MESURES DE DÉFAUT DE COMPACITÉ, APPLICATION AU SYSTÈME DE LAMÉ

par

N. Burq & G. Lebeau

Résumé. — On définit des mesures de défaut de compacité pour les systèmes aux limites vérifiant la condition de Lopatinski uniforme au bord et on utilise ces notions pour étudier la propagation de l'énergie pour les solutions du système de Lamé.

***Abstract* (Microlocal defect measures, application to the Lame system)**

We define the microlocal defect measures for boundary value systems satisfying the strong Lopatinski condition and we apply these notions to the study of the asymptotic propagation of the energy for the solutions of the Lamé system.

1. Introduction

On se propose dans cet article d'étudier les solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles, d'ordre 2, à symbole principal *scalaire* et *réel*, satisfaisant des conditions aux limites vérifiant la condition de Lopatinski uniforme. L'étude de la propagation de la polarisation pour de tels systèmes a été faite par N. Denker [**Den82**] à l'intérieur et par C. Gérard [**Gér85**] près des rayons strictement glissants ou strictement diffractifs, dans un cadre C^∞. Notre étude se limite au cadre H^1 mais permet de généraliser les résultats connus antérieurement (nous supprimons les hypothèses sur la nature microlocale des points près desquels l'étude est faite) et d'en donner une version *quantitative*. Plus précisément, pour toute suite de solutions d'un tel système, de norme H^1 bornée nous définirons une mesure de défaut de compacité microlocale donnant une description quantitative de la polarisation asymptotique

***Classification mathématique par sujets* (1991).** — 35L05, 35L20, 73C02.
Mots clefs. — Analyse microlocale, Elasticité, Polarisation.

de la suite. Cette définition généralise au cas des systèmes aux limites la notion introduite par P. Gérard [**Gér91**] et L. Tartar [**Tar90**]. On démontrera ensuite un théorème de propagation permettant de calculer la mesure (et donc la polarisation) le long d'un flot que nous définirons. Dans le cas d'une unique équation des ondes, ce programme à déjà été réalisé P. Gérard [**Gér91**] et L. Tartar [**Tar90**] à l'intérieur, P. Gérard, E. Leichtnam [**GL93**], G. Lebeau [**Leb96**] pour la condition aux limites de Dirichlet et par H. Koch-D. Tataru [**KT95**] pour une condition aux limites absorbante, dans un cadre différent. (on pourra aussi consulter l'étude de L. Miller [**Mil96**]). On donnera également une application de notre résultat à l'étude du système de Lamé. Dans le cas ou l'énergie de l'onde longitudinale tend vers 0, on établira l'équation de propagation exacte pour la polarisation de l'onde transversale. On montrera que l'onde transversale est polarisée perpendiculairement à la direction de propagation, qu'aux points de reflexion transverses situés dans la région hyperbolique pour l'onde longitudinale (points de reflexion et transmission partielles), d'une part la polarisation est aussi orthogonale à la normale au bord et d'autre part la polarisation sortante est égale à la polarisation rentrante. Près des points hyperboliques pour l'onde transversale mais elliptiques pour l'onde longitudinale (points de réflexion totale), on donnera l'expression explicite de la polarisation sortante en fonction de la polarisation rentrante et enfin, près des points glissants, on établiera l'équation de propagation donnant la polarisation à tout instant, à partir de la polarisation initiale. Cette description complète nous permettra de démontrer une conjecture de G.Lebeau et E. Zuazua sur le taux de décroissance pour le système 3-dimensionnel de la thermoélasticité, donnant une condition nécessaire et suffisante pour la décroissance exponentielle de l'énergie des solutions de ce système.

Le papier est organisé comme suit : Au §2, nous construisons d'abord au §2.1 (proposition 2.5) des mesures d'énergie microlocales μ pour les suites bornées de H^1 de solutions du système

$$\left(\partial_x^2 + R + M_0\partial_x + M_1\right) u_k = v_k, \tag{1.1}$$

dans le demi-espace $x > 0$, sans conditions aux limites. Ici, la suite (v_k) converge fortement vers 0 dans un espace convenable, l'opérateur R est *scalaire* de degré 2 et les M_j sont des opérateurs matriciels de degré j. Nous avons choisi le cadre pseudo-différentiel tangentiel pour les opérateurs R, M_0 et M_1.

