Un théorème de contrôle pour une structure multidimensionnelle.

N.Burq
Centre de Mathématiques (CMAT)
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex
France

1. Introduction

On se propose de généraliser un résultat de J.P. Puel et E. Zuazua [PZ], en utilisant des méthodes d'analyse micro-locale et de propagation des singularités, développées par C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch dans [BLR]. On considère la situation géométrique suivante :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, à frontière de classe C^∞, tel que le bord de Ω, $\partial\Omega$, n'a avec ses droites tangentes aucun contact d'ordre infini. Soit $\omega =]0, l[\subset \mathbf{R}$; soient $\gamma \subset \partial\Omega$ et $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ deux ouverts tels que $\overline{\gamma} \cap \overline{\Gamma_0} = \emptyset$. On suppose que la tige ω est orthogonale à l'ouvert Ω en un point A.

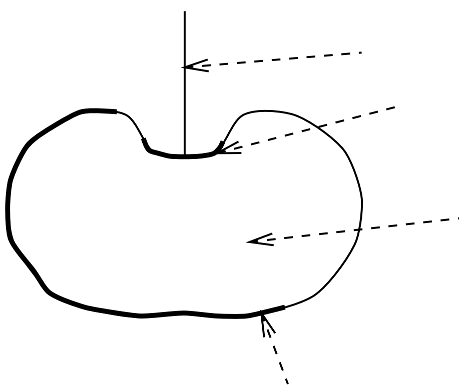

Figure 1

Soit $\Theta(x) \in C_0^\infty(\gamma)$ tels que $\Theta(A) = 1$.
On suppose qu'il existe $T_1 > 0$ tel que (Γ_0, T_1) contrôle géométriquement l'ouvert Ω; c'est-à-dire que partant de n'importe quel point de Ω, dans n'importe quelle direction, en se déplaçant à vitesse 1 et en se réfléchissant sur le bord de Ω suivant les lois de l'optique géométrique, on rencontre Γ_0 au bout d'un temps inférieur à T_1,

en un point non diffractif (on renvoie à [BLR] pour la définition précise du contrôle géométrique).
Soit T_1' l'infimum des temps $T > 0$ tels qu'il existe un rayon, Π, issu du support de Θ, orthogonal à $\partial\Omega$, contrôlé géométriquement par (Γ_0, T). On a clairement $2T_1' \leq T_1$. Le temps $T_1' + 2l$ est le temps minimal pour qu'un observateur placé sur Γ_0 puisse entendre un signal émis à l'instant $t = 0$ en A, en direction de l'autre extrémité de la tige ω. Le dessin suivant montre un exemple où on a : $2T_1' + 2l < T_1$.

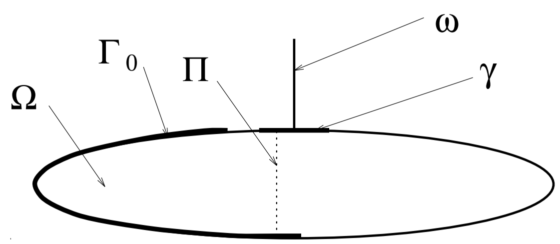

Figure 2

On note $H = \{(u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\omega);\ u\mid_{\partial\Omega} = \Theta(x)v(0)\}$.

Nous allons démontrer les résultats suivants

Théorème 1. — *Soit $T_0 > sup(T_1, 2T_1' + 2l)$. Pour toutes données initiales $(u_0, v_0) \in L^2(\Omega) \times L^2(\omega)$ et $(u_1, v_1) \in H'$, il existe un contrôle $g \in L^2(\Gamma_0 \times]0, T_0[)$ tel que la solution du problème :*

$$
\begin{array}{lcc}
 & (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbf{R}_t, \\
 & (\partial_t^2 - \partial_x^2)v = 0 & \text{dans } \omega \times \mathbf{R}_t, \\
(1.1) & u\mid_\gamma = \theta(x)v(0,t), & u\mid_{\partial\Omega\setminus\gamma} = g \times 1\mid_{\Gamma_0\times]0,T_0[}, \\
 & \frac{\partial v}{\partial x}(l,t) = 0, & \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n}\theta(x)d\sigma(x), \\
 & (u,v)\mid_{t=0} = (u_0, v_0), & \partial_t(u,v)\mid_{t=0} = (u_1, v_1),
\end{array}
$$

vérifie

$$(u, v)\mid_{t=T_0} = (0, 0)\ ;\ \partial_t(u, v)\mid_{t=T_0} = (0, 0).$$

Remarque. — Dans [PZ], J.P. Puel et E. Zuazua démontrent la contrôlabilité exacte sous les hypothèses suivantes : $\exists x_0 \in \mathbf{R}^n\ :\ \Gamma_0 = \{x \in \partial\Omega\ :\ (x - x_0)\cdot\nu(x) > 0\}$ et $\gamma \subset \{x \in \partial\Omega\ :\ (x - x_0)\cdot\nu(x) < 0\}$ où $\nu(x)$ désigne la normale extérieure au bord. Le bord de l'ouvert Ω est supposé de classe C^2, contrairement au notre qui est de classe C^∞. Il faut cependant préciser que le calcul pseudodifférentiel ne "consomme" qu'un nombre fini de dérivées, vraisemblablement de l'ordre de la dizaine (voir sur ce point l'introduction de [BLR]). Le temps T_0 de contrôlabilité que J.P. Puel et E. Zuazua obtiennent dépend fortement de la fonction Θ et de la taille de γ et par exemple explose si on réduit γ tout en gardant $0 \leq \Theta \leq 1$. Notre résultat montre qu'en fait le temps de contrôlabilité est uniformément borné par une borne ne dépendant que de Ω, Γ_0 et ω et que cette explosion n'a pas lieu.

De plus notre résultat est presque optimal, c'est l'objet du théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit $T_1'' = \inf\{T > 0$ tels qu'il existe un rayon issu du support de Θ, orthogonalement, qui rencontre Γ_0 en temps $T\}$. S'il existe un rayon Π de Ω ne rencontrant pas $\overline{\Gamma_0 \times]0, T_0[}$ ou si on prend $T_0 < (2T_1'' + 2l)$, alors la conclusion du théorème 1 est fausse.*

Avant d'aborder la démonstration de ces résultats, nous rappelons les résultats suivant de J.P. Puel et E. Zuazua :

PROPOSITION 1. — *Pour tous $(u_0, v_0) \in H, (u_1, v_1) \in L^2(\Omega) \times L^2(\omega), g = 0$, il existe une unique solution (u, v) du système 1.1 telle que $(u, v) \in C([0, +\infty[; H) \cap C^1([0, +\infty[; L^2(\Omega) \times L^2(\omega))$ et si on note*

$$E(u, v, t) = \|u(t)\|_{H^1}^2 + \|v(t)\|_{H^1}^2 + \|u'(t)\|_{L^2}^2 + \|u(t)\|_{L^2}^2,$$

alors E ne dépend pas de t.

