dans

$$(\operatorname{supp}(\zeta) \cap \operatorname{supp}(1-\mathcal{H})) \cup (\operatorname{supp}(\mathcal{H}') \cap \operatorname{supp}(\zeta)),$$

qui est inclus dans $\{t;\ |t| \leq 2T+2\}$, on déduit du lemme 3.2 et des relations (3.7) et (3.6) que la fonction

$$t \in [T_2, +\infty[\mapsto \chi_2 W(t) \in \mathcal{L}\left(L^2(\Omega) ; H_0^1(\Omega)\right)$$

admet un prolongement analytique dans $\{t \in \mathbf{C};\ |t| \geq T_2\}$ et vérifie pour tout $j \geq 1$ et tout $t \in \mathbf{C};\ |t| \geq T_2$,

$$\|D_t^j \chi_2 W(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega); H^1(\Omega))} \leq A j! |t|^{-2}. \tag{3.8}$$

On se place maintenant dans un demi-plan $\{\mathrm{Re}\lambda \geq \lambda_0 > 0\}$. Comme sur le support de χ_2, χ est constante, d'après les relations (3.2) et (3.3), on a $\chi_2 W \equiv 0$ pour $|t|$ assez petit, ce qui permet d'intégrer par parties dans l'intégrale définissant $\chi_2 \widehat{W}$.

$$\chi_2 \widehat{W}(\lambda) = i\lambda^{-1} \int_0^{T_2} e^{-i\lambda t} \partial_t \chi_2 W(t) dt + i\lambda^{-1} \int_{T_2}^{+\infty} e^{-i\lambda t} \partial_t \chi_2 W(t) dt,$$

pour $\mathrm{Im}\lambda < 0$. D'après (3.8), on peut déformer le contour d'intégration $T_2+t;\ t \in \mathbf{R}^+$, sur $T_2 + it;\ t \in \mathbf{R}^+$, dans la deuxième intégrale, ce qui donne

$$\chi_2\widehat{W}\,(\lambda) = i\lambda^{-1}\int_0^{T_2} e^{-i\lambda t}\partial_t\chi_2 W\,(t)\,dt + i\lambda^{-1}e^{-i\lambda T_2}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\partial_t\chi_2 W\,(T_2+it)\,dt,$$

ce qui montre que $\chi_2\widehat{W}\,(\lambda)$ admet un prolongement analytique comme opérateur de l'espace $L^2\,(\Omega)$ dans $H_0^1\,(\Omega)$, à l'ensemble

$$A_{\lambda_0}^+ = \{\lambda \in \mathbf{C};\ \mathrm{Re}\lambda \geq \lambda_0 > 0\} \cup \{\lambda \in \mathbf{C};\ \mathrm{Im}\lambda < 0\}.$$

On a de plus, pour tout $j \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}\chi_2\widehat{W}\,(\lambda) = (-i\lambda)^{-j-1}&\int_0^{T_2} e^{-i\lambda t}\partial_t^{j+1}\chi_2 W\,(t)\,dt\\ &+ (-i\lambda)^{-j-1}\,e^{-i\lambda T_2}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\partial_t^{j+1}\chi_2 W\,(T_2+it)\,dt,\end{aligned}$$

pour $j = [\lambda/C]$, on obtient, avec $B = T$ si $\mathrm{Im}\lambda \leq 0$ et $B = T_2$ si $\mathrm{Im}\lambda > 0$, d'après (3.8)

$$\begin{aligned}\|\chi_2\widehat{W}\,(\lambda)\,\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega);H^1(\mathbf{R}_x^2))} &\leq |\lambda|^{-[\lambda/C]-1}A\,([\lambda/C]!)\,e^{B\mathrm{Im}\lambda}\\ &\leq Ce^{-\frac{\lambda}{C}+B\mathrm{Im}\lambda},\end{aligned}\tag{3.9}$$

pour $\mathrm{Re}\lambda \geq \lambda_0 > 0$. On a un résultat similaire pour $\mathrm{Re}\lambda \leq -\lambda_0$.

On étudie maintenant

$$Q\,(t) = (1-\Psi)\,F\,(t) + [\Delta,\Psi]W\,(t)\,.\tag{3.10}$$

Etudions d'abord la contribution de $(1-\Psi)\,F$. Le support en temps de $(1-\Psi)\,F\,(t)$ est inclus dans $\{|t| \leq T+1+R_1\}$. Par ailleurs, $(1-\Psi)\,F$ est nul pour t assez proche de 0. En effet, au voisinage de 0, on a $\zeta \equiv 1$ sur $\{|x| < T-\varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ qui contient le support de $(1-\Psi)$, $(1-\Psi)\,F\,(t)$ est donc d'après (3.2) nul au voisinage de 0. Nous allons intégrer par parties dans la relation :

$$(1-\Psi)\,\widehat{F}\,(\lambda) = \int_0^{T+1+R_1} e^{-i\lambda t}\,(1-\Psi)\,F\,(t)\,dt.$$

On a donc

$$(1-\Psi)\,\widehat{F}\,(\lambda) = \left(\frac{i}{\lambda}\right)^n\int_0^{T+1+R_1} e^{-i\lambda t}\,(1-\Psi)\,\partial_t^n F\,(t)\,dt,$$

donc

$$\begin{aligned}\|\,(1-\Psi)\,\widehat{F}\,(\lambda)\,\|_{L^2} &\leq \frac{1}{|\lambda|^n}\int_0^{T+1+R_1} e^{t\mathrm{Im}\lambda^+}\|\,(1-\Psi)\,\partial_t^n F\,(t)\,\|_{L^2}dt\\ &\leq \frac{1}{|\lambda|^n}\int_0^{T+1+R_1} e^{t\mathrm{Im}\lambda^+}C^{n+1}\,(3n)^{3n}\,dt\\ &\leq Ae^{B\mathrm{Im}\lambda^+-\varepsilon|\lambda|^{1/3}},\end{aligned}\tag{3.11}$$

en choisissant $n = \lambda^{1/3}/C'$ avec C' assez grand.

On étudie ensuite la contribution du terme $[\Delta, \Psi] W$ dans (3.10). On peut choisir $\chi_2 \equiv 1$ sur le support de $\nabla_x \Psi \subset B(0,R)^c \cap B(0,R_1)$. On a alors,

$$[\Delta, \Psi] W(t) = \chi_2 [\Delta, \Psi] W(t),$$

ce qui implique d'après (3.9) que l'opérateur $\widehat{[\Delta, \Psi] W}(\lambda)$ admet un prolongement analytique dans $\mathbf{C} \setminus i\, \mathbf{R}^+$ (comme opérateur de $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$ dans lui même et pour tout $\lambda_0 > 0$, il existe des constantes $A, B, \varepsilon > 0$ telles que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}; \mathrm{Im}\lambda < 0$ ou $\mathrm{Re}\lambda > \lambda_0$, on a l'estimation :

$$\| \widehat{[\Delta, \Psi] W}(\lambda) \|_{L^2(\Omega)} \leq A e^{B \mathrm{Im}\lambda^+ - \varepsilon|\lambda|}.$$

En résumé, nous avons montré que l'opérateur $\widehat{Q}$ admet un prolongement analytique dans $\mathbf{C} \setminus i\, \mathbf{R}^+$ comme opérateur de $L^2(\Omega)$ dans lui même et pour tout $\lambda_0 > 0$, il existe des constantes $A, B, \varepsilon > 0$ telles que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}; \mathrm{Im}\lambda < 0$ ou $\mathrm{Re}\lambda > \lambda_0$, on a l'estimation :

$$\|\widehat{Q}(\lambda)\|_{L^2(\Omega)} \leq A e^{B \mathrm{Im}\lambda^+ - \varepsilon|\lambda|^{1/3}}. \tag{3.12}$$

Il est clair, que, si B' est assez grand, l'opérateur $\widehat{Q}$ est de norme plus petite que $1/2$ pour tout $\lambda \in U_{\varepsilon/B, B'}$ et l'opérateur $Id + \widehat{Q}$ y est inversible par une série de Neumann, donc, d'après (3.4), l'opérateur $R_\chi(\lambda)$ y est analytique et y vérifie

$$R_\chi(\lambda) f = \left(Id + \widehat{Q}\right)^{-1} \left(\chi \widehat{E}(\lambda) + \Psi \chi \widehat{W}(\lambda)\right) f,$$

donc, comme on peut également choisir $\chi_2 \equiv 1$ sur le support de $\Psi\chi$, on a, pour tout $\lambda \in U_{\varepsilon/B, B'}$,

$$\|R_\chi(\lambda)\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), H^1(\Omega))} \leq A e^{B \mathrm{Im}\lambda^+},$$

ce qui termine la démonstration du théorème 3.

3.3 Démonstration de la proposition 3.1

On a

$$\begin{cases} F(t) = \left[\partial_t^2 - \Delta_x, \zeta\right] U(t)\chi \\ \qquad = \left(\left(\partial_t^2 - \Delta_x\right)\zeta + \left(2\partial_t\zeta\partial_t - 2\nabla\zeta\nabla\right)\right) U(t)\chi. \end{cases} \tag{3.13}$$

On rappelle les propriétés vérifiées par les troncatures ζ et χ : on a $\Theta \subset\subset B(0,R)$, $T = 2R_1 > R_1 > R$ et

$$\begin{cases} \chi = 1 \quad \mathrm{sur} B(0,R), \\ \chi = 0 \quad \mathrm{sur} B(0,R_1)^c, \\ \zeta \in G^3\left(\mathbf{R}^{2+1}\right), \\ \zeta = 1 \quad \mathrm{sur} \{||x| - t| < T\}, \\ \zeta = 0 \quad \mathrm{sur} \{||x| - t| > T + 1\}. \end{cases}$$

Lemme 3.3. — *Pour tout $u \in L^2(\Omega)$, la distribution $F(t)(u)$ appartient à l'espace des fonctions de classe Gevrey 3 en temps à valeurs $L^2(\Omega)$.*

Par vitesse finie de propagation du support pour l'équation des ondes, et d'après la relation (3.13), la fonction $F(t)(u)$ est à support compact en $x \in \overline{\Omega}$. Il suffit donc pour démontrer ce lemme de démontrer que $SS_b^3(F(t)(u)) = \emptyset$. Soit donc $\rho_0 \in SS_b^3(F(t)(u))$. On a donc nécessairement $\rho_0 \in SS_b^3(v) \cap \{T < ||x| - t| < T + 1$ où $v = U(t)\chi u$. Puisque ζ est égale à 1 au voisinage de $\{t = 0\} \times \mathrm{supp}(\chi)\}$, et comme en dehors de $t = 0$, d'après le résultat de régularité elliptique (2.10), le front d'onde $SS_b^3(v)$ est inclus dans la variété caractéristique, Σ_b, on a $\rho_0 \in \Sigma_b$. D'après le théorème 3, il existe un rayon, γ, C^∞ issu à $t = 0$ du support de χ contenant le point ρ_0 et inclus dans $SS_b^3(v)$. Or, par hypothèse, tous les rayons issus à $t = 0$ de $B(O, R_1)$ en sont sortis pour $t > T$. Soit $t_1 < t$, l'instant où γ sort de $B(O, R_1)$. Pour $t > t_1$, on a donc, sur γ, $|x| > t - t_1$. Comme on a nécessairement toujours $|x| < R_1 + |t|$, on obtient une contradiction avec les propriétés de γ

Pour conclure, nous suivons un argument de [15] : que nous résumons dans le

Lemme 3.4. — *Soient $I \subset$ **R**, un intervalle compact et H_1, H_2 deux espaces de Banach. Soit $T(t)$ une famille uniformément continue par rapport à t d'opérateurs continus de H_1 dans H_2. On suppose que pour tout $u_1 \in H_1$, la fonction $T(t)(u_1)$ est de classe Gevrey σ sur I à valeurs dans H_2. Alors la famille d'opérateurs T est de classe Gevrey σ à valeurs opérateurs continus de $\mathcal{L}(H_1, H_2)$.*

On note

$$G_N = \{u \in G^\sigma(I; H_2)\, ; \sup_{\substack{t\in I\\ l\in \mathbf{N}}} \frac{\|\partial_t^l(u)\|_{H_2}}{(3l)!N^{l+1}} < +\infty\}$$

et

$$A_N = \{u_1 \in H_1; T(t)\, u_1 \in G_N\}.$$

D'après l'hypothèse et comme I est compact, $H_1 = \cup_{N\in \mathbf{N}} A_N$. On a donc également $H_1 = \cup_{N\in \mathbf{N}} \overline{A_N}$, il existe donc N_1 tel que $\overline{A_{N_1}}$ est d'intérieur non vide et comme les A_N sont des espaces vectoriels, on a alors $\overline{A_{N_1}} = H_1$. Enfin, pour $N < M$, on a $A_N \subset A_M$. On a donc aussi $H_1 = \cup_{N \geq N_1} A_N$; il existe donc $N_0 \in$ **N** tel que A_{N_0} est dense dans H_1 et de seconde catégorie. L'espace G_N muni de sa norme naturelle est un espace de Banach et l'application

$$u \in A_{N_0} \mapsto T(t)\, u \in G_{N_0},$$

définie sur un espace de seconde catégorie a son graphe fermé, elle est donc continue : il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in A_{N_0}$, on a

$$\|F(t)\, u\|_{G_{N_0}} \leq C\|u\|_{H_1}.$$

L'application naturelle de A_{N_0} dans G_{N_0} se prolonge donc par continuité à H_1 et comme ce prolongement coïncide nécessairement avec F, le lemme est démontré.

3.4 Solutions sortantes et singularités

Nous terminons cette partie par la proposition suivante qui justifie la terminologie "sortante":

Proposition 3.5. — *Soit $f(\lambda) \in L^2(\Omega)$, une famille de fonctions dépendant de $\lambda \in \boldsymbol{R}^+$ comme d'un paramètre et telles qu'il existe $C, N > 0$ tels que pour tout $\lambda \in \boldsymbol{R}^+$,*

$$\|f(\lambda)\|_{L^2(\Omega)} \leq C|\lambda|^N.$$

Soient $H \in G_0^3(\boldsymbol{R}^2)$ et $x_0 \in \Omega$. On notera G le flot bicaractéristique généralisé de l'équation des ondes sur Ω paramétré, à vitesse égale à 1, dans le sens des t croissants. Au voisinage d'un point intérieur, pour $|s|$ assez petit et pour (t, τ, x, ξ) tel que $\tau^2 = |\xi|^2 \neq 0$, on a

$$G(s, (t, \tau, x, \rho)) = \left(t + s, \tau, x - s\frac{\xi}{\tau}, \xi\right).$$

Soit $\xi_0 \in T_{x_0}^* \boldsymbol{R}_x^2$. On suppose que la projection spaciale du demi rayon C^∞ issu du point $(x_0, t = 0, \tau = 1, \xi_0)$ vers $t < 0$, donné par $\{G(s, (t = 0, \tau = 1, x_0, \xi_0))\,;\ s \leq 0\}$ ne rencontre pas un voisinage du support de H. Alors $(x_0, \xi_0) \notin \mathcal{SS}_b^3(R(\lambda)(Hf))$. (Ce résultat dit que les singularités gevrey 3 de $R(\lambda)(Hf)$ sont incluses dans la réunion des demi-rayons issus, vers $t \geq 0$ du support de f). (On rappelle que la définition de l'ensemble de fréquence semi-classique est donnée à l'annexe B). Plus précisement, sous les hypothèses précédentes, il existe $\psi \in G_0^3(\boldsymbol{R}^2)$ égale à 1 au voisinage de x_0, $C > 0$, V un voisinage de $z_0 = x_0 - i\xi_0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, tout $z \in V$ et tout $\lambda \in \boldsymbol{R}^+$, on a

$$|T(\psi R(\lambda)(Hf))(z, \lambda)| \leq Ce^{\frac{\lambda}{2}(Rez)^2 - \varepsilon|\lambda|^{1/3}} \|u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.14}$$

Soit $0 \leq \chi \leq 1 \in G_0^3$ égale à 1 au voisinage de Θ, de x_1 et du support de H. D'après (3.4), (3.9) et (3.12), on a l'équivalence suivante, pour tout $\sigma \geq 3$:

$$\begin{aligned} \rho_0 \in \mathcal{SS}^\sigma(R(\lambda)(Hf)) &\iff \rho_0 \in \mathcal{SS}^\sigma(R_\chi(\lambda)(Hf)) \\ &\iff \rho_0 \in \mathcal{SS}^\sigma\left(\chi\widehat{E}(\lambda)Hf\right). \end{aligned}$$

On rappelle que

$$\chi\widehat{E}(\lambda)Hf = \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t}\chi\zeta U(t)\chi Hf.$$

On choisira $0 \leq \psi \leq 1 \in G_0^3(\mathbf{R}^2)$ égale à 1 au voisinage de x_0 et telle que $\psi\chi = \psi$. On s'intéresse à

$$T\left(\psi\chi\widehat{E}(\lambda)f\right) = \int e^{\lambda\left(x\cdot z - x^2/2\right)} \int_{t\in K} e^{-i\lambda t}\chi_1\zeta U(t)Hfdtdx \tag{3.15}$$

et dans cette expression, on intègre sur un compact K de $\mathbf{R}^{*+}$ car $\chi\zeta$ est à support compact en temps et par vitesse finie de propagation, $U(t)Hf$ est nulle au voisinage de x_0 si $t > 0$ est assez petit. Soit $\varphi \in G_0^3(\mathbf{R}_t)$ égale à 1 au voisinage de ce compact K.

On fixe une fonction $f \in L^2(\Omega)$. On a, d'après le théorème 3,

Lemme 3.6. — *Pour tout $t_0 \in \boldsymbol{R}^+$, le point $\left(t_0, x_0, \tau_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \eta_0 = \frac{\xi_0}{\sqrt{2}}\right)$ n'appartient pas au front d'onde Gevrey 3 de la fonction $U(t)(Hf)$*

Il existe donc, pour tout $t_0 \geq 0$ des fonctions $\varphi_{t_0} \in G_0^3(\mathbf{R}_t)$ et $\psi_{t_0} \in G_0^3(\mathbf{R}_x^2)$ égales à 1 au voisinage de t_0 et x_0 respectivement et il existe un voisinage V_{t_0} de $(t_0, x_0) - i(\tau_0, \eta_0)$ dans $\mathbf{C}^3$ et des constantes $C, \varepsilon > 0$ tels que, pour tout $(s, z) \in V_{t_0}$, on a

$$|T_0 \otimes T(\varphi_{t_0}\psi_{t_0}\chi\zeta U(t)Hf)| \leq Ce^{-\frac{\lambda}{2}\left((\mathrm{Re}s)^2+(\mathrm{Re}z)^2\right)-\varepsilon|\lambda|^{1/3}} \tag{3.16}$$

On peut supposer que V_{t_0} est de la forme $V_{t_0,t} \times V_{t_0,x} - iW_{t_0,\omega}$. Par compacité, on peut choisir un nombre fini de réels $t_i \geq 0$ tels que les ouverts $V_{t_i,t} \cap \{\varphi_{t_i} = 1\}$ recouvrent le support de la fonction φ. On peut également supposer que ni les fonctions ψ_{t_i} ni les ouverts $V_{t_i,x}$ et $W_{t_i,\omega}$ ne dépendent de l'indice i. On les notera ψ, V_x et W_ω respectivement. On peut également supposer que $\psi\chi = \psi$ On choisit alors des fonctions φ_i à support dans les ensembles $V_{t_i,t} \cap \{\varphi_{t_i} = 1\}$ et telles que $\varphi(t) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(t)$. D'après la version multidimensionnelle du lemme 2.7 (voir par exemple [5], Théorème 1.6), on a

$$\begin{aligned}\varphi_i(t)\psi\chi\zeta U(t)(Hf)\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mu=0}^{+\infty}\varphi_i(t)e^{-\frac{\mu}{2}}\mu d\mu\int_{\omega\in S^2}\left(1-\frac{\omega\cdot\nabla_{t,x}}{i\mu}\right)&\\ \left(e^{-\frac{\mu}{2}((t,x)-i\omega)^2}T_0\otimes T(\varphi_{t_i}\psi\zeta U(t)Hf)((t,x)-i\omega,\mu)\right)d\omega&,\end{aligned}$$

puisque $\varphi_i(t) \times \varphi_{t_i}(t) = \varphi_i(t)$.

On écrit cette dernière intégrale comme somme de deux termes :

$$\begin{aligned}\int_{\mu=0}^{+\infty}\int_{\omega\in S^2} &= \int_{\mu=0}^{+\infty}\int_{\omega\in S^2\cap W'_\omega}+\int_{\omega\in S^2\setminus W'_\omega}\\ &= I_{i,1}+I_{i,2},\end{aligned}$$

avec $W'_\omega \subset\subset W_\omega$.

On s'intéresse d'abord à la contribution de $I_{i,1}$ à la relation (3.15) et pour cela dans l'expression définissant $T\left(\psi\int_{t\in K}e^{-i\lambda t}I_{i,1}\right)$, on intégre par parties par rapport à t n fois. L'estimation (3.16) vraie sur un voisinage complexe de $\mathrm{supp}(\varphi_i) \times \mathrm{supp}(\psi) - iW'_\omega$ et les formules de Cauchy sur un polydisque centré en $(t,x) - i\omega$ de rayon $\frac{C}{\mu}$ si $\mu > 1$ et C si $\mu < 1$ montrent qu'on a les estimations, pour tout $(t,x) \in \mathrm{supp}(\varphi_i) \times \psi$ et tout $\omega \in W'_\omega$:

$$\begin{aligned}\left|\partial_t^n\left(1-\frac{\omega\cdot\nabla_{t,x}}{i\mu}\right)\left(e^{-\frac{\mu}{2}((t,x)-i\omega)^2}T_0\otimes T(\varphi_{t_i}\psi\zeta U(t)Hf)((t,x)-i\omega,\mu)\right)\right|&\\ \leq AB^n n! e^{-\varepsilon|\mu|^{1/3}}(1+|\mu|)^n&.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que la fonction φ_i est de classe Gevrey 3 et que

$$\int_1^{+\infty}\mu^k e^{-|\mu|^{1/3}} \leq AB^k(3k)!,$$

on majore facilement $\left|T\left(\Psi\int_{t\in K}e^{-i\lambda t}I_{i,1}\right)\right|$ par $\frac{AB^n(3n)!}{\lambda^n}$. Le choix de $n=\left[\frac{\lambda^{1/3}}{C}\right]$ avec C assez grand donne

$$\left|T\left(\psi\int_{t\in K}e^{-i\lambda t}I_{i,1}\right)\right|\leq Ce^{-|\lambda|^{1/3}}.$$

Il reste à étudier la contribution de $I_{i,2}$. Soit $\psi'\in G_0^3(\mathbf{R}^2)$, ψ' égale à 1 au voisinage de x_0, et telle que $\psi'\psi=\psi$. On a

$$\begin{aligned}T&\left(\psi\int e^{-i\lambda t}I_{i,2}dt\right)(z,\lambda)\\&=\int\psi(x)\,dxe^{\lambda\left(x.z-\frac{x^2}{2}\right)}\varphi_i(t)\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mu=0}^{+\infty}\mu d\mu\int_{\omega\in S^2\setminus W'_\omega}\left(1-\frac{\omega\cdot\nabla_{t,x}}{i\mu}\right)\\&\qquad\left(e^{-\frac{\mu}{2}((t,x)-i\omega)^2}T_0\otimes T\left(\varphi_{t_i}\psi\zeta U(t)\,Hf\right)((t,x)-i\omega,\mu)\right)d\omega\\&=\int_{\substack{x,y\in\mathbf{R}_x^2\\ s,t\in\mathbf{R}_t\\ \omega\in S^2\setminus W'_\omega}}e^{\phi(x,z,t,s,y,\omega,\lambda,\mu)}\varphi_{t_i}(s)\,\psi(y)\,\zeta(s,y)\,U(s)\,(Hf)\,dxdtdsdyd\omega,\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\phi(x,z,t,s,y,\omega,\lambda,\mu)&=\lambda\left(x\cdot z-\frac{x^2}{2}\right)\\&+\mu\left((t-i\omega_t)\cdot s-\frac{s^2}{2}-\frac{t^2}{2}-\frac{x^2}{2}+(x-i\omega_x)\cdot y-\frac{y^2}{2}+i\left(t\omega_t+x\cdot\omega_x\right)\right).\end{aligned}$$

On va intégrer par parties avec l'opérateur :

$$\frac{\left(\lambda\left(\overline{z}-x\right)+\mu\left(y-x-i\omega_x\right)\right)\cdot\nabla_x+\left(-\mu t+i\lambda-i\mu\omega_t\right)\partial_t}{\left|(z-x)+\mu\left(i\omega_x-x+y\right)\right|^2+\left|-i\lambda-\mu t+i\mu\omega_t\right|^2},$$

en remarquant que, si z est assez proche de $z_0=x_0-i\xi_0$, on a pour tout

$$(x,y,t,s,\omega)\in\operatorname{supp}(\psi')\times\operatorname{supp}(\psi)\times\operatorname{supp}(\varphi_i)\times\operatorname{supp}(\varphi_{t_i})\times S^2\setminus W'_\omega,$$

$$\left|(z-x)+\mu\left(i\omega_x-x+y\right)\right|^2+\left|-i\lambda-\mu t+i\mu\omega_t\right|^2\geq C\left(\lambda^2+\mu^2\right).$$

En effet, l'annulation de ce terme implique les égalités :

$$-\lambda\xi_0+\mu\omega_x=0,\qquad-\lambda+\mu\omega_t=0.$$

Comme on a $\lambda,\mu\geq 0$, $|\xi_0|=1$, on a nécessairement $\mu^2=2\lambda^2$, $\omega_t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\omega_x=\eta_0=\frac{\xi_0}{\sqrt{2}}$.

En intégrant n fois par parties avec l'opérateur L qui vérifie $L\left(e^{\phi}\right)=e^{\phi}$, et utilisant le fait que toutes nos troncatures sont de classe Gevrey 3, on obtient la majoration

$$\left|T\left(\psi\int e^{-i\lambda t}I_i,2dt\right)(z,\lambda)\right|\leq Ce^{\frac{\lambda}{2}(\mathrm{Re}z)^2-\varepsilon|\lambda|^{1/3}},$$

pour tout z dans un voisinage V de z_0. Compte tenu de ce que la construction de ϕ et de V est purement géométrique, nous avons donc montré le lemme :
Lemme 3.7. — *Il existe $\psi \in G_0^3(\boldsymbol{R}^2)$ et un voisinage V de z_0 tel que, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe $C, \varepsilon > 0$ tels qu'on a*

$$\left|T\left(\psi R\left(Hf\right)\right)(z,\lambda)\right| \leq Ce^{\frac{\lambda}{2}(Rez)^2-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}.$$

Il reste, pour pouvoir conclure, à s'affranchir de la dépendance de C et ε par rapport à f. On utilise pour cele le théorème du graphe fermé.
Lemme 3.8. — *Soient $H_{1,2}$ deux espaces de Banach, $\Lambda \subset \boldsymbol{C}$ et Q une famille bornée d'opérateurs linéaires de H_1 dans H_2 dépendant de λ comme d'un paramètre. On suppose que pour tout $f \in H_1$ il existe $C, \varepsilon > 0$ tels que*

$$\|Q(f)\|_{H_2} \leq Ce^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}$$

alors il existe $C, \varepsilon > 0$ tels que

$$\|Q\|_{\mathcal{L}(H_1\ ;H_2)} \leq Ce^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}.$$

On notera, pour $\varepsilon > 0$

$$A_\varepsilon = \left\{f \in H_1; \sup_{\lambda\in\Lambda} \|Q(f)\|_{H_2} e^{\varepsilon|\lambda|^{1/3}} < +\infty\right\}.$$

Les espaces A_ε forment des sous espaces vectoriels de H_1 et vérifient $\cup_{n\in\mathbf{N}} A_{1/n} = H_1$. D'après le théorème de Baire appliqué aux espaces $\overline{A}_{1/n}$, il existe n_0 tel que $\overline{A}_{1/n_0} = H_1$, et comme les espaces $A_{1/n}$ sont croissants, ils sont tous denses dans H_1 à partir du rang n_0. Comme $\cup_{N\geq n_0} A_{1/n} = H_1$, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que A_{1/n_1} est de seconde catégorie. L'application

$$\phi : f \in A_{1/n_1} \mapsto Q(f)e^{\frac{|\lambda|^{1/3}}{n_1}} \in L^\infty(\Lambda\ ;H_2)$$

a son graphe fermé puisque l'application

$$f \in H_1 \mapsto Q(f) \in L^\infty(\Lambda\ ;H_2) \tag{3.17}$$

est continue. On en déduit que l'application ϕ est continue de A_{1/n_1} dans $L^\infty(\Lambda\ ;H_2)$ et par densité qu'elle se prolonge de manière unique à tout H_1 et d'après (3.17), ce prolongement est nécessairement donné par

$$f \in H_1 \mapsto Q(f)e^{\frac{|\lambda|^{1/3}}{n_1}} \in L^\infty(\Lambda\ ;H_2),$$

ce qui démontre le lemme 3.8.

Pour démontrer l'estimation 3.14, il suffit d'utiliser les lemmes 3.7 et 3.8 avec $H_1 = L^2(\Omega)$, $H_2 = L^\infty(V)$ et $Q(f) = T(\psi R(Hf))\, e^{-\frac{\lambda}{2}(\mathrm{Re} z)^2}$.

IV. Construction des opérateurs

Dans ce chapitre nous construisons les opérateurs de rebond microlocaux qui permettront, via la résolution d'un problème de Grushin, de microlocaliser l'étude des pôles de diffusion au voisinage de la trajectoire captive.

Dans la suite de cet article, on notera si H est un espace de Banach, $\mathcal{A}(H)$, l'espace des fonctions $f(\lambda)$, holomorphes en $\lambda \in \{z \in \mathbf{C} \,; \mathrm{Im} z < 0\}$ à valeurs dans H telles qu'il existe des constantes $A, B, C, D, N > 0$ telles que la fonction f se prolonge en une fonction holomorphe dans l'ouvert $U_{A,B}$ et vérifie, pour tout $\lambda \in U_{A,B}$,

$$\|f(\lambda)\|_H \leq C|\lambda|^N e^{D \mathrm{Im} \lambda^+}.$$

On notera aussi $\mathcal{N}(H)$ le sous espace formé des fonctions $f \in \mathcal{A}(H)$ telles qu'il existe des constantes $A, B, C, \varepsilon > 0$ telles que la fonction f vérifie, pour tout $\lambda \in U_{A,B}$,

$$\|f(\lambda)\|_H \leq C e^{-\varepsilon |\lambda|^{1/3}}.$$

4.1 Opérateurs sur les symboles

On commence par définir les opérateurs de rebond microlocaux en les faisant agir sur des distributions conormales analytiques par rapport au cône issu du coin, ce qui revient à définir des opérateurs sur les symboles correspondants.

Définition 4.1. — *Soient $\alpha, D > 0$. On notera*

$$L_{\alpha,D} = \{\lambda \in \mathbf{C};\ Im\lambda < \alpha|Re\lambda|,\ |\lambda| \geq D\} \cup \{Im\lambda < 0\}.$$

Définition 4.2. — *Soient ω, un voisinage ouvert complexe de A dans $\partial\Theta_1$. On notera $\mathcal{H}_{\alpha,D}(\omega)$, l'espace des symboles analytiques $\sigma(x,\tau,\lambda)$, définis pour $x \in \omega$, $\lambda \in L_{\alpha,D}$, holomorphes en λ et vérifiant:*

$$\sup_{x\in\omega} \sup_{\substack{s\geq 0\\ \lambda > 1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+|\lambda|^2\right) |\sigma(x, \lambda - is)|^2 \, d\lambda < +\infty, \tag{4.1}$$

$$\sup_{x\in\omega} \sup_{\lambda\in L_{\alpha,D}} |\sigma(x,\lambda)| < +\infty. \tag{4.2}$$

On notera $\|\sigma\|_{\mathcal{H}_{\alpha,D}(\omega)}$ la norme définie par (4.1) et (4.2).

On choisit ω un voisinage complexe de A dans $\partial\Omega$ qu'on pourra diminuer un nombre fini de fois, $\varepsilon > 0$ et $D > 0$. Pour $\sigma \in \mathcal{H}_{\alpha,D}(\omega)$, on pose

$$u_0(y,t) = \int e^{i\lambda(t-|y|)}\sigma(y,\lambda)\,d\lambda.$$

D'après un théorème de Paley-Wigner, $u_0 \in H^1(\partial\Omega \times \mathbf{R}_t)$ et son support est inclus dans l'ensemble $\{t \geq 0\}$. On notera $u(t,x)$, la solution du problème d'évolution :

$$\begin{cases} \Box u = 0 \text{ dans } \Theta_1^c \times \mathbf{R}_t, \\ u\,|_{\partial\Theta_1} = u_0, \\ u\,|_{t<0} = 0. \end{cases}$$

Soit φ la solution réelle analytique de l'équation eïkonale définie sur un voisinage V de A dans $\mathbf{C}_x^2$:

$$\begin{aligned} &|\nabla\varphi| = 1 \text{ dans } \Theta_1^c, \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\partial|x|}{\partial n} \text{ sur } \partial\Theta_1, \end{aligned} \tag{4.3}$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ désigne la normale extérieure à l'ouvert Θ_1. Comme Θ_1 est strictement convexe, φ se prolonge à l'ensemble des demi-rayons issus de V, ω, et y vérifie (4.3) (on n'a en effet pas de problème de caustique sur ω). Un calcul classique d'optique géométrique

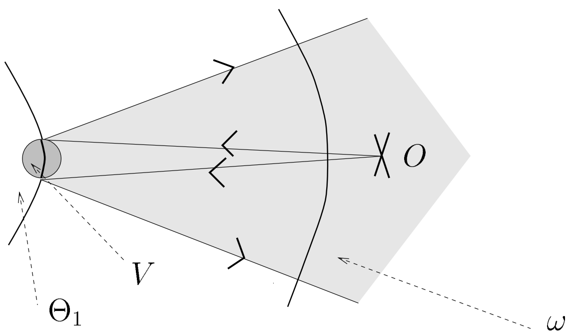

Fig. 4.1 – *Domaine de définition de la phase* φ

analytique montre alors qu'il existe un symbole analytique $\widetilde{\sigma}(x,\lambda)$ défini au voisinage de A, se prolongeant en une fonction holomorphe dans $\text{Im}\lambda < 0$, tel que modulo une fonction analytique, on a au voisinage de A:

$$u(x,t) = \int e^{i\lambda(t-\varphi(x))}\widetilde{\sigma}(x,\lambda)\,d\lambda$$

et

$$\sup_{s\geq 0}\int \left(1+|\lambda|^2\right)|\widetilde{\sigma}(x,\lambda-is)|^2\,d\lambda < +\infty.$$

De plus, $\widetilde{\sigma}$ vérifie l'équation :

$$\begin{cases} i\lambda\Delta\varphi\widetilde{\sigma} + 2i\lambda\nabla\varphi\cdot\nabla\widetilde{\sigma} = \Delta\widetilde{\sigma}, \\ \widetilde{\sigma}\,|_{\partial\Theta_1} = \sigma. \end{cases}$$

On peut donc prendre $\widetilde{\sigma} \sim \sum\limits_{0}^{+\infty} \sigma_i(x,\lambda)\lambda^{-i}$ où les σ_i vérifient les équations de transport :

$$\begin{cases} (\Delta\varphi + 2\nabla\varphi\cdot\nabla)\,\sigma_i = \Delta\sigma_{i-1}, \\ \sigma_i\,|_{\partial\Theta_1} = \delta_{i,0}\sigma. \end{cases}$$

avec la convention $\sigma_{-1} \equiv 0$. Comme ces équations de transport sont des équations différentielles ordinaires le long des rayons, on peut en fait supposer que $\widetilde{\sigma}$ est défini sur ω. On notera T_1 l'opérateur défini par

$$\widetilde{\sigma} = T_1(\sigma)$$

Un calcul simple montre que, pour tout $x \in \omega$ et tout $t > 0$,

$$\sigma_0(x + t\nabla\varphi(x)) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \Delta\varphi(x+s\nabla\varphi(x))ds}\sigma_0(x,\lambda),$$

où $\Delta\varphi(x)$ qui est le Laplacien de la fonction φ au point x est aussi (voir [2], preuve du lemme 4.8), la valeur de la courbure de Gauss de la surface de niveau de φ passant par le point x. D'après [2], relations (3.17) et suivantes, on a, pour tout point $x \in \partial\Theta_1$:

$$\Delta\varphi(x) = \Delta(|x|)(x) + 2\kappa,$$

où κ désigne la courbure de l'obstacle au point x. Enfin, toujours d'après [2], relation (3.20), on a :

$$\Delta\varphi(x + t\nabla\varphi) = \frac{\Delta\varphi(x)}{1 + t\Delta\varphi(x)}.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \sigma_0(O,\lambda) &= \sigma(x,\lambda)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^d \frac{\left(\frac{1}{d}+2\kappa\right)}{1+s\left(\frac{1}{d}+2\kappa\right)}ds\right) \\ &= \sigma(A,\lambda)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^d \frac{\left(\frac{1}{d}+2\kappa\right)}{1+s\left(\frac{1}{d}+2\kappa\right)}ds\right) \\ &= \frac{\sigma(A,\lambda)}{\sqrt{2+2\kappa d}}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

où κ est le rayon de courbure de l'obstacle Θ_1 au point A.

On note

$$U(t,x) = \int e^{i\lambda(t-\varphi(x))}\widetilde{\sigma}(x,\lambda)\,d\lambda.$$

Il est clair que $\varphi(O) = 2d$ et que U est supportée dans l'ensemble d'équation $t \geq \varphi(x)$. Soit O_ε le point sur le segment $[A,O]$ situé à distance ε de O. D'après le théorème 1.1 de [8], il existe un voisinage W de O_ε et $\eta > \varepsilon$ tels que la solution de

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2 - \Delta\right) v = 0 \text{ dans } \Theta_2^c \times \mathbf{R}_t, \\ v\,|_{t<2d} = U(t,x)\,, \quad v\,|_{\partial\Theta_2^c} = 0 \end{cases}$$

s'écrit sur $W \cap \Omega \times [2d, 2d+\eta]$, modulo une fonction analytique :

$$v(t,x) = U(t,x) + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(t-|x|-2d)} \widehat{\sigma}(x,\lambda)\, d\lambda,$$

où $\widehat{\sigma}(x,\lambda)$ est un symbole analytique se prolongeant en une fonction holomorphe dans $\mathrm{Im}\lambda < 0$. De plus, on a

$$\widehat{\sigma}(x,\lambda) = \widehat{\sigma}_0(x,\lambda) + r(x,\lambda),$$

avec

$$\sup_{s\geq 0} \int \left(1+|\lambda|^2\right)^{5/2} |r(x,\lambda)|^2 d\lambda < +\infty$$

et $\widehat{\sigma}_0$ est le terme que donnerait le coin droit :

$$\widehat{\sigma}_0(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda^{1/2}\sqrt{|x|}} \widetilde{\sigma}(O,\lambda) K(\theta),$$

où θ est l'angle que fait la direction donnée par le vecteur x avec la face supérieure du coin.

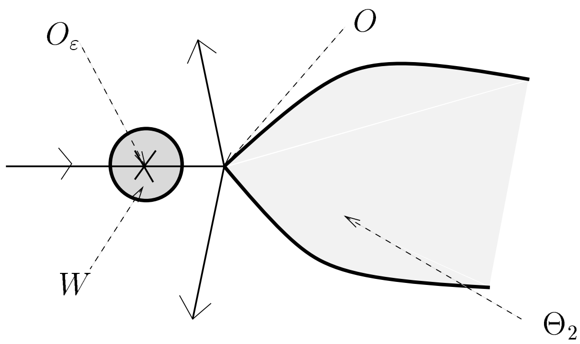

Fig. 4.2 – *Domaine de définition du symbole diffracté*

Soient $C_\varepsilon = \{|x| = \varepsilon\}$ et $\gamma = C_\varepsilon \cap W$. On peut résoudre au voisinage de O_ε les équations de transport:

$$\left(\frac{i}{|x|} + 2\frac{x}{|x|}\cdot \nabla_x\right)\sigma_{i+1} = \Delta\sigma_i,$$
$$\sigma_{i+1}\mid_\gamma = \delta_{i+1,0}\widehat{\sigma}\mid_\gamma$$

et comme ces équations sont des équations différentielles ordinaire le long des rayons issus de γ, on peut en fait les résoudre sur la réunion de ces demi-rayons, Γ. Soit $\widehat{\sigma}'$ un

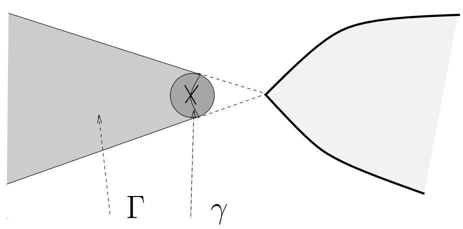

Fig. 4.3 – *Prolongement du domaine de définition du symbole diffracté*

symbole analytique défini sur ω', se prolongeant en une fonction holomorphe dans $\mathrm{Im}\lambda < 0$ et tel que

$$\widehat{\sigma}' \sim \sum_{0}^{+\infty} \sigma_i \lambda^{-i}.$$

On suppose maintenant, ce qui est toujours possible, quitte à le diminuer que $\omega \subset \Gamma$; et on note T l'application qui à σ associe $-\widehat{\sigma}'$.