Au §2.2, nous calculons l'équation de propagation vérifiée par la mesure μ lorsque la suite (u_k) vérifie une condition aux limites de type Lopatinski (lemmes 2.9 et 2.10).

Le §3 est consacré au théorème de propagation dont la démonstration est purement géométrique et n'utilise (sous la condition que μ ne charge pas les points strictement diffractifs) que l'équation vérifiée par μ dans l'espace cotangent (théorème 1). Nous vérifions également que cette dernière condition est automatiquement satisfaite lorsque μ provient d'une suite (u_k) de solutions de (1.1) vérifiant une condition aux limites de type Lopatinski (§3.4).

Dans le §4, nous appliquons les constructions précédentes au système de Lamé. Le §5 est consacré à la description du théorème de propagation pour l'onde transversale lorsque l'énergie de l'onde longitudinale est négligeable. Enfin, le §6 démontre (et précise) une conjecture de G.Lebeau et E.Zuazua [**LZ98**] sur la décroissance exponentielle de l'énergie pour les solutions du système de la thermoélasticité en dimension 3 (théorèmes 3 et 4).

Nous avons rassemblé dans une annexe quelques résultats de la théorie des problèmes aux limites dans le cas des points microlocalement hyperboliques ou elliptiques, présentés dans le cadre des mesures de défaut de compacité. Pour une exposition plus générale et plus complète, nous invitons le lecteur à se référer sur ce sujet aux livres de Chazarain et Piriou [**CP70**], Chapitre V pour la théorie elliptique et L. Hörmander [**Hör85**], chapitre 24.2 pour la théorie hyperbolique.

Remerciements : Nous nous remercions le rapporteur pour ses commentaires et remarques.

2. Mesures : notations et conventions

Soit X un espace métrique localement compact, dénombrable à l'infini. On munit $\mathbb{C}^N$ de sa structure hermitienne standard

$$(z|z') = \sum_{j=1}^{N} z_j \overline{z}'_j; \quad |z| = (z|z)^{1/2}. \tag{2.1}$$

Soit $C_0^0(X, \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ l'espace des fonctions $x \mapsto A(x)$ continues sur X, à support compact, à valeur dans les matrices complexes $N \times N$. On munit cet espace de la norme

$$||A|| = \sup_{x \in X} \Big\{ \sup_{z \in \mathbb{C}^N, |z| \leq 1} |A(x)(z)| \Big\}. \tag{2.2}$$

On appelle mesure (vectorielle) sur X un élément du dual $\mathcal{M}_X$ de l'espace $C_0^0(X, \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$. Une mesure (vectorielle) μ sur X est donc la donnée d'une matrice $N \times N$ $(\mu_{j,i})_{1 \leq i,j \leq N}$ de mesures boréliennes sur X avec

$$\langle \mu, A \rangle = \sum_{i,j} \int_X a_{i,j}(x) d\mu_{j,i}. \tag{2.3}$$

La mesure μ est hermitienne lorsqu'elle vérifie

$$A^* = A \Rightarrow \langle \mu, A \rangle \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

ce qui équivaut à $\mu_{i,j} = \overline{\mu_{j,i}}$ pour tout i, j.

La mesure μ est hermitienne positive lorsqu'elle vérifie

$$A^* = A \geq 0 \Rightarrow \langle \mu, A \rangle \geq 0. \tag{2.5}$$

Pour $\mu \in \mathcal{M}_X$, la mesure conjuguée $\overline{\mu}$ est définie par

$$\langle \overline{\mu}, A \rangle = \overline{\langle \mu, A^* \rangle}. \tag{2.6}$$