De plus on a $\frac{\partial u}{\partial n} \in L^2_{loc}(\partial\Omega \setminus \gamma \times \mathbf{R})$ et pour tout $T > 0$ il existe $C > 0$ tel que

$$\|\frac{\partial u}{\partial n}\|_{L^2(\Gamma_0 \times [0,T])} \leq CE(u, v)$$

PROPOSITION 2. — *Pour tous $(u_0, v_0) \in L^2(\Omega) \times L^2(\omega), (u_1, v_1) \in H', g \in L^2(\Gamma_0 \times]0, T[$, il existe une unique solution de 1.1 (au sens des transpositions) telle que $(u, v) \in C([0, T]; L^2(\Omega) \times L^2(\omega)) \cap C^1(]0, T[; H')$. De plus on a*

$$\|(u, v)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)\times L^2(\omega))} + \|(u', v')\|_{L^\infty(0,T;V')}$$
$$\leq C(T) \left(\|(u_0, v_0)\|_{L^2 \times L^2} + \|(u_1, v_1)\|_{V'} + \|g\|_{L^2(\Gamma_0 \times]0,T[)}\right).$$

Le plan de l'article est le suivant : dans la section 2 nous démontrons le théorème 1 et dans la section 3 le théorème 2

2. Démonstration du théorème 1

Nous allons déduire le théorème 1 du résultat de propagation suivant :

PROPOSITION 2.1. — *Soient u et v, distributions prolongeables, solutions du système suivant :*

$$(\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbf{R}_t,$$
$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)v = 0 \text{ dans } \omega \times \mathbf{R}_t,$$
$$u\mid_\gamma = \theta(x)v(0, t) \ , \ u\mid_{\partial\Omega\setminus\gamma} = 0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(l, t) = 0 \ , \ \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n}\theta(x)d\sigma(x).$$

Soit $T_0 > \sup(T_1, 2T_1' + 2l)$. Soit $V = \Gamma_0 \times] - \frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}[$. Si la trace de u sur V est dans $H^1(V)$ et si la trace de sa dérivée normale est dans $L^2(V)$, alors

- *i) Le front d'onde $WF_b^1(u)$ ne rencontre pas l'ensemble $\{t=0\}$.*
- *ii) Il existe $l' > l$ tel que le front d'onde $WF_b^1(u)$ ne rencontre pas l'intersection de l'ensemble $\{t \in]-l', l'[\}$ et de l'ensemble des points (x,t,ξ,τ) tels que $x \in \gamma$ et ξ est orthogonal au bord de Ω.*
- *iii) Le front d'onde $WF_b^1(v)$ ne rencontre pas l'ensemble $\{t=0\}$.*

Pour démontrer cette proposition, on commence par un peu de géométrie.

On note $X = \Omega \times \mathbf{R}_t$, ∂X le bord de X, $\widetilde{T}^*X = T^*X \cup T^*\partial X$. On note π la projection canonique de $T^*\mathbf{R}^{n+1} \mid_{\overline{X}} \rightarrow \widetilde{T}^*X$, on note $\mathrm{car}(\Box)$ la variété caractéristique de l'opérateur des ondes et on note $\Sigma_b \subset \widetilde{T}^*X$ la projection de $\mathrm{car}(\Box)$: $\Sigma_b = \{(x,t,\xi,\tau) \in T^*X \setminus \{0\};\ |\xi|^2 = \tau^2\} \cup \{(x,t,\xi',\tau) \in T^*\partial\Omega \setminus \{0\};\ |\xi'|^2 \leq \tau^2\}$. On distingue comme d'habitude dans $T^*\partial X$ les trois régions elliptique ($\mathcal{E}$), hyperbolique ($\mathcal{H}$) et glancing ($\mathcal{G}$) définies de la manière suivante :

$$\sharp\{\pi^{-1}(\rho) \cap \mathrm{car}(\Box)\} = \begin{cases} 0 & si \quad \rho \in \mathcal{E} \\ 1 & si \quad \rho \in \mathcal{G} \\ 2 & si \quad \rho \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{2.1}$$

A l'intérieur, comme u est solution d'une équation d'ondes, on sait que le front d'onde de u est inclu dans Σ_b. En un point du bord de Ω, si le point ρ_0 est dans la région elliptique, comme le front d'onde de $u \mid_{\partial\Omega} = \Theta(x)v(0,t)$ ne rencontre pas la région elliptique, le point ρ_0 ne peut pas être dans le front d'onde de u. On sait donc à priori que $WF_b(u) \subset \Sigma_b$.

Soit $\rho_0 = (x_0, t_0 = 0, \xi_0, \tau_0)$ un point de $\Sigma_b \cap \{t=0\}$, alors il existe un point ρ_1 de $\Sigma_b \cup T^*V$, non diffractif, tel que

- Le point ρ_1 est sur la bicaractéristique Π, issue de ρ_0.
- Entre les instants t_0 et $t_1 = t(\rho_1)$, la bicaractéristique Π ne s'est pas réfléchie orthogonalement sur le bord de Ω.

En effet, comme Γ_0 contrôle géométriquement l'ouvert Ω en temps T_0, on sait qu'il existe $\rho_1 \in T^*V \cap \Pi \cap \{t \in]\frac{-T_1}{2}, \frac{T_1}{2}[\}$, non diffractif. On peut choisir ρ_1 minimisant $|t_0 - t_1|$. On vérifie alors aisément que si la bicaractéristique issue de ρ_0 se réfléchissait orthogonalement sur $\partial\Omega$ entre ρ_0 et ρ_1, alors en partant de ρ_0 dans l'autre direction, on rencontrerait Γ_0 en temps plus petit que $|t_0 - t_1|$, ce qui contredirait la minimalité de $|t_0 - t_1|$.