On considère, sur ω le système de coordonnées donné par l'angle entre le vecteur x dans $\mathbf{R}^2$ et la trajectoire captive, de telle façon que le point A correspond à l'angle $\theta = 0$. On a ainsi une coordonnée holomorphe sur ω, si on a pris ω assez petit. Les calculs explicites de P. Gérard et G. Lebeau [8] montrent qu'on a la proposition:

Proposition 4.3. — *Si l'ouvert ω est assez petit, alors l'opérateur $e^{2i\lambda d}\sqrt{\lambda}T$ envoie, pour α assez petit, D assez grand et $\alpha' < \alpha$, $D' > D$, $\mathcal{H}_{\alpha,D}(\omega)$ dans $\mathcal{H}_{\alpha',D'}(\omega)$ et vérifie, si $C > 0$ est assez grand,*

$$T\left(\sigma\left(\theta,\lambda\right)\right) = \frac{e^{-2i\lambda d}}{\sqrt{\lambda}}\left(\sum_{n\leq|\lambda|/C} \lambda^{-n} \sum_{p\leq 2n} K_{n,p}\left(\theta\right)\frac{1}{p!}\left(\frac{\partial^p \sigma\left(\theta,\lambda\right)}{\partial\theta^p}\,|_{\theta=0}\right) + R\left(\sigma\right)\right), \tag{4.5}$$

où l'opérateur R vérifie

$$|R|_{\mathcal{L}\left(\mathcal{H}_{\alpha,D}(\omega),\mathcal{H}_{\alpha',D'}(\omega)\right)} \leq Ce^{-|\lambda|/C},$$

si C est assez grand et où les fonctions $K_{n,p}\left(\theta\right)$ sont holomorphes par rapport à θ et vérifient

$$\sup_{\theta\in\omega} |K_{n,p}\left(\theta\right)| \leq C^{n+1} n!$$

Remarque 4.4. — *Le terme principal de (4.5) est du point de vue des opérateurs analytiques excellent, si on ne tient pas compte de l'holomorphie, il envoie l'espace $\mathcal{H}_{\alpha,D}$ dans lui même (et mieux encore puisqu'il envoie les germes en $\theta = 0$ de fonctions analytiques sur les symboles analytiques). Neanmoins, le reste R bien que petit en norme n'envoie pas l'espace $\mathcal{H}_{\alpha,D}$ dans lui même et ne vérifie même pas, à priori, les estimations nécessaires pour le faire agir dans une chaîne d'espaces au sens d'Ovsjannikov [21]. Enfin, le fait que l'opérateur n'est pas différentiel en λ n'est pas évident à la lecture de [8] et résulte d'un phénomène de compensation qui fait que deux développements asymptotiques qui, à priori ont peu de liens correspondent aux développements qui seraient donnés par deux transformations de FBI inverses l'une de l'autre et donc se compensent.*

Indiquons brièvement comment, à partir des résultats de [8], on obtient ce résultat. Ces deux auteurs montrent que, si on note f_+ la trace de la dérivée normale de v sur la face supérieure du coin et f_- la trace de la dérivée normale de v sur la face inférieure, et si on identifie ces faces à l'ensemble d'équation $x \geq 0$, si on note

$$F_\pm\left(w,z,\lambda\right) = T_0 \otimes T_1\left(f_\pm\right) = \int_{t=-\infty}^{+\infty}\int_{x=0}^{+\infty} e^{\lambda\left(xz-\frac{x^2}{2}-\frac{(w-t)^2}{2}\right)} f_\pm\left(x,t\right)dxdt,$$

alors il existe une matrice 2×2 d' opérateurs pseudodifférentiels analytiques

$$A = Op\Big(\sum_{0\leq n\leq\lambda/C}(i\lambda)^{-n}\,a_n(\tau,\lambda)\Big)$$

(voir [8], appendice A) opérant sur la variable w à valeurs opérateurs continus dans une chaîne d'espace de Banach que nous ne précisons pas, des fonctions $w_{k,m}$, ne dépendant que de la géométrie du problème, appartenant à ces espaces tels que

$$(F_+,F_-) = \begin{pmatrix} A^{+,+} & A^{-,+} \\ A^{+,-} & A^{--}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_+ \\ L_-\end{pmatrix}(w=t-i\tau,z,\lambda)\,, \tag{4.6}$$

avec

$$L_\pm(w,z) = \int_\Sigma e^{i\lambda\phi(\tau,\tau',t,w)}\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{3/2} \sum_{k\leq\lambda/C}\lambda^{-k}\sum_{|\alpha|\leq\lambda/C}\partial^\alpha_{x'}(\widetilde{\sigma})(x'=O,\lambda\tau')\,w_{k,\alpha}(\tau,\lambda\tau',z)\,dtd\tau d\tau', \tag{4.7}$$

où on a noté $\phi(\tau,\tau',t,w) = \tau(w-t)+i\tau^2+\tau'(t-i\tau)+i\frac{\tau'^2}{2}$ et où le contour Σ est un bon contour pour la phase ϕ.

Comme, d'après la quantification adoptée par ces auteurs, on a

$$Op(A)(f)(w,\lambda) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{t=-\kappa}^{\kappa}\int_{\tau=-1-\kappa}^{-1+\kappa} e^{i\lambda\tau(w-t)-\lambda\frac{\tau^2}{2}}A(\tau,\lambda)\,f(t,\lambda)\,dtd\tau, \tag{4.8}$$

on obtient donc, si on reporte (4.7) et (4.8) dans (4.6), que $F_\pm()$ est de la forme

$$\int_{\Sigma'} e^{i\lambda\left[\phi(\rho,\tau',s,t-i\tau)+\tau(w-t)+i\frac{\tau^2}{2}\right]}A(\tau,\lambda) \sum_{k\leq\lambda/C}\lambda^{-k}\sum_{|\alpha|\leq\lambda/C}\partial^\alpha_{x'}(\widetilde{\sigma})(x'=O,\lambda\tau')\,w_{k,\alpha}(\rho,\lambda\tau',z)\,dsd\rho d\tau' d\tau dt,$$

où Σ' est un bon contour pour la phase $\phi(\rho,\tau',s,t-i\tau)+\tau(w-t)+i\frac{\tau^2}{2}$. Le théorème de la phase stationnaire montre qu'alors, on a

$$F_\pm(w,z) = e^{-\lambda\frac{w^2}{2}}\sum_{n\leq\lambda/C}\lambda^{-n}\left(\partial_\rho+\partial_{\tau'}+\partial_\tau\right)^{2n} \Big(A(\tau,\lambda)\sum_{k\leq\lambda/C}\lambda^{-k}\sum_{|\alpha|\leq\lambda/C}\partial^\alpha_{x'}(\widetilde{\sigma})(x'=O,\lambda\tau')\,w_{k,\alpha}(\rho,\lambda\tau',z)\Big)\,|_{\tau=\tau'=\rho=iw},$$

soit

$$F_\pm(w,z) = e^{-\lambda\frac{w^2}{2}}\sum_{n\leq\lambda/C}\frac{1}{2^n}\lambda^{-n}(i\partial w)^{2n} \Big(A(iw,\lambda)\sum_{k\leq\lambda/C}\lambda^{-k}\sum_{|\alpha|\leq\lambda/C}\partial^\alpha_{x'}(\widetilde{\sigma})(x'=O,i\lambda w')\,w_{k,\alpha}(\rho,i\lambda w,z)\Big). \tag{4.9}$$

Par ailleurs, un calcul classique de phase stationnaire montre que

$$F_{\pm}(w,z,\lambda)=e^{-\lambda\frac{w^2}{2}}\sum_{\substack{n\leq\lambda/C\\ m\leq\lambda/C}}(\lambda)^{-n-m}\frac{\partial_\tau^{2n}}{n!}\frac{\partial_\xi^{2m}}{m!}\widehat{f}(\lambda\tau,\lambda\xi)\,|_{\substack{\tau=iw\\ \xi=iz}},$$

où $\widehat{f}$ désigne la transformée de Fourier de la fonction f. Si on inverse cette relation, on s'aperçoit que les dérivations en w ainsi obtenues compensent exactement celles données par la relation (4.9) ! (ce sont les dérivations que donneraient deux transformations de FBI inverses l'une de l'autre). C'est ce phénomène qui explique que l'opérateur T n'est pas différentiel en λ. Enfin, un calcul classique permet de donner le symbole diffracté, $\widehat{\sigma}$ en fonction de $\widehat{f}$ et les calculs que nous venons d'esquisser donnent le résultat de la proposition 4.3.

Comme par ailleurs, P. Gérard et G. Lebeau montrent que le premier terme du développement asymptotique de l'opérateur qui à $\widetilde{\sigma}$ associe $\widehat{\sigma}$ (celui qui donne le terme $(n=0,p=0)$ est celui que donnerait le coin droit, pour identifier la fonction $K_{0,0}$, il suffit d'utiliser les résultats de Garnir [6], qui calcule explicitement ce terme (pour un coin droit) et de les réinterpréter. On obtient que la fonction de Green incidente, solution sortante dans l'espace libre de l'équation

$$\left(\Delta_x+\lambda^2\right)G(x,y,\lambda)=\delta_{x=y},$$

vaut

$$G(x,y,\lambda)=e^{-i\lambda|x-y|}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda d}}e^{-\frac{i\pi}{4}}+\mathcal{O}\left(\lambda^{-\ni/\in}\right).$$

L'onde diffractée calculée par Garnir vaut, d'après [6], page 219, si θ est la direction entre x et la face supérieure du coin:

$$G_d=e^{-i\lambda(|y|+|x|)}\frac{2\pi}{\lambda\sqrt{|x||y|}}e^{-i\frac{\pi}{2}}\frac{\Psi(\theta,\theta_0)}{2\alpha},$$

avec

$$(4.10)\qquad \left\{\begin{aligned}\Psi(\theta,\theta)&=-\frac{\sin\left(\frac{\pi^2}{\alpha}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi^2}{\alpha}\right)}-\frac{\sin\left(\frac{\pi^2}{\alpha}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi^2}{\alpha}\right)}+\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\alpha}\theta+\frac{\pi^2}{\alpha}\right)}{1-\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\theta+\frac{\pi^2}{\alpha}\right)}-\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\alpha}\theta-\frac{\pi^2}{\alpha}\right)}{1-\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\theta-\frac{\pi^2}{\alpha}\right)}\\&=\frac{2\cos\left(\frac{\pi^2}{2\alpha}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi^2}{2\alpha}\right)\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta+\frac{\pi^2}{2\alpha}\right)\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta-\frac{\pi^2}{2\alpha}\right)}\end{aligned}\right.$$

(on rappelle que le nombre α est l'angle d'ouverture extérieur du coin).

Remarque 4.5. — *L'expression (4.10) définissant le coefficient de diffraction est singulière pour $\theta=\frac{\pi}{2}$ et $\theta=\alpha-\frac{\pi}{2}$ ce qui n'est pas surprenant puisque ces angles correspondent aux directions pour lesquelles l'onde réfléchie sur les demi-faces intervient. et donc pour lesquelles le calcul de P. Gérard et G. Lebeau n'est pas valable (ce sont les points où les surfaces par rapport auxquelles l'onde diffractée est conormale analytique se rencontrent).*

En identifiant les termes, et d'après (4.4), on obtient

$$K_{0,0}(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{d(1+d\kappa)}}\sqrt{\pi}\frac{\Psi(\theta,\theta_0)}{2\alpha}e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

où l'angle Θ_0 est celui entre la direction incidente donnée par y et la face supérieure du coin.

4.2 Opérateurs de rebond

On note $H_1(\lambda)$ la résolvante sortante du problème

$$\begin{cases}(\Delta+\lambda^2)H_1 u = 0,\\ \quad H_1 u\mid_{\partial\Theta_1} = u,\end{cases}$$

qu'on étend de $H^{1/2}(\partial\Theta_i)$ dans $H^1_{loc}(\overline{\Theta}_i^c)$. Il est classique (voir [1]) que cette résolvante, analytique pour $\mathrm{Im}\lambda < 0$ admet un prolongement analytique dans un ouvert de la forme (3.1), comme opérateur borné de $H^{1/2}(\partial\Theta_1)$ dans $H^1_{0,loc}\left(\overline{\Theta_1^c}\right)$ et y vérifie l'estimation suivante:

$$\forall R>0, \exists C>0, \exists D>0, \forall\lambda\in U_{A,B},$$
$$\|H_1\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\partial\Theta_1),H^1(\Theta_1^c\cap B(0,R)))} \leq Ce^{D\mathrm{Im}^+\lambda}.$$

On note $H_2(\lambda)$ la résolvante sortante du problème

$$\begin{cases}(\Delta+\lambda^2)H_2 u = 0,\\ \quad H_2 u\mid_{\partial\Theta_2} = u,\end{cases}$$

qu'on définit par la construction suivante: on commence par résoudre par des méthodes variationelles (voir la section 6.2) le problème

$$\begin{cases}(\Delta-1)v = 0,\\ \quad v\mid_{\partial\Theta_2} = u,\end{cases}$$

puis, on pose, pour $\kappa\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, égale à 1 au voisinage de Θ_2,

$$H_{2,\kappa}u = \kappa v - R_2\left([\Delta,\kappa]\,v + \kappa\left(1+\lambda^2\right)v\right).$$

On vérifie que la définition de $H_{2,\kappa}$ est indépendante du choix de κ. En effet, soient $\kappa^{1;2}$ deux fonctions du type précédent, l'opérateur $H_{2,\kappa^1} - H_{2,\kappa^2}$ vérifie

$$\left(\Delta+\lambda^2\right)\left(H_{2,\kappa^1} - H_{2,\kappa^2}\right)(f) = 0$$

et, pour $\mathrm{Im}\lambda < 0$, $H_{2,\kappa^1} - H_{2,\kappa^2} \in H_0^1(\Theta_2^c)$. La formule de Green montre qu'alors, dans $\mathrm{Im}\lambda < 0$, l'opérateur $H_{2,\kappa^1} - H_{2,\kappa^2}$ est identiquement nul. Un argument de prolongement analytique montre qu'alors, l'opérateur $\chi\left(H_{2,\kappa^1} - H_{\kappa^2}\right)$ est également nul sur l'ouvert $U_{A,B}$ où il est défini (et analytique). On note $H_2 = H_{2,\kappa}$. On note $H(\lambda) = H_2\circ\gamma_2\circ H_1$ (γ_i est l'opérateur deréstriction sur $\partial\Theta_i$), la résolvante sortante du problème suivant:

$$\begin{cases}(\Delta+\lambda^2)Hu = 0, \qquad \text{dans} \quad \Theta_2^c,\\ \quad Hu\mid_{\partial\Theta_2} = H_1 u\mid_{\partial\Theta_2},\end{cases}$$

qu'on peut aussi définir de la manière suivante: soit $\kappa \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ telle que $\kappa \equiv 1$ au voisinage de Θ_2 et $\kappa \equiv 0$ au voisinage de Θ_1, on pose alors

$$H_\kappa(\lambda)u = R_{\Omega_2}(\lambda)([\Delta, \kappa]H^1 u) + \kappa H^1 u. \tag{4.11}$$

On a alors la proposition suivante:

Lemme 4.6. *L'opérateur $\chi H_\kappa(\lambda)$, défini de $H^1(\partial\Theta_1)$ dans $H^1(\Theta_1^c)$ pour $Im\lambda < 0$ admet un prolongement analytique à un ouvert de la forme (3.1) et y vérifie l'estimation suivante*

$$\exists D > 0, \exists C > 0, \forall \lambda \in U_{A,B}, \|H_\kappa\|_{\mathcal{L}\left(H^1(\partial\Theta_1), H^1\left(\Theta_1^c\right)\right)} \leq C|\lambda|^2 e^{DIm\lambda^+}.$$

On vérifie que la définition de l'opérateur H_κ est indépendante du choix de κ, comme précédemment. On note $H(\lambda)$ l'opérateur ainsi défini.

On notera, par la suite, $M(\lambda)$ l'opérateur défini de $H^{1/2}(\partial\Theta_1)$ dans lui même donné

$$M(\lambda)(f) = H(\lambda)(f)\,|_{\partial\Theta_1}.$$

Lemme 4.7. *L'opérateur $M(\lambda)$, défini de $H^1(\partial\Theta_1)$ dans lui même pour $Im\lambda < 0$ admet un prolongement analytique à un ouvert de la forme (3.1) et y vérifie l'estimation suivante*

$$\exists D > 0, \exists C > 0, \forall \lambda \in U_{A,B}, \|M(\lambda)\|_{\mathcal{L}\left(H^{1/2}(\partial\Theta_1)\right)} \leq C|\lambda|^2 e^{DIm\lambda^+}.$$

Par ailleurs, comme au voisinage de Θ_1, Mu vérifie $(\Delta + \lambda^2)\, Mu = 0$, on obtient

$$\exists D > 0, \forall s \in \mathbf{R}, \exists C_s > 0, \forall \lambda \in U_{A,B}, \|M(\lambda)\|_{\mathcal{L}(H^s(\partial\Theta_1)))} \leq C_s e^{DIm\lambda^+}\, |\lambda|^{s+2}.$$

4.3 Décomposition des opérateurs

Nous allons, dans cette partie décomposer l'opérateur M en somme de deux termes, $M_a + M_b$, correspondant dans la relation (4.11) à une décomposition de la troncature κ en somme de deux termes, puis, pour étudier et expliciter l'opérateur M_a, nous étudierons la fonction de Green de l'opérateur des ondes avec conditions de Dirichlet dans l'ouvert Θ_2^c. (Nous montrerons plus tard que l'opérateur M_b donne une contribution négligeable pour le problème qui nous intéresse). On choisit des fonctions $\chi_a, \chi_b \in G_0^3\left((\Theta_1 \cup \Theta_2)^c\right)$ telles que $\chi_a + \chi_b = 1$ au voisinage du support de $\nabla\kappa$ et χ_b est égale à 0 au voisinage de l'intersection de ce support avec la trajectoire captive $[A, O]$. On pourra éventuellement, par la suite, réduire le support de κ autour de Θ_2 et celui de χ_a autour de l'intersection du support de $\nabla\kappa$ avec le segment $[O, A]$

On notera H_a et H_b les opérateurs définis par les relations:

$$H_a = R_{\Omega_2}\left(\chi_a [\Delta, \kappa]\, H_1(f)\right),$$
$$H_b = R_{\Omega_2}\left(\chi_b [\Delta, \kappa]\, H_1(f)\right) + \kappa H_1(f).$$

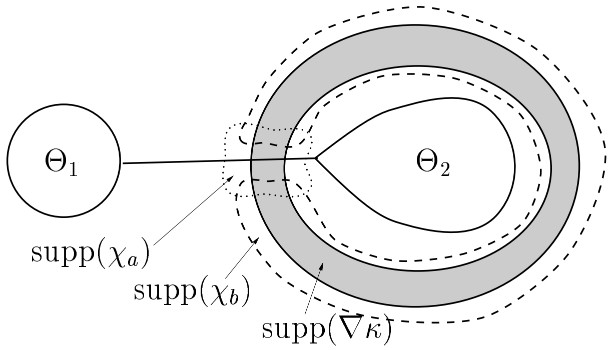

Fig. 4.4 – *Troncatures*

Enfin, on notera $M_a = H_a \mid_{\partial\Theta_1}$ et $M_b = H_b \mid_{\partial\Theta_1}$. L'opérateur M_a correspond à la partie de l'opérateur M qui va voir le coin, tandis que l'opérateur M_b correspond au reste qui fournira une contribution négligeable.

Nous étudions maintenant la fonction de Green de l'équation des ondes. Pour cela, nous allons utiliser les résultats de P. Gérard et G. Lebeau [8]. On notera, pour $y \in \operatorname{supp}(\chi_a)$, $G(y,x)$ la distribution solution de :

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2 - \Delta_x\right) G(y,x,t) = \delta_{\substack{t=0\\ y=x}} \text{ dans } \Theta_2^c \times \mathbf{R}_t, \\ G \mid_{\partial\Theta_2} = 0, \\ G \mid_{t<0} \equiv 0, \end{cases}$$

obtenue de la manière suivante : on note $e^+(x,t)$ la solution fondamentale du Laplacien à support dans $t \geq 0$ et $g(x,y,t) = e^+(x-y,t)$. Pour $|t|$ assez petit, la distribution g est à support en x compact dans Θ_2^c. Soit $\varrho(t) = tHe^{-t}$ où H désigne la fonction de Heaviside, $H(t) = 1_{t>0}$; de telle sorte que $\widehat{\varrho}(\tau) = \frac{-1}{(\tau-i)^2}$ (on a choisi la distribution ϱ de telle sorte que $(\partial_t + 1)^2(\varrho) = \delta_{t=0}$). Soit $f(x,y,t) = \varrho * g(x,y,t)$. La distribution f est alors solution de l'équation

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2 - \Delta_x\right) f(y,x,t) = \delta_{y=x} \otimes \varrho(t) \text{ dans } \Theta_2^c \times \mathbf{R}_t, \\ G \mid_{t<0} \equiv 0. \end{cases}$$

et il est facile de voir que pour $y \in \operatorname{supp}(\chi_a)$, $f \in H^1(\mathbf{R}_x^2 \times \mathbf{R}_t)$, uniformément par rapport à y. Par ailleurs, puisque le support de la fonction ϱ est inclus dans $\{t \geq 0\}$, la vitesse finie de propagation pour les solutions de l'équation des ondes montre que pour $t > 0$ assez petit et tout $y \in \operatorname{supp}(\chi_a)$, la fonction f est à support compact en x. Enfin, la fonction f est, pour tout $y \in \operatorname{supp}(\chi_a)$ et $t > 0$ assez petit, conormale analytique par rapport à la surface d'équation $t = |x-y|$. On note F la solution de classe H_0^1 de l'équation

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2 - \Delta_x\right) F(y,x,t) = 0 \text{ dans } \Theta_2^c \times \mathbf{R}_t, \\ F \mid_{\partial\Theta_2} = 0, \end{cases}$$

associée à la donnée incidente, f. La distribution G est définie par la relation

$$G = (\partial_x + 1)^2(F).$$

Cette méthode de définition par régularisation puis dérivation est rendu nécessaire par la présence du coin qui peut faire apparaître des termes parasites au coin, si on essaye de définir des solutions peu régulières de l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet (moins régulières que H^1, ce qui est le cas ici). En fait, cette procédure permet de définir des solutions à faible régularité en temps, à valeurs H_0^1 en espace, ce qui permet d'éviter l'apparition de ces singularités parasites au coin.

D'après les résultats de P. Gérard et G. Lebeau [8], la fonction F est, pour $|y| < t < |y|+\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), et dans un voisinage de O, somme d'une distribution calculée par réflexion de F sur les faces du coin et d'une distribution conormale analytique par rapport à la surface $t = |y| + |x|$. Revenant à la distribution G, on obtient un résultat similaire pour la distribution G et, utilisant que la convolution par ϱ se traduit en transformation de Fourier par la division par $\frac{1}{(\tau+i)^2}$, comme le symbole associé à la solution fondamentale de l'équation des ondes est de la forme

$$\sigma = \frac{\sigma_0(x,y)}{\sqrt{\tau - i}} + \mathcal{O}\left(\tau^{-3/2}\right),$$

le symbole incident associé à la fonction f est de la forme

$$\sigma' = \frac{\sigma_0(x,y)}{(\tau - i)^{5/2}} + \mathcal{O}\left(\tau^{-7/2}\right)$$

(ce qui permet de montrer que f est de classe H^1), on a obtient finalement une description explicite du symbole associé à la partie diffractée de G, qui est de la forme :

$$\sigma_d(x,y,\tau) = e^{-i\tau|y|}\frac{\sigma_0'(x,y,\tau)}{(\tau - i)^2},$$

où le symbole σ_0' est un symbole analytique se prolongeant en une fonction holomorphe dans $\mathrm{Im}\tau < 0$ et vérifiant, pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$\sigma_0'(x,y,\tau) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\sigma_j(x,y)}{(\tau - i)^j} + \sigma^N(x,y,\tau),$$

avec σ_j des fonctions holomorphes vérifiant des estimations de type analytique et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{s\geq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\tau^2\right)^{N+1/2-\varepsilon} \left|\sigma^N(x,y,\tau - is)\right|^2 < +\infty.$$

Soit W un voisinage dans $\mathbf{R}_x^2$ du point A. On suppose, ce qui est toujours possible quitte à réduire W et le support de χ_a, que W vérifie les hypothèses suivantes :

- Pour tout $y \in \operatorname{supp}(\chi_a)$, on a $\operatorname{dist}(y, W) > |y|$.
- Pour tout $y \in \operatorname{supp}(\chi_a)$, aucun des demi-rayons issus de y, se réflechissant sur une des arêtes du coin ne rencontre W

Comme, pour $y \in \mathrm{supp}\,(\chi_a)$, la surface $t-|x|=|y|$ ne présente pas de caustiques, en dehors du point $t=|y|\,,\ |x|=0$, la partie conormale analytique par rapport à cette surface pour $0<t-|y|$ assez petit de G, le reste pour tout $t>|\,y\,|$, et d'après la deuxième hypothèse, et le théorème de propagation des singularités Gevrey 3, la contribution de la partie calculée par réflection de g sur les demi-arêtes donne pour $t>|y|$ une contribution de classe Gevrey 3, puisqu'aucun rayon C^∞ issu du support de la fonction χ_a et se réfléchissant sur une des demi-arêtes ne rencontre à nouveau dans le futur le voisinage W de A. On obtient donc :

Proposition 4.8. — *Pour tout $y \in \mathrm{supp}\,(\chi_a)$, la distribution G_y est sur $W \times \mathbf{R}^+$ somme d'une distribution conormale analytique par rapport à la surface $t=|x|+|y|$, supportée par le demi-espace d'équation $t \geq |x|+|y|$, notée $h\,(x,y,t)$ et d'une fonction de classe Gevrey 3.*

Nous reprenons maintenant les notations du paragraphe 3. On a sur W, d'après les relations (3.12) et (3.9) :

$$\chi H_a\,(\lambda)\,v\,(x)=\int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t}\chi\,(x)\,\zeta\,(x,t)\,U\,(t)\,\chi_a\,(x)\,w\,(x,\lambda)\,dt+R\,(\lambda)\,v,$$

avec

$$w=[\Delta,\kappa]\,H_1\,(\lambda)\,v,$$

donc

$$\|\chi_a w\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \leq Ce^{C\mathrm{Im}\lambda^+}\|v\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)}$$

et

$$R\in\mathcal{N}\left(\mathcal{L}\left(H^{1/2}\,(\partial\Theta_1)\,;H^1\,(\Theta_2^c\cap B(O,R))\right)\right).$$

Or, par vitesse de propagation finie, si $\Psi \in G^3\,(\mathbf{R})$, $\Psi\equiv 1$ au voisinage de $[\varepsilon,+\infty[$, on a, sur W,

$$U\,(t)\,\chi_a w\,(x,\lambda)=\int_{y\in\mathrm{supp}\chi_a}\Psi\,(t)\,G\,(x,y,t)\,\chi_a w\,(y,\lambda)\,dy. \tag{4.12}$$

D'après la proposition 4.8, il existe σ^2 un symbole analytique défini pour $x\in W$, $y\in\mathrm{supp}\,(\chi_a)$, se prolongeant en une fonction holomorphe dans $\mathrm{Im}\lambda<0$ et tel que, sur W,

$$G\,(x,y,t)-g\,(x,y,t)-\int_{\lambda=-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda(t-(|x|+|y|))}\sigma^2\,(y,x,\lambda)=g_3(x,y,t)\in G^3\left(\mathbf{R}_t^+\times W\right).$$

De cette décomposition de G en somme de trois termes et de (4.12), on déduit une décomposition de H_a en somme de trois termes : $H_a=H_a^1+H_a^2+H_a^3$, avec

$$\chi H_a^1\,(\lambda)\,v=\int_0^{+\infty}e^{-i\lambda t}\Psi\,(t)\,\chi\,(x)\,\zeta\,(x,t)\,U_0\,(t)\,\chi_a w.$$

L'opérateur χH_a^1 est donc égal à $\chi \widehat{E} \chi_a [\Delta, \kappa] H_1(\lambda)$, où l'opérateur $\chi \widehat{E}$ est celui associé à $\Theta = \emptyset$. D'après les résultats de la section 3, ce dernier opérateur est, modulo un opérateur négligeable, égal à l'opérateur $\chi R_0(\lambda)$ (R_0 est la résolvante sortante dans l'espace libre). On a donc

$$\chi H_a^1 = \chi R_0 \chi_a [\Delta, \kappa] H_1(\lambda) + R,$$

avec $R \in \mathcal{N}\left(\mathcal{L}\left(H^{1/2}(\partial\Theta_1); H^1_{loc}(\Theta_2^c)\right)\right)$.

On note $\mathcal{SS}_b^3$ et $\widehat{\mathcal{SS}}_b^3$ les ensembles de fréquence définis à l'annexe B. Nous allons montrer:

$$\mathcal{SS}_b^3(\chi R_0(\lambda) v) \cap \overline{W} = \emptyset, \tag{4.13}$$

$$\widehat{\mathcal{SS}}_b^3(\chi R_0(\lambda) v) \cap \overline{W}. \tag{4.14}$$

Comme la fonction κ (et donc aussi la fonction v) est nulle au voisinage de W, la relation (4.14) est juste conséquence de la proposition B.3. Pour démontrer la relation (4.13), nous allons utiliser les résultats de propagation des singularités dans $\mathbf{R}^2$. Soit $\rho_0 \in \mathcal{SS}_b^3(R_0 v) \cap \overline{W}$. D'après la proposition B.12, on a $|\xi_0| = 1$ et d'après la proposition B.13, tant que la bicaractéristique (ici la demi-droite) issue du point (x_0, ξ_0) vers le passé ne rencontre pas le front d'onde $\mathcal{SS}_b^3(v)$, le rayon est inclus dans $\mathcal{SS}_b^3(R_0(v))$. D'après la proposition 3.5, cette demi-droite rencontre donc nécessairement $\mathcal{SS}_b^3(v)$, donc $\mathcal{SS}_b^3(H^1(\lambda) f)$, en un point $x \in \operatorname{supp}(\chi_a)$. Or, les mêmes arguments de propagation, appliqués dans l'ouvert Θ_1^c montrent que $\mathcal{SS}_b^3(H^1(f))$ est inclus dans la réunion des demi-rayons issus vers le futur du support de f (et donc de Θ_1); ce qui est absurde puisqu'aucun rayon (de Θ_1^c) ne peut quitter Θ_1, atteindre la suppport de χ_a puis revenir (comme rayon de $\mathbf{R}^2$) sur W, puisque Θ_1 est convexe.

On déduit maintenant de la proposition B.14, de (4.13), (4.14) et de la remarque B.15 qu'il existe $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, égale à 1 au voisinage de W telle que pour tout $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, il existe $C, \varepsilon > 0$ tels que, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\left\| \Psi R_0(\lambda) \left(\chi_a [\Delta, \kappa] H^1(f)\right) \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C e^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}.$$

Le lemme 3.8 permet de supprimer la dépendance de C et ε par rapport à $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ et l'application du principe du maximum de l'annexe C montre que

$$\chi H_a^1(\lambda) \in \mathcal{N}\left(\mathcal{L}\left(H^{1/2}(\partial\Theta_1); H^1\left(\mathbf{R}^2 \cap W\right)\right)\right).$$

On étudie maintenant la contribution de H_a^3. On a

$$\chi H_a^3(\lambda) v = \int_0^{+\infty} \Psi(t) \chi(x) \zeta(x,t) e^{-i\lambda t} g_3(x,t) \chi_a w(y) \, dt.$$

On intègre par parties par rapport à t, ce qui donne

$$\chi H_a^3(\lambda) v = \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t} \frac{1}{(i\lambda)^n} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n (\Psi \zeta g_3) \chi_a w(y) \, dt.$$

Comme la fonction $\psi\zeta g_3$ est de classe Gevrey 3, à support compact en temps, on en déduit qu'il existe $A, B > 0$ tels que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\|\chi H_a^3(\lambda)\, v\|_{H^1} \leq B\frac{1}{|\lambda|^n}A^{n+1}(3n)!$$

ce qui donne, en choisissant $n = |\lambda|^{1/3}/C$ avec C assez grand, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\|\chi H_a^3(\lambda)\, v\|_{H^1} \leq C' e^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}.$$

Le principe du maximum de l'annexe C montre que $\chi H_a^3(v) \in \mathcal{N}(H^1(W))$, pour tout $v \in H^{1/2}(\partial\Theta_1)$ et en utilisant le lemme 3.8, on en déduit que l'opérateur $\chi H_a^3 \in \mathcal{N}\left(\mathcal{L}\left(H^{1/2}(\partial\Theta_1); H^1(W)\right)\right)$.

Finalement, la seule contribution significative à l'opérateur H_a est celle donnée par H_a^2 et est égale à

$$\begin{aligned}
\chi H_a^2(\lambda)\, v = & \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t}\int_{\mu=-\infty}^{+\infty}\int_y e^{i\mu(t-|x|-|y|)}\Psi(t)\,\chi(x)\,\zeta(x,t) \\
& \qquad\qquad \sigma^2(x,y,\mu)\,[\Delta,\kappa]\,(H_1(\lambda)\, v)\, d\mu ds \\
= & \; e^{-i\lambda(|x|)}\int_{s=-\infty}^{+\infty}\int_{\mu=-\infty}^{+\infty}\int_y e^{i(\mu-\lambda)s}\chi(x)\,\psi(s+|x|+|y|)\,\zeta(x, s+|x|+|y|) \\
& \qquad\qquad e^{-i\lambda(|y|)}\sigma^2(x,y,\mu)\,[\Delta,\kappa]\,(H_1(\lambda)\, v)\, d\mu ds dy.
\end{aligned}$$

On remarque maintenant que

$$\int\int e^{i(\mu-\lambda)s}\sigma^2(x,y,\mu)\, d\mu ds = \sigma^2(x,y,\lambda).$$

Soit $g \in G_0^3(\mathbf{R})$, égale à 1 au voisinage de 0 et à support inclus dans $B(0,1/2)$, en intégrant par parties n fois avec l'opérateur

$$L = \frac{1}{i(\lambda-\mu)}\partial_s,$$

il est facile de voir que

$$\left|\int_{\mu=-\infty}^{+\infty}\left(1-g\left(\frac{\mu-\lambda}{\lambda}\right)\right)\int_s e^{i(\mu-\lambda)s}(1-\psi\zeta)\,\sigma^2 ds d\mu\right| \leq \frac{AB^n}{|\lambda|^n}.$$

Par ailleurs, comme on peut supposer que $s = 0$ n'appartient pas au support de la fonction $(1-\chi(x)\,\zeta(s+|x|+|y|))$ (il suffit pour cela de prendre dans la définition de la fonction ζ, le réel T plus grand que $|x|+|y|$ pour tout $x \in W$ et tout $y \in \operatorname{supp}(\chi_a)$), on peut intégrer par parties n fois en utilisant l'opérateur $L = \frac{1}{is}\partial_\mu$ dans

$$\int_{\mu=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{\mu-\lambda}{\lambda}\right)\int_s e^{i(\mu-\lambda)s}(1-\psi\zeta)\,\sigma^2 ds d\mu,$$

ce qui montre que

$$\left|\iint e^{i(\mu-\lambda)s}\left(1-\psi\zeta\right)g\left(\frac{\mu-\lambda}{\lambda}\right)\sigma^2\left(x,y,\mu\right)d\mu ds\right|\leq\frac{AB^n}{|\lambda|^n}\left(3n\right)!$$

Définition 4.9. — *On notera $\mathcal{H}_1^{\alpha,D}(W)$, l'espace des symboles analytiques $\sigma(x,\tau,\lambda)$, définis pour $x\in W$, $\lambda\in L_{\alpha,D}$, holomorphes en λ et vérifiant :*

$$\sup_{x\in W}\sup_{\substack{s\geq 0\\ \lambda>1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+|\lambda|^2\right)\left|\sigma\left(x,\lambda-is\right)\right|^2d\lambda<+\infty, \tag{4.15}$$

$$\sup_{x\in W}\sup_{\lambda\in L_{\alpha,D}}|\sigma(x,\lambda)|<+\infty. \tag{4.16}$$

On notera $\|\sigma\|_{\mathcal{H}_1^{\alpha,D}(W)}$ la norme définie par (4.15) et (4.16).

En choisissant $n=\left[|\lambda|^{1/3}/C\right]$, avec C grand dans les majorations précédentes, on obtient la proposition suivante :

Proposition 4.10. — *Il existe $\alpha,D>0$ et W, un voisinage de A dans $\mathbf{C}^2$, un opérateur $\sigma\in\mathcal{A}\left(\mathcal{L}\left(H^{1/2}\left(\partial\Theta_1\right);\mathcal{H}_1^{\alpha,D}(W)\right)\right)$, $R\in\mathcal{N}\left(\mathcal{L}\left(H^{1/2}\left(\partial\Theta_1\right);H^1\left(W\cap\mathbf{R}^2\right)\right)\right)$ tels que, pour tout $v\in H^{1/2}\left(\partial\Theta_1\right)$*

$$H_a\left(\lambda\right)v=e^{-i\lambda(|x|)}\sigma\left(\lambda\right)\left(v\right)+R\left(\lambda\right)\left(v\right),$$

et l'opérateur σ à la forme suivante :

$$\sigma\left(\lambda\right)\left(f\right)=\int_y e^{-i\lambda|y|}\sigma^2\left(x,y,\lambda\right)\chi_a\left(y\right)\left[\Delta,\kappa\right]\left(H_1\left(f\right)\right)dy. \tag{4.17}$$

V. Résolution d'un problème de Grushin

On va résoudre dans ce chapitre un problème de Grushin. Pour cela, on commence par résoudre un problème approché, puis on estime la différence entre le problème de départ et ce problème approché pour conclure par un argument de perturbation.

5.1 Un problème de Grushin pour un opérateur modèle

On notera T' l'opérateur obtenu en retranchant le reste R à l'opérateur T défini par la relation (4.5),

$$T'\left(\sigma\left(\theta,\lambda\right)\right)=\frac{e^{-2i\lambda d}}{\sqrt{\lambda}}\left(\sum_{n\leq|\lambda|/C}\lambda^{-n}\sum_{p\leq 2n}K_{n,p}\left(\theta\right)\frac{1}{p!}\left(\frac{\partial^{p}\sigma\left(\theta,\lambda\right)}{\partial\theta^{p}}\,|_{\theta=0}\right)\right). \tag{5.1}$$

On rappelle que l'angle θ est une coordonnée holomorphe sur $\partial\Theta_1$ au voisinage de A (on a identifié le point A avec $\theta=0$). On pourra éventuellement agrandir un nombre fini de fois la constante C. Le but de cette partie est de résoudre un problème de Grushin pour l'opérateur T', qu'on considérera comme un opérateur dépendant d'un paramètre λ agissant sur un espace de fonctions holomorphes

5.1.1 Résolution d'un problème de Grushin pour un opérateur approché.

Nous allons résoudre un problème de Grushin pour l'opérateur obtenu en tronquant l'opérateur T' à l'ordre N, considéré comme un opérateur agissant sur les fonctions holomorphes en θ et dépendant d'un paramètre λ. On note $[q]$ la partie entière du réel q et

$$T_N\left(\sigma\right)\left(\theta,\lambda\right)=\frac{e^{-2i\lambda d}}{\sqrt{\lambda}}\sum_{\substack{0\leq\alpha\leq 2N\\ \alpha/2\leq i\leq\alpha/2+N+1}}\lambda^{-i}K_{i,\alpha}\left(\theta\right)\frac{1}{\alpha!}\partial_{\theta}^{\alpha}\sigma\left(0,\lambda\right).$$

Pour ω un voisinage complexe de A dans $\partial\Theta_1$, on note $\mathcal{H}(\omega)$, l'espace des fonctions holomorphes bornées sur ω, muni de sa norme naturelle :

$$\|u\|_{\mathcal{H}(\omega)} = \sup_{\theta\in\omega} |u(\theta)|.$$

Dans toute la suite, on choisira ω de la forme $\omega = B_\theta(0,\varrho)$ $(\varrho > 0)$.

On notera $G_N(\lambda)$ l'opérateur défini de $\mathcal{H}(\omega)$ dans $\mathbf{C}^{2N+1}$ par :

$$G_N(u)_p = \frac{\partial_\theta^p}{p!} u(0)$$

et P_N l'opérateur défini de $\mathbf{C}^{2N+1}$ dans $\mathcal{H}(\omega)$ par $P_N(D) = \sum_{i=0}^{2N} d_i\theta^i$ de telle sorte que $G_N \circ P_N = Id_{\mathbf{C}^{2N+1}}$. Enfin on notera $\widetilde{T}_N$ l'opérateur défini de $\mathbf{C}^{2N+1}$ dans $\mathcal{H}(\omega)$ par $\widetilde{T}_N = T_N \circ P_N$, soit:

$$\widetilde{T}_N(D) = \frac{e^{-2i\lambda d}}{\sqrt{\lambda}} \sum_{\substack{0\le\alpha\le 2N \\ \alpha/2\le i\le\alpha/2+N+1}} \lambda^{-i} K_{i,\alpha}(\theta)\, d_\alpha.$$

Dans toute la suite, on fixe des réels $\alpha, D > 0$. Un calcul simple montre alors la

Proposition 5.1. — *Pour tout $\lambda \in L_{\alpha,D}$, on peut résoudre dans $\mathcal{H}(\omega) \times \mathbf{C}^{2N+1}$ le problème de Grushin*

$$\begin{cases} (Id - T_N)\, u - P_N(C) = v, \\ \qquad\qquad\qquad G_N(u) = D. \end{cases} \tag{5.2}$$

La solution de ce problème est unique, on a

$$\begin{pmatrix} u \\ C \end{pmatrix} = \mathcal{E}_{N,0}(\lambda) \begin{pmatrix} v \\ D \end{pmatrix},$$

avec

$$\mathcal{E}_{N,0}(\lambda) = \begin{pmatrix} E^0_{N,0} & E^{+,-}_{N,0} \\ E^{-,+}_{N,0} & E^{\pm}_{N,0} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} E^0_{N,0} &= Id_{\mathcal{H}(\omega)} - P_N \circ G_N, \\ E^{+,-}_{N,0} &= \widetilde{T}_N + P_N - P_N \circ G_N \circ \widetilde{T}_N, \\ E^{-,+}_{N,0} &= -G_N, \\ E^{\pm}_{N,0} &= Id_{\mathbf{C}^{2N+1}} - G_N \widetilde{T}_N \end{aligned} \tag{5.3}$$

et il existe $C > 0$ tel que pour tout $\lambda \in L_{\alpha,D}$, l'opérateur $\mathcal{E}_{N,0}$ vérifie

$$\|\mathcal{E}_{N,0}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(\omega)\times\mathbf{C}^{2N+1})} \le C e^{2dIm\lambda^+}.$$

On va maintenant inverser le problème de Grushin obtenu en remplaçant T_N par T' dans (5.2), par un argument de perturbation. Pour cela, il faut étudier la différence de ces deux opérateurs (considérés comme opérateurs sur $\mathcal{H}(\omega)$).