On a $\overline{(\overline{\mu})} = \mu$ et pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\overline{(\lambda\mu)} = \overline{\lambda}\overline{\mu}$. La mesure μ est hermitienne si et seulement si on a $\overline{\mu} = \mu$. Toute mesure μ se décompose en somme $\mu = \mathrm{Re}\mu + i\mathrm{Im}\mu$, où $\mathrm{Re}\mu = \frac{\mu+\overline{\mu}}{2}$ et $\mathrm{Im}\mu = \frac{\mu-\overline{\mu}}{2i}$ sont hermitiennes. Une mesure positive μ est hermitienne. En effet on a

$$\langle \mathrm{Im}\mu, A \rangle = 0 \text{ pour tout } A \text{ vérifiant } \mathrm{A}^* = A \geq 0; \tag{2.7}$$

en choisissant $A = (a_{i,j})$ avec $a_{ij} \equiv 0$ sauf lorsqu'ils prennent deux valeurs données, on en déduit $\mathrm{Im}\mu = 0$ donc $\overline{\mu} = \mu$.

Si B est un borélien de X et $\mu \in \mathcal{M}_X$ la mesure $\mathbf{1}_B\mu \in \mathcal{M}_X$ est définie par

$$\langle \mathbf{1}_B\mu, A \rangle = \sum_{i,j} \int_B a_{ij}(x) d\mu_{j,i}. \tag{2.8}$$

On dit que la mesure μ ne change pas B si $\mathbf{1}_B\mu = 0$ et que μ est portée par B si $\mathbf{1}_B\mu = \mu$. Si μ est hermitienne (positive), $\mathbf{1}_B\mu$ l'est également (car on peut supposer B borné ; on a alors $\mathbf{1}_B \in L^1(|\mu|)$, où $|\mu| = \sum\limits_{i,j} |\mu_{j,i}|$, donc il existe une suite $(\varphi_n) \in C^0_0(X)$ de fonctions positives vérifiant $\lim \varphi_n = \mathbf{1}_B$ dans $L^1(|\mu_{j,i}|)$ pour tout i, j, donc $\langle \mathbf{1}_B\mu, A \rangle = \lim\limits_n \langle \mu, \varphi_n A \rangle$).

Nous adopterons les conventions suivantes.

1. Si F est **fermé** dans X, $\mu|_F$ est la mesure $\mathbf{1}_F\mu$ c'est-à-dire

$$\mu|_F \in \mathcal{M}_X : \langle \mu|_F, A \rangle = \langle \mathbf{1}_F\mu, A \rangle, \;\; A \in C^0_0(X, \mathrm{End}(\mathbb{C}^N)). \tag{2.9}$$

2. Si U est **ouvert** dans X, $\mu|_U$ est la mesure restriction de μ à U ; c'est-à-dire

$$\mu|_U \in \mathcal{M}_U : \langle \mu|_U, A \rangle = \langle \mu, A \rangle, \;\; A \in C^0_0(U, \mathrm{End}(\mathbb{C}^N)). \tag{2.10}$$

En particulier, si F est fermé, μ ne charge pas F si et seulement si $\mu|_F = 0$, et μ est portée par F si et seulement si $\mu|_{(X\setminus F)} = 0$.

2.1. Mesures au bord, notations. — Soit $Y = \{y \in \mathbb{R}^d, |y| < 1\}$ la boule unité de $\mathbb{R}^d$ et X l'espace produit

$$X =]0,1[\times Y. \tag{2.11}$$

On note (x, y), $x \in]0,1[, y \in Y$, le point courant de X. On considère X comme variété à bord en posant

$$\overline{X} = [0,1[\times Y, \quad \partial X = \{x = 0\} \times Y. \tag{2.12}$$

Soit $N \geq 1$ un entier. On notera

$$L^2 = L^2(X; \mathbb{C}^N), \quad H^1 = H^1(X, \mathbb{C}^N) \tag{2.13}$$

les espaces de Hilbert de fonctions vectorielles $u = (u_1, \dots, u_N)$ définies sur X à valeurs dans $\mathbb{C}^N$, munis de leur norme

$$|u|_{L^2}^2 = \int_X \sum_{j=1}^N |u_j|^2 dx dy, \tag{2.14}$$

$$|u|_{H^1}^2 = |u|_{L^2}^2 + \int_X \sum_{j=1}^N |\nabla u_j|^2 dx dy, \tag{2.15}$$