On suppose maintenant de plus que si $x_0 \in \gamma$ et si ρ_0 est hyperbolique, alors ρ_0 n'est pas normal à $\partial\Omega$. On déduit alors du théorème de propagation des singularités H^1 que $\rho_0 \notin WF_b^1(u)$. En effet, comme on a exclu le cas où ρ_0 serait orthogonal au bord de l'ouvert, la bicaractéristique issue de ρ_0 ne rencontre pas le front d'onde de $u \mid_{\partial\Omega}$ au voisinage de ρ_0 (car le front d'onde de $\Theta(x)v(0,t)$ est inclus dans l'ensemble $\{(x,t,0,\tau)\}$). Comme la bicaractéristique Π choisie, issue de ρ_0, ne rencontre pas le front d'onde de $u \mid_{\partial\Omega}$ entre ρ_0 et ρ_1, on en déduit que si ρ_0 est dans $WF_b^1(u)$, alors ρ_1 aussi, ce qui contredit l'hypothèse d'après le lemme de relèvement de [BLR] car le point ρ_1 n'est pas diffractif.

Il ne reste finalement qu'à étudier le cas où $\rho_0 \in T^*\partial X \cap \mathcal{H}$ et ρ_0 orthogonal au bord de Ω. Nous allons étudier plus généralement le cas où $t_0 \in]-l', l'[$, avec $l' > l$ et $T_0 > 2T_1' + 2l'$. Nous commençons par étudier le cas du point contrôlé géométriquement en temps T_1', d'après l'hypothèse, qu'on notera encore $(x_0, t_0, \xi_0, \tau_0)$. Quitte à se déplacer très légèrement, comme x_0 est dans le support de Θ, on peut supposer que $\Theta(x_0) \neq 0$. Il existe alors un point ρ_1 (respectivement ρ_1'), non diffractif, de $T^*(\Gamma_0 \times]-T_0/2, T_0/2[$ tel que

- Le point ρ_1 (respectivement ρ_1') est sur la bicaractéristique Π, issue de ρ_0, avec $t_1 < t_0$ (respectivement $t_1' > t_0$).
- Entre les instants t_0 et t_1 (respectivement t_1'), la bicaractéristique Π ne s'est pas réfléchie orthogonalement sur le bord de Ω.

(Il suffit de raisonner comme précédemment en utilisant l'hypothèse $T_0 > 2T_1' + 2l'$ et d'utiliser le fait qu'entre deux réflections normales, on a nécessairement rencontré Γ_0). On sait alors d'après ce qui précède, qu'au voisinage de ρ_0, les bicaractéristiques rentrantes et sortantes ne rencontrent pas le front d'onde de u à l'intérieur, $WF^1(u)$, nous allons en déduire que $\rho_0 \notin WF^1(u\mid_{\partial\Omega})$.

Ce résultat est un résultat standart, la démonstration étant assez courte, nous la reproduisons ici en reprenant les notations de [H2], théorème 24.2.1 : on choisit un système de coordonnées (y_1, y') au voisinage de (x_0, t_0) tel que le point (x_0, t_0) a pour coordonnées $(0, 0)$ et tel que $\partial X = \{y_1 = 0\}$ et $X = \{y_1 < 0\}$ au voisinage de $(0, 0)$. On note $(0, \eta')$ les coordonnées du point ρ_0 (dans le système de coordonnées associé sur $\widetilde{T}^*X$). L'opérateur $P = \partial_t^2 - \Delta_x$ s'écrit alors au voisinage de $(0, 0)$ sous la forme $P(y, D) = (D_1 - \Lambda_+(y, D'))(D_1 - \Lambda_-(y, D'))$ modulo un opérateur régularisant, où $\Lambda_\pm$ est un opérateur de degré 1, de symbôle principal $\pm r^{1/2}(y, \eta')$, strictement positif dans un voisinage conique de $(0, \eta_0')$ (car le point ρ_0 est hyperbolique). On peut maintenant choisir un opérateur $Q(y, D')$ régularisant en dehors d'un voisinage de la bicaractéristique sortante, qu'on peut choisir arbitrairement petit, tel que $[Q(y, D'), D_1 - \Lambda_+(y, D')]$ soit régularisant. On a alors si on pose $v = Q(y, D')(D_1 - \Lambda_-(y, D'))$,

$$(D_1 - \Lambda_+(y, D'))v \in C^\infty.$$

Comme pour $y_1 < 0$ assez petit, le point correspondant sur la bicaractéristique sortante n'est pas dans le front d'onde H^1 de u, si on choisit le support de Q assez petit, on obtient que $v(y_1, \cdot)$ est de classe L^2 pour $y_1 < 0$ assez petit. Donc $v(0, \cdot)$ aussi.

On fait le même raisonnement pour la bicaractéristique rentrante et on obtient qu'il existe un opérateur $\widetilde{Q}(y, D')$ tel que si on pose $\widetilde{v} = \widetilde{Q}(y, D')(D_1 - \Lambda_+(y, D'))$ alors $\widetilde{v}(0, y')$ est de classe L^2. On peut de plus choisir $\widetilde{Q}$ tel que $\widetilde{Q}(0, y', \eta') = Q(0, y', \eta')$.

On en déduit que

$$Q(0, y', \eta')(\Lambda_+(y, D') - \Lambda_-(y, D'))(u\mid_{y_1=0}) = v - \widetilde{v} \in L^2$$

donc, comme l'opérateur $Q(0,y',\eta')(\Lambda_+(y,D')-\Lambda_-(y,D'))$ est de degré 1 et n'est pas caractéristique au point $(0,\eta'_0)$, on en déduit que $u\mid_{y_1=0}\in H^1$ microlocalement au voisinage de $(0,\eta'_0)$ ce qui est le résultat cherché.

On remarque maintenant que $\eta'_0=(0,\tau)$ car le point ρ_0 est orthogonal au bord, comme on peut faire le même raisonnement avec le point $(x_0,t_0,-\xi_0,-\tau_0)$, et comme $u\mid_{\partial\Omega}=\Theta(x)v(0,t)$, on en déduit que $\Theta(x_0)v(0,t)\in H^1_{loc}(]-l',l'[)$ et donc que $\Theta(x)v(0,t)\in H^1_{loc}(\partial\Omega\times]-l',l'[)$.

A ce point de la démonstration, nous avons démontré le point i) (sauf pour les rayons orthogonaux issus de γ) et nous savons de plus comme $\Theta(x_0)\neq 0$, que $\Theta(x)\times v(0,t)\in H^1_{loc}(\gamma\times]-l',l'[)$. Nous pouvons donc appliquer de nouveau les résultats de propagation, mais comme nous savons maintenant que la première trace est régulière, nous n'avons plus besoin que de contrôler l'une des deux bicaractéristiques (la bicaractéristique rentrante ou la sortante). Soit alors $\rho_0\in T^*(\gamma\times]-l',l'[)$ orthogonal à $\partial\Omega$. Comme (Γ_0,T_0) contrôle géométriquement Ω, il existe $(\rho_1)\in T^*(\Gamma_0\times]-T_0/2,T_0/2[)$, non diffractif, sur la bicaractéristique issue de ρ_0, tel qu'entre les instants t_0 et t_1, la bicaractéristique Π ne s'est pas réfléchie orthogonalement sur le bord de Ω. Les résultats de propagation permettent alors de conclure comme précédemment pour le point i).