On notera dans toute la suite $z = \frac{e^{-2i\lambda d}}{\sqrt{\lambda}}$

Lemme 5.2. — *Pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe $C_N > 0$ tel que pour tout $\lambda \in L_{\alpha,D}$ on a*

$$\|T' - T_N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(\omega))} \leq C_N \left|\frac{|z|}{\lambda^{N+1}}\right|. \tag{5.4}$$

En effet,

$$z^{-1}(T' - T_N)(u) = \sum_{\alpha=0}^{2N} \sum_{\alpha/2+N+1 \leq i \leq \frac{|\lambda|}{C}} \lambda^{-i} K_{i,\alpha}(\theta) \frac{\partial_\theta^\alpha}{\alpha!} u(0) + \sum_{2N<\alpha\leq 2\frac{\lambda}{C}} \sum_{\alpha/2\leq i\leq\frac{\lambda}{C}} \lambda^{-i} K_{i,\alpha}(\theta) \frac{\partial_\theta^\alpha}{\alpha!} u(0). \tag{5.5}$$

D'après les formules de Cauchy, pour tout $0 < \varrho' < \varrho$, comme $B(0, \varrho') \subset \omega$, alors pour tout $u \in \mathcal{H}(\omega)$, on a

$$\frac{\partial_\theta^\alpha}{\alpha!} u(0) \leq \varrho'^{-\alpha} \sup_{\theta\in\omega} |u(\theta)|,$$

ce qui implique que l'opérateur $p_n : u \mapsto \frac{x^n}{n!}\partial_n u(0)$ de $\mathcal{H}(\omega)$ dans lui même vérifie

$$\|p_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(\omega))} \leq 1. \tag{5.6}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
\|(T' - T_N)\|_{\mathcal{H}(\omega)} &\leq |z| \Bigg(\sum_{\substack{0\leq\alpha\leq 2N \\ \alpha/2+N+1\leq i\leq\lambda/C}} |\lambda^{-i}| A^{i+1} i! \varrho^{-\alpha} + \sum_{\substack{2N<\alpha\leq 2\lambda/C \\ \alpha/2\leq i\leq\lambda/C}} |\lambda^{-i}| A^{i+1} i! \varrho^{-\alpha} \Bigg) \\
&\leq \left|\frac{z}{\lambda^{N+1}}\right| \Bigg(\sum_{\substack{0\leq 2N \\ \alpha/2\leq i\leq\lambda/C}} \lambda^{-i} A^{i+N+1} (i+N+2)! \varrho^{-\alpha} \Bigg) \\
&\leq C_N \left|\frac{z}{\lambda^{N+1}}\right|.
\end{aligned}$$

On notera $\Lambda_{\varepsilon,N} = \{\lambda \in \mathbf{C};\ \left|\frac{z}{\lambda^{N+1}}\right| < \varepsilon\}$.

Proposition 5.3. — *Pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe $C_N > 0, \varepsilon_N > 0$ tels que pour tout $\lambda \in \Lambda_{\varepsilon_N,N} \cap \{|\lambda| > C_N\}$, l'opérateur $Id - E^0_{N,0}(T' - T_N)$ est inversible sur $\mathcal{H}(\omega)$ par une série de Neumann et on peut résoudre dans $\mathcal{H}(\omega) \times \mathbf{C}^{2N+1}$ le problème de Grushin*

$$\begin{cases} (Id - T')\,u - P_{N,0}(c) = v, \\ G_N(u) = d. \end{cases} \tag{5.7}$$

La solution de ce problème est unique, on a

$$\begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix} = \mathcal{E}_{N,1}(\lambda) \begin{pmatrix} v \\ d \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

avec

$$\mathcal{E}_{N,1}(\lambda) = \begin{pmatrix} E^0_{N,1} & E^{+,-}_{N,1} \\ E^{-,+}_{N,1} & E^{\pm}_{N,1} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} E^0_{N,1} &= \left(Id - E^0_{N,0}(T' - T_N)\right)^{-1} E^0_{N,0}, \\ E^{+,-}_{N,1} &= \left(Id - E^0_{N,0}(T' - T_N)\right)^{-1} E^{+,-}_{N,0}, \\ E^{-,+}_{N,1} &= E^{-,+}_{N,0} - E^{-,+}_{N,0}(T_N - T')\left(Id - E^0_{N,0}(T' - T_N)\right)^{-1} E_{N,0}, \\ E^{\pm}_{N,1} &= E^{\pm}_{N,0} - E^{-,+}_{N,0}(T_N - T')\left(Id - E^0_{N,0}(T' - T_N)\right)^{-1} E^{+,-}_{N,0} \end{aligned} \tag{5.9}$$

et il existe $C > 0$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda_{\varepsilon_N,N} \cap \{|\lambda| > C\}$, l'opérateur $\mathcal{E}_{N,1}$ vérifie

$$\|\mathcal{E}_{N,1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(\omega)\times \mathbf{C}^{2N+1})} \leq Ce^{2dIm\lambda^+}.$$

L'inversibilité de l'opérateur $Id - E^0_{N,0}(T' - T_N)$ par une série de Neumann résulte des estimations (5.4) et (5.6). On a par ailleurs :

$$\begin{pmatrix} Id - T' & -P_N \\ G_N & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id - T_N & -P_N \\ G_N & 0 \end{pmatrix} \left(Id + \mathcal{E}_{N,0}\begin{pmatrix} T_N - T' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \tag{5.10}$$

or

$$\left(Id + \mathcal{E}_{N,0}\begin{pmatrix} T_N - T' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} Id + E^0_{N,0}(T_N - T') & 0 \\ E^{-,+}_{N,0}(T_N - T') & Id \end{pmatrix}.$$

Cet opérateur est donc, si $\varepsilon_0 > 0$ est assez petit inversible pour $\lambda \in \Lambda_{\varepsilon,N}$, d'inverse :

$$\begin{pmatrix} \left(Id + E^0_{N,0}(T_N - T')\right)^{-1} & 0 \\ -E^{-,+}_{N,0}(T_N - T')\left(Id + E^0_{N,0}(T_N - T')\right)^{-1} & Id \end{pmatrix},$$

ce qui montre, d'après (5.10), que l'opérateur

$$\begin{pmatrix} Id - T' & -P_N \\ G_N & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et que son inverse est donné par (5.9).

5.1.2 Développements asymptotiques

On s'intéresse maintenant à la forme exacte de $E^{\pm}_{N,1}$. En effet, c'est ce terme qui donne le défaut d'inversibilité de l'opérateur $Id - T'$ qui lui même nous donnera plus tard les pôles de diffusion. Nous rappelons pour mémoire le

Lemme 5.4. — *Si l'opérateur $E^{\pm}_{N,1}$ est inversible sur $\mathbf{C}^{2N+1}$, alors l'opérateur $Id - T'$ l'est aussi sur $\mathcal{H}(\omega)$ et on a*

$$(Id - T')^{-1} = E_{N,1} - E^{+,-}_{N,1} \left(E^{\pm}_{N,1}\right)^{-1} E^{-,+}_{N,1}.$$

D'après les relations (5.3) et (5.9), si on note $R_N = T' - T_N$, on a

(5.11)

$$E^{\pm}_{N,1} = Id - G_N\widetilde{T}_N - G_N R_N \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\left(Id - P_N G_N\right) R_N\right)^i \left(\widetilde{T}_N + P_N - P_N G_N \widetilde{T}_N\right).$$

La décomposition (5.5) fournit une décomposition $R_N = R^1_N + R^2_N$.

Lemme 5.5. — *Il existe des fonctions $K_{n,i,\alpha}, (i,n,\alpha) \in \mathbf{N}^3$, holomorphes sur l'ouvert ω, des opérateurs $r_n(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(\omega))$ définis pour $\lambda \in \Lambda_{\varepsilon,N}$ et des constantes A_0, A_1, A'_1, B, D tels que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$*

$$\left(E^0_{N,0}R^2_N\right)^n = \left(\frac{z}{\lambda^{N+1}}\right)^{n-1} z \left[\sum_{\substack{2N<\alpha\leq 2\lambda/C \\ \alpha/2\leq i\leq \lambda/C}} \lambda^{-i} K_{n,i,\alpha}(x) \frac{\partial^{\alpha}_x}{\alpha!} + r_n(\lambda)\right] \tag{5.12}$$

et on a les estimations analytiques suivantes:

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\omega} \left|K_{n,i,\alpha}\right| &\leq A_0 A_1^n B^i \varrho^{2\alpha} i!, \\ \left\|r_n(\lambda)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(\omega))} &\leq A'_0 \left(A'_1\right)^{n-1} D e^{-|\lambda|/D}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

La preuve de ce lemme se fait par récurrence sur n. Au rang $n = 1$, comme l'opérateur $u \mapsto \frac{x^n}{n!}\partial^n u(0)$ est borné par 1 sur $\mathcal{H}(\omega)$, on a, en posant

$$\begin{aligned} K_{1,i,\alpha} &= \left(Id - P_N \circ G_N\right) K_{i,\alpha}, \\ \left|K_{1,i,\alpha}\right| &\leq (2N+2)\, C^{i+1} i!, \end{aligned}$$

d'après les inégalités vérifiées par les fonctions $K_{i,\alpha}$. Il suffit donc de choisir, comme $\alpha \leq 2i$,

$$C \leq B\varrho \text{ et } A_0 A_1 \geq (2N+2)\, C \tag{5.14}$$

et comme on peut supposer $\varrho < 1$, de prendre $r_1 = 0$. Supposons maintenant l'hypothèse vérifiée au rang n. On a alors :

$$\left(E^0_{0,N}R^2_N\right)^{n+1} = z \sum_{\substack{2N<\alpha\leq 2\lambda/C \\ \alpha/2\leq i\leq\lambda/C}} \left(\lambda^{-i}K_{1,i,\alpha}\left(x\right)\frac{\partial_x}{\alpha!}\right)$$
$$\left[\left(\frac{z}{\lambda^{N+1}}\right)^{n-1} z \sum_{\substack{2N<\beta\leq 2\lambda/C \\ \beta/2\leq j\leq\lambda/C}} \lambda^{-j}K_{n,j,\beta}\left(x\right)\frac{\partial_x}{\beta!} + r_n\left(\lambda\right)\right]$$
$$= \left(\frac{z}{\lambda^{N+1}}\right)^{n-1} z^2 \sum_{\substack{N+1\leq i\leq\lambda/C \\ N+1\leq j\leq\lambda/C}} \lambda^{-(i+j)} \sum_{\substack{2N<\alpha\leq 2i \\ 2N<\beta\leq 2j}} K_{1,i,\alpha}\frac{\partial^\alpha_x}{\alpha!}\left(K_{n,j,\beta}\right)(0)\frac{\partial^\beta_x}{\beta!}$$
$$+E^0_{N,0}R^2_N r_n\left(\lambda\right).$$

Soient

$$K_{n+1,k,\beta} = \sum_{\substack{i+j=k+N+1 \\ 2N<\alpha\leq 2i}} K_{1,i,\alpha}\frac{\partial^\alpha_x}{\alpha!}K_{n,j,\beta}\left(0\right)$$

et

$$r_{n+1} = E^0_{N,0}R^2_N\left(r_n\right)\left(\lambda\right) + \sum_{\substack{\lambda/C<k\leq 2\lambda C-N+1 \\ 2N<\beta\leq 2k}} \lambda^{-k}K_{n+1,k,\beta}\frac{\partial^\beta_x}{\beta!}.$$

L'opérateur $\left(E^0_{N,0}R^2_n\right)^{n+1}$ est bien de la forme (5.12), il reste à vérifier que les estimations (5.13) sont vérifiées au rang $n+1$. D'après les inégalités de Cauchy,

$$\begin{aligned}
\left|K_{n+1,k,\beta}\right| &\leq \sum_{\substack{2N<\alpha\leq 2i \\ i+j=k+N+1}} A_0A_1B^i\varrho^{2\alpha}i! \times A_0A^n_1\varrho^{-\alpha}B^j\varrho^{2\beta}j! \\
&\leq \sum_{\substack{i+j=k+N+1 \\ i,j\geq N+1}} A^2_0A^{n+1}_1B^{i+j}\varrho^{2\beta}\frac{1}{1-\varrho}i!j! \\
&\leq A^2_0A^{n+1}_1B^{k+N+1}\frac{\varrho^{2\beta}}{1-\varrho}\sum_{\substack{i+j=k+N+1 \\ i,j\geq N+1}} i!j! \\
&\leq A^2_0A^{n+1}_1B^{k+N+1}\frac{\varrho^{2\beta}}{1-\varrho}k! \times (N+1)! \times (N+4)\,.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir $A^2_0B^{N+1}\frac{(N+1)!(N+4)}{1-\varrho} \leq A_0$, ce qui bien est compatible avec les inégalités (5.14), si on prend A_1 assez grand. Il reste à montrer que le reste est bien petit. La première contribution au reste se majore en norme par

$$\begin{aligned}
(2N+2)\times\|R^2_N\|_{\mathcal{H}(\omega)}\|r_n\|_{\mathcal{H}(\omega)} &\leq \|r_n\|\times|z|\times\sum_{\substack{2N<\alpha\leq 2\lambda/C \\ \alpha/2\leq i\leq\lambda/C}}\lambda^{-i}\|K_{1,i,\alpha}\|_{\mathcal{H}(\omega)}\varrho^{-\alpha} \\
&\leq |z|\sum_{\substack{2N<\alpha\leq 2\lambda/C \\ \alpha/2\leq i\leq\lambda/C}}|\lambda^{-i}|A_0A_1B^i\varrho^{2\alpha}i!\varrho^{-\alpha}\|r_n\| \\
&\leq \frac{A_0A_1}{1-\varrho}K\left(C\right)\left|\frac{z}{\lambda^{N+1}}\right|\|r_n\|_{\mathcal{H}(\omega)},
\end{aligned}$$

si la constante C est choisie assez grande. Il suffit donc de choisir $\frac{A_0 A_1}{1-\varrho} K(C) \leq A_1'/2$ pour obtenir une contribution inférieure à $1/2 A_0' (A_1')^{n+1} e^{-\varepsilon|\lambda/D}$. Le deuxième terme donne une contribution inférieure à :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\lambda/C<k\leq 2\lambda/C\\ 2N<\beta\leq 2k}} |\lambda|^{-k} A_0 A_1^n B^k \varrho^{2\beta} k! \varrho^{-\beta} &\leq \frac{1}{1-\varrho} \sum_{\lambda/C<k\leq 2\lambda/C} A_0 A_1^n |\lambda|^{-k} B^k k!\\ &\leq \frac{A_0 A_1^{n+1}}{1-\varrho} \times \sum_{\lambda/C<k\leq 2\lambda/C} |\lambda|^{-k} B^k k!\\ &\leq \frac{A_0}{1-\varrho} A_1^{n+1} \times k(C) e^{-\varepsilon|\lambda|},\end{aligned}$$

si C est choisie assez grande. Il suffit donc de prendre pour conclure $A_0' \geq k(C) \frac{A_0 A_1}{(1-\varrho)}$ et $A_1' \geq A_1$. La constante C est maintenant fixée (puisque A_0' et A_1' en dépendent).

Comme $G_N \circ E_{N,0} = 0$, on a aussi $R_N^1 \circ E_{N,0}^0 = 0$, le lemme 5.5 implique donc (il suffit de prendre $\varepsilon_0 < (A_1')^{-1}$).

Lemme 5.6. — *Il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$, des fonctions $K_{n,i,\alpha}, (i,n,\alpha) \in \mathbf{N}^3$ vérifiant les estimations (5.13) et un opérateur $r(\lambda)$ tels que $\|r\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(\omega))} \leq Ctee^{-\varepsilon|\lambda|}$ $(\varepsilon > 0)$ tels que pour tout $\lambda \in \Lambda_{\varepsilon_0,N}$, on a*

$$(5.15)\quad \left(Id - E_{N,0}^0 R_N\right)^{-1} = Id + \sum_{\substack{\beta\leq 2\lambda/C\\ \beta/2\leq k\leq\lambda/C}} \lambda^{-k} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{\lambda^{N+1}}\right)^n K_{n,k,\beta}(x) \frac{\partial_x^\beta}{\beta!}\right) + r(\lambda).$$

On peut maintenant calculer $E_{N,1}^{\pm}$: d'après (5.11) et (5.15), on a, pour $(\alpha,\gamma) \in \mathbf{N}^{2(2N+1)}$,

(5.16)

$$\begin{aligned}\left(E_{N,1}^{\pm} - E_{N,0}^{\pm}\right)_{\alpha,\gamma} = \frac{\partial_x^\alpha}{\alpha!}\Bigg(z \sum_{\substack{\beta\leq 2N\\ \beta/2+N+1\leq i\leq\lambda/C}} \lambda^{-i} K_{i,\beta}(x) \frac{\partial_y^\beta}{\beta!} + z \sum_{\substack{2N<\beta\leq 2\lambda/C\\ \beta/2\leq i\leq\lambda/C}} \lambda^{-i} K_{i,\beta}(x) \frac{\partial_y^\beta}{\beta!}\Bigg)\\ \left[Id + \sum_{\substack{\delta\leq 2\lambda/C\\ \delta/2\leq k\leq\lambda/C}} \lambda^{-k} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{\lambda^{N+1}}\right)^n K_{n,k,\delta}(y) \frac{\partial_t^\delta}{\delta!} + r(\lambda)\right]\\ \left[t^\gamma + \sum_{\gamma/2\leq j\leq\gamma/2+N+1} \lambda^{-j} \left(K_{j,\gamma}(t) - P_N G_N \left(K_{j,\gamma}(t)\right)\right)\right].\end{aligned}$$

Comme les fonctions $K_{n,k,\gamma}$ sont obtenues après action de l'opérateur $E_{N,0}^0$, on remarque que $G_N(K_{n,k,\gamma}) = 0$ et la contribution du terme t^γ vaut donc

$$\begin{aligned}&\frac{\partial_x^\alpha}{\alpha!}\Bigg(z \sum_{\gamma/2+N+1\leq i\leq\lambda/C} \lambda^{-i} K_{i,\gamma}(x)\Bigg)\\ &\quad + \frac{\partial_y^\alpha}{\alpha!}\Bigg(z \sum_{\substack{2N<\beta\leq 2\lambda/C\\ \beta/2\leq i\leq\lambda/C}} \lambda^{-i} K_{i,\beta}(y) \frac{\partial_t^\beta}{\beta!} \sum_{\gamma/2\leq k\leq\lambda/C} \lambda^{-k} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{\lambda^{N+1}}\right)^n K_{n,k,\gamma}(t)\Bigg),\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire sous la forme

$$z\Bigg(\sum_{\gamma/2+N+1\leq i\leq\lambda/C}\lambda^{-i}k_{i,\gamma,\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{\lambda^{N+1}}\right)^n\sum_{N+1+\gamma/2\leq k\leq 2\lambda/C}\lambda^{-k}k'_{n,k,\alpha,\gamma}\Bigg),$$

avec $\left|k'_{n,k,\alpha,\gamma}\right|\leq AB^{\alpha+\gamma+n+k}k\ !$.

La contribution du second terme de (5.16) est

$$\frac{\partial_x^\alpha}{\alpha!}\Bigg(z\sum_{\substack{2N<\beta\leq 2\lambda/C\\ \beta/2\leq i\leq\lambda/C}}\lambda^{-i}K_{i,\beta}(x)\frac{\partial_y^\beta}{\beta!}\sum_{\gamma/2\leq j\leq\gamma/2+N+1}\lambda^{-j}K_{j,\gamma}-P_NG_N(K_{j,\gamma})\Bigg)$$
$$+\frac{\partial_x^\alpha}{\alpha!}\Bigg(z\sum_{\substack{2N<\beta\leq 2\lambda/C\\ \beta/2\leq i\leq\lambda/C}}\lambda^{-i}K_{i,\beta}(x)\frac{\partial_y^\beta}{\beta!}\sum_{\substack{\delta\leq 2\lambda/C\\ \delta/2\leq k\leq\lambda/C}}\lambda^{-k}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{\lambda^{N+1}}\right)^nK_{n,k,\delta}(y)\frac{\partial_t^\delta}{\delta!}\sum_{\gamma/2\leq j\leq\gamma/2+N+1}\lambda^{-j}\left(K_{j,\gamma}(t)-P_NG_N(K_{j,\gamma}(t))\right)\Bigg),$$

ce qui peut aussi s'écrire sous la forme

$$z\sum_{\gamma/2+N+1\leq p\leq\lambda/C}\lambda^{-p}k_{p,\alpha,\gamma}+z\sum_{\substack{\gamma/2+2(N+1)\leq p\\ p\leq 2\lambda/C+\gamma/2+2(N+1)}}\lambda^{-p}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{\lambda^{N+1}}\right)^nk'_{n,p,\gamma,\alpha},\tag{5.17}$$

avec $|k_{n,p,\gamma,\alpha}|\leq AB^{p+n+\alpha+\gamma}$ et $|k'_{p,\alpha,\gamma}|\leq AB^{p+\alpha+\gamma}$. Nous avons donc, compte tenu de la forme des termes $\left(E^{\pm}_{N,0}\right)_{\alpha,\gamma}$, montré le

Lemme 5.7. — *Il existe des réels $A,B,D>0$, des nombres complexes $k_{p,\alpha,\gamma}$, $k_{n,p,\alpha,\gamma}$, et des fonctions de la variable λ, $r_{\alpha,\gamma}$ tels que la matrice $E^{\pm}_{N,1}$ vaut, pour tout $\lambda\in\Lambda_{\varepsilon,D}$:*

$$E^{\pm}_{N,1}=\delta_{\alpha,\gamma}-z\Bigg(\sum_{\gamma/2\leq i\leq\lambda/C+\gamma/2+N+1}\lambda^{-i}k_{i,\alpha,\gamma}$$
$$+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{\lambda^{N+1}}\right)^n\sum_{N+1+\gamma/2\leq p\leq 2\lambda/C+\gamma/2+N+1}\lambda^{-p}k_{n,p,\alpha,\gamma}+r_{\alpha,\gamma}(\lambda)\Bigg)\tag{5.18}$$

et on a les estimations:

$$|k_{p,\alpha,\gamma}|\leq AB^{p+\alpha+\gamma},\qquad |k_{n,p,\alpha,\gamma}|\leq AB^{n+p+\alpha+\gamma},\qquad |r_{\alpha,\gamma}|\leq De^{-\varepsilon|\lambda|},$$

avec A,B indépendants du choix de la constante C dans (5.1) et D,ε en dépendant.

5.2 Estimations

Cette partie est consacrée à l'obtention d'estimations de type propagation pour les opérateurs que nous venons de construire. On rappelle que les ensembles de fréquence $\mathcal{SS}^\sigma_b$ et $\widehat{\mathcal{SS}}^\sigma_b$ sont définis à l'annexe B. Nous ferons, dans cette partie un usage répété de la proposition B.13, du lemme 3.8 et du principe du maximum de l'annexe C.

5.2.1 Action de l'opérateur M sur des distributions conormales

Proposition 5.8. — *Il existe ω, un voisinage complexe de A dans $\partial\Theta_1$ et $\chi \in G_0^3$ égale à 1 au voisinage de A, à support inclus dans la trace sur le réel de ω, $A, B, \varepsilon > 0$ et pour tout $s \geq 0$, il existe C_s tels que pour tout $\lambda \in U_{A,B}$ et tout $\sigma \in \mathcal{H}(\omega)$, on a*

$$\|\chi M \chi e^{-i\lambda|x|}\sigma - \chi e^{-i\lambda|x|}T'(\lambda)(\sigma)|_{\partial\Theta_1}\|_{H^s(\partial\Theta_1)} \leq C_s |\lambda|^s e^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}\|\sigma\|_{\mathcal{H}(\omega)}$$

et pour tout $\omega' \subset \omega$ voisinage complexe de A dans le complexifié de $\partial\Theta_1$, il existe $\chi' \in G_0^3$ égale à 1 au voisinage de A, à support inclus dans la trace sur le réel de ω, telle que la conclusion précédente reste vérifiée si on change χ en χ' et ω en ω'.

On prouve d'abord le cas $s = 1$. On commence, pour assurer que la transformée de Fourier inverse par rapport à λ de la donnée $\chi e^{-i\lambda|x|}\sigma$ est de classe $H^{1/2}$, par remplacer σ par $\frac{\sigma}{(\lambda-i)^2}$, ce qui ne change rien au problème, puisque

$$M\left(\frac{f}{(\lambda-i)^2}\right) = \frac{M(f)}{(\lambda-i)^2} \qquad \text{et} \qquad T'\left(\frac{\sigma}{(\lambda-i)^2}\right) = \frac{T'(\sigma)}{(\lambda-i)^2}.$$

On choisit W un voisinage de A tel qu'aucun des rayons issus de O, rencontrant $\overline{W}$, se réfléchissant à nouveau sur $\partial\Theta_2$ ne rencontre ensuite $\overline{W}$ sauf s'il a rencontré O à sa deuxième réflection sur $\partial\Theta_2$ (W doit être inclus dans la région grisée sur le dessin)

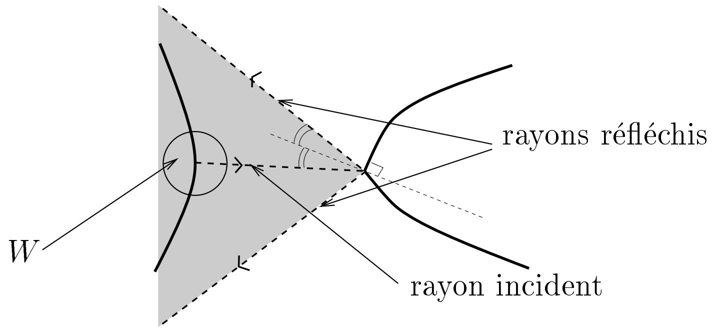

Fig. 5.1 – *Le voisinage W*

Soit $\chi \in G_0^3(W)$, égale à 1 au voisinage de A. On suppose que ω est tel que $\overline{W}$ est inclus dans la trace sur le réel de ω. Comme, d'après les équations de transport vérifiées par le symbole $T_1(\sigma)$, au voisinage de W, on a

$$\left(\Delta + \lambda^2\right)\left(H\left(\chi e^{-i\lambda|x|}\sigma(x,\lambda)\right) - e^{-i\lambda(|x|+2d)}T'(\sigma)\right) = e^{-i\lambda|x|}s(x,\lambda),$$

où s est une fonction holomorphe en $x \in \omega$ et vérifie $\|s\|_{\mathcal{H}(\omega)} \leq Ce^{-\varepsilon|\lambda|}$, d'après la proposition B.3, on a

$$\overline{W} \cap \widehat{\mathcal{SS}}_b^3\left(H\left(\chi e^{-i\lambda|x|}\sigma(x,\lambda)\right) - e^{-i\lambda(|x|+2d)}T'(\sigma)\right) = \emptyset. \tag{5.19}$$

On montre maintenant que pour tout $\sigma \in \mathcal{H}(\omega)$, et tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$\mathcal{SS}_b^3\left(H\left(\chi e^{-i\lambda|x|}\sigma(x,\lambda)\right) - e^{-i\lambda(|x|+2d)}T'(\sigma)\right) \cap \overline{W} = \emptyset. \tag{5.20}$$

Pour démontrer cette relation, on va procéder en plusieures étapes correspondant aux étapes suivies lors de la définition de l'opérateur T'.

Soit Γ_0 la réunion de la projection spaciale des demi-rayons issus du coin et se réfléchissant sur $\partial\Theta_1 \cap \{\chi(x) = 1\}$. Le symbole $\widetilde{\sigma}$ est, d'après les constructions du

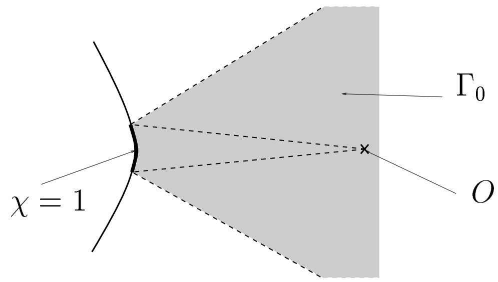

Fig. 5.2 – *Région éclairée par la réflexion sur $\{\chi = 1\}$ des rayons issus du coin*

chapitre 4, défini au voisinage de Γ_0. On a alors, si $\chi_1 \in G_0^3(\Theta_1^c)$ égale à 1 au voisinage de A est à support assez petit et inclus dans l'intersection de Γ_0 avec $\partial\Theta_2$,

$$\mathcal{SS}_b^3\left(\chi_1\left(H_1\left(\chi e^{-i\lambda|x|}\right) - e^{-i\lambda\varphi(x)}\widetilde{\sigma}\right)\right) = \emptyset, \tag{5.21}$$

$$\widehat{\mathcal{SS}}_b^3\left(\chi_1\left(H_1\left(\chi e^{-i\lambda|x|}\right) - e^{-i\lambda\varphi(x)}\widetilde{\sigma}\right)\right) = \emptyset. \tag{5.22}$$

La seconde relation est simplement conséquence de ce que, si on choisit sur le support de χ_1, on a $(\Delta + \lambda^2)\left(H_1\left(\chi e^{-i\lambda|x|}\right) - e^{-i\lambda\varphi(x)}\widetilde{\sigma}\right) = \mathcal{O}\left(e^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}\right)$ et des estimations elliptiques de l'annexe B. Pour démontrer la première relation, on procède par l'absurde, on note $D = \left(H_1\left(\chi e^{-i\lambda|x|}\right) - e^{-i\lambda\varphi(x)}\widetilde{\sigma}\right)$ et on choisit $\rho_0 = (x_0, \xi_0) \in \mathcal{SS}_b^3(D)$, tel que $x_0 \in \operatorname{supp}(\chi_1)$. Sur Γ_0, on a, modulo des termes négligeables,

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda^2)\, D = 0, \\ \quad D\,|_{\overline{\Gamma}_0 \cap \partial\Theta_1} = (1-\chi)\sigma e^{-i\lambda|x|}. \end{cases}$$

Or un calcul simple montre que si la phase ψ est réelle analytique et σ est un symbole analytique, $\mathcal{SS}_b^3\left(e^{-i\lambda\psi(x)}\sigma(x,\lambda)\right) \subset \{(x, -\nabla\psi)\}$. On a alors deux possibilités,

– Soit le demi-rayon issu de ρ_0 vers le passé rencontre le coin O après réflection sur $\partial\Theta_1$ (c'est à dire $\xi_0 = -\nabla\varphi(x_0)$

– Soit ce n'est pas le cas, donc $\rho_0 \notin \mathcal{SS}_b^3\left(e^{-i\lambda\varphi(x)}\widetilde{\sigma}\right)$ et $\rho_0 \in \mathcal{SS}_b^3\left(H_1\left(\chi e^{-i\lambda|x|}\right)\right)$. D'après la proposition B.13, le demi-rayon issu vers le passé de ρ_0 reste donc inclus dans $\mathcal{SS}_b^3\left(H_1\left(\chi e^{-i\lambda|x|}\right)\right)$ tant qu'il ne rencontre pas $\mathcal{SS}\left(\chi\sigma e^{-i\lambda|x|}\right)$. Or, puisque $-\nabla\varphi(x_0) \neq \xi_0$, si ce demi-rayon rencontre $\partial\Theta_1$, c'est en un point unique (x_1, ξ_1) ou $\Pi_{T^*\partial\Theta_1}(\xi_1) \neq -\nabla_x(|x|)$ donc en un point qui n'appartient pas à $\mathcal{SS}_b^3\left(e^{-i\lambda|x|}\sigma\right)$. On peut donc continuer à propager la singularité après le point ρ_1, ce qui est absurde d'après la proposition (3.5). On est donc nécessairement dans le premier cas.

On se place donc dans le premier cas. Au voisinage du demi-rayon (de Θ_1^c) issu de ρ_0, on a

$$\left(\Delta + \lambda^2\right) D = 0 \quad D\,|_{\Gamma_0 \cap \partial\Theta_1} = 0,$$

puisque ce demi-rayon est inclus dans Γ_0 tant qu'il ne rencontre pas le bord de Θ_1 et le rencontre donc en un point où $\chi_1 = 1$. D'après les résultats de propagation des singularités de l'annexe B, ce demi-rayon est inclus dans $\mathcal{SS}_b^3(D)$ et après réflection, les points correspondants ne peuvent pas être dans $\mathcal{SS}_b^3\left(e^{-i\lambda\varphi(x)}\widetilde{\sigma}\right)$ (puisqu'alors $-\nabla\varphi(x) \neq \xi$ et donc, après réflection $-\nabla|(x)| \neq \xi$) et sont donc dans $\mathcal{SS}_b^3\left(H_1\left(\chi e^{-i\lambda|x|}\sigma\right)\right)$ et la proposition (3.5) fournit encore une contradiction. Nous avons donc montré la relation (5.21). D'après les relations (5.21), (5.22), la proposition B.14 et la remarque B.15, pour tout $\sigma \in \mathcal{H}(\omega)$, il existe $C, \varepsilon > 0$ tels que

$$\left\|\chi_1\left(H_1\left(\chi\sigma e^{-i\lambda|x|}\right) - e^{-i\lambda\varphi(x)}\widetilde{\sigma}\right)\right\|_{H_1(\mathbf{R}^2)} \leq C e^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}} \|\sigma\|_{\mathcal{H}(\omega)}. \tag{5.23}$$

Puis en utilisant le lemme 3.8, on montre qu'on peut choisir C et ε indépendants de σ.

On s'intéresse maintenant à la différence $H_2H_1\left(\chi\sigma e^{-i\lambda|x|}\right) - H_2\left(\chi_1 e^{-i\lambda\varphi(x)}\widetilde{\sigma}\right)$. Pour cela, on commence par démontrer le

Lemme 5.9. — *L'intersection de l'ensemble $\overline{W}$ avec la projection spaciale de l'ensemble de fréquence $\mathcal{SS}_b^3\left(H\left(\chi\sigma e^{-i\lambda|x|}\right) - H_2\left(\chi_1\widetilde{\sigma}e^{-i\lambda\varphi(x)}\,|_{\partial\Theta_2}\right)\right)$ est vide.*

En effet, sur Θ_2^c, la différence, D de ces deux termes est égale à

$$D = H_2\left(\left(1-\chi_1\right)H_1\left(\chi\sigma e^{-i\lambda|x|}\right)\right) + H_2\left(\chi_1\left(H_1\left(\sigma e^{-i\lambda|x|}\right) - \widetilde{\sigma}e^{-i\lambda\varphi(x)}\right)\right)$$

D'après l'estimation (5.23), il est facile de voir que la contribution du second terme de bord est négligeable; donc si $\rho_0 \in \mathcal{SS}_b^3\left(H\left(\chi\sigma e^{-i\lambda|x|}\right) - H_2\left(\chi_1\widetilde{\sigma}e^{-i\lambda\varphi(x)}\,|_{\partial\Theta_2}\right)\right) \cap \overline{W}$, on a aussi $\rho_0 \in \mathcal{SS}_b^3\left(H_2\left(\left(1-\chi_1\right)H_1\left(\chi\sigma e^{-i\lambda|x|}\right)|_{\partial\Theta_2}\right)\right) \cap \overline{W}$. D'après la proposition B.13, le demi-rayon issu de ρ_0, vers le passé reste inclus dans l'ensemble de fréquence tant qu'il ne rencontre pas $\partial\Theta_2$ en un point ρ_1 tel que d'une part x_1 appartienne au support de la fonction χ_1 et d'autre part, ρ_1 appartienne à l'ensemble de fréquence Gevrey 3 de $H_1\left(\chi\sigma e^{-i\lambda|x|}\right)|_{\partial\Theta_2}$. Or, en utilisant encore les résultats de propagation des singularités et la proposition 3.5, il est facile de voir que l'ensemble de fréquence Gevrey 3 de $H_1\left(\chi\sigma e^{-i\lambda|x|}\right)$ est inclus dans la réunion des demi-rayons (de Θ_1^c) issus, vers le futur du support de χ. Ce procédé nous permet donc de construire un demi-rayon (de $(\Theta_1 \cup \Theta_2)^c$), issu vers le futur du support de χ, se réfléchissant sur Θ_2 en un point distinct du coin (puisque dans le support de $1-\chi_1$) et rencontrant par la suite $\overline{W}$, ce qui est absurde. Nous avons donc démontré le lemme 5.9.

Lemme 5.10. — *La projection spaciale de l'ensemble de fréquence*

$$\mathcal{SS}_b^3\left(H_2\left(\chi_1\widetilde{\sigma}e^{-i\lambda\varphi(x)}\,|_{\partial\Theta_2}\right) - e^{-i\lambda|x|+2d}\widehat{\sigma}\right) \tag{5.24}$$

ne rencontre pas $\overline{W}$.

En effet, on raisonne comme précedemment par l'absurde et on choisit ρ_0 dans cet ensemble et tel que $x_0 \in \overline{W}$. Si le demi-rayon (de Θ_2^c) ne rencontre pas le coin, alors $\rho_0 \notin \mathcal{SS}_b^3\left(\widehat{\sigma}e^{-i\lambda(|x|+2d)}\right)$, donc $\rho_0 \in \mathcal{SS}_b^3\left(H_2\left(\chi_1\widetilde{\sigma}e^{-i\lambda\varphi(x)}\,|_{\partial\Theta_2}\right)\right)$ et comme précedemment, on peut construire un demi-rayon (de $(\Theta_1 \cup \Theta_2)^c$), issu vers le futur du support de χ, se réfléchissant sur $\partial\Theta_2$ en un point distinct du coin et rencontrant $\overline{W}$, ce qui est absurde. Donc nécessairement le demi-rayon (de $\mathbf{R}^2$) issu de ρ_0 vers le passé rencontre le coin et reste tant qu'il n'a pas rencontré le coin, inclus dans l'ensemble (5.24). On considère

$$w(t,x) = \int e^{i\lambda(t-\varphi(x))}\widetilde{\sigma}(x,\lambda)\, d\lambda \mid_{\partial\Theta_2},$$

qui est supportée par $\{t \geq 2d\}$ puisque $\varphi \mid_{\partial\Theta_2} \geq 2d$. Soit V la solution de

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2 - \Delta\right) V = 0 \text{ dans } \Theta_2^c, \\ \quad V \mid_{t<2d} = 0, \\ \quad V \mid_{\partial\Theta_2} = \int \chi_1 \widetilde{\sigma} e^{i\lambda(t-\varphi(x))}. \end{cases}$$

P. Gérard et G. Lebeau montrent dans [8] qu'au voisinage de $t = 2d$, la fonction V s'écrit, dans Γ_1, l'intersection avec un voisinage de O d'un cône de sommet O et contenant le segment $[A, O]$ (et donc aussi $\overline{W}$ si W est assez petit), modulo une fonction analytique,

$$V(t,x) = -\int e^{i\lambda(t-(|x|+2d))}\widehat{\sigma}(x,\lambda)\, d\lambda. \tag{5.25}$$

On va montrer qu'il en est de même, pour tout t et tout $x \in \overset{\circ}{\Gamma}_1$, modulo une fonction Gevrey 3. On note D la différence des deux termes de l'équation (5.25), qui est bien définie sur $\overset{\circ}{\Gamma}_1$ et qui y vérifie

$$\left(\partial_t^2 - \Delta\right) D = N(t,x), \tag{5.26}$$

avec $N(t,x)$ analytique dans $\overset{\circ}{\Gamma}_1$ (pas jusqu'au bord de Γ_1 à cause de la singularité due au coin). On prend $\rho_0 \in SS_b^3(D)$ tel que x_0 appartient à Γ_2. On a alors deux possibilités :

- Soit le demi-rayon issu de ρ_0 vers le passé ne rencontre pas le coin, pour $t = 2d$
- Soit ce demi-rayon ne rencontre pas le coin ou le rencontre pour $t = 2d$.