où

$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_d}\Big). \tag{2.16}$$

Soit $R = R(x, y, D_y)$ un opérateur pseudo-différentiel **scalaire** (C^∞) tangentiel classique de degré 2 (voir [**Hör85**, Chap XVIII]), **auto-adjoint**, défini au voisinage de $[0,1] \times \overline{Y}$, de symbole principal **réel** $r(x, y, \eta)$; on définit les fonctions r_0 et r_1 par

$$r(x, y, \eta) = r_0(y, \eta) + x r_1(y, \eta) + O(x^2). \tag{2.17}$$

On supposera que la fonction homogène de degré 2 en η, $r(x, y, \eta)$ vérifie

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} \neq 0 \text{ pour } (x, y) \in \overline{X} \text{ et } \eta \neq 0. \tag{2.18}$$

Soient également $M_0(x, y, D_y)$, $M_1(x, y, D_y)$ des matrices $N \times N$ d'opérateurs pseudo-différentiels (C^∞) tangentiels classiques définis au voisinage de $[0,1] \times \overline{Y}$, de degrés respectifs 0 et 1, de symboles principaux $m_0(x, y, \eta)$, $m_1(x, y, \eta)$. On note P l'opérateur de degré 2 :

$$P = (\partial_x^2 + R)\mathrm{Id} + M_0 \partial_x + M_1. \tag{2.19}$$

Le symbole principal p de P est scalaire et vaut

$$p = -\xi^2 + r(x, y, \eta). \tag{2.20}$$

Soit Y' un petit voisinage ouvert de $\overline{Y}$ tel que les opérateurs R, M_0 et M_1 sont bien définis au voisinage de $[0,1] \times \overline{Y'}$. Soit K un compact de Y' dont l'intérieur contient $\overline{Y}$.

On se donne une suite $\left(u^k(x,y)\right)_{k\in\mathbb{N}}$, convergeant fortement vers 0 dans l'espace $H^2\left(]0,1[;H^{-s}(Y')\right)$ pour un $s>0$ et à support dans $[0,1]\times K$. La suite $v_k=Pu_k$ est alors bien définie dans $L^2\left(]0,1[;H^{-s-2}(Y')\right)$.

On suppose que la suite $\left(u^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace $H^1(]0,1[\times Y')$ et que la restriction v^k de Pu^k à $]0,1[\times Y$ vérifie

$$Pu^k\,|_{]0,1[\times Y}=v^k\in G=\left\{v\in L^2 \text{ et } \partial_x v\in L^2(]0,1[,H^{-1}(Y))\right\}, \tag{2.21}$$

et la suite (v^k) converge fortement vers zéro dans G.

Remarque 2.1. —
- *La suite $\left(u^k\right)$ converge faiblement vers 0 dans $H^1(]0,1[\times Y')$.*
- *Si $\varphi\in C_0^\infty(Y')$ est égale à 1 près de $\overline{Y}$, alors la suite (φu^k) vérifie les mêmes hypothèses que la suite $\left(u^k\right)$.*
- *Supposons que les opérateurs R, M_0 et M_1 sont différentiels et soit (f^k) une suite de limite faible nulle dans $H^1(]0,1[\times Y')$, solution de $Pf^k=0$. Pour $\varphi\in C_0^\infty(Y')$ égale à 1 près de $\overline{Y}$, la suite (φf^k) vérifie les hypothèses précédentes avec $v^k=0$ (pour un certain choix de K).*

Lemme 2.2. —
- *i) Pour $\ell=0,1,2$ la suite (u^k) est bornée dans l'espace*

$$C^\ell([0,1[;H_{\mathrm{loc}}^{\frac{1}{2}-\ell}(Y,\mathbb{C}^N)). \tag{2.22}$$

- *ii) Les traces $(u^k(0,y))$, $(\partial_x u^k(0,y))$ convergent faiblement vers zéro respectivement dans $H_{\mathrm{loc}}^{1/2}(Y,\mathbb{C}^N)$ et $H_{\mathrm{loc}}^{-1/2}(Y,\mathbb{C}^N)$.*