Nous avons donc démontré les points i) et ii) de la proposition 2.1.

Nous allons maintenant démontrer que v est localement H^1 au voisinage de 0. On sait d'après ce qui précède que $u\mid_{\partial\Omega}\in H^1_{loc}(\partial\Omega\times]-l',l'[)$. Comme d'autre part $\frac{\partial v}{\partial x}(0,t)=\int_\gamma\Theta(x)\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma(x)$, et comme $\frac{\partial u}{\partial n}$ est microlocalement de classe L^2 au voisinage des points orthogonaux au bord de Ω, pour $t\in]-l',l'[$, on en déduit (voir [H1] théorème 8.2.13) que $v(0,t)\in H^1_{loc}(]-l',l'[)$ et $\frac{\partial v}{\partial x}(0,t)\in L^2_{loc}(]-l',l'[)$. La fonction v est donc dans H^1_{loc} au voisinage de $\{0\}\times[-l,l]$. Le théorème de propagation des singularités appliqué à v implique maintenant que $WF^1_b(v)\cap\{t=0\}=\emptyset$, ce qui termine la démonstration de la proposition 2.1.

Nous allons étudier le système suivant :

$$(2.2)\qquad \begin{array}{cc} (\partial_t^2-\Delta)u=0 & dans\ \Omega\times\mathbf{R}_t, \\ (\partial_t^2-\partial_x^2)v=0 & dans\ \omega\times\mathbf{R}_t, \\ u\mid_\gamma=\theta(x)v(0,t), & u\mid_{\partial\Omega\setminus\gamma}=0, \\ \frac{\partial v}{\partial x}(l,t)=0, & \frac{\partial v}{\partial x}(0,t)=\int_\gamma\frac{\partial u}{\partial n}\theta(x)d\sigma(x), \\ (u,v)\mid_{t=0}=(u_0,v_0), & \partial_t(u,v)\mid_{t=0}=(u_1,v_1), \end{array}$$

On déduit maintenant de la proposition 2.1, comme dans [Le], qu'il existe une constante $C>0$ telle que si u et v sont solutions du système (2.2) avec $(u_0,v_0)\in H$, $(u_1,v_1)\in L^2(\Omega)\times L^2(\omega)$, alors, on a

$$E(u,v,t=0)\leq C\left(\int_{-T_0/2}^{T_0/2}dt\left(\int_{\Gamma_0}|\frac{\partial u}{\partial n}|^2+\int_\Omega|u|^2+\int_\omega|v|^2\right)\right)$$

en effet, soit

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \Big\{ &(u,v) \in L^2\left(\Omega\times]\tfrac{-T_0}{2},\tfrac{T_0}{2}[\right) \times L^2\left(\omega\times]\tfrac{-T_0}{2},\tfrac{T_0}{2}[\right), \\ &\partial_t^2 u - \Delta u = 0,\ \partial_t^2 v - \partial_x^2 v = 0, \\ &u\mid_\gamma = \theta(x)v(0,t),\ u\mid_{\partial\Omega\setminus\gamma} = 0, \\ &\tfrac{\partial v}{\partial x}(l,t) = 0,\ \tfrac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \textstyle\int_\gamma \tfrac{\partial u}{\partial n}\theta(x)d\sigma(x), \\ &\partial_n u\mid_{\Gamma_0\times]-T_0/2,T_0/2[} \in L^2\left(\Gamma_0\times]-T_0/2,T_0/2[\right) \Big\}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

L'espace $\mathcal{H}$ est un espace de Banach si on le munit de la norme

$$\|(u,v)\| = \|u\|_{L^2(\Omega\times]-\frac{T_0}{2},\frac{T_0}{2}[)} + \|v\|_{L^2(\omega\times]-\frac{T_0}{2},\frac{T_0}{2}[)} + \|\partial_n u\|_{L^2(\Gamma_0\times]-T_0/2,T_0/2[)}.$$

en effet, si le couple (u,v) appartient à $\mathcal{H}$, alors u est une distribution prolongeable à $\mathbf{R}^n\times]\frac{-T_0}{2},\frac{T_0}{2}[$ et v est prolongeable à $\mathbf{R}\times]\frac{-T_0}{2},\frac{T_0}{2}[$, si on note $\underline{u},\underline{v}$ leurs prolongements par 0, $\underline{u}$ et $\underline{v}$ vérifient

$$\partial_t^2\underline{u} - \Delta\underline{u} = f_1\otimes\delta_{\partial\Omega} + f_2\otimes\delta'_{\partial\Omega}$$

$$\partial_t^2\underline{v} - \partial_x^2\underline{v} = g_1\otimes\delta_{\partial\omega} + g_2\otimes\delta'_{\partial\omega}$$

avec

$$f_2(x,t) = \Theta(x)g_2(0,t),\ g_1(l,t) = 0,\ g_1(0,t) = \int_\gamma \Theta(x)f_1(x,t).$$

Si la suite (u_n,v_n) est de Cauchy dans $\mathcal{H}$, elle converge dans $L^2(\Omega\times]-\frac{T_0}{2},\frac{T_0}{2}[)\times L^2(\omega\times]-\frac{T_0}{2},\frac{T_0}{2}[)$, donc les distributions $\underline{u}$ et $\underline{v}$ convergent dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n\times]-T_0/2,T_0/2[)$ et $\mathcal{D}'(\mathbf{R}\times]-T_0/2,T_0/2[$, donc les distributions $f_{1,n}$, $f_{2,n}$ (respectivement $g_{1,n}$ et $g_{2,n}$) associées convergent dans $D'(\partial\Omega\times\mathbf{R}_t)$ (respectivement $D'(\partial\omega\times\mathbf{R}_t)$) et la limite (u,v) de la suite (u_n,v_n) verifie les conditions au bord. De plus $\partial_n u_n\mid_{\Gamma_0\times]-T_0/2,T_0/2[}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n\times]-T_0/2,T_0/2[)$ et dans $L^2(\mathbf{R}^n\times]-T_0/2,T_0/2[)$, la limite $\partial_n u_n\mid_{\Gamma_0\times]-T_0/2,T_0/2[}$ est donc dans $L^2(\mathbf{R}^n\times]-T_0/2,T_0/2[)$, (u,v) est donc dans $\mathcal{H}$, ce qui montre que $\mathcal{H}$ est complet.