Dans le premier cas, $\rho_0 \notin SS_b^3\left(\int e^{i\lambda(t-(|x|+2d))}\widehat{\sigma}(x,\lambda)\, d\lambda = V'(t,x)\right)$, donc, $\rho_0 \in SS_b^3(V)$ et d'après les théorèmes de propagation des singularités, le rayon (de Θ_2^c) issu de ρ_0 reste dans cet ensemble, tant qu'il ne rencontre pas le bord de Θ_2 en un point appartenant au support de χ_1. Donc, il le rencontre nécessairement avant $t \leq 2d$ (puisque, pour $t < 2d$, $V = 0$) et si c'est en un point distinct du coin, c'est aussi, d'après les théorèmes de propagation des singularités dans les domaines analytiques, en un point appartenant à $SS^3\left(\int e^{i\lambda(t-\varphi(x))}\widetilde{\sigma}(x,\lambda)\, d\lambda \mid_{\partial\Theta_2}\right)$. Comme il est clair que cet ensemble est inclus dans la projection sur $T^*\partial\Theta_2$ de $SS^3\left(\int e^{i\lambda(t-\varphi(x))}\widetilde{\sigma}(x,\lambda)\, d\lambda\right)$ qui lui même est inclus dans la projection spaciale de l'ensemble $\{(t,x,\tau,\xi); t = \varphi(x), \tau = 1, \xi = -\nabla\varphi(x)\}$, on pourrait construire un rayon (de $(\Theta_1 \cup \Theta_2)^c$) issu d'un point de l'ensemble $\chi = 1$ se réfléchissant sur $\partial\Theta_2$, en un point distinct du coin, puis rencontrant un point de $\overline{W}$, ce qui est absurde. Donc, nécessairement, le demi-rayon issu de ρ_0, vers le passé rencontre le coin, en un point, ρ_1. Si $t_1 \neq 2d$, on choisit $\psi \in G_0^3(\mathbf{R}_t)$ égale à 1 au voisinage de t_1 et dont le support ne rencontre pas un voisinage de $t = 2d$. On remarque maintenant que au voisinage de t_1, la fonction $b(x,t) = \chi_1 \int e^{i\lambda(t-\varphi(x))}\widetilde{\sigma}(x,\lambda)\, d\lambda \mid_{\partial\Theta_2}$ est telle que $b \times \psi$ est de classe Gevrey 3 en temps à valeurs $H^{1/2}(\partial\Theta_2)$. On écrit $V = V_1 + V_2$ avec

$$\left(\partial_t^2 - \Delta\right) V_1 = 0, \text{ dans } \Theta_2^c,\ V_1 \mid_{t<2d} = 0,\ V_1 \mid_{\partial\Theta_2} = \psi b$$

et

$$\left(\partial_t^2 - \Delta\right) V_2 = 0, \text{ dans } \Theta_2^c,\ V_2 \mid_{t<2d} = 0,\ V_2 \mid_{\partial\Theta_2} = (1-\psi)b.$$

D'après ce qui précède, la fonction V_1 est de classe Gevrey 3 en temps à valeurs H^1 et V_2 est solution d'une équation d'onde, avec conditions de Dirichlet au voisinage du coin et de t_1; on peut donc lui appliquer les résultats de propagation des singularités dans les ouverts à coin, et comme, pour $t > t_1$, V a une singularité Gevrey 3 qui arrive sur le coin pour $t = t_1$, il en est de même pour V_2 et comme au voisinage du coin et de $t = t_1$, $\Psi = 1$, V_2 possède une singularité Gevrey 3 qui repart du coin vers $t < t_1$, qui, puisque Θ_2 est convexe, ne peut plus rencontrer l'obstacle Θ_2 par la suite, donc, par propagation des singularités à l'intérieur, cette singularité rentre dans $t < 2d$, ce qui est absurde. Finalement, on est nécessairement dans le deuxième cas, c'est-à-dire que le demi-rayon issu vers le passé de ρ_0 rencontre le coin pour $t = 2d$. Comme $\rho_0 \in SS_b^3(D)$ et le long de ce demi-rayon (avant de rencontrer le coin), on reste dans Γ_2, d'après l'équation (5.26), le demi-rayon issu de ρ_0 vers le passé reste dans $SS_b^3(D)$, tant qu'il ne rencontre pas le coin, donc rentre dans une région où l'équation (5.25) est vérifiée, donc où D est analytique, ce qui est absurde.

On montre enfin comme on l'a fait pour l'étude de l'opérateurH_a, pages 46 et suivantes que la contribution d'une fonction de classe Gevrey 3 à la résolvante est de norme $\mathcal{O}\left(e^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}\right)$, donc que la solution sortante de l'équation

$$\left(\Delta + \lambda^2\right) v = 0 \text{ dans } \Theta_2^c,\ v \mid_{\partial\Theta_2} = \chi_1 \widetilde{\sigma} e^{-i\lambda\varphi(x)}$$

est, sur $\overline{W}$, égale à $e^{-i\lambda(|x|+2d)}\widehat{\sigma}$ modulo un terme r tel que $\|r\|_{H^1(W)} \leq Ce^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}$. On en déduit le lemme 5.10. Les lemmes 5.9 et 5.10 impliquent la relation (5.20). Les estimations (5.19), (5.20), la proposition B.14, la remarque B.15, le lemme 3.8 et le principe du maximum montrent la proposition 5.8, dans le cas $s = 1$, le cas général est conséquence de ce cas particulier et de l'équation vérifiée par $M\chi e^{-i\lambda|x|}\sigma - e^{-i\lambda|x|}T'(Ml)(\sigma)$ au voisinage du support de la fonction χ.

5.2.2 Estimations diverses sur des termes de reste

Le but de cette partie est de donner des estimations sur des termes qu'on considèrera dans la section suivante comme des termes de reste, en utilisant toujours de façon systématique des arguments de propagation des singularités. Nous avons rassemblé ces estimations dans la

Proposition 5.11. — *Il existe W un voisinage de A dans $\partial\Theta_1$ et un entier m, tels que pour tout ω, voisinage complexe de A dans le complexifié de $\partial\Theta_1$ tel que la trace* *de ω sur le réel contient $\overline{W}$, pour toute fonction $\chi \in G_0^3(W)$ égale à 1 au voisinage de A, il existe $A, B, C, \varepsilon > 0$ tels que pour tout $p \in \mathbf{N}$, tout $\lambda \in U_{A,B}$ et tout $f \in H^{1/2}(\partial\Theta_1)$ on a*

$$(5.27)\qquad \begin{cases} \|\chi M^p(1-\chi)M_a M^m(f)\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)} \leq Ce^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}\|f\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)}, \\ \|M^m((1-\chi)M_a M^m)\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)} \leq Ce^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}\|f\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)}, \end{cases}$$

$$(5.28)\qquad \begin{cases} \|\chi M^p(1-\chi)M^m(f)\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)} \leq Ce^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}\|f\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)}, \\ \|M^m((1-\chi)M^m)\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)} \leq Ce^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}\|f\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)}, \end{cases}$$

$$(5.29)\qquad \begin{cases} \|\chi M^p M_b M^m f\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)} \leq Ce^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}\|f\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)}, \\ \|M^m M_b M^m f\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)} \leq Ce^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}\|f\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)} \end{cases}$$

et pour tout $\sigma \in \mathcal{H}(\omega)$,

$$(5.30)\qquad \begin{cases} \|\chi M^p(1-\chi)M\chi\left(e^{-i\lambda|x|}\sigma\right)\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)} \leq Ce^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}\|\sigma\|_{\mathcal{H}(\omega)}, \\ \|M^m(1-\chi)M\chi\left(e^{-i\lambda|x|}\sigma\right)\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)} \leq Ce^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}\|\sigma\|_{\mathcal{H}(\omega)}, \end{cases}$$

$$(5.31)\qquad \begin{cases} \|\chi M^p(1-\chi)\chi\left(e^{-i\lambda|x|}\sigma\right)\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)} \leq Ce^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}\|\sigma\|_{\mathcal{H}(\omega)}, \\ \|M^m(1-\chi)\chi\left(e^{-i\lambda|x|}\sigma\right)\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)} \leq Ce^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}\|\sigma\|_{\mathcal{H}(\omega)} \end{cases}$$

et pour tout $q \in \mathbf{N}$, et tout $d \in \mathbf{C}^{2N+1}$,

$$(5.32)\qquad \begin{cases} \|(\chi M)^p(1-\chi)M^q\chi\left(e^{-i\lambda|x|}P_N(d)\right)\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)} \leq Ce^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}\|d\|, \\ \|M^m(1-\chi)M^q\chi\left(e^{-i\lambda|x|}P_N(d)\right)\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)} \leq Ce^{-\varepsilon|\lambda|^{1/3}}\|d\|. \end{cases}$$

Pour démontrer cette proposition, on commence par montrer le lemme suivant :

Lemme 5.12. — *Il existe un voisinage V de A dans $\mathbf{R}^2$ et $N \in \boldsymbol{N}$ tels que*

- *Tout demi-rayon faisant au moins N réflexions successives sur $\partial\Theta_1$ et $\partial\Theta_2$ a nécessairement rencontré le coin.*
- *Aucun demi-rayon issu du coin, ne rencontrant pas A à sa première réflexion sur $\partial\Theta_1$ ne rencontre par la suite V*
- *Aucun demi-rayon issu du coin, rencontrant lors d'une réflexion entre $\partial\Theta_1$ et $\partial\Theta_2$ le support de χ_b ne rencontre par la suite V.*
- *Tout demi-rayon issu du coin, qui rencontre lors d'une réflexion sur $\partial\Theta_1$ un point distinct de A fait par la suite au plus N réflexions sur $\partial\Theta_1$.*

De plus, si $V' \subset V$ est un autre voisinage de A dans $\mathbf{R}^2$, V' vérifie encore ces propriétés.

La première proposition est une conséquence directe de la stricte convexité des obstacles Θ_1 et Θ_2 et de la présence du coin O sur la trajectoire qui minimise la distance entre Θ_1 et Θ_2.

Pour vérifier la deuxième, il suffit de prendre V inclus dans le secteur angulaire délimité par les deux rayons réfléchis sur les deux faces de $\partial\Theta_2$ associés au rayon incident $[A, O]$.

Comme χ_b est identiquement nulle au voisinage du segment $[A, O]$, tout rayon issu du coin qui rencontre le support de χ_b sort du secteur angulaire défini précedemment définitivement, d'où la troisième proposition.

Enfin, la quatrième proposition est conséquence directe de la première.

Lemme 5.13. — *Pour tout $f \in H^{1/2}(\partial\Theta_1)$, l'intersection de l'ensemble de fréquence Gevrey 3 de $H_1(f)$ avec Θ_1^c est inclus dans la réunion des demi-rayons (de Θ_1^c) issus vers le futur de l'intersection de $\mathcal{SS}^3(f)$ avec la projection sur $T^*\partial\Theta_1$ de la variété caractéristique $|\xi|^2 = 1$.*

En effet, il est facile de voir que la proposition 3.5 reste vraie pour H_1 et les résultats de propagation des singularités montrent que si $\rho_0 \in \mathcal{SS}_b^3(H_1(f))$, il en est de même du demi-rayon issu de ρ_0 vers le passé tant qu'il ne rencontre pas $\mathcal{SS}^3(f)$, et nécessairement, d'après la proposition 3.5, il doit rencontrer cet ensemble.

Lemme 5.14. — *Il existe V un voisinage de Θ_1 tel que pour tout $f \in H^{1/2}(\partial\Theta_1)$, l'intersection de l'ensemble de fréquence Gevrey 3 de $H(f)$ avec V est inclus dans la réunion des demi-rayons (de Θ_2^c) issus vers le futur de l'intersection de $\mathcal{SS}^3(f)$ avec la projection sur $T^*\partial\Theta_1$ de la variété caractéristique $|\xi|^2 = 1$, et se réfléchissant sur $\partial\Theta_2$.*

En effet, la proposition 3.5 reste vraie pour H_2 et si $\rho_0 \in \mathcal{SS}_b^3(H(f)) \cap T^*(\Theta_2^c)$, par propagation des singularités, il en est de même du demi-rayon (de Θ_2^c) issu de ρ_0 vers le passé, tant qu'il ne rencontre pas $\partial\Theta_2$. D'après la proposition 3.5, il rencontre nécessairement $\partial\Theta_2$. Soit ρ_1 un point sur ce rayon proche de $\partial\Theta_2$. Au voisinage de $\partial\Theta_2$, on a $(\Delta + \lambda^2)(H(f) - H_1(f)) = 0$, $H(f) - H_1(f)\,|_{\partial\Theta_2} = 0$, donc si $\rho_1 \notin \mathcal{SS}_b^3(H_1(f))$, un des demi-rayons (de Θ_2^c) issus de ρ_1 vers le passé (à cause du coin, on n'a plus unicité) reste, au voisinage de Θ_2 dans $\mathcal{SS}_b^3(H(f) - H_1(f))$, comme d'après la proposition 3.5, après réflexion sur $\partial\Theta_2$, le demi-rayon ne peut pas rencontrer $\mathcal{SS}_b^3(H(f))$, il est inclus dans $\mathcal{SS}_b^3(H_1(f))$, ce qui permet de conclure d'après le lemme 5.13. Le seul problème est donc si $\rho_1 \in \mathcal{SS}_b^3(H_1(f))$, ce qui implique, d'après le lemme 5.13 qu'il existe $x \in \partial\Theta_1$ tel que $x_1 \in [x, x_o]$. Ce dernier cas est exclu, si on a pris le point x_0 tel que pour tout $x \in \Theta_1$, le segment $[x_0, x]$ ne rencontre pas $\partial\Theta_2$, ce qui est possible si V est assez petit. On démontre de la même manière le

Lemme 5.15. — *Il existe V un voisinage de Θ_1 tel que pour tout $f \in H^{1/2}(\partial\Theta_1)$, l'intersection de l'ensemble de fréquence Gevrey 3 de $H_a(f)$ (respectivement $H_b(f)$) avec V est inclus dans la réunion des demi-rayons (de Θ_2^c) issus vers le futur de l'intersection de $\mathcal{SS}^3(f)$ avec la projection sur $T^*\partial\Theta_1$ de la variété caractéristique $|\xi|^2 = 1$, se réfléchissant sur $\partial\Theta_2$ et rencontrant le support de la fonction χ_a (respectivement χ_b).*

Pour démontrer les relations (5.27), (5.28), il suffit de démontrer que les ensembles de fréquence correspondants sont vides, d'utiliser les estimations elliptiques pour montrer que les ensembles de fréquence à l'infini sont également vides, puis d'utiliser la proposition B.14 et la remarque B.15 pour en déduire une estimation, enfin, on utilise le lemme 3.8 pour montrer que les constantes ne dépendent pas de f, puis pour conclure, on propage les estimations sur le réel à un domaine $U_{A,B}$, en utilisant le principe du maximum de l'annexe C. Pour démontrer que les ensembles de fréquence correspondants sont vides, on utilise les lemmes 5.14, 5.15, en remarquant que l'ensemble de fréquence de la restriction à $\partial\Theta_1$ d'une fonction g est inclus dans la projection sur $T^*\partial\Theta_1$ de l'ensemble de fréquence de g, et on conclut en utilisant les propriétés géométriques de la proposition 5.12. Les relations (5.29), (5.30), (5.31) et (5.32) se démontrent de la même manière en remarquant de plus que

$$\mathcal{SS}_b^3\left(\sigma e^{-i\lambda|x|}\right) \subset \Pi_{T^*\partial\Theta_1}\left(\left\{\left(x, -\frac{x}{|x|}\right)\right\}\right).$$

5.3 Résolution d'un problème de Grushin

Définition 5.16. — *On notera, pour $\omega \subset \partial\Theta_1$, $s \in \mathbf{N}$, $H^s(\omega)$ l'espace de Sobolev d'ordre s sur ω, muni de la norme*

$$\|u\|_s(\omega) = \left(\sum_{|p|\le s} \|(\partial_\theta)^p u\|^2_{L^2(\omega)}\right)^{1/2},$$

de telle façon que si $\sigma \in \mathcal{H}(\omega)$, ω un voisinage complexe de A, alors, pour tout $\chi \in G_0^3(\omega)$, $\|\chi e^{-i\lambda|x|}\sigma\ |_{\partial\Theta_1}\ \|_s(\omega \cap \partial\Theta_1) \le C_s|\lambda|^s\|\sigma\|_{\mathcal{H}(\omega)}$.

Le but de cette partie est la démonstration du résultat suivant :

Proposition 5.17. — *Pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tels que pour tout $\lambda \in \Lambda_{\varepsilon,N} \cap \{|\lambda| > A\}$, on peut résoudre dans $H^{2N+1}(\partial\Theta_1) \times \mathbf{C}^{2N+1}$ le problème de Grushin :*

$$\begin{cases} (Id - M)\, u - e^{-i\lambda|x|}P_N(C) = f, \\ \qquad\qquad G_N\left(e^{i\lambda|x|}u\right) = D. \end{cases} \tag{5.33}$$

La solution de ce problème est unique et holomorphe en $\lambda \in \Lambda_{\varepsilon,N} \cap \{|\lambda| > A\}$. On la notera

$$\begin{pmatrix} u \\ C \end{pmatrix} = \mathcal{E}(\lambda)\begin{pmatrix} f \\ D \end{pmatrix},$$

avec

$$\mathcal{E}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}^0 & \mathcal{E}^{+,-} \\ \mathcal{E}^{-,+} & \mathcal{E}^{\pm} \end{pmatrix}.$$

Cette solution est telle qu'il existe C, N, D tels que pour tout $\lambda \in \Lambda_{\varepsilon,N}$,

$$\|\mathcal{E}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_{2N+1}\times\mathbf{C}^{2N+1})} \le C|\lambda|^N e^{DIm\lambda^+} \tag{5.34}$$

et il existe $C, \eta > 0$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda_{\varepsilon,N}$,

$$\|\mathcal{E}^{\pm} - E^{\pm}_{N,1}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{C}^{2N+1})} \le Ce^{-\eta|\lambda|^{1/3}}. \tag{5.35}$$

Remarque 5.18. — *Ce problème de Grushin a bien un sens sur $H^{2N+1}(\partial\Theta_1)$ puisque cet espace s'injecte continuement dans $C^{2N}(\partial\Theta_1)$, d'après les théorèmes d'injection de Sobolev.*

L'idée de la démonstration est la suivante : dans un premier temps, on s'intéresse uniquement à la question de l'existence et pour cela, on se ramène par des arguments de perturbation , en utilisant les résultats de la section précédente, au problème résolu par la proposition 5.3. On ne s'intéresse pas dans cette première étape au caractère holomorphe du problème. Dans un deuxième temps, on démontre l'unicité. L'holomorphie de l'inverse est automatique, puisque cet inverse que nous construisons est continu.

5.3.1 Existence d'une solution

Soit $m \in \mathbf{N}$, que nous fixerons plus tard (on le prendra assez grand pour que les estimations de la section 5.2 soient vérifiées). Soient

$$\begin{cases} u_1 = u - \sum_{i=0}^{m} M^i f, \\ D_1 = D - \sum_{i=0}^{m} G_N \left(e^{i\lambda|x|} M^i u\right). \end{cases}$$

Il existe $A, B, C > 0$ tels que pour tout $\lambda \in U_{A,B}$ et tout $s \in \mathbf{N}$ il existe $C_s > 0$ tel que

(5.36)
$$\|u - u_1\|_s \leq C_s |\lambda|^{s+2} e^{C_s \mathrm{Im}\lambda^+} \|f\|_{1/2}, \qquad \|D - D_1\| \leq C|\lambda|^{2N+3} e^{C_s \mathrm{Im}\lambda^+} \left(\|f\|_{1/2}\right).$$

En effet, on a

$$\|H(f)\|_{H^1(\Omega)} \leq C|\lambda|^2 e^{C\mathrm{Im}\lambda^+} \|f\|_{1/2}$$

en écrivant $H_1 \circ \gamma_1 H_2 f = \kappa H_2 f - R_1 [\Delta, \kappa] H_1 f$ avec $\kappa \in C_0^\infty(\Theta_2^c)$ égale à 1 au voisinage de Θ_1, on en déduit qu'on a aussi

$$\left\|H^k(f)\right\|_{H^1(\Omega)} \leq C_s |\lambda|^2 e^{C_s \mathrm{Im}\lambda^+} \|f\|_{1/2}$$

et comme au voisinage de Θ_1, $H^s(f)$ est solution de $(\Delta + \lambda^2) H(f) = 0$, on a, si V est un voisinage de Θ_1,

$$\left\|H^k(f)\right\|_{H^s(\Omega)} \leq C_{s,k} |\lambda|^s \|H^k(f)\|_{1/2},$$

l'estimation (5.36) en découle. On a aussi

$$\|D - D_1\| \leq C|\lambda|^{2N+3} e^{C\mathrm{Im}\lambda^+} \|f\|_{1/2}.$$

Trouver (u, C) solution du système (5.33) est équivalent à trouver (u_1, C) solution du même système, où on a remplacé f par $M^{m+1}(f)$ et D par D_1.

D'après la proposition 4.10, il existe $\alpha, D > 0$ et $\chi \in G_0^3(\partial\Theta_1)$, égale à 1 au voisinage du point A tels qu'il existe des opérateurs $R \in \mathcal{N}\left(\mathcal{L}\left(H^{1/2}(\partial\Theta_1)\ ; H^1(\Theta_2^c)\right)\right)$ et $\sigma \in \mathcal{A}\left(\mathcal{L}\left(H^{1/2}(\partial\Theta_1) ; \mathcal{H}_{\alpha,D}(\partial\Theta_1)\right)\right)$ tels que

(5.37)
$$M^{m+1} = \chi e^{-i\lambda|x|} \sigma(M^m) + (1-\chi) M_a M^m + M_b M^m + \chi R$$

et la forme de σ donnée par la relation (4.17) montre que pour tout λ, on a

$$\sup_x |\sigma(u)| \leq Ce^{C\mathrm{Im}\lambda^+} \|u\|_{1/2}(\partial\Theta_1) \tag{5.38}$$

et

$$e^{-C\mathrm{Im}\lambda^+} \sup_{s\leq 0} \int_{\mathrm{Im}\lambda=-s} \left(1+|\lambda|^2\right) |\sigma(u)(x,\lambda)\, d\lambda \leq C\|u\|_{1/2}(\partial\Theta_1).$$

Si on considère $\sigma(M^m(u_1))$, comme une fonction holomorphe de la variable x dépendant de λ comme d'un paramètre, on peut appliquer au couple $(\sigma(M^m(u_1)), D_1)$ l'opérateur $\mathcal{E}_{N,1}$ défini en (5.8). Soit

$$(s,C) = \mathcal{E}_{N,1}(\sigma(M^m(u_1)), D_1).$$

D'après la proposition 5.8, il existe ω, un voisinage complexe de A dans $\partial\Theta_1$, χ égale à 1 au voisinage de A, à support inclus dans $'\omega$ et $C, A, B, \eta > 0$ et pour tout $s \geq 0$, il existe C_s tels que pour tout $\lambda \in U_{A,B}$ et tout $\sigma \in \langle(\omega)$, on a

$$\|\chi M\chi e^{-i\lambda|x|}\sigma - \chi e^{-i\lambda|x|}T'(\lambda)(\sigma)\,|_{\partial\Theta_1}\,\|_{H^s(\partial\Theta_1)} \leq C_s |\lambda|^{N+s} e^{-\eta|\lambda|^{1/3}} \|\sigma\|_{\mathcal{H}(\omega)}. \tag{5.39}$$

On applique ce résultat à $s_\lambda(x) = \sigma$, λ fixe. Comme les opérateurs M et T' commmutent à la restriction en λ_0, on obtient, pour tout λ,

$$\left\|\chi M\chi e^{-i\lambda|x|}s - \chi e^{-i\lambda|x|}T'(\lambda)(s)\,|_{\partial\Theta_1}\right\|_{H^s(\partial\Theta_1)} \leq C_s |\lambda|^{N'+s} e^{-\eta|\lambda|^{1/3}} \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)}.$$

La fonction $u_2 = \chi e^{-i\lambda|x|}s_\lambda(x,\lambda)$ définie pour $\lambda \in \Lambda_{\varepsilon,N}$, ε assez petit vérifie donc

$$\begin{cases} u_2 - \chi M(\lambda)\, u_2 - \chi e^{-i\lambda|x|}P_N(C) = \chi e^{-i\lambda|x|}\sigma(M^m(f)) + R(f), \\ \qquad G_N\left(\chi e^{i\lambda|x|}u_2\right) = D_1. \end{cases} \tag{5.40}$$

où l'opérateur R vérifie pour tout $\lambda \in \Lambda_{\varepsilon,N}$, $\|e^{|\lambda|^{1/3}/C}R\|_{2N+1} \leq C$.

On cherche maintenant $u_3 = u_1 - u_2$ telle que

$$\begin{cases} (Id - M)\, u_3 = (1-\chi)e^{-i\lambda|x|}\left(P_N(c) + \sigma(M^m(f))\right) + (1-\chi)\, Mu_2 \\ \qquad\qquad + (1-\chi)M_aM^m(f) + M_bM^m(f) + \chi R(f) \\ \qquad = A(f,d) + \chi R(f) \\ G_N\left(e^{i\lambda|x|}u_3\right) = 0. \end{cases}$$

On va pouvoir résoudre ce problème de manière approchée ; d'après la relation (5.40), il est facile de voir que

$$\begin{aligned} &(1-\chi)\, Mu_2 \\ &\quad = (1-\chi)\, M(\chi M)^m u_2 + \sum_{i=0}^{m-1} (1-\chi)\, M(\chi M)^i \left(\chi e^{-i\lambda|x|}\left(P_N(c) + \sigma(M^m(f))\right)\right). \end{aligned}$$

Soit $u_3 = \sum_{i=0}^{m} M^i\left(A\left(f,d\right)\right)$. On a

$$(Id - M)\,u_3 = A(f,d) + M^m\left(A(f,d)\right).$$

D'après les estimations de la proposition 5.11, la fonction u_3 ainsi définie vérifie, si on a choisi l'entier m assez grand :

$$\begin{aligned}
&\|(Id - M)\,u_3 - A\left(f,D\right)\|_{H^{2N+1}(\partial\Theta_1)}\\
&\quad\leq Ce^{-\eta|\lambda|^{1/3}}\Big(\|f\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)} + \|u_2\left(\lambda\right)\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)} + \|P_N\left(C\right)\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)} + \|\sigma_\lambda\|_{\mathcal{H}(\omega)}\Big)
\end{aligned}$$

et donc, d'après (5.38) et les estimations de la proposition 5.3, on a

$$\|(Id - M)\,u_3 - A\left(f,D\right)\|_{H^{2N+1}(\partial\Theta_1)} \leq Ce^{-\eta|\lambda|^{1/3}}\Big(\|f\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)} + \|D\|\Big).$$

On a également d'après les estimations de la proposition 5.11,

$$\left\|G_N\left(e^{i\lambda|x|}u_3\right)\right\| \leq Ce^{-\eta|\lambda|^{1/3}}\Big(\|f\|_{H^{1/2}(\partial\Theta_1)} + \|D\|\Big).$$

En résumé, nous avons montré que le couple $(u = \sum_{i=0}^{m} M^i\left(f\right) + u_2 + u_3, C)$ vérifie

$$\begin{cases}(Id - M)\,u = f + R_1(f,d),\\ G_N\left(e^{i\lambda|x|}u\right) = D + R_2(f,d),\end{cases}$$

avec des opérateurs $(R_1,R_2) \in \mathcal{L}\left(\widetilde{\mathcal{H}}^{2N}_{\Lambda_{\varepsilon,N}}\left(\partial\Theta_1\right) \times \mathbf{C}^{2N+1}\right)$ vérifiant pour tout $\lambda \in \Lambda_{\varepsilon,N}$

$$\|\left(R_1,R_2\right)\|_{\mathcal{L}(H^{2N+1}(\partial\Theta_1)\times\mathbf{C}^{2N+1})} \leq C|\lambda|^C e^{-|\lambda|^{1/3}/C}.$$

L'opérateur $Id + (R_1,R_2)$ étant donc clairement inversible par une série de Neumann, si $|\lambda|$ est assez grand, nous avons montré l'existence d'un inverse a gauche qui vérifie les estimations (5.34), pour le problème de Grushin initial. Il reste à prouver l'unicité.

5.3.2 Unicité de la solution

On fixe, dans cette partie les nombres ε et N vérifiant les conditions nécessaires pour l'existence d'un inverse à gauche. On pourra éventuellement les diminuer un nombre fini de fois. Aucune des constantes que nous introduirons ne dépendra de $\lambda \in \Lambda_{\varepsilon,N}$.

Soient $(u,C) \in H^{2N+1}\left(\partial\Theta_1\right) \times \mathbf{C}^{2N+1}$ et $\lambda_0 \in \Lambda_{\varepsilon,N} \cap \{|\lambda| > A\}$, tels que

$$\begin{cases}(Id - M\left(\lambda_0\right))\,u - e^{-i\lambda_0|x|}P_N(C) = 0,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad G_N\left(e^{i\lambda_0|x|}u\right) = 0.\end{cases} \tag{5.41}$$

On veut montrer qu'alors $(u,C) = (0,0)$. On a

$$u = M\left(\lambda_0\right)u - e^{-i\lambda_0|x|}P_N\left(C\right),$$

on en déduit, pour tout $m \in \mathbf{N}$,

$$u = M^{m+1}(\lambda_0)\, u - \sum_{i=0}^{m} M^i(\lambda_0)\left(e^{-i\lambda_0|x|}P_N(C)\right),$$

donc, d'après (5.37),

$$\begin{aligned}
u &= \chi e^{-i\lambda_0|x|}\sigma(u,C)\,|_{\lambda=\lambda_0} + (1-\chi)\, M_a M^m\,|_{\lambda=\lambda_0}(u) + M_b M^m\,|_{\lambda=\lambda_0}(u)\\
&\quad - \sum_{i=0}^{m} (\chi M)^i\,|_{\lambda=\lambda_0}\left(\chi e^{-i\lambda_0|x|}P_N(C)\right)\\
&\quad - \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i} (\chi M)^j\,|_{\lambda=\lambda_0}(1-\chi)\, M^{i-j}\,|_{\lambda=\lambda_0}\left(e^{-i\lambda_0|x|}P_N(C)\right) \qquad (5.42)\\
&\quad - \sum_{i=0}^{m} (\chi M)^i\,|_{\lambda=\lambda_0}(1-\chi)\left(e^{-i\lambda_0|x|}P_N(C)\right)\\
&= \chi e^{-i\lambda_0|x|}\sigma(u,C)\,|_{\lambda=\lambda_0} + A_m(u,C)\,|_{\lambda=\lambda_0}.
\end{aligned}$$

avec A_m vérifiant, d'après les estimations de la proposition 5.11 et (5.39),

$$\forall K \in \mathbf{N},\ \exists A, B, C, \eta > 0;\ \forall p \le K,\ \forall \lambda \in U_{A,B},$$

$$\|\chi M^p A_m\|_{H^{2N+1}(\partial\Theta_1)} \le C e^{-\eta|\lambda|^{1/3}}. \qquad (5.43)$$

Lemme 5.19. — *Il existe $A_1, A_2 > 0$ tels que pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe $\sigma_k(x) \in \mathcal{H}(\omega)$ et*

$$R_k \in \mathcal{A}\left(\mathcal{L}\left(H^{2N+1}(\partial\Theta_1) \times \mathbf{C}^{2N+1}; \left(H^{2N+1}(\partial\Theta_1)\right)\right)\right),$$

tels que pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$u = \chi e^{-i\lambda_0|x|}\sigma_k(x) + R_k(u,C), \qquad (5.44)$$

$$\chi M^p R_k \in \mathcal{N}\left(\mathcal{L}\left(H^{2N+1}(\partial\Theta_1) \times \mathbf{C}^{2N+1}; \left(H^{2N+1}(\partial\Theta_1)\right)\right)\right) \qquad (5.45)$$

et

$$\begin{aligned}
\|\sigma_k\|_{\mathcal{H}(\omega)} &\le A_1^{k+1}\left|\frac{z}{\lambda_0^{N+3/2}}\right|^k e^{A_2 Im\lambda_0^+}\left(\|u\|_{H^{2N+1}(\partial\Theta_1)} + \|C\|\right) \qquad (5.46)\\
&\quad + \sum_{p=0}^{k}\left((2N+2)\, A_1^p\right)\left|\frac{z}{\lambda_0^{N+3/2}}\right|^p \|C\| + A_k e^{-\eta_k|\lambda_0|^{1/3}}\left(\|u\|_{2N+1} + \|C\|\right).
\end{aligned}$$

On montre ce lemme par récurence sur k. Pour $k = 0$, ce résultat est conséquence des relations (5.42) et (5.43). Supposons ce résultat vérifié au rang k. d'après (5.41), on a

$$\begin{aligned}
u &= M\left(\chi e^{-i\lambda_0|x|}\sigma_k\right) + \chi e^{-i\lambda_0|x|}P_N(C) + M\left(A_k(u,C)\right) + (1-\chi)\, e^{-i\lambda_0|x|}P_N(C)\\
&= \chi e^{-i\lambda_0|x|}T'\left(\sigma_k + P_N(C)\right) + R_{k+1}(u,C)
\end{aligned}$$

avec

$$R_{k+1}(u,C) = (1-\chi) M\left(\chi e^{-i\lambda_0|x|}\sigma_k\right) + (1-\chi) e^{-i\lambda_0|x|} P_N(C) \\ + MR_k + \left(\chi M \chi e^{-i\lambda_0|x|}\sigma_k - \chi e^{-i\lambda_0|x|} T'\sigma_k\right)$$

et il est facile de voir que cette relation définit bien un opérateur R_{k+1} vérifiant (5.45) au rang $k+1$. Il suffit donc de vérifier que $\sigma_{k+1} = T'(\sigma_k) + P_N(C)$ vérifie bien (5.46). Or, d'après (5.44) au rang k,

$$\|G_N(\sigma_k)\| \leq A_k e^{-\eta_k|\lambda_0|^{1/3}} \left(\|u\|_{2N+1} + \|C\|\right),$$

on obtient donc

$$\|\sigma_{k+1}\|_{\mathcal{H}(\omega)} \leq (2N+2)\|C\| + AA_k e^{-\eta_k|\lambda_0|^{1/3}} \left|\frac{z}{\lambda^{1/2}}\right| \left(\|u\|_{2N+1} + \|C\|\right) \\ + A\left|\frac{z}{\lambda_0^{N+3/2}}\right| \|\sigma_k\|_{\mathcal{H}(\omega)},$$

d'où le résultat, puisque $|z| \leq |\lambda|^{N+1/2}$. Finalement, si on choisit k, assez grand et $\varepsilon > \left|\frac{z}{\lambda_0^{N+1/2}}\right|$ assez petit, on obtient, pour tout $K > 0$

$$\|\sigma_k\|_{\mathcal{H}(\omega)} \leq A_K \left(\|C\| + |\lambda_0|^{-K}\|u\|_{2N+1}\right).$$

En appliquant l'opérateur $G_N \circ e^{i\lambda_0|x|}$ à (5.44), pour $k+1$, en remarquant que $\sigma_{k+1} = T'(\sigma_k) + P_N(C)$, on obtient modulo un terme négligeable,

$$C = -G_N\left(T'(\sigma_k)\right) - G_N\left(A_k(u,C)\right). \tag{5.47}$$

donc

$$\|C\| \leq A\left|\frac{z}{\lambda^{N+3/2}}\right| \|\sigma_k\|_{\mathcal{H}(\omega)} + Ce^{-\eta|\lambda|^{1/3}} \left(\|C\| + \|u\|_{2N+1}\right) \tag{5.48}$$

On en déduit que pour tout $K > 0$ il existe C_K tel que

$$\begin{aligned} \|C\| &\leq C_K |\lambda_0|^{-K}\|u\|_{2N+1} \\ \|\sigma_k\|_{\mathcal{H}(\omega)} &\leq C_K |\lambda_0|^{-K}\|u\|_{2N+1} \end{aligned} \tag{5.49}$$

D'après (5.44), (5.45), (5.47) et (5.49),

$$\|\chi u\| \leq C_K |\lambda_0|^{-K}\|u\|_{2N+1}. \tag{5.50}$$

On utilise à nouveau (5.41), ce qui donne

$$\begin{aligned} u &= M(u) + e^{-i\lambda_0|x|}P_N(C) \\ &= M(u) + R_1(u) \\ &= M^m(u) + R_m(u) \\ &= (1-\chi) M^m(u) + R'_m(u) \\ &= M^m(1-\chi) M^m(u) + R''_m(u), \end{aligned}$$

avec R_1, R_m, R'_m, R''_m des opérateurs continus de $H^{2N+1}(\partial\Theta_1)$ dans lui même, de normes inférieures à $C_K|\lambda|^{2N+1-K}$, d'après (5.50). La proposition 5.11 montre donc que u vérifie,

$$\|u\|_{2N+1} \leq C_K|\lambda_0|^{2N+1-K}\|u\|_{2N+1},$$

ce qui, si $|\lambda_0|$ est assez grand et si on a choisi $K > 2N+1$ implique que $u = 0$, donc que $C = 0$.

Nous avons donc inversé le problème de Grushin (5.33), les estimations (5.34) et (5.35) découlent de la preuve donnée et le fait que l'inverse est holomorphe en λ est simplement une conséquence de ce que l'opérateur qu'on inverse l'est (cette dernière propriété n'est pas une conséquence de la preuve donnée).

VI. Démonstration du théorème 1

6.1 Développements asymptotiques

Nous allons, dans cette partie donner des développements asymptotiques pour les racines de l'équation

$$\det\left(\mathcal{E}^{\pm}\right) = 0. \tag{6.1}$$

On va commencer par donner un développement asymptotique pour les racines de l'équation

$$\det\left((E^{\pm}_{N,1} - R(\lambda)\right) = 0, \tag{6.2}$$

où la matrice $R = (r_{\alpha,\gamma})$ est celle donnée par la relation (5.18), puis on montrera que les racines de l'équation (6.1) et celle de l'équation (6.2) ont des développements asymptotiques identiques.

Nous rappelons que d'après le théorème de Puiseux, si $b_j(z)$, $j = 1;\cdots;m$ sont m fonctions holomorphes au voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$, alors, il existe a_l, $l = 1;\cdots;p$, $\sum_1^p a_l = m$ tels que les racines de l'équation $X^m + b_1(z)X^{m-1} + \cdots + b_m(z)$ sont des fonctions holomorphes de z^{1/a_l} (et pour chaque l on a exactement a_l solutions). Nous ferons dans ce chapitre un usage répété de ce résultat.

Pour simplifier les notations, on notera encore, $E^{\pm}_{N,1}$ la matrice $E^{\pm}_{N,1} - R(\lambda)$.

6.1.1 Localisation au voisinage des pseudopôles

On rappelle que

$$\begin{aligned}\left(E^{\pm}_{N,0}\right)_{\alpha,\gamma} &= \delta_{\alpha,\gamma} - z\sum_{\alpha/2\leq i<\alpha/2+N+1} \lambda^{-i} a_{i,\alpha,\gamma}\\ &= Id - zF^{\pm}_{N,0},\end{aligned}$$

avec $a_{0,0,0} \neq 0$. On étudie d'abord les pôles situés dans une région de la forme

$$\{\lambda \in \mathbf{C};\ |z| = \left|\frac{e^{-2i\lambda d}}{\sqrt{\lambda}}\right| \leq M < +\infty\}.$$

Lemme 6.1. — *Pour tout $M > 0$, il existe $A, C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, tel que $|z| \leq M$, $|\lambda| > C$ et $|z - a_{0,0,0}^{-1}| \geq \frac{A}{|\lambda|}$, on a*

$$\left|\det E^{\pm}_{N,1}\right| \geq \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

En effet, si on considère z et λ comme deux variables indépendantes, on a

$$E^{\pm}_{N,1}(z,\lambda) = Id - z\begin{pmatrix} a_{0,0,0} & 0 & \dots & 0 \\ a_{0,1,0} & \vdots & & \vdots \\ a_{0,\alpha,0} & \vdots & & \vdots \\ a_{0,2N,0} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{|z|+1}{|\lambda|}\right),$$

ce qui implique

$$\det\left(E^{\pm}_{N,1}(z,\lambda)\right) = (1 - za_{0,0,0}) + \mathcal{O}\left(\frac{|z|^2+1}{\lambda}\right) \tag{6.3}$$

et si $|z| \leq M$, $|z - a^{-1}_{0,0,0}| \geq \frac{A}{|\lambda|}$ alors on a $|1 - za_{0,0,0}| \geq \frac{A}{M|a_{0,0,0}\lambda|}$.

On s'intéresse maintenant aux pôles obtenus pour $|z|$ grand donc dans une région de la forme

$$\{\lambda \in \mathbf{C}\ ;\ |z| = \left|\frac{e^{-2i\lambda d}}{\sqrt{\lambda}}\right| > M\}.$$

On suppose $N \geq 1$.

Lemme 6.2. — *Il existe $M > 0$, $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tels que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $M \leq |z| \leq \varepsilon|\lambda|$ on a*

$$\left|\det E^{\pm}_{N,1}(z,\lambda)\right| \geq A|z|. \tag{6.4}$$

En effet, ce résultat est conséquence de (6.3).

Ces deux résultats montrent que les zéros en z de l'équation $\det E^{\pm}{}_{N,1}$, sous une courbe d'équation $|z| \leq \varepsilon|\lambda|$ sont tous, si ε est assez petit, dans un voisinage arbitrairement petit de $z_0 = a^{-1}_{0,0,0}$ (si $|\lambda|$ est assez grand).