Lemme 2.3. — *Pour tout opérateur pseudo-différentiel tangentiel, $Q(x,y,D_y)$, de degré strictement négatif, à support compact dans $\overline{X}$ (c'est-à-dire vérifiant $Q=\varphi Q\varphi$ pour un $\varphi\in C^\infty(\overline{X})$ à support compact dans $\overline{X}$), la suite (Qu^k) converge fortement vers zéro dans H^1.*

Lemme 2.4. — *Soit $A(x,y,D_x,D_y)$ un opérateur pseudo-différentiel sur X de degré 0, à support compact dans X (c'est-à-dire vérifiant $A=\varphi A\varphi$ pour un $\varphi\in C_0^\infty(X)$), de symbole principal $a(x,y,\xi,\eta)$ nul sur l'ensemble $\{\xi^2=r(x,y,\eta)\}$. Alors la suite (Au^k) converge fortement vers zéro dans $H^1(X)$.*

Preuve des lemmes 2.2, 2.3 et 2.4. On remarque d'abord que $(u^k(x,y))$ est bornée dans l'espace $E^{(3)}=\bigcap_{k=0}^{3}H^k(]0,1[,H_{\mathrm{loc}}^{1-k}(Y))$, et converge faiblement vers zéro dans $E^{(3)}$, les cas $k=2,3$ résultant de l'équation (2.21) et de l'égalité $\partial_x^2 u_k=v_k+Ru_k$. Par les théorèmes de trace, il en résulte les points i) et ii) du lemme 2.2. Pour vérifier le lemme 2.3, il suffit de prouver que les suites $(Q\partial_x u^k)$ et $(Q\nabla_y u^k)$ convergent vers zéro fortement dans L^2. Or ces deux suites sont bornées dans l'espace $F=L^2(]0,1[;H^\varepsilon(Y))\cap H^1(]0,1[;H^{-1+\varepsilon}(Y))$ avec $\varepsilon=-\deg(Q)>0$ et l'injection de F dans L^2 est compacte. Enfin, pour vérifier le lemme 2.4 de compacité intérieure nous noterons $z = (x, y)$, $\zeta = (\xi, \eta)$ les variables cotangentes et $\Sigma^m_{[k]}$ l'espace des fonctions $a(z, \zeta)$ de classe C^∞ et à support compact en z, de classe C^{k-1} à dérivées $k^{\text{ième}}$ L^∞ en ζ, et vérifiant

$$|\partial_z^\alpha \partial_\zeta^\beta a(z,\zeta)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\zeta|)^{m-|\beta|} \tag{2.23}$$

pour tout α et tout β vérifiant $|\beta| \leq k$ (les opérateurs pseudo-différentiels usuels correspondent à $k = \infty$). On quantifie le symbole a par la règle usuelle

$$\mathrm{Op}(a)f = (2\pi)^{-(1+d)} \int e^{iz\zeta} a(z,\zeta)\hat{f}(\zeta)d\zeta. \tag{2.24}$$

Alors pour $a \in \Sigma^m_{[0]}$, $\mathrm{Op}(a)$ est borné de H^s_{comp} dans H^{s-m}_{comp} pour tout $s \in \mathbb{R}$, et pour $a \in \Sigma^m_{[1]}$, $b \in \Sigma^{m'}_{[1]}$, on a

$$\mathrm{Op}(a) \circ \mathrm{Op}(b) = \mathrm{Op}(ab) + \mathrm{Op}(c), \tag{2.25}$$

avec $ab \in \Sigma^{m+m'}_{[1]}$ et $c \in \Sigma^{m+m'-1}_{[0]}$ (la preuve de ce résultat s'obtient très simplement en prolongeant les symboles qui sont à supports compacts en z par périodicité sur une cellule assez grande, et en décomposant ces symboles en séries de fourier, ce qui donne une décomposition de l'opérateur pseudo-différentiel en série de multiplicateurs de Fouriers, la série étant à décroissance rapide) . Soit $\varphi \in C_0^\infty(X)$.