D'après la proposition 1, on peut identifier toutes les données initiales $(u_0,v_0)\in H$ et $(u_1,v_1)\in L^2(\Omega)\times L^2(\omega)$, avec la solution de (2.2) associée. Cette solution est alors, d'après le proposition 1, dans $\mathcal{H}$. On peut donc considérer l'application $i : H\times(L^2(\Omega)\times L^2(\omega))\to\mathcal{H}$ qui, aux données initiales $(u_0,v_0)\in H$ et $(u_1,v_1)\in L^2(\Omega)\times L^2(\omega)$, associe le couple (u,v) solution de (2.2). Cette application est injective, continue d'après la proposition 1; en utilisant le théorème du graphe fermé il suffit pour montrer que i est un isomorphisme d'espaces de Hilbert de montrer que c'est une surjection, ce qui revient à montrer que si $(u,v)\in\mathcal{H}$ alors $(u,v)\in C([-T_0/2,T_0/2];H)\cap C^1([-T_0/2,T_0/2];L^2(\Omega)\times L^2(\omega))$. Or, d'après la proposition 2.1, si $(u,v)\in\mathcal{H}$, alors, microlocalement au voisinage de $t=0$, u et v sont de classe H^1, on en déduit qu'il existe un t_0 au voisinage de 0 tel que $E(u,v,t_0) < +\infty$. Nous allons montrer qu'alors $(u,v)\in C([-T_0/2,T_0/2];H)\cap C^1([-T_0/2,T_0/2];L^2(\Omega)\times L^2(\omega))$, ce qui montrera que l'application i est un isomorphisme qui permet d'identifier $H\times L^2(\Omega)\times L^2(\omega)$ et $\mathcal{H}$.

On considère (e_ν, f_ν) la base orthonormale de $L^2(\Omega) \times L^2(\omega)$ formée de vecteurs propres pour le problème suivant :

$$
\begin{array}{rcl}
-\Delta e_\nu &=& \lambda_\nu e_\nu \ dans\ \Omega, \\
-\partial_x^2 f_\nu &=& \lambda_\nu f_\nu \ dans\ \omega, \\
e_\nu \mid_{\partial\Omega} &=& \Theta(x) f_\nu(0), \\
\partial_x f_\nu(l) &=& 0, \\
\partial_x f_\nu(0) &=& \int_\gamma \partial_n e_\nu(x)\Theta(x) d\sigma(x).
\end{array}
\tag{2.4}
$$

Comme par hypothèse, $(u, v) \in L^2\left(]-T_0/2, T_0/2[; L^2(\Omega) \times L^2(\omega)\right)$, on a $(u, v) = \sum_\nu \alpha_\nu(e_\nu, f_\nu)$ avec $\alpha_\nu \in L^2(]-T_0/2, T_0/2[)$. On a alors

$$
(\partial_t^2 + \lambda_\nu)\alpha_\nu = 0
$$

dans $\mathcal{D}'(]-T_0/2, T_0/2[)$, donc $\alpha_\nu(t) = a_\nu \cos(\sqrt{\lambda_\nu}(t - t_0)) + b_\nu \sin(\sqrt{\lambda_\nu}(t - t_0))$ avec $\sum a_\nu^2 + b_\nu^2 < +\infty$. D'après ce qui précède, $(u, v) \mid_{t=t_0} \in H$ et $\partial_t(u, v) \mid_{t=t_0} \in L^2(\Omega) \times L^2(\omega)$, on en déduit que $\sum_\nu \lambda_\nu(a_\nu^2 + b_\nu^2) < +\infty$, ce qui implique le résultat.

Il nous faut maintenant éliminer les normes L^2 dans l'inégalité précédente ; pour cela, on considère

$$
N = \{(u, v) \in \mathcal{H}; \partial_n u \mid_{\Gamma_0} = 0 \ \forall t \in]-T_0/2, T_0/2[\}
$$

alors $\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \int_\Omega |u|^2 + \int_\omega |v|^2$ est une norme sur N, or, d'après l'identification de $\mathcal{H}$ avec $H \times L^2(\Omega) \times L^2(\omega)$ et l'identification de cet espace avec les solutions de (2.2), N est un sous espace fermé de $H^1(]-T_0/2, T_0/2[\times(\Omega)) \times H^1(]-T_0/2, T_0/2[\times(\omega))$, N est donc de dimension finie. Or si $(u, v) \in N$, $\partial_t u \in L^2(\Omega)$, $\partial_t v \in L^2(\omega)$ et comme $(\partial_t u, \partial_t v)$ vérifie les conditions au bord, $(\partial_t u, \partial_t v) \in \mathcal{H}$, donc N est stable par l'opérateur ∂_t. Soit λ une valeur propre de cet opérateur et (u, v) un vecteur propre associé. On a $(u, v) = (e^{\lambda t}U, e^{\lambda t}V)$ avec $(\lambda^2 - \Delta)U = 0$, $U \mid_{\Gamma_0} = \partial_n U \mid_{\Gamma_0} = 0$, donc, par les résultats d'unicité pour les problèmes elliptiques réels d'ordre deux, on déduit que $U \equiv 0$. On en déduit ensuite de la même façon que $V \equiv 0$ donc $N = \{0\}$ ce qui permet de conclure que

$$
E(u, v, t = 0) \leq C \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt \int_{\Gamma_0} |\frac{\partial u}{\partial n}|^2.
$$

Le théorème 1 est maintenant une conséquence de cette estimation et de la méthode H.U.M. de J.L.Lions [Li].

3. Démonstration du théorème 2

Nous allons maintenant démontrer le théorème 2 : on suppose d'abord qu'il existe un rayon Π, qu'on paramétre par le temps et qu'on oriente dans le sens des t croissants, ne rencontrant pas $\overline{\Gamma}_0$, entre les instants $t = 0$ et T_0. En perturbant un peu ce rayon et quitte à augmenter un peu T_0, on peut supposer, si on prend $\alpha > 0$

assez petit que ce rayon n'a pas de point de réflection normale entre les instants $t = -\alpha$ et $t = T_0 + \alpha$. On peut également supposer que ce rayon possède un point intérieur.