Définition 6.3. — *Soit $(a_l)_{l\in\mathbf{N}^*}$ une suite d'entiers strictement positifs et $(b_{i,l})_{\substack{1\leq i\leq a_l\\ \in\mathbf{N}^*}}$, $(r_{i,l})_{\substack{1\leq i\leq a_l\\ l\in\mathbf{N}^*}}$ deux suites doubles de complexes et d'entiers strictement positifs respectivement. On notera $z_{i,l} = b_{i,l}\left(\lambda^{\frac{1}{a_l}}\right)^{r_{i,l}}$ défini pour $Re\lambda > 0$ (On prend la définition de $\lambda^{\frac{1}{a}} = \varrho^{\frac{1}{a}}e^{\frac{i\theta}{a}}$ si $\lambda = \varrho e^{i\theta}$). On appellera $z_{i,l}$ la suite des pseudoZ associés aux suites $A = a_{i,l}$, $B = b_{i,l}$ et $R = r_{i,l}$.*

Lemme 6.4 (Localisation au voisinage des pseudoZ). — *Soit $K \in \mathbf{N}$. On choisit $N = K^2$. Il existe des suites A, B et R telles que*

- *Le nombre de couples (i,l) tels que $\frac{r_{i,l}}{a_l} \leq K$ est inférieur à N*
- *Il existe $\varepsilon, \eta, \alpha > 0$ tels que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $M \leq |z| \leq |\lambda|^K$, on a*

$$\forall (i,l),\ \left|z^{-1} - z^{-1}_{i,l}\right| \geq \alpha\left|z^{-1}_{i,l}\right| |\lambda|^{-\varepsilon} \Rightarrow \left|\det E^{\pm}_{N,1}(z,\lambda)\right| \geq \eta|\lambda|^{-N\varepsilon}. \tag{6.5}$$

On a

$$\det\left(E^{\pm}_{N,0}(z,\lambda)\right) = z^N \det\left(z^{-1}Id - F^{\pm}_{N,o}\right).$$

6. Démonstration du théorème 1

Notons

$$P\left(X,\lambda^{-1}\right)=\det\left(XId-F_{N,o}^{\pm}\right).$$

P est un polynome en X de degré $2N+1$, à coefficients polynomes en λ^{-1}. D'après le théorème de Puiseux, il existe $L\in\mathbf{N}$ et $(a_l)_{1\leq l\leq L}$ tels que $\sum_l a_l=2N+1$ et que les racines en X de P sont des fonctions ramifiées de λ^{-1}, pour $|\lambda|$ assez grand. C'est à dire s'écrivent $X_{i,l}\left(\lambda^{-1}\right)$, avec $X_{i,l}\left(\lambda^{-a_l}\right)=g_{i,l}\left(\lambda^{-1}\right)$ où les fonctions $(g_{i,l})_{\substack{1\leq l\leq L\\ 1\leq i\leq a_l}}$ sont holomorphes au voisinage de 0. Au premier ordre, on a donc, si $X_{i,l}\neq 0$,

$$X_{i,l}\left(\lambda^{-1}\right)=b_{i,l}\left(\lambda^{\frac{-1}{a_l}}\right)^{r_{i,l}}+\mathcal{O}\left(\lambda^{\frac{-1}{a_l}}\right)^{r_{i,l}+1}.$$

On obtient donc, pour ce choix de $b_{i,l}$ et de $r_{i,l}$,

$$\det\left(E_{N,0}^{\pm}(z,\lambda)\right)=z^N\prod_{(i,l)}\left(z^{-1}-X_{i,l}\left(\lambda^{-1}\right)\right)$$

$$\Rightarrow\ \left|\det\left(E_{N,0}^{\pm}(z,\lambda)\right)\right|\geq|z|^N\prod_{i,l;X_{i,l}\neq 0}\alpha|z_{i,l}|^{-1}|\lambda|^{-\varepsilon}\times\prod_{i,l\ ;X_{i,l}=0}|z|^{-1}$$

or, $\left|z^{-1}-z_{i,l}^{-1}\right|\geq\alpha\left|z_{i,l}^{-1}\right|\Rightarrow\left|\frac{z}{z_{i,l}}\right|\geq 1-\alpha\left|\frac{z}{z_{i,l}}\right|\Rightarrow\left|\frac{z}{z_{i,l}}\right|\geq\frac{1}{1+\alpha}>0$ et donc

$$\det\left(E_{N,0}^{\pm}(z,\lambda)\right)\geq\beta|\lambda|^{-(2N+1)\varepsilon},\quad\beta>0.$$

(puisque si $X_{i,l}\equiv 0$, on a toujours $|z^{-1}|\geq\alpha|z^{-1}|$ si $0<\alpha<1$.)

Nous allons utiliser la relation

$$E_{N,1}^{\pm}(z,\lambda)=E_{N,0}^{\pm}(z,\lambda)\left(Id+E_{N,0}^{\pm}(z,\lambda)^{-1}\left(E_{N,1}^{\pm}-E_{N,0}^{\pm}\right)(z,\lambda)\right)$$

pour calculer le déterminant de $E_{N,1}^{\pm}(z,\lambda)$. On a

$$E_{N,0}^{\pm}(z,\lambda)^{-1}=\frac{1}{\det\left(E_{N,0}^{\pm}(z,\lambda)\right)}\widetilde{E}_{N,0}^{\pm}(z,\lambda),$$

où $\widetilde{E}_{N,0}^{\pm}(z,\lambda)$ est la matrice des cofacteurs :

$$\left(\widetilde{E}_{N,0}^{\pm}(z,\lambda)\right)_{\alpha,\beta}=\mathcal{O}\left(\frac{(1+|z|)\times\left(1+\frac{|z|}{\lambda}\right)\times\left(1+\frac{|z|}{\lambda}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{|z|}{\lambda^N}\right)}{\left(1+\frac{|z|}{\lambda^{\left[\frac{\beta+1}{2}\right]}}\right)}\right),$$

donc, pour tout λ tel que $0<M\leq|z|\leq|\lambda|^K$, si $|\lambda|^{R-1}<|z|\leq|\lambda|^R$,

$$\begin{aligned}\left|\left(\widetilde{E}_{N,0}^{\pm}(z,\lambda)\right)_{\alpha,\beta}\right|&\leq\left(\frac{|z|^{2R+1}}{|\lambda|^{R^2+R}}+1\right)\times\left(\frac{1}{1+\frac{|z|}{\lambda^{\left[\frac{\beta+1}{2}\right]}}}\right)\\&\leq\lambda^{\left[\frac{\beta+1}{2}\right]}\left(\frac{|z|^{2R}}{|\lambda|^{R^2+R}}+1\right)\\&\leq\lambda^{\left[\frac{\beta+1}{2}\right]}|\lambda|^{K^2-K}.\end{aligned}$$

On note $P(\lambda) = \mathrm{Diag}\left(1, \lambda, \lambda, \cdots, \lambda^N, \lambda^N\right)$. On a donc $\left(E^{\pm}_{N,0}\right)^{-1} = P(\lambda) \times G^{\pm}_{N,0}(z,\lambda)$ avec

$$\left|G^{\pm}_{N,0}(z,\lambda)_{\alpha,\beta}\right| \leq C\left(1 + \left|\frac{z^{2K}}{\lambda^{K^2+K}}\right|\right) \times \frac{1}{\left|\det\left(E^{\pm}_{0,N}\right)\right|}.$$

D'après la relation (5.18), on a

$$\left|\left(\left(E^{\pm}_{N,1} - E^{\pm}_{N,0}\right) \times P\right)_{\alpha,\beta}\right| \leq C\left|\frac{z}{\lambda^{N+1}}\right|$$

si $\left|\frac{z}{\lambda^{N+1}}\right|$ est assez petit. Or, si $\|G_{N,0} \times \left(E^{\pm}_{N,1} - E^{\pm}_{N,0}\right) \times P\| \leq \alpha < 1$, on aura

$$\left|\det\left(Id + \left(E^{\pm}_{N,0}\right)^{-1}\left(E^{\pm}_{N,1} - E^{\pm}_{N,0}\right)\right)\right| \geq f(\alpha) > 0 \tag{6.6}$$

et

$$|\lambda|^{K^2-K} \times \frac{1}{\left|\det\left(E^{\pm}_{N,0}\right)\right|} \times \frac{|z|}{|\lambda|^{N+1}} \leq C'|\lambda|^{K^2-K+N\varepsilon+K-(N+1)} \leq \left|\lambda^{N\varepsilon-1}\right|.$$

Il suffit donc de choisir $0 < \varepsilon < 1/N$ pour démontrer le lemme 6.4.

Les lemmes 6.1 et 6.4 impliquent que si λ est un zéro du déterminant de la matrice $E^{\pm}_{N,1}(\lambda)$, alors $z(\lambda) = \frac{e^{-2i\lambda d}}{\lambda^{1/2}}$ est nécessairement proche d'un pseudoZ.

6.1.2 Développements asymptotiques

Dans ce qui suit, l'entier $N = K^2$ est fixé. Nous allons calculer un développement asymptotique de type C^∞ à tous les ordres des racines de l'équation $\det\left(E^{\pm}_{N,1}(z)\right) = 0$, pour $|\lambda| \to +\infty$ et $\left|\frac{z(\lambda)}{|\lambda|^K}\right|$ petit.

Définition 6.5. — *Pour $b \in \mathbf{C}$, $a \in \mathbf{N}^*$ et $r \in \mathbf{N}^*$, on appelle pseudo pôles associés à (b,a,r), les racines λ de partie réelle positive, de l'équation $\frac{e^{-2i\lambda d}}{\lambda^{1/2}} = b\left(\lambda^{1/a}\right)^r$.*

L'étude de la fonction $\lambda \mapsto \frac{e^{-2i\lambda d}}{b \times \lambda^{\frac{r}{a}+1/2}}$ montre le résultat suivant :

Lemme 6.6. — *Il existe $C > 0$ tel que les pseudopôles tels que $|\lambda| > C$ forment une suite, $\lambda^{a,b,r}_n$ telle que :*

$$Re\lambda_n = \frac{n\pi}{d} - \frac{\mathrm{Arg}(b)}{2d} + o(1)$$

et

$$Im\lambda_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{a}\right) \times \frac{1}{2d}\log\left(\frac{n\pi}{d}\right) + \log(|b|) + o(1),$$

donc en particulier, on a $Im\lambda_n \overset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{a}\right) \times \frac{1}{2d}\log(Re\lambda_n)$, ce qui montre que les pseudopôles sont asymptotiquement sur une courbe logarithmique, de pente $\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{a}\right) \times \frac{1}{2d}$.

6. Démonstration du théorème 1

On se place dans toute la suite de cette section dans une région $U = \{\lambda; \frac{|z|}{|\lambda|^K} < 1, |\lambda| > C, \eta < |z|\}$ avec C assez grand et $\eta > 0$. D'après ce qui précède, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C, \eta > 0$ tel que dans cette région, les zéros de l'équation (6.2) sont tous tels que $z^{-1}(\lambda)$ est tel qu'il existe (i, l) tel que

$$\left|\frac{X_{i,l}(\lambda^{-1})}{z(\lambda^{-1})} - 1\right| < \varepsilon.$$

On peut donc supposer, dans le cas où $X_{i,l} \neq 0$ qu'on a également

$$\left|\frac{z(\lambda^{-1})}{X_{i,l}(\lambda^{-1})} - 1\right| < \varepsilon \tag{6.7}$$

et l'équation (6.7) définit un voisinage des pseudopôles associés au pseudoZ considéré. Si on prend $\varepsilon > 0$ assez petit, on peut supposer que ces voisinages sont distincts, si les pseudoZ le sont. On choisit un pseudoZ, $\widetilde{z} = b\lambda^{\frac{-r}{a}}$, tel que $r/a < K$, on note m sa multiplicité (comme pseudoZ), c'est à dire le nombre de fois où $\widetilde{z}^{-1}$ est la partie principale d'une racine $X_{i,l}(\lambda^{-1})$, et on s'intéresse aux $\lambda \in U$ tels que

$$\left|\frac{z(\lambda)}{\widetilde{z}(\lambda^{-1})} - 1\right| < \varepsilon$$

et tels que pour les autre pseudoZ, z' on a

$$\left|\frac{z}{z'} - 1\right| > \varepsilon.$$

On remplace maintenant $E^{\pm}_{N,1}$ par l'expression obtenue en tronquant la série (5.18) au rang M, qu'on note $E^{\pm}_{N,1,M}$

$$\begin{aligned} E^{\pm}_{N,1,M} &= \delta_{\alpha,\gamma} - z\Bigg(\sum_{\gamma/2 \le i \le M} \lambda^{-i} k_{i,\alpha,\gamma} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{\lambda^{N+1}}\right)^n \sum_{N+1+\gamma/2 \le p \le M} \lambda^{-p} k_{n,p,\alpha,\gamma}\Bigg) \\ &= E^{\pm}_{N,0} + \frac{z}{\lambda^{N+1}} A\left(\frac{z}{\lambda^{N+1}}, \lambda^{-1}\right), \end{aligned}$$

donc

$$\det\left(E^{\pm}_{N,1,M}\right) = \det\left(E_{N,0}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{z}{\lambda^{N+1}} \times \frac{z^{2R}}{\lambda^{R(R+1)}}\right), \tag{6.8}$$

où $R = \max\{r \in \mathbf{N};\ \frac{z}{|\lambda^r|} \ge 1\}$. En effet, dans le développement du déterminant, pour obtenir le terme à priori le plus grand, on prend un terme dans la matrice A, par exemple dans la colonne i et les $2N$ autres termes dans la matrice $E_{N,0}$. Ces derniers termes sont majorés par $\frac{z}{\lambda^j}$ si le terme vient de la colonne $2j-1$ ou de la colonne $2j$ et si $j \le R$ et majorés par 1 sinon. Comme on ne peut pas prendre ces termes dans la colonne i, on obtient la majoration (6.8).

Dans la suite, pour alléger les notations, on omet l'indice M. D'après ce qui précède, on a dans U,

$$\det\left(E^{\pm}_{N,1}\right)(z,\lambda) = \prod_{(i,l)} \left(1 - z z_{i,l}^{-1}\right) + R\left(\frac{z}{\lambda^{N+1}}, \lambda^{-1}\right),$$

avec, $R(Z,\lambda^{-1})$ une fonction holomorphe en Z pour $|Z|$ assez petit et méromorphe en λ^{-1} au voisinage de $(0,0)$, c'est à dire telle qu'il existe $N_0 \in \mathbf{N}$ tel que la fonction $\lambda^{-N_0} r(Z,\lambda^{-1})$ est holomorphe au voisinage de $(0,0)$. On fait le changement de variables $X = \frac{z}{\widetilde{z}}$, et on pose

$$\begin{aligned} Q\left(X,\lambda^{-1}\right) &= \det\left(E^{\pm}_{N,1}\right)\left(\widetilde{z}X,\lambda^{-1}\right) \\ &= \det\left(E^{\pm}_{N,0}\right) + r\left(X,\lambda^{-1}\right), \end{aligned}$$

où la fonction r est holomorphe en X, méromorphe en $\lambda^{-1/a}$ au voisinage de $(1,0)$ (car $\frac{r}{a} < K$) et d'après ce qui précède, on a également :

$$\begin{aligned} \left|Q\left(X,\lambda^{-1}\right)\right| &\le C\left(\frac{\widetilde{z}X}{\lambda^{N+1}} \times \frac{(\widetilde{z}X)^{2R}}{\lambda^{R(R+1)}} + 1\right) \\ &\le C\left(\frac{X^{2R+1}}{\lambda^{N+1}} \times \frac{\lambda^{\frac{r(2R+1)}{a}}}{\lambda^{R(R+1)}} + 1\right) \end{aligned}$$

(on rappelle qu'on peut prendre $R = \left[\frac{r}{a}\right] \le \frac{r}{a}$). On cherche à calculer les racines de l'équation $Q(X,\lambda^{-1}) = 0$ au voisinage du point $(X = 1, \lambda^{-1} = 0)$. On notera

$$D\left(X,\lambda^{-1}\right) = \frac{r\left(X,\lambda^{-a}\right)}{\prod_{z_{i,l}\neq\widetilde{z}}\left(1 - \frac{\widetilde{z}}{z_{i,l}}\left(\lambda^{-a}\right)X\right)}.$$

La fonction D est méromorphe en (X,λ^{-1}), au voisinage de $(1,0)$. En effet, $r(X,\lambda^{-a})$ l'est,

$$\prod_{z_{i,l}\neq\widetilde{z}}\left(1 - \frac{\widetilde{z}}{z_{i,l}}\left(\lambda^{-a}\right)X\right) = \frac{1}{(1-X)^m}\det\left(E^{\pm}_{N,0}\left(X\widetilde{z}\left(\lambda^{-a}\right),\lambda^{-a}\right)\right).$$

et $\widetilde{z}(\lambda^{-a})$ est holomorphe en λ^{-1}. Si le pseudoZ près duquel on travaille n'est pas $z_{0,0} = a^{-1}_{0,0}$, on a aussi

$$\left|\left(1 - \frac{\widetilde{z}}{z_{0,0}}\left(\lambda^{-a}\right)X\right)\right| \ge C|z|,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \left|D\left(X,\lambda^{-1/a}\right)\right| &\le C\left(\frac{\widetilde{z}X}{\lambda^{N+1}} \times \frac{(\widetilde{z}X)^{2R-1}}{\lambda^{R(R+1)}} + 1\right) \\ &\le C\left(\frac{X^{2R+1}}{\lambda^{N+1}} \times \frac{\lambda^{\frac{r(2R)}{a}}}{\lambda^{R(R+1)}} + 1\right) \\ &\le C\left(X^{2R+1}\lambda^{\frac{r}{a}^2 - N - 1} + 1\right) \end{aligned}$$

et si on travaille près de $z_{0,0}$, alors, on a

$$\left|D\left(X,\lambda^{-1}\right)\right| \le C\left|\frac{X^{2R+1}}{\lambda^{N+1}}\right|.$$

Dans tous les cas, la fonction $\lambda D(X, \lambda^{-1})$ est bornée au voisinage de $(1, 0)$; elle est donc holomorphe sur ce voisinage. La fonction $S(X, \lambda^{-1}) = (1 - X)^m + D(X, \lambda^{-1})$ est donc holomorphe en (X, λ^{-1}) au voisinage de$(1, 0)$ et vérifie $\left(\frac{\partial}{\partial_X}\right)^i (S(1, 0)) = 0$ (pour $0 \leq i < m$) et $\left(\frac{\partial}{\partial_X}\right)^m (S(1, 0)) \neq 0$. D'après le théorème de préparation de Weierstrass, il existe donc $m + 1$ fonctions holomorphes en λ^{-1} au voisinage de 0, a_j et une fonction $c(X, \lambda^{-1})$ holomorphe au voisinage de $(1, 0)$ telle que $c(1, 0) \neq 0$, $a_j(0) = 0$ et

$$S\left(X, \lambda^{-1}\right) = c\left(X, \lambda^{-1}\right)\left((1 - X)^m + a_{m-1}\left(\lambda^{-1}\right)(1 - X)^{m-1} + \cdots + a_0\left(\lambda^{-1}\right)\right).$$

Enfin, le théorème de Puiseux montre que les racines X, de l'équation $S(X, \lambda^{-1}) = 0$ sont m fonction algébriques de λ^{-1}, c'est à dire qu'il existe m entiers a_j tels que ces racines X_j vérifient

$$X_j\left(\lambda^{-1}\right) = 1 + f_j\left(\lambda^{\frac{-1}{a_j}}\right),$$

où les f_j sont des fonctions holomorphes au voisinage de 0. On écrit à nouveau l'indice M, on a donc le lemme :

Lemme 6.7. — *Il existe des développements asymptotiques, $b_{i,j,M}$; $j = 1, \cdots m$; $i \in \mathbf{N}^*$ tels que les solutions, $X_{j,M}(\lambda^{-1})$, de l'équation*

$$\det\left(E^{\pm}_{N,1,M}\left(b\lambda^{r/a}X, \lambda^{-1}\right)\right) = 0,$$

telles que $|X - 1| \leq \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ assez petit) vérifient, pour λ assez grand,

$$X_{j,M}\left(\lambda^{-1}\right) \sim 1 + \sum_{i \in \mathbf{N}^*} b_{i,j,M}\lambda^{\frac{-i}{a_{j,M}}},$$

avec $1 \leq a_{j,M} \leq m$.

On va montrer que ces développements asymptotiques ne dépendent, en fait pas de M, jusqu'à un certain rang qu'on peut choisir arbitrairement grand si on choisit M grand. On commence pour cela par supprimer la dépendance en M de $a_{j,M}$; et pour cela, il suffit de remplacer $a_{j,M}$ par $m!$. On s'intéresse ensuite au développement proprement dit. Cette étude a été faite, dans un cadre très proche par C. Gérard [7], annexe A.III.1. On note

$$P^M\left(X, \lambda^{-1}\right) = \frac{\det\left(E^{\pm}_{N,1,M}\right)\left(\frac{X}{X_{i,l}}, \lambda\right)}{\prod_{z_{i,l} \neq \tilde{z}}\left(1 - \frac{\tilde{z}}{z_{i,l}}\left(\lambda^{-a}\right)X\right)}.$$

On a l'estimation

$$\left|P^{M_1}\left(X, \lambda^{-1}\right) - P^{M_2}\left(X, \lambda^{-1}\right)\right| = \mathcal{O}\left(|\lambda^{-f(M_1, M_2)}\right),$$

quand λ tend vers l'infini (en restant tel que $\frac{z}{\lambda^K}$ reste petit) et quand $|X - 1|$ reste petit et où f est une fonction qui tend vers l'infini quand M_1 et M_2 tendent vers l'infini puisque P^{M_1} et P^{M_2} sont des polynômes en X et $\lambda^{-1/a}$ dont les coefficients en $\lambda^{-1/a}$ coïncident jusqu'à un rang de plus en plus élevé quand on fait tendre M_1 et M_2 vers l'infini.

Cette estimation permet d'adapter la démonstration de C.Gérard à notre cadre ; et il est alors facile de voir que l'exposant $a_{j,M}$ ne dépend nécessairement pas de M.

Proposition 6.8. — *Il existe des développements asymptotiques, $c_{i,j}$, pour $j = 1, \cdots, m$ et $i \in \mathbf{N}^*$ tels que, si on note λ_n la suite des pseudo-pôles associée à $b\lambda^{\frac{-r}{a}}$, et*

$$\lambda_{j,n}^M = \lambda_n + \sum_{i=1}^{M} c_{i,j} \lambda_n^{\frac{-r}{aa_j}},$$

alors

- *Pour tout $M \in \mathbf{N}$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ et C_M tels que pour $n \geq n_0$, chacune des boules*

$$\left\{\lambda \in \mathbf{C};\ \left|\lambda - \lambda_{j,n}^M\right| \leq C_M |\lambda_n|^{-\frac{Mr}{aa_j}}\right\}$$

contient un zéro de l'équation

$$\det\left(E_{N,1}^{\pm}\right) = 0,$$

avec multiplicité, c'est à dire qu'il y a exactement s zéros (comptés avec leur multiplicité) si s des développements asymptotiques précédents coïncident jusqu'à l'ordre M

- *Il existe $\varepsilon' > 0$ et $C' > 0$ tels qu' on a, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $|\lambda| > C'$ et $\left|\frac{e^{-2i\lambda d}}{b\lambda^{1/2+r/a}} - 1\right| < \varepsilon'$,*

$$\left|\lambda - \lambda_{j,n}^M\right| > C_N |\lambda_n|^{-\frac{Mr}{aa_j}} \Rightarrow \left|\det\left(E_{N,1}^{\pm}\right)\right| > C'|\lambda|^{-N(M)}.$$

avec $\lim_{M\to+\infty} N(M) = +\infty$.

On commence par démontrer le

Lemme 6.9. — *Soit $M \in \mathbf{N}$ et $\varepsilon > 0$ assez petit. Il existe alors $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$; $n \geq n_0$ et tout $j \in \{1, \cdots, m\}$, les solutions de l'équation*

$$\frac{e^{-2i\lambda d}}{\lambda^{1/2+r/a}} - X_{j,M}\left(\lambda^{-1}\right) = 0 \tag{6.9}$$

forment une suite, notée $\lambda_{n,M}$, qui vérifie $|\lambda_{n,M} - \lambda_n| < \varepsilon$.

En effet, d'après ce qui précède, il est clair que si n_0 est grand alors les solutions sont dans un ε voisinage des pseudopôles λ_n. L'équation (6.9) peut aussi s'écrire, en notant $\zeta = \lambda - \lambda_n$,

$$\frac{e^{-2i\zeta d}}{\left(1 + \lambda_n^{-1}\zeta\right)^{1/2+r/a}} - X_{j,M}\left(\lambda_n^{-1}\left(1 + \lambda_n^{-1}\zeta\right)^{-1}\right) = 0$$

et la fonction

$$H_M : (\zeta, \mu) \mapsto \frac{e^{-2i\zeta d}}{(1+\mu^{aa_j}\zeta)^{1/2+r/a}} - X_{j,M}\left(\left(\mu\left(1+\mu^{aa_j}\zeta\right)^{-1/aa_j}\right)^{aa_j}\right)$$

est une fonction holomorphe de (ζ, μ) au voisinage de $(0,0)$ qui vérifie $H_M(0,0) = 0$ et $\partial_\zeta H_M(0,0) = -2id \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites implique donc qu'il existe une fonction holomorphe $\zeta_M(\mu)$ définie au voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$, telle qu'au voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbf{C}$, les solutions de l'équation $H_M(\zeta, \mu) = 0$ s'ecrivent $(\zeta_M(\mu), \mu)$; ce qui implique, si n_0 est assez grand et $\varepsilon > 0$ assez petit que les solutions de l'équation (6.9) s'écrivent

$$\lambda_{n,M} = \lambda_n + \zeta_M\left(\lambda_n^{-1/aa_j}\right).$$

Enfin, comme $X_{j,M}(\lambda^{-1}) - X_{j,M'}(\lambda^{-1}) = \mathcal{O}\left(\lambda^{-\frac{\min\{M,M'\}+1}{a}}\right)$, on a également $\lambda_{n,M} - \lambda_{n,M'} = \mathcal{O}\left(\lambda^{-\frac{\min\{M,M'\}}{a}}\right)$. Nous avons donc montré le

Lemme 6.10. — *Il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que les racines de l'équation*

$$\det\left(E_{N,1,M}\left(\frac{e^{-2i\lambda d}}{\lambda^{1/2}}, \lambda\right)\right),$$

qui vérifient

$$\left|\frac{e^{-2i\lambda d}}{\lambda^{1/2+r/a}} - 1\right| < \varepsilon$$

et telles que $|\lambda| > C$ sont données par les relations $\lambda = \lambda_n + \zeta_{j,M}\left(\lambda_n^{-\frac{1}{aa_j}}\right) \stackrel{def}{=} \lambda_{j,n,M}$.

Corollaire 6.11. — *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $K \in \mathbf{N}$, il existe $K' \in \mathbf{N}$ tel que pour tout λ tel que $\left|\frac{e^{-2i\lambda d}}{\lambda^{1/2+r/a}} - 1\right| < \varepsilon$ (donc tel qu'il existe n avec $|\lambda - \lambda_n| < \varepsilon'$), et pour tout $C > 0$, il existe $C_{K,M}$ tel que*

$$|\lambda - \lambda_{n,M}| > C\lambda_n^{-K} \Rightarrow \left|\det E^{\pm}_{N,1,M}\left(\frac{e^{-2i\lambda d}}{\lambda^{1/2}}, \lambda\right)\right| \geq C_{K,M}\lambda_n^{-K'}.$$

Dans ce résultat, le seul point qui ne soit pas clair est que l'entier K' ne dépend que de K et pas de M. Ceci vient de ce que l'ordre d'annulation de $\det E^{\pm}_{N,1,M}\left(\frac{e^{-2i\lambda d}}{\lambda^{1/2}}, \lambda\right)$ au point $\lambda = \lambda_{n,M}$ est au plus m et est donc indépendant de M.

Nous allons maintenant compter les racines de l'équation $\det\left(E^{\pm}_{N,1}\right) = 0$. On rappelle qu'on a, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $\left|e^{-2i\lambda d}\right| \leq \varepsilon|\lambda|^{N+1}$, avec $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$\|E^{\pm}_{N,1} - E^{\pm}_{N,1,M}\| \leq C_M|\lambda|^{N+1-(M+1)} \tag{6.10}$$

et

$$\|E^{\pm}_{N,1}\| \leq C|\lambda|^{N+1}, \tag{6.11}$$

on a donc aussi

$$\left|\det\left(E^{\pm}_{N,1}\right)-\det\left(E^{\pm}_{N,1,M}\right)\right|\leq C_M|\lambda|^{2N(N+1)+N-M}.$$

Soient $K\in\mathbf{N}$ fixé et $\mathcal{C}$, le cercle centré en $\lambda_{n,M}$ et de rayon $|\lambda_n|^{-K}$. D'après ce qui précède, si M et n sont assez grands alors le déterminant de $E^{\pm}_{N,1}$ ne s'annule pas sur $\mathcal{C}$ et d'après les formules de Cauchy et (6.10), (6.11) on a, sur $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned}&\left|Tr\left(\frac{d}{d\lambda}E^{\pm}_{N,1}\right)\left(\det\left(E^{\pm}_{N,1}\right)\right)-Tr\left(\frac{d}{d\lambda}E^{\pm}_{N,1,M}\right)\left(\det\left(E^{\pm}_{N,1}\right)\right)\right|\\&\qquad\qquad\leq C_M\left(|\lambda_n|^{K'+N-M}+|\lambda_n|^{N+1+K'+2N(N+1)+N-M}\right),\end{aligned}$$

donc, le nombre de zéros de l'équation $\det\left(E^{\pm}_{N,1}\right)=0$ situés à l'intérieur de $\mathcal{C}$ qui vaut

$$s=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\left(\frac{d}{d\lambda}\left(\det E^{\pm}_{N,1}\right)\right)\left(\det E^{\pm}_{N,1}\right)^{-1}d\lambda,$$

est arbitrairement proche (si on prend M suffisament grand) de

$$s'=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\left(\frac{d}{d\lambda}\left(\det E^{\pm}_{N,1,M}\right)\right)\left(\det E^{\pm}_{N,1,M}\right)^{-1}d\lambda,$$

donc, si n est assez grand, ces deux entiers sont égaux. Enfin, comme le développement en puissances de $\lambda_n^{-1/a}$ à l'ordre K de $\lambda_{n,M}$ est égal à λ_n^K, si M est assez grand, on obtient la proposition 6.8.

Remarque 6.12. — *La proposition 6.8 reste vraie si on remplace maintenant la matrice $E^{\pm}_{N,1}$ tronquée (celle dont on a soustrait la matrice $R(\lambda)$) par la vraie matrice $E^{\pm}_N,1$ où par la matrice $\mathcal{E}^{\pm}$, puisque ces matrices diffèrent d'un terme négligeable et que le dernier argument reste vrai.*

6.2 Démonstration du théorème 1

6.2.1 Rappels sur les problèmes elliptiques dans les coins et les potentiels de simple couche

On considère, dans cette partie Θ, un obstacle borné de $\mathbf{R}^2$ vérifiant les hypothèses de l'introduction. On suppose que l'ouvert Ω est de la forme Ω^i ou Ω^e. On notera $\Gamma=\partial\Omega\setminus K$, le bord de l'ouvert Ω dont on a retiré les coins. L'ensemble Γ est donc réunion disjointe d'ensembles Γ_i, difféomorphes soit à la sphère S^1 soit à des segments de $\mathbf{R}$ ouverts.

Définition 6.13. — *On notera $H^{1/2}(\Gamma)=\oplus_i H^{1/2}(\Gamma_i)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)=\oplus_i H^{-1/2}(\Gamma_i)$ son dual.*

Il est alors démontré par P. Grisvard dans [9] et [10] que l'application

$$\begin{gathered}C_0^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)\to H^{1/2}(\Gamma)\\u\mapsto u\,|_{\Gamma}\end{gathered}$$

se prolonge de manière unique en une application continue et surjective de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$, qu'on notera $u\,|_\Gamma$. On a aussi le

Lemme 6.14. — *Pour tout $u \in H^1(\Omega)$ tel que $\Delta u \in L^2(\Omega)$, on peut définir une trace $\frac{\partial u}{\partial n}\,|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$ telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega \Delta u v + \langle \frac{\partial u}{\partial n}, v \rangle,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité entre $H^{1/2}$ et $H^{-1/2}$.

En effet, il est démontré dans [20] que, si $u, v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega u \partial_{x_i} v + v \partial_{x_i} u = \int_\Gamma u v \nu_i d\sigma,$$

où ν_i désigne la ième composante du vecteur normal extérieur. On en déduit que, si $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Omega \Delta u v = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = \langle \frac{\partial u}{\partial n}, v \rangle.$$

Comme d'après [9], l'espace $H^2(\Omega)$ est dense dans l'espace $\{u \in H^1(\Omega)\,;\Delta u \in L^2(\Omega)\}$, on en déduit le lemme. (On a ici identifié $H^{-1/2}(\Gamma)$ avec un espace de distributions, via la mesure $d\sigma$).

Pour $u \in \mathcal{H} = H^1(\Theta^c) \oplus H^1(\mathring{\Theta})$, on notera $[u] \in H^{1/2}(\Gamma)$ le saut entre les deux traces de la distribution u, $[u] = u\,|_{\partial\mathring{\Theta}} - u\,|_{\partial\Theta^c}$. On remarque que le noyau de l'opérateur

$$\begin{cases} \mathrm{Tr} : \mathcal{H} \to H^{1/2}(\Gamma) \\ \qquad u \mapsto [u] \end{cases}$$

qui est linéaire, continu et d'après [9] surjectif, est l'espace $H^1(\mathbf{R}^2)$. En effet, cet espace est clairement inclus dans ce noyau, et si $(u, v) \in \mathrm{Ker}(Tr)$, la fonction $\underline{(u, v)}$ de $L^2(\Omega)$ valant u sur Ω^e et v sur Ω^i vérifie $\nabla\underline{(u, v)} = \underline{(\nabla u, \nabla v)}$ au voisinage de tout point de $\mathbf{R}^2$ qui n'est pas un coin, d'après la formule des sauts, et la différence de ces deux distributions est donc un élément de $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$ supporté par les coins. Comme $\delta \notin H^{-1}(\mathbf{R}^2)$, cette différence est nulle et donc $\nabla\underline{(u, v)} = \underline{(\nabla u, \nabla v)} \in L^2(\Omega)$.

On notera $V = \{u \in H^1(\mathbf{R}^2)\,;\; \Delta u + \lambda^2 u = 0 \text{ dans } \Omega^e \cup \Omega^i\}$. La forme sesquilinéaire

$$b(u, v) = \int_{\Theta^c \cup \mathring{\Theta}} \nabla u \nabla \overline{v} - \lambda^2 u \overline{v}$$

est coercive sur $H^1(\mathbf{R}^2)$, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}^-$, et, pour $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, la forme linéaire L_g définie sur $H^1(\mathbf{R}^2)$ par

$$L_g(v) = \int_\Gamma g v$$

est continue. On en déduit que, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}^-$ et tout $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, il existe une solution unique dans $H^1(\mathbf{R}^2)$ du système

$$\begin{cases} \left(\Delta + \lambda^2\right) u = 0 \text{ dans } \Theta^c \cup \overset{\circ}{\Theta}, \\ [\partial_n u] = g. \end{cases}$$

On note $u = u_N(g)$ cette solution.

En considérant aussi la forme sesquilinéaire b sur V et la forme linéaire $L^\varphi(v) = \int_\Gamma \left[\frac{\partial v}{\partial n}\right] \varphi$, on montre que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}^-$ et tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, il existe une solution unique dans V du système :

$$\begin{cases} \left(\Delta + \lambda^2\right) u = 0 \text{ dans } \Theta^c \cup \overset{\circ}{\Theta}, \\ u\,|_\Gamma = \varphi. \end{cases}$$

On note $u = u_D(\varphi)$ cette solution.

La distribution u_N vérifie (dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$)

$$\left(\Delta + \lambda^2\right) u_N(g) = g \otimes \delta_\Gamma. \tag{6.12}$$

Chacun des termes est un élément de $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$. En effet, c'est évident pour $(\Delta + \lambda^2)\, u_N$ puisque $u_N \in H^1(\mathbf{R}^2)$, et $g \otimes \delta_\Gamma \in H^{-1}(\mathbf{R}^2)$ puisque $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ et l'application de trace envoie $H^1(\mathbf{R}^2)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$. La différence de ces deux termes est donc une distribution de $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$ supportée par les coins, elle est donc nulle.

On note T et S, les opérateurs définis, pour $\lambda \in \mathbf{C}^-$ par :

$$\begin{cases} T : \ H^{1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma) \\ \qquad\qquad \varphi \mapsto [\partial_n u_D(\varphi)] \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} S : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma) \\ \qquad\qquad g \mapsto u_N(g) \end{cases}$$

Il est clair que les opérateurs S et T sont inverses l'un de l'autre.

On note $g_r(x, y, \lambda)$, le noyau distribution de la résolvante sortante libre du Laplacien, $R_0(\lambda)$:

$$\left(\Delta + \lambda^2\right) u = v, \ u \text{ sortante},$$

on a donc, d'après (6.12),

$$S(g) = \int_\Gamma g_r(x, y, \lambda)\, g(y)\, d\sigma(y), \tag{6.13}$$

pour tout $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Enfin, il est bien connu que la résolvante sortante libre possède un prolongement analytique à $\mathbf{C} \setminus i\mathbf{R}^+$ (au revêtement simplement connexe de $\mathbf{C}^*$ en fait), la relation (6.13) va donc nous permettre de définir un prolongement analytique pour l'opérateur S à $\mathbf{C} \setminus i\mathbf{R}^+$.

On rappelle d'abord quelques propriétés du noyau distribution $gr(x, y, \lambda)$: on a

$$gr(x, y, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda \mathrm{ch} t|x-y|} dt \tag{6.14}$$

et, si on note $z = |x - y|$, il existe deux fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$, $R_{1;2}$ telles que

$$gr(x, y, \lambda) = \log(iz) R_1(z^2) + R_2(z^2).$$

Soit $n(x, y, \lambda) = gr(x, y, \lambda) - gr(x, y, -i)$. On a donc

$$\begin{aligned} n(x, y, \lambda) = \log(i\lambda) R_1(z^2) + R_2(z^2) - R_2\left(-(x-y)^2\right) \\ + \frac{1}{2} \log\left((x-y)^2\right) \left(R_1(z^2) - R_1\left(-(x-y)^2\right)\right). \end{aligned} \tag{6.15}$$

La singularité du noyau $n(x, y, \lambda)$ est donc en $\log\left((x-y)^2\right)(x-y)^2$. Si on dérive une fois par rapport à x, y, la singularité du noyau est en $|x - y| \log\left((x-y)^2\right)$ qui est de classe $L^2(\Gamma \times \Gamma)$ et si on dérive deux fois, la singularité du noyau est en $\log\left((x-y)^2\right)$ qui est aussi de classe $L^2(\Gamma)$. L'opérateur de noyau $1_{x\in\Gamma} n(x, y, \lambda) 1_{y\in\Gamma}$ est donc continu de $\oplus_i H^{-1}(\Gamma_i)$ dans $\oplus_i H^1(\Gamma_i)$ donc aussi de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$. En dérivant par rapport à λ le noyau n et en faisant le même raisonnement, on obtient que le noyau $n(x, y, \lambda)$ est le noyau d'une famille holomorphe dans $\mathbf{C} \setminus i\mathbf{R}^+$ d'opérateurs bornés de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$. La relation

$$S(\lambda)(u) = S(-i)(u) + \int_\Gamma n(x, y, \lambda) u(y) d\sigma$$

permet donc de définir un prolongement analytique pour la famille d'opérateurs $S(\lambda)$. (En fait on a même prolongé au revêtement simplement connexe de $\mathbf{C} \setminus \{0\}$). On a en plus montré que l'opérateur $S(\lambda) - S(-i)$ est compact de l'espace $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$. Finalement, on a

$$S(\lambda) = S(-i)(Id + T(-i)(S(\lambda) - S(-i))) = S(-i)(Id + K(\lambda)),$$

où l'opérateur $K(\lambda)$ est un opérateur compact de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans lui même. On en déduit, d'après le théorème de Fredholm analytique (voir [26], Théorème VI.14), que soit l'opérateur $Id + K(\lambda)$ n'est jamais inversible sur $H^{-1/2}(\gamma)$, soit il possède un inverse méromorphe, dans $\mathbf{C} \setminus i\mathbf{R}^+$. Comme cet opérateur est toujours inversible pour $\mathrm{Im}\lambda < 0$ (son inverse est alors $T(\lambda) S(-i)$), on est dans le deuxième cas, ce qui montre le

Lemme 6.15. — *La famille d'opérateurs bornés de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$, $T(\lambda)$, holomorphe pour $Im\lambda < 0$ se prolonge en une famille méromorphe sur l'ensemble $\mathbf{C} \setminus i\mathbf{R}$ d'opérateurs continus de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$, qu'on note encore $T(\lambda)$.*

On choisit maintenant $\Theta = \Theta_{1;2}$. La construction précédente permet de définir des opérateurs $T_i(\lambda)$, $S_i(\lambda)$. On notera

$$\widetilde{H}_i(\lambda) = R_0(\lambda)(\delta_{\Gamma_i} \otimes T_i(\lambda)). \tag{6.16}$$

On a

$$\begin{cases} \left(\Delta+\lambda^2\right)\widetilde{H_i}\varphi = 0 \text{ dans } \Theta_i^c \cup \overset{\circ}{\Theta}_i, \\ \left[\dfrac{\partial \widetilde{H_i}\varphi}{\partial n}\right] = T(\lambda)\varphi \; = \; \left[\dfrac{\partial u_{D,i}(\varphi)}{\partial n}\right]. \end{cases}$$

On en déduit que, pour $\operatorname{Im}\lambda < 0$, on a $\widetilde{H_i}\varphi = u_{D,i}(\varphi)$ donc vérifie $\widetilde{H_i}(\varphi)\mid_{\partial\Theta_i} = \varphi$ et par prolongement analytique, cette égalité reste vérifiée partout ou $\widetilde{H_i}$ est définie. On note $H_i = \widetilde{H_i}\mid_{\Theta_i^c}$. On vérifie facilement que cette définition coïncide avec la définition de $H_{1;2}$ du chapitre 3. Enfin, en étudiant le noyau de l'opérateur R_0 il est facile de voir que l'opérateur H_i envoie $L^2(\Gamma_i)$ dans $H^1_{loc}(\Theta_i^c)$; et qu'on a

$$H = H_2\gamma_2 H_1 \qquad \text{et} \qquad M = \gamma_1 H_2 \gamma_2 H_1.$$

6.2.2 Dilatation analytique

On va utiliser, dans cette partie, une idée de dilatation analytique due à J. Sjöstrand pour montrer que les pôles de diffusion coïncident avec les points où l'opérateur $Id - M$ n'est pas inversible. On reprend ici une méthode de C. Gérard, en la modifiant légèrement pour qu'elle s'adapte à notre cadre.