On a $\varphi\left(-\xi^2 + r(x,y,\eta)\right) \in \Sigma^2_{[2]}$ et

$$\varphi(\partial_x^2 + R) = \mathrm{Op}\left(\varphi(-\xi^2 + r)\right) + \mathrm{Op}(d), \quad d \in \Sigma^1_{[1]}. \tag{2.26}$$

Pour vérifier le lemme 2.4, on peut, quitte à changer A en un opérateur A', la différence $A - A'$ étant régularisante, et à changer a en a', supposer que $A = \mathrm{Op}(a) \circ \varphi$ et que la fonction $a(z,\zeta) \in \Sigma^0_{[\infty]}$ est à support compact en $z \in X$, contenu dans l'ensemble $\{\varphi \equiv 1\}$, et nulle au voisinage de $\{\zeta = 0\}$. On a alors

$$e := \frac{a}{-\xi^2 + r} \in \Sigma^{-2}_{[2]}. \tag{2.27}$$

En effet la fonction $e(z,\zeta)$ est nulle au voisinage de $\zeta = 0$, et est C^∞ homogène de degré -2 en ζ pour $\zeta \neq 0$ puisque l'ensemble $S = \{-\xi^2 + r = 0\}$ est lisse pour $\zeta \neq 0$ d'après l'hypothèse 2.18, et a s'annule sur S (on utilise ici que si par exemple $\partial_{\eta_d} r \neq 0$ alors l'application $(x, \xi, y, \eta) \mapsto (x, \xi, y, \eta_1, \ldots, \eta_{d-1}, -\xi^2 + r(x,y,\eta)$ est un système de coordonnée local et dans ce système la fonction $a \in C^\infty$ s'annule sur l'ensemble $\zeta_d = 0$ ce qui implique $\frac{a}{\zeta_d} \in C^\infty$) ; on a de plus $(-\xi^2 + r)^{-1} \in \Sigma^{-2}_{[2]}$ dans un voisinage conique de $\eta = 0$, par un calcul direct des dérivées d'ordre au plus 2. On a

$$\begin{aligned}\varphi(\partial_x^2+R)\varphi u^k &= \varphi P\varphi u^k - \varphi\left(M_0\partial_x+M_1\right)\varphi u^k \\ &= \varphi P\varphi u^k + \mathrm{Op}(d)\varphi u_k := w^k,\end{aligned} \tag{2.28}$$

la suite (w^k) est bornée dans L^2 et à support dans un compact fixe de X. Il suffit alors d'écrire les identités

$$\mathrm{Op}(e)w^k = \mathrm{Op}(e)\big[\,\mathrm{Op}\left(\varphi(-\xi^2+r)\right)\varphi u^k + \mathrm{Op}(d)\varphi u^k\big], \tag{2.29}$$

$$\mathrm{Op}(e)\big[w^k - \mathrm{Op}(d)(\varphi u^k)\big] = \mathrm{Op}(a)\varphi u^k + \mathrm{Op}(c)\varphi u^k, \tag{2.30}$$

où $c \in \Sigma^{-1}_{[0]}$, et de remarquer que les deux suites $\mathrm{Op}(c)[\varphi u^k]$ et $\mathrm{Op}(e)\big[w^k - \mathrm{Op}(d)(\varphi u^k)\big]$ sont bornées dans $H^2(X)$, donc convergent fortement vers zéro dans $H^1(X)$. □

2.2. Construction de la mesure de défaut microlocale. — On note $\mathcal{A}$ l'espace des matrices $N\times N$ d'opérateurs Q de la forme $Q = Q_i + Q_\partial$ où Q_i est un opérateur pseudo-différentiel classique sur X, à support compact dans X (*i.e.* vérifiant $Q_i = \varphi Q_i \varphi$ pour un $\varphi \in C_0^\infty(X)$) et où Q_∂ est un opérateur pseudo-différentiel tangentiel classique à support compact dans $\overline{X}$ (*i.e.* vérifiant $Q_\partial = \varphi Q_\partial \varphi$ pour un $\varphi \in C^\infty(\overline{X})$ à support compact dans $\overline{X}$). On notera $\mathcal{A}^s$ les éléments de $\mathcal{A}$ qui sont de degré $s\in\mathbb{R}$, et $\mathcal{A}_{\mathrm{sym}}$ les éléments de $\mathcal{A}^0$ dont le symbole principal est auto-adjoint. On décompose $T^*\partial X$ en l'union disjointe $\mathcal{E}\cup\mathcal{G}\cup\mathcal{H}$ où

$$\mathcal{E} = \{r_0<0\},\quad \mathcal{G} = \{r_0=0\},\quad \mathcal{H}=\{r_0>0\}. \tag{2.31}$$