On sait alors qu'il existe une distribution u_0 telle que

$$\begin{array}{rcl} (\partial_t^2 - \Delta)u_0 & = & 0 \; dans \; \Omega \times \mathbf{R}_t, \\ u_0 \mid_{\partial\Omega} & = & 0, \\ WF_b(u_0) & = & \Pi, \\ WF_b^1(u_0) & = & \Pi. \end{array} \tag{3.1}$$

Nous allons construire des couples $(u^\epsilon, v^\epsilon) \subset C([0, +\infty[; H)$ solutions du système (2.2), tels que $\lim_{\epsilon \to 0} \|(u^\epsilon, v^\epsilon)\|_H = +\infty$ et $\|\frac{\partial u^\epsilon}{\partial n}\|_{L^2(\Gamma_0 \times [0,T_0])}$ reste borné; ce qui permettra de conclure.
Soit $\phi(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ tel que $\int_{\mathbf{R}} \phi = 1$ et soit $u_0^\epsilon = \phi_\epsilon * u_0$ avec $\phi_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\phi(\frac{t}{\epsilon})$. Nous allons montrer que les solutions (u^ϵ, v^ϵ) associées aux données initiales $(u_0^\epsilon \mid_{t=0}, \partial_t u_0^\epsilon \mid_{t=0}, 0, 0)$ conviennent.

Soit $f^\epsilon(t) = \int_\gamma \Theta(x) \frac{\partial u_0^\epsilon}{\partial n}(x,t) d\sigma(x)$. Comme d'après l'hypothèse, le front d'onde de u_0 ne contient pas de point orthogonal à γ, $f^\epsilon(t) \in \cap_s H^s(] - \alpha/2, T_0 + \alpha/2[)$ et pour tout s, il existe C_s tel que $\|f^\epsilon(t)\|_H^s(] - \alpha/2, T_0 + \alpha/2[) \leq C_s$. Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ tel que $\mathrm{supp}(\psi) \subset [-\alpha/2, T_0 + \alpha/2]$ et $\psi \equiv 1$ au voisinage de $[0, T_0]$. Soit v_0^ϵ la solution C^∞ de

$$\begin{array}{c} (\partial_t^2 - \partial_x^2) v_0^\epsilon = 0 \\ v_0^\epsilon \mid_{t=-\alpha} = \partial_t v_0^\epsilon \mid_{t=-\alpha} = 0 \\ \partial_x v_0^\epsilon \mid_{x=0} = f^\epsilon(t) \times \psi(t), \;\; \partial_x v_0^\epsilon \mid_{x=l} = 0 \end{array} \tag{3.2}$$

alors $v_0^\epsilon \in H^s(] - \alpha, T_0 + \alpha[$ pour tout s les normes de v_0^ϵ dans H^s sont uniformément bornées par rapport à ϵ.

On relève maintenant sur Ω la fonction Θ en une fonction G de classe C^∞ telle que $(G - \Theta) \mid_{\partial\Omega} = 0$ et $\partial_n G \mid_{\partial\Omega} = 0$. On suppose également que $G \equiv 0$ au voisinage de Γ_0.

Le couple $(U^\epsilon, V^\epsilon) = (u^\epsilon - u_0^\epsilon - G \times v_0^\epsilon(0,t), v^\epsilon - v_0^\epsilon)$ vérifie

$$\begin{array}{rcl} (\partial_t^2 - \Delta)U^\epsilon & = & -(\partial_t^2 - \Delta)(G \times v_0^\epsilon(0,t)) \text{ sur } \Omega \times [0, T_0], \\ (\partial_t^2 - \partial_x^2)V^\epsilon & = & 0 \text{ sur } \omega \times [0, T_0] \\ U^\epsilon \mid_{\partial\Omega} & = & \Theta(x) V^\epsilon(0,t), \\ \frac{\partial V^\epsilon}{\partial x}(0,t) & = & \int_\gamma \frac{\partial U^\epsilon}{\partial n} \Theta(x) d\sigma(x), \\ \frac{\partial V^\epsilon}{\partial x}(l,t) & = & 0 \\ V^\epsilon \mid_{t=0} = -v_0^\epsilon \mid_{t=0} & ; & U^\epsilon \mid_{t=0} = -G(x) v_0^\epsilon \mid_{x=0;t=0}, \\ \partial_t V \mid_{t=0} = -\partial_t v_0^\epsilon \mid_{t=0} & ; & \partial_t U^\epsilon \mid_{t=0} = -G(x) \partial_t v_0^\epsilon \mid_{x=0,t=0} . \end{array} \tag{3.3}$$

De plus, le couple (U^ϵ, V^ϵ) est dans $C^0([0, T_0]; H) \cap C^1([0, T_0]; L^2(\Omega) \times L^2(\omega))$.

Si on note $E(t) = (E^1(t), E^2(t))$ le propagateur du problème suivant

$$
(3.4) \qquad \begin{array}{cl}
(\partial_t^2 - \Delta)E^1(t)(u_0, v_0) = 0 & dans\ \Omega \times \mathbf{R}_t, \\
(\partial_t^2 - \partial_x^2)E^2(t)(u_0, v_0) = 0 & dans\ \omega \times \mathbf{R}_t, \\
E^1(t)(u_0, v_0) \mid_\gamma = \Theta(x)E^2(t)(u_0, v_0)(0, t), & \\
E^1(t)(u_0, v_0) \mid_{\partial\Omega\setminus\gamma} = 0, & \\
\frac{\partial E^2(t)(u_0,v_0)}{\partial x}(0, t) = \int_\gamma \frac{\partial E^1(t)(u_0,v_0)}{\partial n}\theta(x)d\sigma(x), & \\
\frac{\partial E^2(t)(u_0,v_0)}{\partial x}(l, t) = 0, & \\
(E^1(t)(u_0, v_0), E^2(t)(u_0, v_0) \mid_{t=0} = (0, 0), & \\
\partial_t \left(E^1(t)(u_0, v_0), E^2(t)(u_0, v_0)\right) \mid_{t=0} = (u_0, v_0), &
\end{array}
$$

alors le résultat d'unicité de la proposition 1 implique que le couple (U^ϵ, V^ϵ) est la somme de

$$\int_0^t E(s)\left(-(\partial_s^2 - \Delta)(G(\cdot) \times v^\epsilon(0, t - s)), 0\right) ds$$

et de la solution de 2.2 associée aux données initiales

$$(-G(z)v_0^\epsilon \mid_{x=0,t=0}, -G(z)\partial_t v_0^\epsilon \mid_{x=0,t=0}, -v_0^\epsilon \mid_{t=0}, -\partial_t v_0^\epsilon \mid_{t=0}).$$