On notera $\mathcal{R}^2$, une déformation de $\mathbf{R}^2$ égale à $e^{-i\theta}\mathbf{R}^2$ ($\theta > 0$) hors d'un voisinage de Θ. On prolonge analytiquement la noyau gr à $\mathcal{D}'(\mathcal{R}^2)$ en posant dans (6.14), $|x - y| = \left((x-y)^2\right)^{1/2}$. La résolvante sortante libre du Laplacien sur $\mathbf{R}^2$, S_0 admet un prolongement à $L^2(\Gamma)$, holomorphe pour $|\operatorname{Im}\lambda| < \varepsilon|\lambda|$, $\varepsilon > 0$ assez petit, puisqu'alors, d'après (6.14), le noyau distribution $gr(x, y, \lambda)$ est exponentiellement décroissant

$$|gr(x, y, \lambda)| \leq Ce^{-|\lambda||x-y|/C}.$$

La relation 6.16 montre que les opérateurs H_i admettent également un prolongement méromorphe comme opérateurs continus de $L^2(\Gamma)$ dans $L^2(\mathcal{R}^2)$ et comme les résolvantes tronquées R_i associées à chacun des obstacles Θ_i n'ont pas de pôles dans des ouverts $U_{A,B}$, il en est de même pour les opérateurs H_i (la déformation est égale à l'identité au voisinage de Θ et il est classique que les pôles des opérateurs T et ceux des résolvantes tronquées sont les mêmes). Dans toute la suite, on se placera dans $U_{A,B}$.

La résolvante sortante du problème :

$$\begin{cases} \left(\Delta+\lambda^2\right)u = v \text{ dans } \Theta^c, \\ u\mid_{\partial\Theta} = 0 \end{cases} \tag{6.17}$$

s'écrit

$$u = R(\lambda)v = R_0(\lambda)v - R_0(\lambda)\left(\delta_\Gamma \otimes T(\lambda)\right)\gamma R_0(\lambda)v,$$

où on a noté γ l'opérateur de trace sur $\partial\Theta = \Gamma$.

On choisit une courbe fermée de $\mathbf{C}$, $\mathcal{C}$, ne rencontrant pas l'ensemble des pôles de l'opérateur T. Puisque $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} -2\lambda S(\lambda)\,d\Lambda$ est le projecteur spectral associé aux pôles de $S(\lambda)$ à l'intérieur de $\mathcal{C}$, le nombre de pôles de l'opérateur R situés à l'intérieur de la courbe $\mathcal{C}$ est

$$\begin{aligned} m(\mathcal{C}) &= \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} -2\lambda R(\lambda)\, d\lambda\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} 2\lambda R_0(\lambda)\left(\delta_\Gamma \otimes T(\lambda)\right)\gamma R_0(\lambda)\right). \end{aligned} \tag{6.18}$$

On remarque maintenant que l'opérateur $R_0(\lambda)(\delta_\Gamma \otimes Id)$ a pour noyau distribution la fonction $gr(x,y,\lambda)\,1_{y\in\Gamma}$ qui appartient à $L^2(\mathcal{R}^2\times\Gamma)$ (puisque à l'infini, il est exponentiellement décroissant et en $x=y$, sa singularité est en $\log(|x-y|)$), et l'opérateur $\gamma R_0(\lambda)$ a également un noyau de classe $L^2(\Gamma\times\mathcal{R}^2)$. L'opérateur $R_0(\lambda)(\delta_\Gamma\otimes Id)$ (respectivement $\gamma R_0(\lambda)$) est donc de Hilbert Schmidt de $L^2(\Gamma)$ dans $L^2(\mathcal{R}^2)$ (respectivement de $L^2(\mathcal{R}^2)$ dans $L^2(\Gamma)$) ; l'opérateur $R_0(\lambda)(\delta_\Gamma\otimes T(\lambda))\gamma R_0(\lambda)$ est donc à trace sur $L^2(\mathcal{R}^2)$. On peut donc dans (6.18) rentrer l'opérateur de trace sous l'intégrale :

$$m(\mathcal{C}) = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} 2\lambda \mathrm{Tr}\left(R_0(\lambda)\left(\delta_\Gamma\otimes T(\lambda)\right)\gamma R_0(\lambda)\right)\right).$$

On a, partout où l'opérateur $(Id-M)^{-1}$ existe,

$$\begin{aligned} &R_0(\lambda)\left(\delta_\Gamma\otimes T(\lambda)\right)\gamma R_0(\lambda) \\ &\qquad = \left(H_1(Id-M)^{-1} - H_2\gamma_2 H_1 (Id-M)^{-1}\right)\gamma_1 R_0(\lambda) \\ &\qquad\quad + \left(H_2 - H_1(Id-M)^{-1}\gamma_1 H_2 + H_2\gamma_2 H_1(Id-M)^{-1}\gamma_1 H_2\right)\gamma_2 R_0(\lambda). \end{aligned}$$

Comme l'opérateur H_2 est holomorphe, on a donc

$$\begin{aligned} m(\mathcal{C}) &= \frac{1}{\pi i}\int_{\mathcal{C}} \lambda \mathrm{Tr}\left(H_1(Id-M)^{-1}\gamma_1 R_0(\lambda)\right) \\ &\quad - \frac{1}{\pi i}\int_{\mathcal{C}} \lambda \mathrm{Tr}\left(H_2\gamma_2 H_1(Id-M)^{-1}\gamma_1 R_0(\lambda)\right) \\ &\quad - \frac{1}{\pi i}\int_{\mathcal{C}} \lambda \mathrm{Tr}\left(H_1(Id-M)^{-1}\gamma_1 H_2\gamma_2 R_0(\lambda)\right) \\ &\quad + \frac{1}{\pi i}\int_{\mathcal{C}} \lambda \mathrm{Tr}\left(H_2\gamma_2 H_1(Id-M)^{-1}\gamma_1 H_2\gamma_2 R_0(\lambda)\right) \\ &= (1)+(2)+(3)+(4). \end{aligned}$$

Le nombre de zéros du déterminant de l'opérateur $\mathcal{E}^{\pm}$ situés à l'intérieur de la courbe $\mathcal{C}$ est égal si ce déterminant ne s'annule pas sur la courbe $\mathcal{C}$, à

$$n(\mathcal{C}) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{d}{d\lambda}\left(det\mathcal{E}^{\pm}\right)\times\left(det\mathcal{E}^{\pm}\right)^{-1} d\lambda.$$

Or, en dérivant l'équation

$$\begin{pmatrix} Id-M & P_N \\ G_N & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{E}^0 & \mathcal{E}^{+,-} \\ \mathcal{E}^{-,+} & \mathcal{E}^{\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\frac{d}{d\lambda}\mathcal{E}^{\pm}=\left(\mathcal{E}^{-,+}\frac{d}{d\lambda}M-\mathcal{E}^{\pm}\frac{d}{d\lambda}G_N\right)\mathcal{E}^{+,-},$$

ce qui implique

$$n\left(\mathcal{C}\right)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\mathrm{Tr}\left(\mathcal{E}^{-,+}\frac{d}{d\lambda}M-\mathcal{E}^{\pm}\frac{d}{d\lambda}G_N\mathcal{E}^{+,-}\left(\mathcal{E}^{\pm}\right)^{-1}\right)d\lambda$$

(tous les opérateurs précédents sont à trace puisque $\mathcal{E}^{\pm}$ et $\mathcal{E}^{-,+}$ sont de rangs finis). Comme les opérateurs G_N et $\mathcal{E}^{+,-}$ sont holomorphes, on a

$$\begin{aligned}n\left(\mathcal{C}\right)&=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\mathrm{Tr}\left(\mathcal{E}^{-,+}\frac{d}{d\lambda}M\mathcal{E}^{+,-}\left(\mathcal{E}^{\pm}\right)^{-1}\right)d\lambda\\&=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\mathrm{Tr}\left(\frac{d}{d\lambda}M\mathcal{E}^{+,-}\left(\mathcal{E}^{\pm}\right)^{-1}\mathcal{E}^{-,+}\right)d\lambda,\end{aligned}$$

or, on a $(Id-M)^{-1}=\mathcal{E}^{0}-\mathcal{E}^{+,-}\left(\mathcal{E}^{\pm}\right)^{-1}\mathcal{E}^{-,+}$, on en déduit que

$$n\left(\mathcal{C}\right)=\frac{1}{2i\pi}\mathrm{Tr}\left(\int_{\mathcal{C}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{M}\left(\mathrm{Id}-\mathrm{M}\right)^{-1}\mathrm{d}\lambda\right). \tag{6.19}$$

Comme $\frac{d}{d\lambda}M=-2\lambda\left(\gamma_1R_2H_2\gamma_2H_1+\gamma_1H_2\gamma_2R_1H_1\right)$ et comme $\gamma_1R_2=\gamma_1R_0-\gamma_1H_2\gamma_2R_0$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{i\pi}\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{C}}\lambda\left(\gamma_1R_2H_2\gamma_2H_1\right)&=\frac{1}{i\pi}\mathrm{Tr}\left(\int_{\mathcal{C}}\lambda\gamma_1R_0H_2\gamma_2H_1\left(Id-M\right)^{-1}\right)\\&\quad+\frac{1}{i\pi}\mathrm{Tr}\left(\int_{\mathcal{C}}\lambda\gamma_1H_2\gamma_2R_0H_2\gamma_2H_1\left(Id-M\right)^{-1}\right)\\&=(2)+(4)\end{aligned}$$

et comme $\gamma_2R_1=\gamma_2R_0-\gamma_2H_1\gamma_1R_0$, la contribution à (6.19) du premier terme est égale à (3) et celle du second terme à

$$\frac{1}{i\pi}\mathrm{Tr}\left(\int_{\mathcal{C}}\gamma_1H_2\gamma_2H_1\gamma_1R_0H_1\left(Id-M\right)^{-1}\right)=\frac{1}{i\pi}\mathrm{Tr}\left(\int_{\mathcal{C}}M\gamma_1R_0H_1\left(Id-M\right)^{-1}\right). \tag{6.20}$$

On peut dans (6.20) rentrer l'opérateur de trace sous le signe somme puisque les noyaux des opérateurs γ_1R_0 et H_1 sont de classe $L^2\left(\Gamma\times\mathcal{R}\right)$ et $L^2\left(\mathcal{R}\times\Gamma\right)$ respectivement (on écrit pour voir cela $H_1=R_0\left(\delta_\Gamma\otimes T_1\right)$, où l'opérateur T_1 est l'opérateur T associé à $\Omega=\Theta_1^c$); on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{i\pi}\mathrm{Tr}\left(\int_{\mathcal{C}}\lambda\gamma_1H_2\gamma_2H_1\gamma_1R_0H_1\left(Id-M\right)^{-1}\right)\\&\qquad=\frac{1}{i\pi}\int_{\mathcal{C}}\lambda\mathrm{Tr}\gamma_1R_0H_1\left(Id-M\right)^{-1}\left(M-Id+Id\right)\\&\qquad=\frac{1}{i\pi}\mathrm{Tr}\lambda\left(\int_{\mathcal{C}}H_1\left(Id-M\right)^{-1}\gamma_1R_0d\lambda\right)=(1).\end{aligned}$$

Nous avons donc montré que le nombre de pôles de $R(\lambda)$ situés à l'intérieur d'une courbe fermée de $\mathbf{C}$, $\mathcal{C}$, est aussi égal au nombre de zéros du determinant de $\mathcal{E}^{\pm}$ situés à l'intérieur de $\mathcal{C}$; ce qui montre que les pôles de l'opérateur R sur $L^2(\Gamma)$ et les zéros du déterminant de l'opérateur $\mathcal{E}^{\pm}$ dont nous avons calculés les développements asymptotiques à la section précédente, sont les mêmes, avec multiplicité.

Pour terminer la démonstration du théorème 1, il suffit maintenant de montrer que les pôles de l'opérateur $R(\lambda)$, sur $L^2(\mathcal{R}^2)$ sont (avec multiplicité) les pôles de la résolvante sortante du Laplacien, considérée de $L^2_{\text{comp}}(\Theta^c)$ dans $H^1_{0,\text{loc}}\left(\overline{\Theta^c}\right)$ (qui est l'opérateur R, mais considéré comme opérateur de $L^2_{\text{comp}}(\Theta^c)$ dans $H^1_{0,\text{loc}}\left(\overline{\Theta^c}\right)$).

On note $r(x,y,\lambda)$ son noyau distribution. On considère, pour $x,y \in \mathcal{R}^2$, si la courbe $\mathcal{C}$ est une courbe fermée ne rencontrant pas les pôles de l'opérateur R sur $L^2(\mathcal{R})$

$$\Pi_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} R(\lambda)\,d\lambda.$$

On a, puisque R_0 est holomorphe, et d'après (6.17),

$$\Pi_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} R_0(\delta_\Gamma \otimes K(\lambda)\gamma R_0)(\lambda)\,d\lambda \tag{6.21}$$

et, si on note $h(x,y,\lambda)$ le noyau distribution de l'opérateur sous le signe somme,

$$h(x,y,\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\int_{\Gamma^3} gr(x,u,\lambda)\,k(u,v,\lambda,\lambda_0)\,t(v,w,\lambda_0)\,gr(w,y,\lambda)\,dudvdw, \tag{6.22}$$

où on a noté k le noyau distribution de K. (Cette expression a un sens puisque, le noyau k est de classe L^2 et les noyaux $gr(x,y)1_{y\in\Gamma}$ et $gr(x,y)1_{x\in\Gamma}$ sont de classe L^2 en y et x respectivement.)

Le noyau $\Pi_{\mathcal{C}}(x,y,\lambda)$ est donc holomorphe pour (x,y) dans un ouvert connexe de l'espace $(\mathbf{C}^2\setminus\Theta^c)^2$ contenant $(\mathcal{R}^2\setminus\Theta^c)^2$ et $(\mathbf{R}^2\setminus\Theta^c)^2$. Par prolongement analytique, s'il est identiquement nul sur $(\mathbf{R}^2\setminus\Theta^c)^2$, il l'est donc aussi sur $(\mathcal{R}^2\setminus\Theta^c)^2$ et réciproquement. Comme les courbes $\mathcal{C}$ contenant des pôles de l'opérateur R sont celles pour lesquelles l'opérateur $\Pi_{\mathcal{C}}$ n'est pas nul, nous avons montré que s'il y a des pôles de l'opérateur R sur $L^2(\Gamma)$ à l'intérieur de la courbe $\mathcal{C}$, il y a aussi des pôles de l'opérateur R de $L^2_{comp}(\mathbf{R}^2)$ dans $H^1_{loc}(\mathbf{R},2)$ à l'intérieur de la courbe $\mathcal{C}$. Le seul problème restant à traiter est donc celui de la multiplicité.

Sur $L^2(\Gamma)$, l'opérateur $\Pi_{\mathcal{C}}$ est un projecteur. On a donc $\operatorname{trace}(\Pi_{\mathcal{C}}) = \operatorname{rang}(\Pi_{\mathcal{C}})$ et il existe deux systèmes de fonctions φ_j et Ψ_j indépendantes dans $L^2(\mathcal{R}^2)$, telles que pour $x,y\in\mathcal{R}^2$,

$$\Pi_{\mathbf{C}}(x,y) = \sum_{j=1}^{m(\mathcal{C})}\varphi_j(x)\,\overline{\Psi_j(\overline{y})}. \tag{6.23}$$

On commence par montrer que les fonctions φ_j et Ψ_j admettent un prolongement analytique dans un voisinage complexe de $\mathcal{R}^2$ contenant $\mathbf{R}^2\setminus\Theta^c$. En effet, comme $\Pi_{\mathcal{C}}(\varphi_i) = \varphi_i$, on a

$$\varphi_i(x) = \int_{\mathcal{R}^2}\Pi_{\mathcal{C}}(x,y)\,\varphi_i(y)\,dy. \tag{6.24}$$

Il suffit donc de montrer que le terme de droite admet un prolongement analytique en x. Or, les relations (6.21) et (6.22), la forme explicite du noyau $gr\,(x,y,\lambda)$ et celle du noyau $n\,(x,y,\lambda)$ (voir (6.15)), montrent que le noyau $\Pi\,(x,y)$ est, uniformément par rapport à x dans un voisinage complexe de $\mathbf{R}^2$ contenant $\mathcal{R}^2$, de classe L^2 en $y \in \mathcal{R}^2$; ce qui montre que la relation (6.24) fournit un prolongement analytique pour la fonction $\varphi\,(x)$. En considérant l'opérateur adjoint de $\Pi_{\mathcal{C}}$, on obtient le même résultat en ce qui concerne les fonctions Ψ_j. La relation (6.23) est donc, par prolongement analytique, vérifiée pour x, y dans un ouvert connexe de $\mathbf{C}^2$ contenant $\mathcal{R}^2 \setminus \Theta^c$ et $\mathbf{R}^2 \setminus \Theta^c$, et les fonctions φ_j sont également, toujours par prolongement analytique, indépendantes sur le réel, ce qui montre que la résolvante R a exactement $n\,(\mathcal{C})$ pôles à l'intérieur de la courbe $\mathcal{C}$.

6.3 Décroissance de l'énergie locale des solutions de l'équation des ondes

Nous présentons dans cette section une application simple de notre résultat à l'étude en grand temps de l'énergie locale des solutions de l'équation des ondes dans l'ouvert $\Omega = \Theta^c$. On a, partout où l'opérateur $Id - M$ est inversible,

$$R\,(\lambda) = R_0\,(\lambda) - (H_1 - H_2\gamma_2 H_1)\,(Id - M)^{-1}\,(\gamma_1 R_0 + \gamma_1 H_2 \gamma_2 R_0) - H_2\gamma_2 R_0$$

et si l'opérateur $\mathcal{E}^{\pm}$ est inversible, alors l'opérateur $Id - M$ aussi et

$$(Id - M)^{-1} = \mathcal{E}_N^0 - \mathcal{E}_N^{+,-}\left(\mathcal{E}_N^{\pm}\right)^{-1}\mathcal{E}_N^{-,+}.$$

On déduit de cette relation et des estimations (5.34), (5.35), (6.4) et (6.5), que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N > 0$ tel que pour tout $C > 0$ et tous $\chi_1, \chi_2 \in C_0^\infty\,(\mathbf{R}^2)$, il existe $A > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$; $\mathrm{Im}\lambda < C$ et tel que la distance de λ à la réunion de l'ensemble des pôles et de $\{0\}$ est supérieure à ε,

$$\|\chi_2 R\,(\lambda) \circ \chi_1\|_{\mathcal{L}\left(L^2(\Omega); H_0^1(\Omega)\right)} \leq A|\lambda|^N. \tag{6.25}$$

On va utiliser l'estimation (6.25) pour déformer dans la relation

$$\chi_2 U\,(t)\,\chi_1 f = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\chi_2 R\,(\lambda)\,\chi_1 f d\lambda,$$

le contour d'intégration réel sur un contour dans $\mathrm{Im}\lambda = C$.

Soient $\varphi \in C_0^\infty\,(\mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de 0. On suppose que le support de φ est inclus dans $B\,(0,\varepsilon)$ et on note $\varphi_t\,(s) = \varphi\,(t+s)$. On a, pour $\psi \in C_0^\infty\,(\mathbf{R}^3)$,

$$\begin{aligned}\langle \varphi_t \chi_2 U\,(s)\,\chi_1 f, \psi\,(s,t)\rangle &= \int_s\int_\lambda e^{i\lambda s}\varphi_t\,(s)\,\chi_2\,(x)\,R\,(\lambda)\,(\chi_1 f)\,\psi\,(s,x)\,dxd\lambda \\ &= \int_s\int_\lambda e^{i\lambda s}\chi_1 R\,(\lambda)\,(\chi_1 f)\left(\frac{i\partial}{\lambda\partial s}\right)^{N+2}(\varphi_t\,(s)\,\psi\,(s,x))\,dsdxd\lambda.\end{aligned}$$

Soit $C' < C$. On suppose que l'ensemble $[iC', iC' + \infty[$ reste à distance $\varepsilon > 0$ de l'ensemble des pôles, qu'il en est de même de $]-\infty + iC', iC']$ (dans l'autre feuillet du revêtement simplement connexe de C^* ou on fait la déformation) et qu'il n'y a pas de pôle vérifiant $C' < \mathrm{Im}\lambda < C$ (c'est possible car l'ensemble des pôles situés sous la droite $\mathrm{Im}\lambda < C$ est fini). Si $m > N+1$, on peut déformer le contour d'intégration réel sur le contour γ suivant: où on a choisi la partie γ_0 du contour γ qui n'est pas

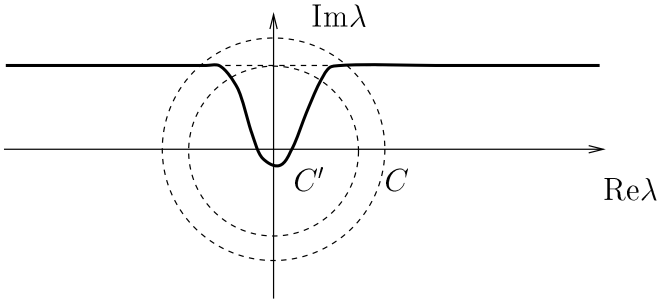

Fig. 6.1 – *Contour de déformation*

dans $\mathrm{Im}\lambda = C'$ telle qu'elle ne rencontre pas l'ensemble des pôles et telle qu'elle reste dans $|\lambda| < C$. Quand on fait cette déformation, il apparaît la contribution des pôles situés entre l'axe réel et le contour γ. On note $\{\lambda_i,\ i = 1, \cdots, I\}$ l'ensemble de ces pôles, on a alors

$$\begin{aligned}\langle \varphi_t \chi_2 U(s)\, \chi_1 f, \psi(s,x)\rangle \\ = \int_s \int_{\lambda\in\gamma} e^{i\lambda s} \chi_2 R(\lambda)(\chi_1 f) \left(\frac{i\partial}{\lambda \partial s}\right)^{N+2} (\varphi_t(s)\, \psi(s,x))\, ds dx d\lambda \\ + \sum_{i=1}^{I} \int_s \int_{\lambda \in C(\lambda_i,\varepsilon)} e^{i\lambda s} \chi_2 R(\lambda)(\chi_1 f)(\varphi_t(s)\,\psi(s,x))\, ds dx d\lambda.\end{aligned}$$

On décompose la première intégrale en somme de deux termes correspondant aux contributions de γ_0 et de $\gamma \setminus \gamma_0$. On a donc

$$\left| \int_s \int_{\lambda\in\gamma\setminus\gamma_0} e^{i\lambda s} \chi_1 R(\lambda)(\chi_1 f) \left(\frac{i\partial}{\lambda\partial s}\right)^{N+2} (\varphi_t(s)\,\psi(s,x))\, ds dx \right| \leq A' \|\psi\|_{H^{N+2}} e^{-(C'-\varepsilon)t},$$

où la constante A' ne dépend que de φ et de A (pas du choix de t). Ce qui permet d'écrire, si S_C est l'ensemble des pôles de diffusion de partie imaginaire inférieure (strictement) à C et de module supérieur à C (d'après le théorème 1, cet ensemble est non vide, si C est assez grand),

$$\varphi_t U(s)(\chi_1 f) = K(s)(f) + \sum_{\lambda\in S_C} \int_{\lambda\in C(\lambda_i,\varepsilon)} e^{i\lambda s}\chi_2 R(\lambda)(\chi_1 f)\, dx d\lambda + N(s)(\chi_1 f),$$

avec, si S'_C est l'ensemble des pôles compris entre l'axe réel et γ et n'appartenant pas à S_C,

$$K(\lambda) = \int_{\lambda\in\gamma_0} e^{i\lambda s} R(\lambda)(\chi_1 f)\, dx d\lambda + \sum_{\lambda\in S'_C} \int_{\lambda\in C(\lambda_i,\varepsilon)} e^{i\lambda s}\chi_2 R(\lambda)(\chi_1 f)\, dx d\lambda \tag{6.26}$$

et avec

$$N(s) = \int_{\gamma\setminus\gamma_0} e^{i\lambda s} R(\lambda) d\lambda$$

vérifiant

$$\begin{aligned}
\left(\partial_t^2 - \Delta\right) N(s)(\chi_1 f) &= \int_{\gamma\setminus\gamma_0} e^{i\lambda s}\left(\Delta + \lambda^2\right) R(\lambda)(\chi_1 f)\, d\lambda \\
&= -\int_{\gamma\setminus\gamma_0} e^{i\lambda s}(\chi_1 f)\, d\lambda \\
&= \int_{\gamma_0} e^{i\lambda t}(\chi_1 f)\, d\lambda - \int_{\gamma} e^{i\lambda s}(\chi_1 f)\, d\lambda \\
&= \int_{\gamma_0} e^{i\lambda s}(\chi_1 f)\, d\lambda - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda s}\chi_i f \\
&= \int_{\gamma_0} e^{i\lambda s}(\chi_1 f)\, d\lambda \\
&= \psi_0(s)\chi_1 f
\end{aligned} \tag{6.27}$$

et pour $\psi(s,x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$, on a

$$\begin{aligned}
&\langle \varphi_t \chi_2 N(s)\chi_1 f, \psi(s,t)\rangle \\
&\qquad = \int_s \int_{\lambda\in\gamma\setminus\gamma_0} e^{i\lambda s}\varphi_t(s)\chi_2(x) R(\lambda)(\chi_1 f)\psi(s,x)\, dx d\lambda \\
&\qquad = \int_s \int_{\lambda\in\gamma\setminus\gamma_0} e^{i\lambda s}\chi_1 R(\lambda)(\chi_1 f)\left(\frac{i\partial}{\lambda\partial s}\right)^{N+2}(\varphi_t(s)\psi(s,x))\, ds dx d\lambda,
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|\varphi_t(s)\chi_1(x) N(s,x)\|_{\mathcal{L}\left(L^2(\Omega);H^{-(N+2)}(\Omega)\right)} \le A e^{-(C'-\varepsilon)t}.$$

On suppose maintenant que $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ et on note $h = \Delta^M(\chi_1 f)$, avec $2M > N+1$. D'après l'équation (6.27), on a,

$$\partial_s^{2M} N(s)(\chi_1 f) = N(s)\Delta^M(\chi_1 f) + \sum_{i=0}^{M}\psi_i(s)\Delta^i(\chi_1 f),$$

avec $\psi_i \in C_0^\infty(\mathbf{R}_s)$, (puisque $\Delta R(\lambda)(f) = R(\lambda)(\Delta f)$ et donc $[\Delta, N(s)] = 0$). On obtient donc

$$\|\varphi_t(s)\chi_2\left(\partial_s^{2M} + \Delta^M\right) N(s)(\chi_1 f)\|_{H^{-N}(\Omega)} \le A e^{-(C'-\varepsilon)t}\|f\|_{H^{2M}(\Omega)}.$$

On en déduit, par conservation de l'énergie et vitesse finie de propagation du support pour les solutions de l'équation des ondes, qu'il existe $A, s, \varepsilon > 0$ tels que pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$,

$$\int_\Omega |\chi_2 \nabla_x N(t)\, \chi_1 f| + |\chi_2 \partial_t N(t)\, \chi_1 f| \leq A e^{-(C-\varepsilon)t} \|f\|_{H^s(\Omega \cap \mathrm{supp}(\chi_1))}. \tag{6.28}$$

On a donc

Théorème 4. — *Pour tous χ_1, $\chi_2 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, il existe $s > 0$ tel que, pour tout $C > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ et tout $t > 0$, la solution de l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet dans Ω, associée aux données initiales $u\,|_{t=0} = 0, \partial_t u\,|_{t=0} = \chi_1 f$ vérifie*

$$\chi_2 u = \chi_2 K(\chi_1 f) + \sum_{\lambda \in S_C} \frac{e^{it\lambda}}{i\lambda} \chi_2(x)\, \Pi_\lambda(\chi_1 f) + N(t)(\chi_1 f),$$

où S_C est l'ensemble des pôles de diffusion tels que $Im\lambda < C$ et $|\lambda| > C$ (d'après le théorème 1, si C est assez grand, S est non vide mais fini, et Π_λ est le projecteur spectral sur la fonction propre associée au pôle λ. Enfin, $N(t)$ vérifie (6.28) et l'opérateur $K(\lambda)$ donné par la relation (6.26) vérifie

$$\exists A > 0; \ \forall n \in \mathbf{N},$$

$$\|\chi_2 \partial_t^n K(\chi_1 f)\|_{H^1(\Omega)} \leq A C^n \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{6.29}$$

$$\|\chi_2 \Delta^n K(\chi_1 f)\|_{H^1(\Omega)} \leq A C^{2n} \|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{6.30}$$

(l'opérateur K est un opérateur basse fréquence, infiniment régularisant au sens des espaces $\mathcal{H}^s$ de la section 2, mais qui n'est pas exponentiellement décroissant en temps, puisque nous sommes en dimension paire d'espace).

Le seul point qui reste à vérifier est en effet que la contribution de chaque pôle est bien de la forme annoncée. Le projecteur spectral associé aux pôles d'un opérateur $S(\lambda)$ méromorphe, à l'intérieur d'une courbe $\mathcal{C}$ est

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} 2\lambda S(\lambda)\, d\lambda.$$

On en déduit que la contribution de chaque pôle est bien la projection spectrale sur l'espace propre associé aux pôles de $\frac{1}{i\lambda} e^{it\lambda} R(\lambda)$.

Remarque 6.16. — *En dimension impaire, quitte à rajouter les contributions des pôles dans $|\lambda| < C$, on pourrait supposer que l'opérateur K est nul et un tel résultat montrerait d'une part la décroissance exponentielle de l'énergie locale des solutions de l'équations des ondes, par rapport à une norme sobolev fixe (voir les résultats de M. Ikawa [14]) et d'autre part donnerait un développement asymptotique en grand temps de ces solutions, ce qui malheureusement n'est pas le cas en dimension paire.*

Annexes

A Calcul Pseudo-Différentiel analytique pour les problèmes au bord

Nous présentons ici un calcul pseudo-différentiel qui reprend essentiellement celui de P. Gérard et G. Lebeau [8], la seule différence étant que nous travaillons dans des domaines non bornés de l'espace des phases et que nous voulons des estimations uniformes à l'infini. Nous reprendrons donc dans cette partie la plupart des notations et des démonstrations de [8].

A.1 Opérateurs à l'intérieur

Soient U un ouvert de $\mathbf{C}^{2n}$ et Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$

Définition A.1. — *Pour tout entier m, on note $S^m(U)$ l'espace des séries formelles*

$$e = \sum_{n\geq 0} (i\lambda)^{-n} e_n,$$

telles qu'il existe $A, B > 0$ tels que pour tout n, la fonction e_n est définie pour $\lambda \geq 1$, holomorphe en $(z, \zeta) \in U$ et vérifie

$$|e_n(z,\zeta)| \leq AB^n n! \left(1 + |z| + |\zeta|\right)^m. \tag{A.1}$$

Définition A.2. — *Pour $K \subset \mathbf{C}^n$ fermé, on notera $S^m(K) = \varinjlim_{d>0} S^m(K + B(0,d))$, c'est à dire que la série e appartient à $\in S^m(K)$ si et seulement s'il existe $d > 0$ tel que $e \in S^m(K + B(0,d))$.*

Définition A.3. — *Soit $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbf{R})$. On notera $H^m_\varphi(\Omega)$ l'espace des fonctions $u(z,\lambda)$, définies pour $\lambda \geq 1$, holomorphes en $z \in \Omega$, telles que*

$$\exists C, M, \forall z \in \Omega, |u(z,\lambda)| \leq C\lambda^M e^{\lambda\varphi(z)} \times (1 + |z|)^m.$$

On notera $N^m_\varphi(\Omega)$ l'espace des fonctions $u(z,\lambda)$, définies pour $\lambda \geq 1$, holomorphes en $z \in \Omega$, telles que

$$\exists C, M, \varepsilon > 0,\ \forall z \in \Omega, |u(z,\lambda)| \leq C\lambda^M e^{\lambda(\varphi(z)-\varepsilon)} \times (1 + |z|)^m.$$

Remarque A.4. — *Si l'ouvert Ω est borné, les espaces $H^m_\varphi(\Omega)$ et $N^m_\varphi(\Omega)$ coïncident avec les espaces de Sjöstrand usuels, $H_\varphi(\Omega)$ et $N_\varphi(\Omega)$.*

On suppose maintenant qu'il existe $R > 0$ tel que $\Omega \times B(0,R) \subset U$. On quantifie alors les symboles de $S^m(\Omega)$ de la façon suivante:

Définition A.5. — *Soient $e \in S^m(U)$ et $C > 0$ une constante, on pose pour $u \in H^p_\varphi(\Omega)$ et $z \in \Omega$, $\lambda \geq 1$,*

$$Op(e)_C(u)(z,\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \leq \lambda/C} \sum_{|\alpha| \leq \lambda/C} (i\lambda)^{-n} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha e_n(z, \zeta = 0, \lambda) \left(\frac{1}{i\lambda}\partial_z\right)^\alpha u(z,\lambda).$$

Soient $d > 0$ et $\Omega' \subset \Omega$ tel que $\Omega' + B(0,d) \subset \Omega$. Soit $D > 0$ tel que

$$\sup_{z \in \Omega} \left\| \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\| < D < R.$$

Lemme A.6. — *Soit $e \in S^p(U)$. Pour tous $C > \sup\{2B/e, 1/Dd\}$, $m \in \mathbf{N}$, $u \in H^m_\varphi(\Omega)$ on a*

$$Op(e)_C(u) \in H^{m+p}_\varphi(\Omega')$$

de plus, si $C' \geq C$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $u \in H^m_\varphi(\Omega)$ on a

$$Op(e)_C(u) - Op(e)_{C'}(u) \in H^{m+p}_{\varphi-\varepsilon}(\Omega').$$

Si $z \in \Omega'$ et si $\|z - w\| \leq (DC)^{-1}$ alors $w \in \Omega$. Pour $|\alpha| \leq \lambda/C$ posons $\rho_{\alpha_i} = \alpha_i(\lambda D)^{-1}$. D'après les formules de Cauchy appliquées sur un polydisque de centre z et de polyrayon ϱ, on a

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{1}{i\lambda}\partial_z\right)^\alpha u(z,\lambda) e^{-\lambda\varphi(z)} (1+|z|)^{-m}\right| \\ \leq \frac{\alpha!\lambda^{-|\alpha|}}{\prod_{i=1}^n \rho_{\alpha_i}^{\alpha_i}} \sup_{\substack{w\in\Omega \\ |z-w|\leq(DC)^{-1}}} \left|u(w,\lambda) e^{-\lambda\varphi(w)} (1+|w|)^{-m}\right| \\ \sup_{|z_i - w_i| = \rho_{\alpha_i}} \left| e^{\lambda(\varphi(w)-\varphi(z))} \left(\frac{(1+|w|)}{(1+|z|)}\right)^m \right|.\end{aligned}$$

Or on a

$$\operatorname{Re}(\varphi(w) - \varphi(z)) = -\operatorname{Im}\left(\int_0^1 \left(\frac{2}{i}\frac{\partial\varphi}{\partial_z} z + \theta(w-z)\right) d\theta \cdot (w-z)\right) \leq \frac{|\alpha|}{\lambda}$$

on en déduit que

$$\left|\left(\frac{1}{i\lambda}\partial_z\right)^\alpha u(z,\lambda) e^{-\lambda\varphi(z)} (1+|z|)^{-m}\right| \leq C'' \frac{\alpha!(De)^{|\alpha|}}{\prod_{i=1}^n {\alpha_i}^{\alpha_i}} \lambda^M,$$

or, d'après la formule de Stirling, on a

$$\alpha_i! \leq C\left(\frac{\alpha_i}{e}\right)^{\alpha_i} \sqrt{\alpha_i + 1},$$

ce qui implique que

$$\left|\left(\frac{1}{i\lambda}\partial_z\right)^\alpha u(z,\lambda) e^{-\lambda\varphi(z)} (1+|z|)^{-m}\right| \leq A\lambda^M D^{|\alpha|} \prod_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i + 1}. \tag{A.2}$$

D'après les formules de Cauchy, on a

$$\sup_{z\in\Omega} |\partial_\zeta e_n (z, \zeta = 0)| \leq AB^n n! R^{|-\alpha|} \alpha!,$$

On obtient donc finalement

$$\begin{aligned}
&\Bigg| \sum_{\substack{n\leq\lambda/C \\ |\alpha|\leq\lambda/C}} (i\lambda)^{-n} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha e_n (z, \zeta = 0, \lambda) \left(\frac{1}{i\lambda}\partial_z\right)^\alpha u(z, \lambda) e^{-\lambda\varphi(z)} \Bigg| \\
&\qquad \leq \sum_{n\leq\lambda/C} |\lambda|^{-n} AB^n n! (1 + |z|)^{m+p} \sum_{|\alpha|\leq\lambda/C} \left(\frac{D}{R}\right)^{|\alpha|} \prod_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i + 1} \\
&\qquad \leq Cte\, (1 + |z|)^{m+p} \sum_{n\leq\lambda/C} \frac{AB^n n!}{|\lambda|^n} \\
&\qquad \leq Cte\, (1 + |z|)^{m+p} \sum_{n\leq\lambda/C} A \left(\frac{Bn}{\lambda e}\right)^n \sqrt{\lambda + 1} \\
&\qquad \leq Cte\, (1 + |z|)^{m+p},
\end{aligned}$$

puisque $D/R < 1$ et $C > 2B/e$. On en déduit la première partie du lemme. On a par ailleurs

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n\leq\lambda/C \\ \lambda/C'\leq|\alpha|\leq\lambda/C}} |\lambda|^{-n} AB^n n! (1 + |z|)^{m+p} \sum_{|\alpha|\leq\lambda/C} \left(\frac{D}{R}\right)^{|\alpha|} \prod_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i + 1} \\
&\qquad \leq Cte \left(\frac{D}{R}\right)^{\lambda/C'} (1 + |z|)^{m+p} \sum_{n\leq\lambda/C} \frac{AB^n n!}{|\lambda|^n} \\
&\qquad \leq Cte\, (1 + |z|)^{m+p} e^{-|\lambda| \log\left(\frac{R}{D}\right)/C'}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\lambda/C'\leq n\leq\lambda/C \\ \lambda/C'\leq|\alpha|\leq\lambda/C}} |\lambda|^{-n} AB^n n! (1 + |z|)^{m+p} \sum_{|\alpha|\leq\lambda/C} \left(\frac{D}{R}\right)^{|\alpha|} \prod_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i + 1} \\
&\qquad \leq Cte\, (1 + |z|)^{m+p} \sum_{\lambda/C'\leq n\leq\lambda/C} \frac{AB^n n!}{|\lambda|^n} \\
&\qquad \leq Cte\, (1 + |z|)^{m+p} e^{-|\lambda| \log\left(\frac{Ce}{B}\right)/C'},
\end{aligned}$$

ce qui montre la deuxième partie du lemme.

Nous allons étudier la composition des opérateurs ainsi définis:

Définition A.7. — *Soient $e \in S^p(U)$ et $f \in S^q(U)$, on note $f\sharp e$ le symbole composé défini par la relation usuelle:*

$$(f\sharp e (z, \zeta)) = \sum_{n'+n"+|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha f_{n'} \partial_z^\alpha e_{n"} (z, \zeta).$$

On vérifie facilement que pour tout $U' \subset U$, tel que $U' + B(0,\varepsilon) \subset U$ $(\varepsilon > 0)$, $f\sharp e \in S^{p+q}(U')$:

$$\begin{aligned}|(f\sharp e)_n| &\le \sum_{n'+n''+|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} AB^{n'} n'! \varepsilon^{-|\alpha|}\alpha! AB^{n''}n''!\varepsilon^{-|\alpha|}\alpha!\,(1+|z|+\varepsilon)^{p+q}\\ &\le A'B'^{n} n!\end{aligned}$$

si on prend $B' > \max\{B, \frac{1}{\varepsilon}\}$.