On en déduit donc que

(3.5)

$$
\begin{aligned}
&\|(U^\epsilon, V^\epsilon)(t)\|_H + \|\partial_t(U^\epsilon, V^\epsilon)\|_{L^2(\Omega\times\omega)} \\
&\quad \leq \int_0^t \|(\partial_s^2 - \Delta)[G \times v_0^\epsilon(0, t - s)]\|_{L^2(\Omega)}ds + \|v_0^\epsilon \mid_{t=0} \|_{H^1(\omega)} + \|\partial_t v_0^\epsilon \mid_{t=0} \|_{L^2(\omega)} \\
&\quad\quad + \|(Gv_0^\epsilon(0, t) \mid_{t=0}, v_0^\epsilon \mid_{t=0})\|_H + \|G\partial_t v_0^\epsilon(0, t) \mid_{t=0} \|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Le couple (U^ϵ, V^ϵ) est donc dans $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}_t; H^1(\Omega \times \omega))$ et le couple $\partial_t(U^\epsilon, V^\epsilon)$ est dans $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}_t; L^2(\Omega \times \omega))$. Comme la bicaractéristique Π ne rencontre pas $\overline{\Gamma}_0$ entre les instants $t = 0$ et $t = T_0$, $u_0^\epsilon + G \times v_0^\epsilon(0, t)$ est borné en norme H^1 au voisinage de $\Gamma_0 \times [0, T_0]$, on en déduit qu'il en est de même de u^ϵ, et donc que $\partial_n u^\epsilon$ est borné dans $L^2(\Gamma_0 \times]0, T_0[)$. Comme, par hypothèse, $\|u_0^\epsilon\|_{H^1}$ tend vers l'infini quand ϵ tend vers 0, on en déduit le théorème 2 dans le premier cas.

Il nous reste à étudier le cas où on prend $T_0 < 2T_1' + 2l - \alpha$ ($\alpha > 0$). On considère v_0, une solution de $(\partial_t^2 - \partial_x^2)v_0 = 0$, $\frac{\partial v_0}{\partial x} \mid_{x=0;l} = 0$, dont le front d'onde $WF_b^1(v_0)$ est la bicaractéristique issue du point $x = l, t = 0$. On suppose également que le front d'onde $WF_b(v_0)$ est inclu dans cette bicaractéristique et que $v_0 \in L^2_{\rm loc}(\overline{\omega} \times \mathbf{R}_t)$.

Nous allons raisonner comme précédemment : soit $G(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que $G \mid_{\partial\Omega} \equiv \Theta$ et $\frac{\partial G}{\partial n} \mid_{\partial\Omega} \equiv 0$. On pose $v_0^\epsilon = \phi_\epsilon * v_0$.

Nous allons montrer que la solution (u^ϵ, v^ϵ)du système 2.2 associée aux données initiales $(G(x)v_0^\epsilon(0, 0), G(x)\partial_t v_0^\epsilon(0, 0), v_0^\epsilon \mid_{t=0}, \partial_t v_0^\epsilon \mid_{t=0})$ vérifie

$$(3.6) \qquad \lim_{\epsilon\to 0} \|(u^\epsilon, v^\epsilon)\|_H = +\infty$$

et

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \|\frac{\partial u^\epsilon}{\partial n}\|_{L^2(\Gamma_0\times]-T_0/2,T_0/2[)} < +\infty. \tag{3.7}$$

Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ tel que $\mathrm{supp}(\psi) \subset \{[-l+\alpha/2, l-\alpha/2]\}$ et $\psi \equiv 1$ au voisinage de $[-l+\alpha, l-\alpha]$. Soit u_0^ϵ la solution C^∞ de

$$\begin{gathered}(\partial_t^2 - \Delta)u_0^\epsilon = 0,\\ u_0^\epsilon \mid_{\partial\Omega} = \Theta(x)v_0^\epsilon(0,t) \times \psi(t),\\ u_0^\epsilon \mid_{t=0} = G(x)v_0^\epsilon(0,0),\ \partial_t u_0^\epsilon \mid_{t=0} = G(x)\partial_t v_0^\epsilon(0,0).\end{gathered} \tag{3.8}$$

Soit $F(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que $F(x) \equiv x$ au voisinage de 0 et $F \equiv 0$ au voisinage de l. Soit $U^\epsilon = u^\epsilon - u_0^\epsilon$ et $V^\epsilon = v^\epsilon - v_0^\epsilon - F(x)\left(\int_\gamma \Theta(z)\frac{\partial u_0^\epsilon}{\partial n}d\sigma(z)\right)$; alors le couple (U^ϵ, V^ϵ) vérifie :

$$\begin{array}{rcl}\Box U^\epsilon & = & 0\ sur\ \Omega \times [-l+\alpha, l-\alpha],\\ \Box V^\epsilon & = & -\Box\left(F(x)\int_\gamma \Theta(z)\frac{\partial u_0^\epsilon}{\partial n}d\sigma(z)\right)\ sur\ \omega\times[-l+\alpha,l-\alpha],\\ U^\epsilon \mid_{t=0} = 0 & ; & \partial_t U^\epsilon \mid_{t=0} = 0,\\ V^\epsilon \mid_{t=0} & = & -F(x)\int_\gamma \Theta(z)\partial_n u_0^\epsilon \mid_{t=0} d\sigma(z)\\ \partial_t V^\epsilon \mid_{t=0} & = & -F(x)\int_\gamma \Theta(z)\partial_{n,t}^2 u_0^\epsilon \mid_{t=0} d\sigma(z),\\ U^\epsilon \mid_{\partial\Omega} & = & \Theta(x)V^\epsilon(0,t),\\ \frac{\partial V^\epsilon}{\partial x}(0,t) & = & \int_\gamma \frac{\partial U^\epsilon}{\partial n}\Theta,\ \frac{\partial V^\epsilon}{\partial x}(l,t) = 0.\end{array} \tag{3.9}$$

Comme il existe des constantes C_s telles que $\|v_0^\epsilon(0,t)\|_{H^s(]-l+\alpha/2,l-\alpha/2[)} \le C_s$, il existe des constantes C_s telles que $\|\int_\gamma \partial_n u_0^\epsilon(x,t)\Theta(x)d\sigma(x)\|_{H^s(]-l+\alpha/2,l-\alpha/2[)} \le C_s$, de plus, comme u_0^ϵ est régulière par rapport à t, on a aussi $|\int_\gamma \partial_t^s\partial_n u_0^\epsilon(x) \mid_{t=0} \Theta(x)d\sigma(x)| \le C_s$.