Lemme A.8. — *Pour tout $f \in S^p(U)$, $e \in S^q(U)$, $\Omega' \subset \Omega$, $U' \subset U$, tels que $U' + B(0,d_1) \subset U$, $\Omega' + B(0,d) \subset \Omega$ et $\Omega \times B(0,d_2) \subset U'$ $(d_1, d_2 > 0)$, $C > 0$ assez grand, tels que $D = \sup_{z\in\Omega} \|\frac{2}{i}\partial_z\varphi\| < d_2$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $u \in H^m_\varphi(\Omega)$, on a*

$$Op(f\sharp e)_C u - Op(f)_C \circ Op(e)_C u \in H^{m+p+q}_{\varphi-\varepsilon}(\Omega').$$

D'après les inégalités de Cauchy, il existe des constantes $A, B > 0$ telles que pour tout $z \in \Omega'$

$$\begin{aligned}\left|\partial_\zeta^\alpha f_n(t,\tau,z,\zeta=0)\right| &\le \alpha! AB^n \frac{1}{d_2^{|\alpha|}}(1+|z|)^p,\\ \left|\partial_z^\alpha\partial_\zeta^\beta e_n(\tau,z,\zeta=0,\lambda)\right| &\le \alpha!\beta! AB^n n! \frac{1}{d_2^{|\alpha|}}\frac{1}{d^{|\beta|}}(1+|z|)^q,\\ \left|\partial_\zeta^\gamma (f\sharp e)_n\right| &\le \gamma! AB^n n! \frac{1}{d_2^{|\gamma|}}(1+|z|)^{p+q}.\end{aligned} \tag{A.3}$$

D'après (A.2) on a pour $z \in \Omega'$, $|\alpha| \le \lambda/C_0$,

$$\left|\left(\frac{\partial_z}{i\lambda}\right)^\alpha u(z,\lambda)\right| \le C\lambda^M D^{|\alpha|}\left|e^{\lambda\varphi(z)}\right|(1+|z|)^m.$$

On a alors par définition

$$\begin{aligned}Op(f)_C \circ Op(e)_C u = \sum_{\substack{n' \le \lambda/.C\\ |\alpha|\le\lambda/C}} (i\lambda)^{-n'}\frac{1}{\alpha!}\partial_\zeta^\alpha f_{n'}(z,0,\lambda)\left(\frac{1}{i\lambda}\partial_z\right)^\alpha\\ \left(\sum_{\substack{n''\le\lambda/C\\ |\beta|\le\lambda/C}}(i\lambda)^{-n''}\frac{1}{\beta!}\partial_\zeta^\beta e_{n''}(z,0,\lambda)\left(\frac{1}{i\lambda}\partial_z\right)^\alpha u(z,\lambda)\right),\end{aligned}$$

qu'on écrit sous la forme

$$Op(f)_C \circ Op(e)_C u = \sum_{(n',n'',\alpha_1,\alpha_2,\beta)\in E} J_{n',n'',\alpha_1,\alpha_2,\beta}, \tag{A.4}$$

avec $E = \{(n', n'', \alpha_1, \alpha_2, \beta)\,;\ n',\ n'',\ |\beta|,\ |\alpha_1| + |\alpha_2| \le \lambda/C\}$ et

$$\begin{aligned}J_{n',n'',\alpha_1,\alpha_2,\beta} = (i\lambda)^{-n'-n''-|\alpha_1|}\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)!}\partial_\zeta^{\alpha_1+\alpha_2} f_{n'}(z,0,\lambda)\\ \frac{(\alpha_1+\alpha_2)!}{\alpha_1!\alpha_2!}\frac{1}{\beta!}\partial_\zeta^\beta\partial_z^{\alpha_1} e_{n''}(z,0,\lambda)\left(\frac{1}{i\lambda}\partial_z\right)^{\beta+\alpha_2} u(z,\lambda).\end{aligned}$$

On a donc, d'après (A.2) et (A.3)

$$\begin{aligned}
|J_{n',n'',\alpha_1,\alpha_2,\beta}| \leq\ & |\lambda|^{-(n'+n''+|\alpha_1|)} AB^{n'} n'! d_1^{-(\alpha_1+\alpha_2)} (1+|z|)^p \frac{(\alpha_1+\alpha_2)!}{\alpha_1!\alpha_2!} \alpha_1! AB^{n''+\alpha_1} \\
& d^{-|\beta|} n''! (1+|z|)^q AD^{(\beta+\alpha_2)} \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\beta_i+\alpha_{2,i}+1} \lambda^M (1+|z|)^m \\
\leq\ & Cte \lambda^M (1+|z|)^{p+q+m} \left(\frac{Bn'}{e\lambda}\right)^{n'} \sqrt{n'+1} \left(\frac{Bn''}{e\lambda}\right)^{n''} \sqrt{n''+1} \\
& \left(\frac{\alpha_1 B}{ed\lambda}\right)^{\alpha_1} \sqrt{\alpha_1+1} \frac{(\alpha_1+\alpha_2)!}{\alpha_1!\alpha_2!} \left(\frac{D}{d_2}\right)^{|\alpha_2|} \left(\frac{D}{d}\right)^{|\beta|}.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $\eta > 0$, il existe A_η et F_η tels que

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \ \frac{(\alpha_1+\alpha_2)!}{\alpha_1!\alpha_2!} \leq A_\eta F_\eta^{|\alpha_1|} (1+\eta)^{|\alpha_2|}.$$

si on choisit η tel que $(1+\eta)\widetilde{D} < d_2$ et si la constante C est choisie assez grande, il existe $\theta < 1$ tel que pour tous $n', n'', \alpha_1, \alpha_2, \beta \leq \lambda/C$, C grand,

$$|J_{n',n'',\alpha_1,\alpha_2,\beta}| \leq C\lambda^M \theta^{n'+n''+|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\beta|} (1+|z|)^M,$$

ce qui permet dans l'expression (A.4) de se réstreindre à la somme sur

$$E' = \{(n', n'', \alpha_1, \alpha_2, \beta);\ n'+n''+|\alpha_1| \leq \lambda/C,\ |\beta+\alpha_2| \leq \lambda/C\},$$

modulo un terme à décroissance exponentielle par rapport à λ, ce qui est exactement la définition de $Op(f\sharp e)_C u$, d'où le lemme.

A.2 Opérateurs pour les problèmes aux limites

Soit $t_0 > 0$. On note I l'intervalle $[0, t_0]$. Soient U un ouvert de $\mathbf{C}^{2n}$, Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et K un compact de $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$.

Définition A.9. — *Pour tout $(m,p) \in \mathbf{N}^2$, on note $A^{m,p}(I,U,K)$ l'espace des séries formelles*

$$e = \sum_{n \geq 0} (i\lambda)^{-n} e_n,$$

telles qu'il existe V un voisinage de I dans $\mathbf{C}$, $A, B > 0$ tels que pour tout n, la fonction e_n est définie pour $\lambda \geq 1$, holomorphe en $t \in V, \tau \in \mathbf{C} \setminus (1+|z|)K, (z,\zeta) \in U$ et vérifie

$$|e_n(t,\tau,z,\zeta,\lambda)| \leq AB^n n! (1+|z|+|\zeta|)^p (1+|\tau|)^m.$$

Remarque A.10. — *Si on note par abus de notation $V \times (\mathbf{C} \setminus (1+|z|)K) \times U$ l'ensemble $\{(t,\tau,z,\zeta); t \in V,\ \tau \notin (1+|z|)K, (z,\zeta) \in U$, alors on a*

$$A^{m,p}(I,U,K) \subset S^{m+\max(0,p)}(V \times (\mathbf{C} \setminus (1+|z|)K) \times U)$$

et

$$A^{m,0}(I,U,K) = S^m(V \times (\mathbf{C} \setminus (1+|z|)K) \times U).$$

Pour $e \in A^{m,p}(I,U,K)$, si on pose $m_+ = \sup\{0,m\}$, on a une décomposition unique:

$$e_n(t,\tau,z,\zeta,\lambda) = \sum_{j=0}^{m^+} e_n^j(t,z,\zeta,\lambda)\,\tau^j + e_n^-(t,\tau,z,\zeta,\lambda),$$

avec e_n^j indépendants de τ et $e^- \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\geq 0}(i\lambda)^{-n} e_n^- \in A^{-1,p}(I,U,K)$.

Définition A.11. — *Soit $\varphi \in C^1(\Omega,\mathbf{R})$, On notera $C^\infty\left(I;H_\varphi^p(\Omega)\right)$ l'espace des fonctions $u(t,z,\lambda)$, définies pour $\lambda \geq 1$, de classe C^∞ en $t \in I$, holomorphes en $z \in \Omega$, telles que*

$$\begin{gathered}\exists M,\ \forall l \in \mathbf{N},\ \exists C_l,\ \forall (t,z,\lambda) \in I\times\Omega\times[1,+\infty[,\\ \left|\partial_t^l u(t,z,\lambda)\right| \leq C_l \lambda^{M+l} e^{\lambda\varphi(z)} \times (1+|z|)^p.\end{gathered}$$

On notera $C^\infty\left(I;N_\varphi^p(\Omega)\right)$ l'espace des fonctions $u(t,z,\lambda)$, définies pour $\lambda \geq 1$, de classe C^∞ en $t \in I$, holomorphes en $z \in \Omega$, telles que

$$\begin{gathered}\exists \varepsilon > 0,\ \exists M,\ \forall l \in \mathbf{N},\ \exists C_l,\ \forall (t,z,\lambda) \in I\times\Omega\times[1,+\infty[,\\ \left|\partial_t^l u(t,z,\lambda)\right| \leq C_l \lambda^{M+l} e^{\lambda(\varphi(z)-\varepsilon)} \times (1+|z|)^p.\end{gathered}$$

On suppose maintenant qu'il existe $R_0 > 0$ tel que $\Omega \times B(0,R_0) \subset U$. D'après les inégalités de Cauchy, si $e \in A^{m,p}(I,U,K)$, on a

$$\begin{gathered}\forall z \in \Omega,\ \forall \alpha \in \mathbf{N}^n,\ \forall i \in \mathbf{N},\\ \left|\partial_\zeta^\alpha e_i(z,\zeta=0)\right| \leq A\frac{\alpha!}{R_0^{|\alpha|}} B^n n!\,(1+|z|)^p.\end{gathered}$$

On pose, au sens des intégrales oscillantes

$$k(e,n,\alpha) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(t-s)\tau}\frac{1}{\alpha!}\partial_\zeta^\alpha e_n(t,\tau,z,\zeta=0,\lambda)\,d\tau.$$

On pose $K_\pm = K \cap \{\pm \mathrm{Im}\tau > 0\}$ et

$$k^\pm(e,n,\alpha)(t,s,z,\lambda) = k\mid_{\pm(t-s)\geq 0}.$$

La fonction $k^\pm$ est C^∞ dans $\pm(t-s) > 0$, analytique en $z \in \Omega$ et vérifie

(A.5)

$$\begin{gathered}\forall \beta,\ \exists C_\beta\ \forall (t,s) \in I\times I,\ \pm(t-s) \geq 0,\ \forall z \in \Omega,\ \forall \lambda \geq 1\\ \left|\partial_{s,t}^\beta k^\pm(e,n,\alpha)(t,s,z,\lambda)\right| \leq C_\beta \lambda^{|\beta|+1} B^n R_0^{-\alpha} n!\, e^{-\lambda/2|t-s|(1+|z|)dist(K_\pm,\mathbf{R})}(1+|z|)^p.\end{gathered}$$

De plus le noyau distribution k est égal à

$$k(e,n,\alpha) = 1_{t\geq s}k^+ + 1_{t\leq s}k^- + \sum_{j=0}^{m^+}\frac{1}{\alpha!}\partial_\zeta^\alpha e_n^j(t,z,\zeta=0,\lambda)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j(\delta_{t=s}).$$

On quantifie alors les symboles $e \in S^{m,p}$ de la façon suivante:

Définition A.12. — *Soient $e \in S^{m,p}(U)$ et $C > 0$ une constante, on pose pour $u \in C^\infty\left(I; H^q_\varphi(\Omega)\right)$, $z \in \Omega$ et $\lambda \geq 1$,*

$$Op(e)_C(u)(z,\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} = \sum_{n \leq \lambda/C} \sum_{|\alpha| \leq \lambda/C} (i\lambda)^{-n} \int_0^{t_0} k(e,n,\alpha)(t,s,z,\lambda) \left(\frac{\partial_z}{i\lambda}\right)^\alpha u(s,z,\lambda)\, ds.$$

Soient $d > 0$ et $\Omega' \subset \Omega$ tel que $\Omega' + B(0,d) \subset \Omega$. Soit $D > 0$ tel que

$$\sup_{z\in\Omega} \left\| \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\| < D < R_0.$$

Lemme A.13. — *Pour tous $C > \sup\{2B/e, 1/Dd\}$, $u \in C^\infty\left(I; H^q_\varphi(\Omega)\right)$ on a*

$$Op(e)_C(u) \in C^\infty\left(I; H^{p+q}_\varphi(\Omega')\right)$$

et pour tout $C' > \sup\{B/e, 1/Dd\}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $u \in C^\infty\left(I; H^q_\varphi(\Omega)\right)$,

$$Op(e)_C(u) - Op(e)_{C'}(u) \in C^\infty\left(I; H^{p+q}_{\varphi-\varepsilon}(\Omega')\right).$$

D'après (A.2) appliqué à $\partial^s_t u(s,t,\lambda)$, on a

$$\begin{aligned}\left|\partial^l_t \left(\frac{1}{i\lambda}\partial_z\right)^\alpha u(t,z,\lambda)\right| &\leq C_l \lambda^{M+l} \alpha! \lambda^{-|\alpha|} e^{|\alpha|} \prod_{i=1}^n \rho_{\alpha_i}^{-\alpha_i} \left|e^{\lambda\varphi(z)}\right| (1+|z|)^q \\ &\leq C'_l \lambda^{M+l} D^{|\alpha|} \prod_{j=1}^n (\alpha_j+1)^{1/2} \left|e^{\lambda\varphi(z)}\right| (1+|z|)^q,\end{aligned} \tag{A.6}$$

or

$$\begin{aligned}\partial^l_t &\left(\int_0^{t_0} k(e,n,\alpha)(t,s,z,\lambda) \left(\frac{\partial_z}{i\lambda}\right)^\alpha u(s,z,\lambda)\, ds\right) \\ &= \partial^l_t \Bigg[\int_0^t k^+ \left(\frac{\partial_z}{i\lambda}\right)^\alpha u(s,z,\lambda)\, ds + \int_t^{t_0} k^- \left(\frac{\partial_z}{i\lambda}\right)^\alpha u(s,z,\lambda)\, ds \\ &\qquad + \sum_{j=0}^{m^+} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\zeta e^j_n(t,z,\zeta=0,\lambda)\, \partial^j_t \left(\frac{\partial_z}{i\lambda}\right)^\alpha u(t,z,\lambda)\Bigg]\end{aligned}$$

et d'après les relations (A.2), (A.5) et (A.6)

$$\begin{aligned}&\left|\partial^l_t \int_0^t k^+ \left(\frac{\partial_z}{i\lambda}\right)^\alpha u(s,z,\lambda)\, ds\right| \\ &= \Bigg|\sum_{j=0}^l \partial^{l-j}_t \left(\partial^j_t k^+(e,n,\alpha)(t,t,z,\lambda) \left(\frac{\partial_z}{i\lambda}\right)^\alpha u(t,z,\lambda)\right) \\ &\qquad + \int_0^t \partial^l_t k^+(e,n,\alpha)(t,s,z,\lambda) \left(\frac{\partial_z}{i\lambda}\right)^\alpha u(s,z,\lambda)\, ds\Bigg| \\ &\leq \sum_{j=0}^l C_l \lambda^{l+1} B^n \left(\frac{D}{R_0}\right)^{|\alpha|} \prod_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j+1}\, \lambda^M e^{\lambda\varphi(z)} (1+|z|)^{q+p}.\end{aligned}$$

On a la même majoration pour le deuxième terme et

$$\left|\partial_t^l \sum_{j=0}^{m^+} \frac{1}{\alpha!}\partial_\zeta^\alpha e_n^j \partial_t^j \left(\frac{\partial_z}{i\lambda}\right)^\alpha u\left(t,z,\lambda\right)\right| \\ \leq C_l \lambda^{M+m^++l+1} D^{|\alpha|} \prod_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j+1}\left|e^{\lambda\varphi(z)}\right|\left(1+|z|\right)^q \left(\frac{1}{R_0}\right)^{|\alpha|} AB^n n!\left(1+|z|\right)^p.$$

Finalement, on obtient

$$\text{(A.7)} \quad \left|\partial_t^l \left(\int_0^{t_0} k\left(e,n,\alpha\right)\left(t,s,z,\lambda\right)\left(\frac{\partial_z}{i\lambda}\right)^\alpha u\left(s,z,\lambda\right)ds\right)\right| \\ \leq C_l \lambda^{M'+l} B^n n!\left(\frac{D}{R_0}\right)^{|\alpha|} e^{\lambda\varphi(z)}\left(1+|z|\right)^{p+q},$$

ce qui permet de terminer la démonstration du lemme comme celle du lemme A.6.

On s'intéresse maintenant aux propriétés de composition de ces opérateurs. Nous voulons étudier le Laplacien sur un ouvert à bord. Dans un système de coordonnées géodésiques, cet opérateur s'écrit $\Delta = \partial_t^2 + P\left(x,t,\partial_x\right)$ où t désigne la variable normale au bord et x la variable tangentielle. Il suffit donc pour notre propos d'étudier la composition des opérateurs pseudo-différentiels avec d'une part les opérateurs tangentiels et d'autre part avec l'opérateur ∂_t^2; ce que nous allons faire dans la suite de cette section.

Soit $e \in A^{-2,p}\left(I,U,K\right)$ et $q \in A^{0,q}\left(I,U,K\right)$, tel que q est indépendant de la variable τ.

Définition A.14. — *On note $e\sharp q$ le symbole composé*

$$\left(e\sharp q\right)_n\left(t,\tau,z,\zeta,\lambda\right) = \sum_{n'+n''+|\alpha|+l=n} \frac{1}{l!\alpha!}\partial_\tau^l \partial_\zeta^\alpha e_{n'} \partial_t^l \partial_z^\alpha q_{n''}\left(t,z,\tau,\zeta,\lambda\right).$$

Soit K_1 un voisinage compact de K dans $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ et U_1 tel que $U_1 + B\left(0,d\right) \subset U$, $d>0$. On a alors $e\sharp q \in A^{-2,p+q}\left(I,U_1,K_1\right)$. Soit Ω tel que $\Omega \times B\left(0,R_0\right) \subset U_1$ et tel que

$$\sup_{z\in\Omega}\left\|\frac{2}{i}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\| < D < R.$$

Lemme A.15. — *Soit Ω' tel que $\Omega' + B\left(0,d\right) \subset \Omega$. Il existe C^0 tel que pours tout $C \geq C^0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $u \in C^\infty\left(I,H_\varphi\left(\Omega'\right)\right)$,*

$$\left(Op\left(e\sharp q\right)_C - Op\left(e\right)_C \circ Op\left(q\right)_C\right)u \in C^\infty\left(I,H_{\varphi-\varepsilon}\left(\Omega'\right)\right).$$

Compte tenu de l'estimation (A.7), la démonstration de ce lemme est identique à celle du lemme A.8

Nous nous intéressons maintenant à la composition de l'opérateur ∂_t^2 avec un opérateur pseudodifférentiel. Soient $e \in A^{-2,p}\left(I,U,K\right)$, Ω, $R_0>0$ tels que $\Omega \times B\left(0,R_0\right) \subset U$. On a $\tau^2 e \in A^{0,p}\left(I,U,K\right)$. On pose

$$\left(\tau^2 e_n\right)^0\left(t,\tau,z,\zeta\right) = \lim_{\tau\to\infty} \tau^2 e_n\left(t,\tau,z,\zeta,\lambda\right)$$

et

$$K^{\pm}(t,s)_C = \sum_{n\leq \lambda/C}\sum_{|\alpha|\leq\lambda/C} (i\lambda)^{-n} k^{\pm}(e,n,\alpha)(t,s)\left(\frac{1}{i\lambda}\partial_z\right)^{\alpha}.$$

On remarque que

$$K^{+}(t,t) - K^{-}(t,t) = 0$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda^2}&\left(\partial_s K^{+}(t,t) - \partial_s K^{-}(t,t)\right)\\ &= \sum_{n\leq \lambda/C}\sum_{|\alpha|\leq\lambda/C} (i\lambda)^{-n}\frac{1}{\alpha!}\partial_\zeta^\alpha\left(\tau^2 e_n\right)^0(t,z,\zeta=0,\lambda)\left(\frac{1}{i\lambda}\partial_z\right)^{\alpha}.\end{aligned}$$

On en déduit par intégrations par parties
Lemme A.16. — *Pour $u\in C^\infty(I,H_\varphi(\Omega))$, on a*

$$\begin{aligned}Op(e)_C\left(\left(\frac{\partial_t}{i\lambda}\right)^2 u\right) = Op\left(\tau^2 e\right)_C u + \frac{1}{\lambda^2}\Big(&K^{+}(t,0)\,\partial_t u(0) - \partial_s K^{+}(t,0)\,u(0)\\ &- K^{-}(t,t_0)\,\partial_t u(0) + \partial_s K^{-}(t,t_0)\,u(t_0)\Big).\end{aligned}$$

B Ensemble de fréquence et propagation des singularités

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, à bord analytique, sauf éventuellement en un point O qui sera alors du type défini dans l'introduction. Nous allons dans cette section définir et étudier les ensembles de fréquence d'une famille de solutions, $u(x,\lambda)\in H^1_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)$, distributions prolongeables, définies pour $\lambda>1$, solutions des équations

$$\left(\Delta+\lambda^2\right)u = f \quad u\mid_{\partial\Omega} = g, \tag{B.1}$$

avec f et g nulles au voisinage de O. On supposera également que les familles $u(\lambda)$, $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ vérifient les estimations à priori :

$$\begin{gathered}\exists N\in\mathbf{N};\ \forall\varphi\in C_0^\infty\left(\mathbf{R}^2\right),\ \exists C>0;\quad \forall\lambda\geq 1,\\ \|\varphi u\|_{H^1(\Omega)}\leq C\lambda^N,\qquad \|\varphi f\|_{L^2(\Omega)}\leq C\lambda^N,\\ \exists N\in\mathbf{N};\ \forall\varphi\in C_0^\infty(\partial\Omega\setminus O),\ \exists C>0;\quad \forall\lambda\geq 1\ \|\varphi g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\leq C\lambda^N.\end{gathered} \tag{B.2}$$

Soit u une telle distribution, on a alors, au voisinage de tout point $x_0\in\partial\Omega\setminus\{O\}$, dans un système de coordonnées où $\Omega=\{x'\in\mathbf{R}^{n-1},x_n>0\}$, si $a>0$ est assez petit, $u\in C^\infty([0,a[;\mathcal{D}'(\{|x'|<a\}))$, les traces $u\mid_{\partial\Omega}$ et les traces $\frac{\partial u}{\partial n}\mid_{\partial\Omega}$ sont donc bien définies dans $\mathcal{D}'(\{|x'|<a\})$.
Définition B.1. — *Soient $\sigma>0$ et u, f et g vérifiant l'équation (B.1) et les hypothèses (B.2). On définit l'ensemble de fréquence d'ordre σ jusqu'au bord de u, $\mathcal{SS}_b^\sigma(u)\subset$*

$T_b^*\Omega = T^*\Omega \cup T^*\partial\Omega \cup \{O\}$ de la manière suivante: si $(x_0,\xi_0) \in T^*\Omega$, alors (x_0,ξ_0) n'est pas dans $\mathcal{SS}_b^\sigma(u)$ si et seulement s'il existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$; $\varphi \equiv 1$ au voisinage de x_0 et $\epsilon > 0$ tels que

$$Tu(z,\lambda) \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega e^{\lambda z\cdot x - \lambda x^2/2}\varphi(x)\, u(x,\lambda)\, dx$$

vérifie

$$\exists C > 0;\ \forall \lambda \geq 1,\ |Tu(z,\lambda)| \leq Ce^{\frac{\lambda}{2}(Rez)^2 - \epsilon|\lambda|^\sigma},$$

au voisinage de $z_0 = x_0 - i\xi_0$.

Si $(x_0,\xi_0) \in T^*\{\partial\Omega\backslash O\}$, alors (x_0,ξ_0) n'est pas $\mathcal{SS}_b^\sigma(u)$ si et seulement si $(x_0,\xi_0) \notin \mathcal{SS}_b^\sigma(u\,|_{\partial\Omega})$ et $(x_0,\xi_0) \notin \mathcal{SS}_b^\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial n}\,|_{\partial\Omega}\right)$. Enfin, (O) n'est pas dans $\mathcal{SS}_b^\sigma(u)$ si et seulement s'il existe $\varphi \in G_0^\sigma(\mathbf{R}^n)$ tel que $\varphi \equiv 1$ au voisinage de O et

$$\|\varphi u(x,\lambda)\|_{H^1(\Omega)} \leq Ce^{\frac{\lambda}{2}(Rez)^2 - \epsilon|\lambda|^\sigma}.$$

Définition B.2. — *Soient $\sigma > 0$ et u, f et g vérifiant l'équation (B.1) et les hypothèses (B.2). On définit l'ensemble de fréquence à l'infini d'ordre σ jusqu'au bord de u, $\widehat{\mathcal{SS}}_b^\sigma(u) \subset T_b^*\Omega$ de la manière suivante: Si $(x_0,\xi_0) \in T^*\Omega$, alors (x_0,ξ_0) n'est pas dans $\widehat{\mathcal{SS}}_b^\sigma(u)$ si et seulement s'il existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$; $\varphi \equiv 1$ au voisinage de x_0, $\mu > 0$, $m \in \mathbf{N}$, V un voisinage conique de (x_0,ξ_0) et $\epsilon > 0$ tels que pour tout $(x,\xi) \in V$, $|\xi| \geq \mu$,*

$$|T\varphi u(z = x - i\xi, \lambda)| \leq Ce^{\frac{\lambda}{2}(Rez)^2 - \epsilon|\lambda|^\sigma}(1 + |\xi|)^m.$$

Si $(x_0,\xi_0) \in T^*\partial\Omega$, alors (x_0,ξ_0) n'est pas dans $\widehat{\mathcal{SS}}_b^\sigma(u)$ si et seulement si $(x_0,\xi_0) \notin \widehat{\mathcal{SS}}_b^\sigma(u\,|_{\partial\Omega})$ et $(x_0,\xi_0) \notin \widehat{\mathcal{SS}}_b^\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial n}\,|_{\partial\Omega}\right)$. Enfin, $(O) \notin \widehat{\mathcal{SS}}_b^\sigma(u)$.

B.1 Estimations elliptiques

Proposition B.3 (Régularité elliptique à l'infini). — *Soit $u(x,\lambda) \in H^1_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)$, une famille de distributions prolongeables, définie pour $\lambda > 1$, solutions de l'équation (B.1) et vérifiant les estimations (B.2). Alors,*

$$\widehat{\mathcal{SS}}_b^\sigma(u) \subset \widehat{\mathcal{SS}}_b^\sigma(f) \cup \widehat{\mathcal{SS}}^\sigma(g).$$

La démonstration de cette proposition est divisée en deux parties: les estimations à l'intérieur et celles au voisinage d'un point du bord (différent du coin O puisque $O \notin \widehat{\mathcal{SS}}_b^\sigma(u)$).

A l'intérieur

On se place près d'un point intérieur, x_0. Quitte à faire un changement de variables orthonormales, on peut supposer que $x_0 = 0$. On choisit $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ égale à 1 au voisinage de x_0. On a

$$\Delta_x + \lambda^2 = \sum_{i=1}^2 \left((\partial_{x_i} - \lambda x_i)^2 + 2\lambda(\partial_{x_i} - \lambda x_i)x_i - \lambda + \lambda^2 x_i^2\right) + \lambda^2,$$

donc

$$\begin{aligned}T\left(\psi\left(\Delta+\lambda^2\right)u\right)(z,\lambda) &= T(\psi f)(z,\lambda)\\ &= T\left(\left(\Delta+\lambda^2\right)\psi u\right)(z,\lambda)+T([\psi,\Delta]u)\\ &= \lambda^{-2}\Big(\lambda^2|z|^2-2\lambda z\cdot\nabla_z\\ &\qquad +\Delta_z-2\lambda+\lambda^2\Big)T(\psi u)(z,\lambda)+T([\psi,\Delta]u)\,.\end{aligned}$$

Or $\psi\equiv 1$ au voisinage de x_0, d'après (B.2), il existe donc $\varepsilon>0$ et $\eta>0$ tel que pour tout $z\in\mathbf{C}$, si $|\mathrm{Re}z|<\varepsilon$,

$$|T([\psi,\Delta]u)|\leq Ce^{\frac{\lambda}{2}(\mathrm{Re}z)^2-\eta\lambda}. \tag{B.3}$$

Nous allons donc étudier l'opérateur $\lambda^{-2}\big(\lambda^2|z|^2-2\lambda z\cdot\nabla_z+\Delta_z-2\lambda+\lambda^2\big)$. Or si on note

$$e(z,\zeta,\lambda)=\left(-\zeta^2+1-z^2-2iz\cdot\zeta\right)+(i\lambda)^{-1}\in S^2(\mathbf{C}\times\mathbf{C}),$$

alors on a, d'après (B.2), si on note $\varphi(z)=(\mathrm{Re}z)^2/2$, on a $T(\psi u)\in H^0_\varphi(\mathbf{C}^2)$ et

$$\lambda^{-2}\left(\lambda^2|z|^2+2z\cdot\nabla_z+2\Delta_z-\lambda+\lambda^2\right)T(\psi u)(z,\lambda)=Op(e)\left(T(\psi u)(z,\lambda)\right).$$

Proposition B.4. — *Soient K un fermé connexe de $\mathbf{C}^4$ et $e\in S^2(K)$ tel que e_0 ne s'annule pas sur un voisinage de K et $\frac{1}{e_0}\in S^{-2}(K)$. Alors il existe $f\in S^{-2}(K)$ tel que $f\sharp e=1$ dans $S^0(K)$.*

La démonstration de ce résultat ne diffère essentiellement pas de celle du cas des opérateurs pseudodifférentiels classiques de L. Boutet de Montvel et P. Kree [4] (voir aussi J. Sjöstrand [28]). Pour être complets, nous la donnons néanmoins.

On choisit U_0 et U_1 deux voisinages ouverts de K tels que $U_0+B(0,\varepsilon)\subset U_1$. On notera, pour $s\in[0,1]$,

$$U_s=\{(z,\zeta)\,;\ \mathrm{dist}((z,\zeta),U_0)<\varepsilon s\}$$

et $\mathcal{H}_s$, l'ensemble des fonctions holomorphes bornées sur U_s.

Pour tous $0<s<t$, l'opérateur $\frac{\partial^\alpha}{\alpha!}$ est borné de l'espace $\mathcal{H}_s$ dans l'espace $\mathcal{H}_t$, de norme majorée par $\frac{\alpha!}{(t-s)^{|\alpha|}}$. Pour tout $p\in S^0\left(\overline{U_1}\right)$ on note

$$A_{p,n}(z,\zeta,\partial_z)=\sum_{|\alpha|+k=n}\frac{1}{\alpha!}\partial_\zeta^\alpha p_k(z,\zeta)\,\partial_z^\alpha$$

et

$$A_p(z,\zeta,\partial_z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(i\lambda)^n}A_{p,n}(z,\zeta,\partial_z)\,.$$

Il résulte des inégalités de Cauchy et des hypothèses que les opérateurs $A_{p,n}$ sont bornés de $\mathcal{H}_t$ dans $\mathcal{H}_s$ (pour tous $0 < s < t$), de normes majorées par

$$\begin{aligned}\|A_{p,n}\|_{t,s} &\leq \sum_{\alpha+i=n} \frac{1}{\alpha\ !}\|\partial_\zeta^\alpha p_i\|_{L^\infty(\overline{U_1})}\frac{\alpha!}{(t-s)^\alpha}\\ &\leq \sum_{\alpha+i=n} AB^i\frac{i!\varepsilon^{-i}}{\alpha!}\frac{\alpha!}{(t-s)^\alpha}\\ &\leq A'B'^n\frac{n!}{(t-s)^n}.\end{aligned}$$

On notera $C_k(p) = \sup_{t,s}\|A_{p,k}\|_{t,s}\frac{(t-s)^k}{k!} \leq AB^k$.

Lemme B.5. — *Pour tout $p \in S^m\left(\overline{U_1}\right)$ et tout $q \in S^n\left(\overline{U_1}\right)$, on a, avec $g = p\sharp q$,*

$$C_n(g) \leq \sum_{i+j=n} C_i(p)\, C_j(q).$$

En effet , on a $A_{g,n} = \sum_{i+j=n} A_{p,i}A_{q,j}$ et donc

$$\begin{aligned}\|A_{g,n}\|_{t,s} &\leq \sum_{i+j=n}\|A_{p,i}\|_{\sigma,s}\|A_{q,j}\|_{t,\sigma}\\ &\leq \sum C_i(p)\frac{i^i}{(\sigma-s)^i}C_j(q)\frac{j^j}{(t-\sigma)^j}\\ &\leq \sum C_i(p)\,C_j(q)\inf_{s<\sigma<t}\frac{i^ij^j}{(t-\sigma)^j(\sigma-s)^i}\\ &\leq \sum C_i(p)\,C_j(q)\frac{n^n}{(t-s)^n},\end{aligned}$$

en choisissant $(\sigma - s) = \frac{i}{n}(t-s)$, et $(t-\sigma) = \frac{j}{n}(t-s)$ si $i \neq 0$ et $j \neq 0$ et en remarquant que $\inf \frac{n^n}{(t-\sigma)} = \frac{n^n}{(t-s)}$ ou $\inf \frac{n^n}{(\sigma-s)} = \frac{n^n}{(t-s)}$sinon.

On peut maintenant revenir à la preuve de la proposition B.4. Soit e vérifiant les hypothèses de la proposition. On suppose que U_0 et U_1 vérifient $U_0 + B(0,\varepsilon) \subset U_1$, $\frac{1}{e_0} \in S^{-2}(U_1 + B(0,2\varepsilon))$ et $e \in S^2(U_1 + B(0,2\varepsilon))$ ($\varepsilon > 0$ assez petit). Soit $g = \frac{1}{e_0}\sharp e - 1 \in S^0\left(\overline{U_1 + B(0,\varepsilon)}\right)$, vérifiant $g_0 = 0$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $\|r\|_\varepsilon = \sum C_n(g)\,\varepsilon^n < 1/2$ puisque cette série est, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, convergente et de premier terme nul ($C_0(g) = 0$). On définit $f = \sum_n f_n(i\lambda)^{-n}$ en chaque degré d'homogénéité par la relation

$$f = \sum g^{[n]} = \sum_n \overbrace{g\sharp\cdots\sharp g}^{n\text{fois}}$$

(en chaque degré d'homogénéité, on a une somme finie). Les fonctions f_n sont évidement holomorphes au voisinage de U_1. Tout le problème est de démontrer qu'elles vérifient les estimations (A.1).

On définit $C_n(f) = \sup_{t,s} \|A_{f,n}\|_{t,s}^r \frac{(t-s)^n}{n^n}$. L'holomorphie des fonctions f_n au voisinage de U_1 montre que les $C_n(f)$ sont finies. On veut montrer qu'en fait, on a $C_n(f) \leq AB^n$. Il est facile de voir d'après le lemme B.5 que

$$\|r^{[n]}\|_\varepsilon \leq \|r\|_\varepsilon^n.$$

On en déduit que $\|f\|_\varepsilon \leq \sum_n 1/2^n \leq 2$ ce qui implique que $C_n^r(f) \leq 2\varepsilon^{-n}$. Comme $f_n = A_{f,n}(1)$, on en déduit que $f \in S^0(U_1)$. Enfin, comme il est clair que $f\sharp(1-r) = 1$ dans $S^0(U_1)$, on voit façilement que $f\sharp\frac{1}{e_0} \in S^{-2}(U_1)$ vérifie $f\sharp\frac{1}{e_0}\sharp e = 1$.

Nous allons appliquer la proposition B.4 à notre situation. On notera

$$\begin{aligned} U' &= \{(z,\zeta); |\zeta| < \frac{1}{3}, \ |\mathrm{Re} z| < \frac{2}{3}, \ |\mathrm{Im} z| > \frac{5}{3}\}, \\ U &= \{(z,\zeta); |\zeta| < \frac{1}{2}, \ |\mathrm{Re} z| < \frac{2}{4}, \ |\mathrm{Im} z| > \frac{5}{4}\}, \\ \Omega' &= \{z; \ |\mathrm{Re} z| < \frac{1}{4}, \ |\mathrm{Im} z| > 4\}, \\ \Omega &= \{z; \ |\mathrm{Re} z| < \frac{1}{3}, \ |\mathrm{Im} z| > 3\}. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que le symbole $e \in S^2(U)$ vérifie les hypothèses. Soit $f \in S^{-2}(U')$ son inverse pseudodifférentiel donné par la proposition B.4. D'après le lemme A.7, on a, si C est assez grand

$$Op(f)_C \circ Op(e)_C (T(\psi u)) - Op(1)_C (T(\psi u)) \in H_{\varphi-\varepsilon}(\Omega'),$$

on en déduit, d'après (B.3)

$$T(\psi u) - \lambda^{-2} T(\psi f) \in H_{\varphi-\varepsilon}(\Omega'),$$

ce qui implique la proposition B.3 pour les points intérieurs.

Au voisinage du bord

Soit $x_0 \in \partial\Omega \setminus O$ et soit V un voisinage de x_0 dans $\mathbf{R}^n$ tel qu'il existe un système de coordonnées géodésiques sur V, centrées en x_0 et un réel a tels que

$$\begin{aligned} \Omega \cap V &= \{(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}; \ |x| < a; \ t \in]0,1[\} \stackrel{\text{def}}{=} M, \\ \partial\Omega \cap V &= \{(0,x); |x| < a\}. \end{aligned}$$

Dans ce système de coordonnées, l'opérateur $\frac{\Delta}{\lambda^2} + 1$ s'écrit $\frac{\partial_t^2}{\lambda^2} + R(t,x,\partial_x)$ avec R polynomial de degré 2 en ∂_x, à coefficients analytiques (car le bord de Ω est supposé analytique au voisinage de x_0). Il existe donc des fonctions $P_\alpha, |\alpha| \leq 2$, analytiques au voisinage de M dans $\mathbf{R}^n$, telles que

$$R(t,x,\partial_x) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{|\alpha| \leq 2} (\partial_x - \lambda x)^\alpha P_\alpha(t,x).$$

Soient $P_{\alpha,\beta}(t)$ des fonctions analytiques au voisinage de 0 et une constante D_0 telles que pour tout $x \in B(0,1/D_0)$ et tout t; $|t| \leq 1/D_0$, tout α, $|\alpha| \leq 2$,

$$P_\alpha(t,x) = \sum_{\beta \in \mathbf{N}^{n-1}} P_{\alpha,\beta}(t)\, x^\beta.$$

De plus, d'après les inégalités de Cauchy, pour tout $D_1 > D_0$ et tout $l \in \mathbf{N}$, on a

$$\left|\partial_t^l P_{\alpha,\beta}(t)\right| \leq Cte_l\; D_1^{|\beta|}. \tag{B.4}$$

Pour tout $C > 0$, on peut écrire l'opérateur R sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} R(t,x,\partial_x) &= \frac{1}{\lambda^2}\Bigg(\sum_{\substack{|\alpha|\leq 2\\ |\beta|\leq \lambda/C}} (\partial_x - \lambda x)^\alpha P_{\alpha,\beta}(t)\, x^\beta \\ &\qquad + \sum_{\substack{|\alpha|\leq 2\\ |\beta|> \lambda/C}} (\partial_x - \lambda x)^\alpha P_{\alpha,\beta}(t)\, x^\beta \Bigg) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} R_C + R^C. \end{aligned}$$

Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que $\psi \equiv 1$ au voisinage de 0 et $\operatorname{supp}(\psi) \subset B(0,d)$ avec $d < 1/D_0$.

On note

$$Tu(z,t,\lambda) = \int e^{\lambda x\cdot z - \lambda x^2/2} u(t,x,\lambda)\, dx$$

et

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}(\mathrm{Re} z)^2.$$

Lemme B.6. — *On a $T(\psi u) \in C^\infty\left([0,t_0]; H^2_\varphi(B_x(0,a))\right)$.*

En effet, d'après l'équation vérifiée par la distribution u sur M, il existe $r \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u \in C^n\left(\mathbf{R}_t^+; H^{r-n}(B_x(0,a))\right)$ et vérifie

$$\|\partial_t^n u\|_{H^{r-n}}(B(0,a)) \leq C_n.$$

On a

$$T(R(t,x,\partial_x)\psi u(t,x,\lambda)) = T([R,\psi]u) + T(\psi R u). \tag{B.5}$$

Lemme B.7. — *Il existe $\epsilon > 0$ et $C > 0$ tels que*

$$T([R,\psi]u) \in C^\infty\left([0,t_0]; H^2_{\varphi-\epsilon}\left(\mathbf{C}^{n-1}\right)\right).$$

Il suffit d'utiliser le fait que le support de l'opérateur $[R,\psi]$ ne rencontre pas un ϵ voisinage de $x=0$ et le fait que cet opérateur est différentiel d'ordre 1.

Lemme B.8. — *Il existe $\epsilon > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $C' > C$ et tout $u \in C^\infty([0,t_0]; L^2(B(0,a)))$,*

$$T\left(R^{C'}\psi u\right) \in C^\infty\left([0,t_0]; H_{-\epsilon}\left(\mathbf{C}^{n-1}\right)\right).$$

On a

$$T\left(R^{C'}\psi u\right)=T\left(\frac{1}{\lambda^2}\sum_{\substack{|\alpha|\leq 2\\|\beta|>\lambda/C'}}\left(\partial_x-\lambda x\right)^{\alpha}P_{\alpha,\beta}\left(t\right)x^{\beta}\psi u\right)$$
$$=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{|\alpha|\leq 2}\left(-1\right)^{|\alpha|}\left(\lambda z\right)^{\alpha}T\left(\sum_{|\beta|>\lambda/C'}P_{\alpha,\beta}\left(t\right)x^{\beta}\psi u\right).$$

Or, d'après (B.4), on a

$$\left|\sum_{|\beta|>\lambda/C'}P_{\alpha,\beta}\left(t\right)x^{\beta}u\right|\leq\sum_{j>\lambda/C'}|x|^{j}j^{n-1}D_1^{j},$$

donc , si $\epsilon<-\log\left(aD_1\right)/C'$,

$$\left|T\left(R^{C'}\psi u\right)\right|\leq C\left(1+|z|\right)^2e^{\lambda(\varphi-\epsilon)}.$$

On en déduit que $T\left(R^{C'}\psi u\right)\in C^0\left([0,t_0];H_{-\epsilon}\left(\mathbf{C}^{n-1}\right)\right)$. Comme $\partial_t\left(Tv\right)=T\left(\partial_t v\right)$ et comme les fonctions $P_{\alpha,\beta}$ vérifient (B.4), on en déduit le lemme. Il suffit donc d'étudier $T\left(R_C\psi u\right)$ pour C grand.

$$T\left(R_C\psi u\right)=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{\substack{|\alpha|\leq 2\\|\beta|\leq\lambda/C}}\left(i\lambda\right)^{|\alpha|}\left(iz\right)^{\alpha}P_{\alpha,\beta}\left(t\right)\left(\frac{\partial_z}{\lambda}\right)^{\beta}T\left(\psi u\right)=Op\left(r\right)_C T\left(\psi u\right),\tag{B.6}$$

avec

$$r\left(z,\zeta\right)=\sum_{|\alpha|\leq 2}\frac{\left(-\lambda\right)^{|\alpha|}}{\lambda^2}\left(z\right)^{|\alpha|}\sum P_{\alpha,\beta}\left(t\right)\frac{\left(i\zeta\right)^{\beta}}{\beta!}.$$

Le symbole principal de r est

$$r_0\left(z,\zeta\right)=\sum_{|\alpha|=2}\left(z\right)^{|\alpha|}\sum P_{\alpha,\beta}\left(t\right)\frac{\left(i\zeta\right)^{\beta}}{\beta!}.\tag{B.7}$$

On prendra par la suite C assez grand, de telle façon que toutes les hypothèses de l'annexe A sont vérifiées.

On remarque que si χ est la transformation canonique associée à la transformation de FBI, T, c'est à dire $\chi\left(x,\xi\right)=\left(x-i\xi,-ix\right)$, on a

$$r_0\left(z,\zeta\right)=R_0\left(\chi^{-1}\left(z,\zeta\right)\right).$$

On en déduit qu'il existe un compact K de $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$, $d>0$, $\eta>0$, $I=[0,t_0]\subset\mathbf{R}$ tels que si on note $U=\Omega\times\omega=\left\{(z,\zeta)\in\mathbf{C}^{2n-2};|\mathrm{Re}z|<d,|\mathrm{Im}z|\geq\eta,|\zeta|<d\right\}$, alors on a $\tau^2+r\left(z,\zeta,t,\lambda\right)\in A^{2,2}\left(I,U,K\right)$ et de plus, les racines en τ de l'équation

$$-\tau^2+r_o\left(z,\zeta,t,\lambda\right)=0\tag{B.8}$$

restent dans le compact $(1+|z|)K$. En effet, ce résultat est clair, d'après (B.7), si $|z|$ est borné car pour $|\mathrm{Im} z|$ grand l'équation (B.8) n'a pas de racine réelle et on conclut en utilisant l'homogénéité de r_0 par rapport à $|z|$. On a en plus $\frac{1}{\tau^2+r_0} \in A^{-2,-2}(I,U,K)$

Soient U' et K' tels que $U'+B(0,\epsilon)\subset U$ et $K+B(0,\epsilon)\subset K'$. Soit $e(z,t,\tau,\zeta,\lambda)\in A^{-2,-2}(I,U',K')$ l'inverse pseudo-différentiel de τ^2+r donné par la proposition B.4. D'après les lemmes A.15 et A.16, on a, si C est assez grand

$$\begin{aligned}\text{(B.9)}\quad & Op(1)\,T(\psi u) - Op(e)_C \circ Op\left(\tau^2+r\right)_C T(\psi u) \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\Big(K^+(t,0)\,T(\psi\partial_t u(0)) - \partial_s K^+(t,0)\,T(\psi u(0)) \\ &\qquad - K^-(t,t_0)\,T(\psi\partial_t u(t_0)) + \partial_s K^-(t,_0)\,T(\psi u(t_0))\Big),\end{aligned}$$

d'où en utilisant l'équation vérifiée par u, les lemmes B.7 et B.8 et les relations (B.5), (B.6) et (A.5), on a

$$T(\psi u) + \frac{1}{\lambda^2}\partial_s K^+(t,0)\,T(\psi f) = \frac{1}{\lambda^2}\left(K^+(t,0)\,T(\psi\partial_t u(0))\right) + w,$$

avec $w\in C^\infty(I;H_{-\epsilon}(\Omega))$. Si on prend la trace en $t=0$ dans la relation précédente, il est alors clair que si $\rho\notin\widehat{\mathcal{SS}}^s(g)$, comme l'opérateur $K^+(0,0)$ est elliptique, le même raisonnement qu'à l'intérieur, mais en variables $x\in\mathbf{R}^{n-1}$ (tangentielles) montre que $\rho\notin\widehat{\mathcal{SS}}^s(\partial_t u(0))$. La proposition B.3 est donc démontrée.

Remarque B.9. — *D'après la relation (B.9), la condition $\rho\notin\widehat{\mathcal{SS}}^s(g)$ est équivalente à l'existence d'un voisinage conique de $(x_0,\eta\xi_0)$, U et de $\mu>0$, tels que*

$$T(\psi u)\in C^\infty\left(I;H_{\varphi-\epsilon}(U\cap\{|\xi|>\mu\})\right).$$

B.2 Propagation des singularités

Nous allons dans cette partie utiliser les résultats de propagation des singularités Gevrey pour démontrer des estimations sur les solutions d'équations semi-classiques. Dans la section précédente, nous avons établi des estimations elliptiques qui microlocalisent le problème dans une région compacte de l'espace de phases.

Nous allons, suivant G. Lebeau [17], faire une transformation qui remplace le paramètre λ par une variable supplémentaire (essentiellement, cette transformation est une transformation de Fourier).

Soient $1<a<b<2$ deux réels tels que $\sqrt{2}a<b<2a$. Nous noterons par la suite L (respectivement L'), l'ensemble des suites $\Lambda=(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telles que pour tout $k\in\mathbf{N}$, on a $2^k a\le\lambda_k<2^k b$ (respectivement $2^{k+1/2}a\le\lambda_k<2^{k+1/2}b$). A une suite $\Lambda\in L$ (respectivement $\Lambda\in L'$) et a une distribution u prolongeable à $\mathbf{R}^n$, solution de(B.1), vérifiant (B.2) on associe la distribution

$$u_\Lambda(t,x)=\sum_{k\in\mathbf{N}} e^{i\lambda_k s}u(\lambda_k,x).$$

La distribution u_Λ est alors une distribution prolongeable à $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$. On peut de même associer aux distributions f et g des distributions f_Λ et g_Λ.

Pour $\rho\in T_b^*(\Omega)$, on note

$$\theta(s,\rho)=(s,\sigma=1,\rho)\in T_b^*(\mathbf{R}\times\Omega).$$

On a alors la proposition suivante

Proposition B.10. — *Pour tout $s_0\in\mathbf{R}$ et tout $\sigma\geq 1$, on a l'équivalence*

$$\rho_0\in\mathcal{SS}_b^s(u)\Leftrightarrow\exists\Lambda\in L\cup L';\theta(s_0,\rho_0)\in SS_b^s(u_\Lambda),$$

où $SS_b^s(u_\Lambda)$ désigne le front d'onde Gevrey s au bord défini à la section 2.

Nous allons traiter le cas où le point x_0 est à l'intérieur, le cas où il est sur le bord de l'ouvert Ω se traitant de la même façon, en considérant les distributions $u_\Lambda\mid_{\partial\Omega}$, $\partial_n u_\Lambda\mid_{\partial\Omega}$ et le cas du coin se traitant également de la même manière en considérant les fonctions de λ, $\|\psi u\|_{H_0^1(\Omega)}$.

Quitte à remplacer la famille $u(x,\lambda)$ par la famille $e^{i\lambda s_0}u(x,\lambda)$, on peut supposer que $s_0=0$. Soient $\Lambda\in L$ et $u(x,\lambda)$ une famille de solution de l'équation (B.1) vérifiant (B.2). On considère $\widetilde{T}$ la transformation de FBI sur $T^*\mathbf{R}^{n+1}$ définie par

$$\widetilde{T}v(t,z)=\int e^{\lambda\left(x\cdot z+s\cdot t-\frac{x^2}{2}-\frac{s^2}{2}\right)}v(x,s)\,dxds. \tag{B.10}$$

On a alors, pour $\psi_1\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ et $\psi_2\in C_0^\infty(\mathbf{R})$, égales à 1 au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}_x^2$ et $\mathbf{R}_s$ respectivement,

$$\begin{aligned}\widetilde{T}\psi_1\psi_2u_\lambda(t,z)&=\int e^{\lambda\left(x\cdot z+s\cdot t-\frac{x^2}{2}-\frac{s^2}{2}\right)}\sum_{k=1}^{+\infty}\psi(x)\,e^{i\lambda_k s}u(\lambda_k,x)\,dxds\\&=\sum_{k=1}^{+\infty}\int e^{\lambda\left(x\cdot z-\frac{x^2}{2}\right)}\times\left[\frac{C}{\sqrt{\lambda}}e^{\frac{\lambda}{2}\left(t+\frac{i\lambda_k}{\lambda}\right)^2}\right.\\&\qquad\left.-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\lambda\left(ts-s^2/2\right)+i\lambda_k s}\left(1-\psi_2(s)\right)ds\right]u(\lambda_k,x)\,dx,\end{aligned}$$

or, si $\psi_2\equiv 1$ sur $B(0,2\varepsilon)$, il existe $c>0$ tel que pour tout $t\in\mathbf{C}$ tel que $|\mathrm{Re}t|\leq\varepsilon$ et $|\mathrm{Im}t+1|\leq\varepsilon$, on a pour tout $\lambda_k\in\mathbf{R}^+$ et tout $s\in\operatorname{supp}(1-\psi_2)$

$$\left|\frac{\lambda}{\lambda_k}(t-s)+i\right|>c.$$

On a donc

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\lambda\left(ts-s^2/2\right)+i\lambda_k s}\left(1-\psi_2(s)\right)ds\\&\qquad=\int e^{\lambda\left(ts-s^2/2\right)+i\lambda_k s}\frac{1}{\lambda_k^2}\left(\partial_s\circ\frac{1}{\frac{\lambda}{\lambda_k}(t-s)+i}\right)^2(\psi_2-1)\,ds.\end{aligned}$$

Comme sur le support de $(1-\psi_2)$, on a

$$\left|e^{\lambda\left(ts-s^2/2\right)+i\lambda_k^2 s}\frac{1}{\lambda_k^2}\right| \leq \frac{e^{\frac{\lambda}{2}}\left(\left(\mathrm{Re}z\right)^2-\varepsilon^2\right)}{\lambda_k^2},$$

on obtient donc

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\int e^{\lambda\left(x\cdot z-\frac{x^2}{2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda\left(ts-s^2/2\right)+i\lambda_k s}\left(1-\psi_2\left(s\right)\right)dsu\left(\lambda_k,x\right)dx\right| \leq Ce^{\frac{\lambda}{2}\left((\mathrm{Re}z)^2-\varepsilon^2\right)},$$

ce qui montre que modulo un terme à décroissance exponentielle, on peut dans (B.10), remplacer ψ_2 par 1.

On a

$$\left|e^{\frac{\lambda}{2}\left(t+i\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^2}\right| \leq e^{\frac{\lambda}{2}\left((\mathrm{Re}t)^2-\left|\mathrm{Im}t+\frac{\lambda_k}{\lambda}\right|^2\right)},$$

donc, pour tout $\eta>0$, si $\mathrm{Im}t\in B\left(-1,\varepsilon\right)$ et si

$$\text{(B.11)}\qquad \frac{\lambda_k}{\lambda}\notin B\left(-\mathrm{Im}t,\frac{\eta}{|\lambda|^{1-1/\sigma}}\right)\quad\text{et}\quad \frac{\lambda}{\lambda_k}\notin B\left(-\mathrm{Im}t,\frac{\eta}{|\lambda|^{1-1/\sigma}}\right),$$

alors

$$\left|e^{\frac{\lambda}{2}\left(t+i\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^2}\right| \leq e^{\frac{\lambda}{2}(\mathrm{Re}t)^2-\eta\max\{\lambda_k,\lambda\}^{1/\sigma}}.$$

Or, si $\eta>0$ est choisi assez petit, il existe au plus un seul k tel que $\frac{\lambda_k}{\lambda}\in B\left(1,2\eta\right)$ ou $\frac{\lambda}{\lambda_k}\in B\left(1,2\eta\right)$ (car $2^k a\leq\lambda_k<2^k b$ et $1<a<b<2$). On le note alors $k_{\lambda,t}$. Les estimations précédentes impliquent le lemme suivant

Lemme B.11. — *Il existe $N>0$ et $C>0$ tels que pour tous t,z tels que $|Reet|\leq\epsilon$, pour tout $\lambda\in\mathbf{R}^+$, si*

$$\sharp\left\{k\in\mathbf{N};\frac{\lambda_k}{\lambda}\in B\left(-Imt,\frac{\eta}{|\lambda|^{1-1/\sigma}}\right)\text{ ou }\frac{\lambda}{\lambda_k}\in B\left(-Imt,\frac{\eta}{|\lambda|^{1-1/\sigma}}\right)\right\}=1,$$

alors

$$\left|\widetilde{T}\psi_1\psi_2 u_\lambda\left(t,z\right)-\int e^{\lambda\left(x\cdot z-x^2/2\right)}e^{\frac{\lambda}{2}\left(t+i\frac{\lambda_{k_{\lambda,t}}}{\lambda}\right)^2}\psi_1\left(x\right)u\left(x,\lambda_{k_{\lambda,t}}\right)dx\right| \leq C\sqrt{\lambda}e^{\frac{\lambda}{2}\left((Ret)^2+(Rez)^2\right)-\eta|\lambda|^{1/\sigma}}$$

et si $\sharp\{k\in\mathbf{N};\frac{\lambda_k}{\lambda}\in[1-2\epsilon,1+2\epsilon]$ et $\frac{\lambda}{\lambda_k}\in[1-2\epsilon,1+2\epsilon]\}=1\}=0$, on a

$$\mid\widetilde{T}\Psi_1\Psi_2 u_\lambda\left(t,z\right)\mid\leq C\lambda^N e^{\frac{\lambda}{2}\left((Ret)^2+(Rez)^2\right)-\eta|\lambda|^{1/\sigma}}.$$

Nous supposons maintenant que $\rho_0 \notin \mathcal{SS}_b^\sigma(u)$. Il existe donc $\eta' > 0$ tel que, si z est assez proche de $z_0 = x_0 - i\xi_0$, on a

$$|T(\psi u)(z,\lambda)| \leq C\lambda^N e^{\frac{\lambda}{2}(\mathrm{Re}z)^2 - \eta'|\lambda|^{1/\sigma}}.$$

Soit $\Lambda \in L$. Alors, d'après le lemme B.11, si $|\mathrm{Im}t + 1| < \eta$ et si η et ε sont assez petits $(\varepsilon, \eta << \eta')$, on a

$$|\widetilde{T}\psi_1\psi_2 u_\Lambda(t,z)| \leq C\lambda^N e^{\frac{\lambda}{2}\left((\mathrm{Re}t)^2 + (\mathrm{Re}z)^2\right) - \eta|\lambda|^{1/\sigma}},$$

ce qui implique que $(s_0, \sigma_0 = 1, \varrho_0) \notin SS_b^\sigma(u_\Lambda)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $s_0 \in \mathbf{R}$ tel que pour toute suite $\Lambda \in L \cup L'$, le point $(s_0, \sigma_0 = 1, x_0, \xi_0) \notin SS_b^\sigma(u_\Lambda)$, c'est à dire qu'il existe $\psi_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ (respectivement $\psi_2 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$) égale à 1 au voisinage de x_0 (respectivement au voisinage de s_0) $\varepsilon_1 > 0$, $C > 0$ et $\eta_1 > 0$ tels que pour tout $z \in B(z_0 = x_0 - i\xi_0, \eta_1)$ et tout $t \in B(s_0 - i, \eta)$, on a

$$\left|\widetilde{T}u_\Lambda(t,z)\right| \leq Ce^{\frac{\lambda}{2}\left((\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Re}t)^2\right) - \varepsilon_1|\lambda|^{1/s}}.$$

Nous allons montrer qu'alors, le point $(x_0, \xi_0) \notin \mathcal{SS}_b^\sigma(u)$. On raisonne par l'absurde : on suppose donc que pour toute fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, égale à 1 au voisinage de x_0, tout $\varepsilon > 0, C > 0$ et tout $\eta > 0$, il existe $\lambda_{\psi,\varepsilon,C,\eta}$ et $z \in B(z_0 = x_0 - i\xi_0, \eta)$ tel que

$$|T(\psi u)(z,\lambda)| > Ce^{\frac{\lambda}{2}(\mathrm{Re}z)^2 - \varepsilon|\lambda|^{1/s}}.$$

On choisit $\psi = \psi_1$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ et $0 < \eta < \eta_1$ que nous fixerons par la suite. Il existe donc une suite λ_n telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $z_n \in B(z_0 = x_0 - i\xi_0, \eta)$ tel que

$$|T(\psi u)(z_n, \lambda_n)| > ne^{\frac{\lambda_n}{2}(\mathrm{Re}z_n)^2 - \varepsilon|\lambda_n|^{1/\sigma}}.$$

On remarque d'abord que d'après les estimations (B.2), nécessairement, la suite λ_n tend vers l'infini. On peut donc construire une suite $\Lambda \in L \cup L'$ contenant une infinité de termes de la suite (λ_n). Supposons par exemple que $\Lambda \in L$. Le lemme B.11 appliqué aux $\lambda = \lambda_k$ montre qu'alors, nécessairement, on a $(s_0, 1, x_0, \xi_0) \in SS_b^\sigma(u_\Lambda)$, ce qui fournit la contradiction annoncée. Le cas $\Lambda \in L'$ se traite de la même manière.

Nous allons maintenant utiliser ces résultats pour déduire des résultats de propagation des singularités de G. Lebeau [18], des résultats sur la localisation de l'ensemble de fréquence. On commence par remarquer que la distribution u_Λ vérifie

$$\begin{cases} \partial_s^2 u_\Lambda - \Delta_x u_\Lambda = f_\Lambda, \\ \qquad u_\Lambda\,|_{\partial\Omega} = g_\Lambda. \end{cases}$$

On a donc, par le théorème de régularité elliptique Gevrey σ,

$$\mathcal{SS}_b^\sigma(u_\Lambda) \subset \mathcal{SS}_b^\sigma(f_\Lambda) \cup \mathcal{SS}^\sigma(g_\Lambda) \cup \Pi(\mathrm{car}(\Box)),$$

où $\Pi(\mathrm{car}(\Box))$ désigne la projection de la variété caractéristique de l'équation des ondes sur $T_b^*\Omega$ (ce résultat est classique en dehors du coin et il est vide au coin). On en déduit la

Proposition B.12 (Régularité elliptique). — *Soit u une famille de distributions définies pour $\lambda \in \mathbf{R}^+$, solutions de l'équation (B.1), vérifiant (B.2), alors l'ensemble de fréquence $\mathcal{SS}_b^\sigma(u)$ est inclus dans l'ensemble*

$$\mathcal{SS}_b^\sigma(u) \subset \mathcal{SS}_b^\sigma(f) \cup \mathcal{SS}^\sigma(g) \cup \Pi\left\{|\xi|^2 = 1\right\}.$$

On peut également appliquer à la distribution u_Λ le théorème de propagation des singularités Gevrey σ de la section 2. Soit $\eta_0 = (s_0, \sigma = 1, \rho_0) \in SS_b^3(u_\Lambda) \cap \Pi(\mathrm{car}\Box)$. Soit γ la bicaractéristique généralisée issue de η_0. On suppose que Π est paramétrée par $l \in \mathbf{R}$ et que $\Pi(0) = \eta_0$. On suppose également que pour $l \in [0, t_0]$, la bicaractéristique γ ne rencontre ni $\mathcal{SS}_b^\sigma(f_\Lambda)$ ni $\mathcal{SS}^\sigma(g_\lambda)$. Alors, si le point η_0 appartient à $\mathcal{SS}_b^\sigma(u_\Lambda)$, le point $\gamma(l)$ aussi, pour tout $l \in [0, t_0]$. On en déduit la

Proposition B.13 (propagation des singularités). — *Soit $\rho_0 = (x_0, \xi_0)$ appartenant à la projection de la variété caractéristique, $\Pi\left\{|\xi|^2 = 1\right\}$. Tant que la projection sur l'espace des (x, ξ) de la bicaractéristique issue du point $\eta_0 = (s_0, \sigma = 1, \rho_0)$ paramétrée par $l \in \mathbf{R}$ et telle que $\gamma(0) = \eta_0$ ne rencontre ni $\mathcal{SS}_b^\sigma(f)$ ni $\mathcal{SS}^\sigma(g)$ ni le coin, si le point ρ_0 appartient à $\mathcal{SS}_b^\sigma(u)$, le point $\Pi_{x,\xi}\gamma(l)$ aussi, et quand elle rencontre un coin, si avant de le rencontrer elle est incluse dans $\mathcal{SS}_b^\sigma(u)$, alors on peut la prolonger après le coin en une bicaractéristique généralisée incluse dans $\mathcal{SS}_b^\sigma(u)$ au voisinage du coin.*

B.3 Ensemble de fréquence et estimations

Le but de cette partie est de faire un lien entre la localisation des ensembles de fréquence et l'obtention d'estimations. Le résultat obtenu est le suivant :

Proposition B.14. — *Soit u vérifiant (B.1) et (B.2). On suppose que $x_0 \in T^*\Omega$ est tel que $x_0 \notin \Pi_x\left(\mathcal{SS}_b^\sigma(u) \cup \widehat{\mathcal{SS}}_b^\sigma(u)\right)$. Alors, il existe $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ égale à 1 au voisinage de x_0, $s \in \mathbf{R}$, $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^+$,*

$$\|\psi u\|_{H^s}(\Omega) \leq Ce^{-\varepsilon|\lambda|^{1/\sigma}}.$$

Remarque B.15. — *Dans le cas où $(\Delta + \lambda^2)u = 0$ au voisinage de x_0, on peut remplacer "il existe s" par "quelque soit s", si on remplace aussi C par $C_s\lambda^s$.*

On commence par remarquer que si ψ_1 et ψ_2 sont égales à 1 au voisinage de x_0, alors, si $\eta > 0$ est assez petit, il existe $C, \varepsilon > 0$ tels que pour tout $|\mathrm{Re}z| < \eta$, on a

$$|T((\psi_1 - \psi_2)u)| \leq Ce^{-\varepsilon|\lambda|}.$$

Cette remarque et la compacité de la sphère unité permettent de montrer que sous les hypothèses de la proposition B.14, il existe $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, $s \in \mathbf{R}$, $C, \varepsilon > 0$, $\eta > 0$ tels que pour tout $z \in \mathbf{C}^2$ tel que $|\mathrm{Re}z| < \eta$, on a

$$|T(\psi u)(z, \lambda)| \leq Ce^{\frac{\lambda}{2}(\mathrm{Re}z)^2 - \varepsilon|\lambda|^{1/\sigma}}(1 + |\mathrm{Im}z|)^s.$$

On a d'après la formule d'inversion de Fourier,

$$\psi u\left(x,\lambda\right)=\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{2}\int_{\mathbf{R}^{2}}e^{i\lambda x\cdot\alpha-\lambda\frac{x^{2}}{2}}T\left(\psi u\right)\left(x-i\alpha\right)d\alpha.$$

Soit $h\in C_{0}^{\infty}\left(\mathbf{R}^{2}\right)$ égale à 1 au voisinage de 0. On a alors

$$\left\|\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{2}\int_{\mathbf{R}^{2}}e^{i\lambda x\cdot\alpha-\frac{\lambda x^{2}}{2}}h\left(\alpha\right)T\left(\psi u\right)\left(x-i\alpha\right)d\alpha\right\|_{L^{2}(\mathbf{R}^{2})}\leq Ce^{-|\lambda|^{1/\sigma}}.\tag{B.12}$$

On note

$$v_{h}\left(x,\lambda\right)=\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{2}\int_{\mathbf{R}^{2}}e^{i\lambda x\cdot\alpha-\frac{\lambda x^{2}}{2}}\left(1-h\right)\left(\alpha\right)T\left(\psi u\right)\left(x-i\alpha\right)d\alpha$$

et en utilisant les inégalités de Cauchy sur un polydisque de centre z et de rayon $\frac{1}{\lambda}$, on montre qu'il existe $A,B>0$ tels que pour tout $z\in\mathbf{C}^{2}$; $|\mathrm{Re}z|<\frac{\eta}{2}$, pour tout $\lambda\geq1$ et tout $\alpha\in\mathbf{N}^{2}$

$$\left|\partial_{z}^{\alpha}T\left(\psi u\right)\left(z,\lambda\right)\right|\leq\alpha!AB^{|\alpha|}\lambda^{|\alpha|}e^{\frac{\lambda}{2}(\mathrm{Re}z)^{2}-\varepsilon|\lambda|^{1/\sigma}}\left(1+|\mathrm{Im}z|\right)^{s}.\tag{B.13}$$

Soit $\psi_{0}\in C_{0}^{\infty}\left(\mathbf{R}^{2}\right)$ égale à 1 au voisinage du support de la fonction ψ. Comme, pour tout $\varphi\in C_{0}^{\infty}\left(\mathbf{R}^{2}\right)$,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{2}\int_{\mathbf{R}_{x}^{2}}\int_{\mathbf{R}_{\alpha}^{2}}e^{i\lambda x\cdot\alpha-\lambda\frac{x^{2}}{2}}\left(1-h\right)\left(\alpha\right)\psi_{0}T\left(\psi u\right)\left(x-i\alpha\right)d\alpha\varphi\left(x\right)dx\\&=\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{2}\int_{\mathbf{R}^{2}}e^{i\lambda x\cdot\alpha-\lambda\frac{x^{2}}{2}}\left(\frac{\partial_{x}}{i\lambda\alpha-\lambda x}\right)^{l}\left(\left(1-h\right)\left(\alpha\right)\psi_{0}T\left(\psi u\right)\left(x-i\alpha\right)\varphi\left(x\right)\right)d\alpha dx,\end{aligned}$$

on obtient, en utilisant (B.13),

$$\left(v_{h}\left(x,\lambda\right),\varphi\right)_{L^{2}(\mathbf{R}^{2})}\leq C\sum_{|n|\leq s+3}\left\|\partial_{x}^{n}\varphi\right\|_{L^{2}(\mathbf{R}^{2})}e^{-\varepsilon|\lambda|^{1/\sigma}}.$$

En utilisant cette dernière relation et (B.12), on obtient le lemme B.14. Finalement, si $\left(\Delta+\lambda^{2}\right)u=0$, il est bien connu que la norme sobolev d'ordre s de u et le produit de la norme L^{2} par λ^{s} sont (uniformément par rapport à λ) équivalentes, d'où la remarque B.15.

C Un principe du maximum

Le but de cette partie est de démontrer un principe du maximum permettant de propager des estimations en $\mathcal{O}(e^{-|\lambda|^{1/3}})$ obtenues sur l'axe réel par des arguments de propagation de singularités développés dans l'annexe B, à un domaine de la forme $U_{A,B}$ $(A,B>0)$. Nous allons montrer que cette propagation est possible à condition d'avoir une estimation à priori beaucoup plus faible sur un ouvert $U_{A',B'}; A'>A$.

Lemme C.1. — *Soit f une fonction holomorphe sur le domaine $D_{A}=\{z\in\mathbf{C};0\leq Imz\leq A|z|^{1/3};Rez\geq1\}$ à valeurs dans un espace de Hilbert H. On suppose que f vérifie les hypothèses suivantes:*

i) il existe $C>0$, $\varepsilon>0$ tels que pour tout $x\in\mathbf{R}^{+}$, $\|f(x)\|\leq Ce^{-\varepsilon x^{1/3}}$, *ii) il existe $N, C > 0$, $\eta > 0$ tels que pour tout $z \in D_A$, $\|f(z)\| \leq C|\lambda|^N e^{\eta Imz}$.*

Alors Il existe $A', C, \varepsilon' > 0$ tels que pour tout $z \in D_{A'}$, la fonction f vérifie:

$$\|f(z)\| \leq Ce^{-\varepsilon'|z|^{1/3}}. \tag{C.1}$$

Soient $B, \alpha > 0$ que nous fixerons plus tard et $h(z) = z^2 e^{-iBz - \varepsilon z^{1/3} - \alpha z}$ (on définit $z^{1/3}$ en utilisant la détermination principale du logarithme bien définie sur D_A). Pour tout $z \in D_A$, on a

$$\left\| \frac{f(z)}{h(z)} \right\| \leq Ce^{\eta \mathrm{Im} z - B \mathrm{Im} z + \varepsilon \mathrm{Re}(z^{1/3}) + \alpha \mathrm{Re}(z)}.$$

Sur $\Gamma_A = \{z \in \mathbf{C}; \mathrm{Im} z = A|z|^{1/3}; \mathrm{Re} z \geq 0\}$, on écrit $z = \varrho e^{i\theta}$, on a $z^{1/3} = \rho^{1/3} e^{\frac{i\theta}{3}}$ et sur Γ_A on a $\theta \sim A\rho^{-2/3}$ donc $\mathrm{Im} z \sim A\rho^{1/3}$ et $\mathrm{Re}(z^{1/3}) \sim \rho^{1/3}$, si on choisit B assez grand, on obtient pour tout $z \in \Gamma$

$$\left\| \frac{f}{h} \right\| \leq Ce^{(\eta - B)\mathrm{Im} z + \varepsilon \mathrm{Re}(z^{1/3}) + \alpha \mathrm{Re} z} \leq Ce^{\alpha \mathrm{Re} z}.$$

Sur l'axe réel on a d'autre part

$$\left\| \frac{f}{h} \right\| \leq Ce^{\alpha x + \varepsilon x^{1/3} - \varepsilon x^{1/3}} \leq Ce^{\alpha x}.$$

On fixe maintenant un segment vertical

$$K = \{z \in \mathbf{C}; \mathrm{Re} z = M,\ 0 \leq \mathrm{Im} z \leq |z|^{1/3}\}.$$

Sur K on a

$$\left\| \frac{f}{h} \right\| \leq e^{\eta \mathrm{Im} z - B \mathrm{Im} z + \varepsilon \mathrm{Re}(z^{1/3}) + \alpha \mathrm{Re} z}.$$

Si on choisit M assez grand, on a donc pour tout $z \in K$

$$\left\| \frac{f}{h} \right\| \leq Ce^{2\alpha \mathrm{Re} z}.$$

En appliquant le principe du maximum à la fonction f/h, holomorphe dans D_A, puis en faisant tendre M vers l'infini, on en déduit que $\|f/h\| \leq C|e^{2\alpha z}|$ dans D_A. Si on fait tendre α vers 0 on a donc $\|f\| \leq C|h|$ sur D_C. Il suffit maintenant de prendre ϵ' et A assez petits pour vérifier que l'estimation (C.1) est satisfaite par la fonction h donc par la fonction f sur $D_{A'}$.

D Une application du théorème de Sard

On rappelle les notations suivantes introduites au chapitre 2. On notera Γ_{a_0} l'ensemble des rayons analytiques définis sur un intervalle $[-a_0, s_\gamma[$ et tels que

$$\Pi_{x,\tau}\gamma(-a_0) = (x_1, \tau_0),\ \Pi_x \gamma(s_\gamma) = O\}$$

et

$$S_{x_1} = \cup_{\gamma \in \Gamma} \{s_\gamma\},$$

l'ensemble des instants d'arrivée au coin des rayons analytiques issus de x_1 à l'instant $t = -a_0$.

Proposition D.1. — *Il existe un voisinage fermé W de 0 dans $\mathbf{R}_t$ et un voisinage V de O dans $\overline{\Omega}$ tel que si a_0 est assez petit, pour tout $x \in V$, l'intersection de S_x avec W est un fermé de mesure nulle dans $\mathbf{R}$.*

La démonstration va se faire en plusieurs étapes. On peut clairement supposer $\tau_0 = 1$. Quitte à les prolonger vers le futur, on peut également supposer que tous les rayons considérés sont définis sur l'intervalle $[-a_0, \eta]$, avec $\eta > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il est clair, puisque les rayons sont parcourus à vitesse 1, que si on prend a_0 et W assez petits les seuls rayons qui nous intéressent sont ceux qui ne sont pas sortis de $B_x(O, \varepsilon)$. Si on choisit $\varepsilon > 0$ assez petit les rayons qui nous intéressent ont donc rencontré une seule fois le coin entre $-a_0$ et η (au point paramétré par s_γ). Dans la suite de cette partie on se bornera à étudier les projections sur l'espace des x des rayons bicaractéristiques généralisés qu'on notera encore rayon.

D'après [18], lemme 1.2, les rayons qui rencontrent le coin sont localement soit inclus dans $T^*\Omega \cup T^*\Delta_1$ (type 1) soit inclus dans $T^*\Omega \cup T^*\Delta_2$ (type 2). Comme le bord de Ω est analytique par morceaux, quitte à diminuer ε, on peut supposer que les intersections des deux arêtes définies par les équations (2.2) avec $B(O, \varepsilon)$ sont, au voisinage de tout point distinct du coin, soit des segments de droite, soit strictement convexes, soit strictement concaves, soit des arcs qui changent de concavité uniquement au point considéré. Dans les trois derniers cas, on sait alors que tout rayon qui rencontre le coin et quitte le bord ne le rencontre pas de nouveau avant d'avoir parcouru une longueur $\varepsilon' > 0$. Puisqu'un point d'accumulation de rayons brisés est nécessairement un point de contact d'ordre infini du rayon avec le bord, ce qui est exclu par l'analycité par morceaux du bord, les rayons qui rencontrent le coin sont, si $a_0 > 0$ et $\eta > 0$ sont assez petits, sur $[-a_0, \eta] \setminus \{s_\gamma\}$ réunions localement finies de morceaux des types suivants :

- des segments de droite,

- des arcs dans le bord $\Delta_1 \cup \Delta_2$.

On va montrer la proposition D.1, pour les rayons de type 2, par exemple.

On notera A, l'intersection de l'arête $T^*\Delta_1$ avec $B(O, \varepsilon)$. On suppose que A est paramétrée par la longueur de l'arc issu du coin, ce qui permet d'identifier A avec $[0, L]$. On peut maintenant introduire un ensemble qui permettra d'une certaine manière de décrire les "formes" des trajectoires allant de x à y:

Définition D.2. — *On notera F l'ensemble des n-uplets $(\varepsilon_i^f)_{i \in \{1..k_f\}}$, pour $k_f \in \mathbf{N}$, où les $\varepsilon_i^f \in \{1, 2\}$.*

On associe maintenant à chaque élément de F une variété à bord, qui correspondra à un ensemble de trajectoires:

Définition D.3. — *Pour $f \in F$, on notera $G_f = \prod_{i \in \{1..k_f - 1\}} V_i \times V_{k_f}$ où:*

- *$V_i =]0, L]$ si $\varepsilon_i^f = 1$,*

– $V_i =]0,L]^2 \setminus \{(x,x) | x \in [0,L]\}$ *si* $\varepsilon_i^f = 2$

et:

– $V_{k_f} = \{0\}$ *si* $\varepsilon_{k_f}^f = 1$,

– $V_{k_f} =]0,L]$ *si* $\varepsilon_{k_f}^f = 2$

et $G = \cup_{f \in F} G_f$.

On va aussi définir un espace de trajectoires un peu artificiel, mais qui contient les rayons qui nous intéressent

Définition D.4. — *On notera H l'espace des trajectoires de longueur finie partant de x et allant en O, qui sont composées d'un nombre fini d'arcs de $\partial\Omega$ (qui peuvent être de longueur nulle) et de segments de droites (qui peuvent sortir de $\overline{\Omega}$) entre deux arcs de $\partial\Omega$.*

On a alors une application surjective, ϕ, définie de G dans H, qui à $f \in F$ et à $g = (x_1, x_1', ..., x_{k_f}, x_{k_f}') \in G_f$ fait correspondre la trajectoire $\phi(g) \in H$ qui part de x et

– si $\varepsilon_1^f = 1$, atteint l'arête f_1 au point de paramètre x_1 et continue par un segment de droite,

– si $\varepsilon_1^f = 2$, atteint l'arête f_1 au point de paramètre x_1' et la suit jusqu'au point de paramètre x_1 et continue par un segment de droite,

pour aller (par un segment de droite) jusqu'au point de f_2 de paramètre x_2 si $\varepsilon_2^f = 1$, etc... jusqu'à arriver en O, par un segment de droite si $\varepsilon_{k_f}^f = 1$ et par l'arc $\left(x_{k_f}, 0\right)$ si $\varepsilon_{k_f}^f = 2$.

Cette définition permet de définir une fonctionnelle longueur l, définie sur G_f à partir de celle qui existe dans H, donnée par

$$l(f) = \sum_{i=1}^{k_f} l_i + l_i',$$

avec $l_i = \operatorname{dist}(x_{i-1}, x_i)$ si $\varepsilon_i^f = 1$ et $l_i = \operatorname{dist}(x_{i-1}, x_i') + |x_i' - x_i|$ si $\varepsilon_i^f = 2$ (compte tenu du paramétrage par la longueur de l'arc, $|x_i' - x_i|$ est la longueur de l'arc parcouru).

On remarque que tout rayon issu de x_0 et arrivant en O est obtenu comme un $\phi(g)$ pour un $f \in F$ et un $g \in G_f$.

On note, pour $\varepsilon > 0$, G_f^ε, l'espace obtenu en remplaçant $]0,L]$ par $[\varepsilon, L]$ et $]0,L]^2 \setminus \{(x,x); x \in [0,L]\}$ par $[\varepsilon, L]^2 \setminus \{(x,y); x \in [0,L]^2; |x-y| < \varepsilon\}$. Il est alors clair que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'application l est de classe C^∞ sur l'espace G_f^ε. Il est également clair que si γ est un rayon analytique issus de x_0 et joignant O, égal à $\phi(g)$, $g \in G_f$, alors g est un point critique pour cette fonctionnelle, ce qui correspond seulement à imposer les règles de la réflexion optique pour les rayons arrivant transversalement au bord et à imposer qu'avant de parcourir un segment d'arc le rayon arrive tangentiellement au bord et qu'après avoir parcouru un segment d'arc le rayon reparte tangentiellement au bord. D'après le théorème de Sard, pour tout $f \in F$ et tout $\varepsilon > 0$, puisque $s_\gamma + a_0 = l(g)$ si $\gamma = \phi(g)$, l'ensemble

$$\bigcup_{\substack{\gamma=\phi(g)\\ g\in G_f^\varepsilon}} (s_\gamma + a_0)$$

est de mesure nulle. Par réunion dénombrable, il en est de même pour

$$\bigcup_{\substack{f\in F\\ \gamma=\phi(g)\\ g\in G_f}} (s_\gamma + a_0),$$

ce qui montre la première partie de la proposition D.1.

Il reste à montrer que $E_{x,y}$ est fermé. Ceci provient aussi de ce que c'est un ensemble de valeurs critiques pour une fonctionnelle sur un certain espace, mais il est plus simple d'en donner une démonstration directe.

Proposition D.5. — *L'ensemble $E_{x,y}$ est fermé.*

Soit $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $E_{x,y}$ convergeant vers t. Soit γ_n une suite de rayons de longueur $t_n + a_0$ issus du point x_0 à l'instant $t = -a_0$. On peut prolonger ces rayons sur $]-a_0, t+\varepsilon]$. D'après la proposition 2.2, on peut extraire de la suite γ_n une sous suite convergeant uniformément vers le rayon γ et il est alors clair que la longueur du rayon γ est $t + a_0$

Centre de Mathématiques,
URA 169 du CNRS,
Ecole Polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex,
FRANCE.
email : burq@math.polytechnique.fr

Bibliographie

[1] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Scattering frequencies and gevrey 3 singularities. *Inventiones Mathematicae*, 90:77–114, 1987.

[2] N. Burq. Contrôle de l'équation des plaques en présence d'obstacles strictement convexes. *Mémoire*, 55, 1993. Supplément au Bulletin de la Société Mathémetique de France.

[3] N. Burq. Pôles de diffusion engendrés par un coin. *Séminaire E.D.P. du centre de mathématiques de l'école Polytechnique*, 1994-1995.

[4] L. Boutet de Monvel and P. Kree. Pseudodifferential operators and gevrey spaces. *Annales de l'Institut Fourier*, 17:295–323, 1967.

[5] J. M. Delors. *F.B.I. transformation, second Microlocalisation and Semilinear Caustics*, volume 1522 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1992.

[6] H. G. Garnir. Fonction de green pour l'opérateur métaharmonique dans un angle ou un dièdre. *Bulletin de la Société Royale de Sciences de Liège*, pages 119–140, 207–231, 328–344, 1952.

[7] C. Gérard. Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes. *Supplément au Bulletin de la Société Mathématique de France*, 116, 1988.

[8] P. Gérard et G.Lebeau. Diffusion d'une onde par un coin. *Journal of the American Mathematical Society*, 6:341–423, 1993.

[9] P. Grisvard. *Elliptic Problems in non smooth Domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in mathematics*. Pitman, 1985.

[10] P. Grisvard. *Singularities in Boundary Value Problems*, volume 22 of *Research Notes in Applied Mathematics*. Masson, 1992.

[11] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, volume 3. Springer Verlag, 1985.

[12] M. Ikawa. Decay of solution of the wave equation in the exterior of several convex bodies. *Annales de l' Institut Fourier*, 38(2):113–146, 1982.

[13] M. Ikawa. Decay of solution of the wave equation in the exterior of two convex bodies. *Osaka Journal of Mathematics*, 19:459–509, 1982.

[14] M. Ikawa. On the poles of the scattering matrix for two convex obstacles. *Annales de l' Institut Fourier*, 38:113–146, 1988.

[15] P. D. Lax. Asymptotic solutions of initial value problems. *Duke Mathematical Journal*, 24:627–646, 1957.

[16] G. Lebeau. Régularité gevrey 3 pour la diffraction. *Communications in Partial Differential Equation*, 9:1437–1494, 1984.

[17] G. Lebeau. Contrôle de l'équation de schrödinger. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 71:267–291, 1992.

[18] G. Lebeau. Propagation des ondes dans les dièdres. *Prépublications de l'université de Paris-Sud*, 1994.

[19] R.B. Melrose and J. Sjöstrand. Singularities of boundary value problems I. *Communications in Pure Applied Mathematics*, 35, 1982.

[20] J. Nečas. *Les Méthodes directes en Théorie des Equations Elliptiques.* Masson, 1967.

[21] L.V. Ovsjannikov. A nonlinear cauchy problem in a scale of banach spaces. *Sov. Math. Dokl*, 12:1497–1502, 1971.

[22] V. Petkov. Pôles de la matrice de diffusion pour des perturbations captives. *Séminaire E.D.P. du Centre de Mathématiques de l'école Polytechnique*, pages XV–1–13, 1990-91.

[23] V. Petkov and L. Stoyanov. Sojourn times of trapping rays and the behaviour of the modified resolvant of the laplacian. *Ann. Inst. Poincaré*, 62:17–45, 1995.

[24] O. Poisson. *Calculs des pôles associés à la diffraction d'ondes acoustiques et élastiques en dimension 2.* PhD thesis, Université Paris IX Dauphine, 1993.

[25] G. Popov. Some estimates of green's functions in the shadow. *Osaka Journal of Mathematics*, 27:1–12, 1987.

[26] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathetical Physics*, volume I, II, III, IV. Academic Press, 1978.

[27] J. Sjöstrand. Analytic singularities and microhyperbolic boundary value problems. *Mathematische Annalen*, 254:211–256, 1980.

[28] J. Sjöstrand. *Singularités analytiques microlocales*, volume 95 of *Astérisque*. Société mathématique de France, 1982.