D'après ce qui précède, on a pour tout $t \in [-l+\alpha, l-\alpha]$

$$\begin{aligned}&\|(U^\epsilon,V^\epsilon)\|_H + \|\partial_t(U^\epsilon,V^\epsilon)(t)\|_{L^2(\Omega\times\omega)}\\ &\le \int_0^t \|\Box\left(F(x)\int_\gamma \partial_n u_0^\epsilon\Theta\right)\|_{L^2(\omega)}dt\\ &\quad + \| - F(x)\int_\gamma \Theta(z)\partial_n u_0^\epsilon \mid_{t=0} d\sigma(z)\|_{H^1(\omega)}\\ &\quad + \| - F(x)\int_\gamma \Theta(z)\partial_{n,t}^2 u_0^\epsilon \mid_{t=0} d\sigma(z)\|_{L^2(\omega)}\end{aligned} \tag{3.10}$$

on a donc pour tout $t \in [-l+\alpha, l-\alpha]$

$$\begin{aligned}&\|u^\epsilon\|_{H^1(\Omega)} + \|\partial_t u^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le \|U^\epsilon\|_{H^1(\Omega)} + \|u_0^\epsilon\|_{H^1(\Omega)} + \partial_t U^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_t u_0^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le C\end{aligned} \tag{3.11}$$

Nous allons pouvoir maintenant appliquer les résultats de propagation des singularités : nous voulons montrer que $\|\frac{\partial u^\epsilon}{\partial n}\|_{L^2(\Gamma_0\times]-T_0/2,T_0/2[)}$ reste borné. On sait d'après la proposition 2 que $\|(u^\epsilon,v^\epsilon)\|_{L^2(]-T_0/2-\alpha,T_0/2+\alpha[\times\Omega\times\omega)}$ est bornée. On sait également d'après ce qui précède que $\|u^\epsilon\|_{H^1(\Omega\times]-l+\alpha,l-\alpha[)}$ est également bornée.

Soient H_1 et H_2 les ensembles définis de lamanière suivante : H_1 est l'ensemble des couples (u,v), distributions prolongeables sur Ω et ω respectivement, solutions du système

$$
\begin{array}{rcl}
\Box u &=& 0;\ \text{sur } \Omega\times]-\mathrm{T}_0/2,\mathrm{T}_0/2[,\\
\Box v &=& 0;\ \text{sur } \omega\times]-\mathrm{T}_0/2,\mathrm{T}_0/2[,\\
u\mid_{\partial\Omega} &=& \Theta(x)v(0,t),\\
\partial_x v(0,t) &=& -\int_\gamma \Theta(x)\partial_n u(x)d\sigma(x),\\
\partial_x v(l,t) &=& 0,
\end{array}
\tag{3.12}
$$

telles que de plus on a

$$
\begin{array}{rcl}
u &\in& L^2(]-T_0/2,T_0/2[\times\Omega),\\
v &\in& L^2(]-T_0/2,T_0/2[\times\omega),\\
u &\in& H^1(]-l+\alpha,l-\alpha[\times\Omega),\\
\partial_n u &\in& L^2(]-T_0/2,T_0/2[\times\Gamma_0).
\end{array}
\tag{3.13}
$$

et H_2 est l'ensemble des couples (u,v), distributions prolongeables sur Ω et ω respectivement, solutions du système (3.12) telles que de plus on a

$$
\begin{array}{rcl}
u &\in& L^2(]-T_0/2,T_0/2[\times\Omega),\\
v &\in& L^2(]-T_0/2,T_0/2[\times\omega),\\
u &\in& H^1(]-l+\alpha,l-\alpha[\times\Omega).
\end{array}
\tag{3.14}
$$

H_1 et H_2 munis de leurs normes naturelles sont des espaces de Hilbert. Soit $i:H_1\to H_2$ l'injection canonique. Nous allons montrer qu'en fait, i est un isomorphisme d'espaces de Hilbert. Il suffit de montrer que i est surjective.

Soit $(u,v)\in H_2$. Nous allons montrer qu'au voisinage de tout point $\rho_0\in\overline{T^*\Gamma_0\times]-T_0/2,T_0/2[}$, u est microlocalement H^1. Le cas des points $\rho_0\in\mathcal{E}$ est évident car le front d'onde de $u\mid_{\partial\Omega}$ ne rencontre pas la zone elliptique. Il suffit donc d'étudier le cas $\rho_0\in\mathcal{H}\cup\mathcal{G}$. On suppose par exemple que $t_0=t(\rho_0)\geq 0$. Soit Π la bicaractéristique issue de ρ_0, qu'on paramétrise par le temps. On sait par hypothèse que Π ne rencontre pas le support de Θ orthogonalement entre les instants t_0-T_1' et t_0. Comme $t_0\leq T_0/2$, on a $t_0-T_1'<l-\alpha$, il existe donc un instant $t_1=\sup(0,t_0-T_1')\in[0,l-\alpha[$ tel qu'entre les instants t_1 et t_0 la bicaractéristique Π ne rencontre pas le front d'onde de $u\mid_{\partial\Omega}$. Comme, d'après l'hypothèse $u\in H^1(]-l+\alpha,l-\alpha[\times\Omega)$, le point ρ_1 n'est pas dans le front d'onde H^1 jusqu'au bord de u, $WF_b^1(u)$, d'après les résultats de propagation des singularités, il en est de même de ρ_0, donc $u\in H_1$ microlocalement au voisinage du point ρ_0.

Nous avons donc montré que l'application i est surjective; d'après le théorème du graphe fermé, c'est un isomorphisme, ce qui implique que $\|\partial_n u^\epsilon\|_{L^2(]-T_0/2,T_0/2[\times\Gamma_0)}$ est borné; ce qui termine la démonstration du théorème 2.

Références

[BLR] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary*, Siam J. Control and optimization **30-5**, 1024–1065.

[H1] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators, tome 1*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften vol. 256, Springer-Verlag, 1983.

[H2] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators, tome 3*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften vol. 274, Springer-Verlag, 1985.

[Le] G. Lebeau, *Control for hyperbolic equations*, Colloque E.D.P. Saint Jean de Monts (1992).

[Li] J.L.Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbation et stabilisation des systèmes distribués*, Masson Collection RMA, 1988.

[PZ] J.P. Puel E. Zuazua, *Exact controlability for a model of multidimentinal structure, à paraître aux Proc. Royal Soc. Edinburgh*, Prépublications du Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique, **251** (Octobre 1991).