On note ${}^bT\overline{X}$ le fibré de rang $\dim X$ dont les sections sont les champs de vecteurs tangents à ∂X, ${}^bT^*\overline{X}$ son fibré dual (le fibré cotangent compressé de Melrose) et $j : T^*\overline{X} \to {}^bT^*\overline{X}$ l'application canonique. Le fibré ${}^bT\overline{X}$ est engendré par les champs $\frac{\partial}{\partial y_j}$, $x\frac{\partial}{\partial x}$ et j est définie par

$$j(y,x,\eta,\xi) = (y,x,\eta,v=x\xi). \tag{2.32}$$

On note $\mathrm{Car}\,P$ la variété caractéristique de P

$$\mathrm{Car}\,P = \big\{(y,x,\eta,\xi)\in T^*\overline{X};\xi^2 = r(x,y,\eta)\big\} \tag{2.33}$$

et on pose

$$Z = j(\mathrm{Car}\,P),\quad \hat{Z} = Z\cup j(T^*\overline{X}|_{x=0}). \tag{2.34}$$

On a $Z|_{x=0} = \big\{(y,0,\eta,v=0), r_0(y,\eta)\geq 0\big\}$ et $\hat{Z}|_{x=0} = Z|_{x=0}\cup\mathcal{E}$. La fonction r étant homogène de degré deux en η, il existe une constante C telle que

$$(y,x,\eta,v)\in\hat{Z} \Rightarrow |v|\leq Cx|\eta|. \tag{2.35}$$

Il en résulte que $\hat{Z}$ et Z sont des fermés coniques de ${}^bT^*\overline{X}$. On notera $S\hat{Z}$, et SZ les espaces quotients sphériques

$$S\hat{Z} = (\hat{Z} \setminus \overline{X})/\mathbb{R}_+^*, \quad SZ = (Z \setminus \overline{X})/\mathbb{R}_+^* \tag{2.36}$$

qui sont des espaces métriques localement compacts. Pour $Q \in \mathcal{A}^0$, de symbole principal $q = \sigma(Q)$ on définit la fonction $\kappa(q) \in C^0(S\hat{Z}; \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ par

$$\kappa(q)(\rho) = q(j^{-1}(\rho)). \tag{2.37}$$

(C'est bien défini car q est homogène, et on a $\kappa(q)(y, x, \eta, v) = q\big(y, x, \eta, \frac{v}{x}\big)$ pour $x \neq 0$ et q est indépendant de ξ pour x assez petit). D'après (2.35) l'ensemble

$$\{\kappa(q), q = \sigma(Q), Q \in \mathcal{A}^0\} \tag{2.38}$$

est localement dense dans $C^0(S\hat{Z}; \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ où $C^0(S\hat{Z}, \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Pour $Q \in \mathcal{A}^0$, $u \in H^1$ on pose

$$\phi(Q, u) = (Qu|u)_{H^1} = \int_X (\nabla_y Qu \cdot \overline{\nabla_y u} + \partial_x Qu \cdot \overline{\partial_x u} + Qu \cdot \overline{u}) dxdy. \tag{2.39}$$

On notera $\mathcal{M}^+$ l'espace des mesures Boréliennes μ sur $S\hat{Z}$, à valeurs hermitiennes positives sur $\mathbb{C}^N$; une mesure μ de $\mathcal{M}^+$ est donc un élément du dual de l'espace $C_0^0(S\hat{Z}; \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ qui vérifie

$$\langle \mu, q \rangle \geq 0, \quad \forall q \in C^0(S\hat{Z}, \mathrm{End}^+(\mathbb{C}^N)), \tag{2.40}$$

où $\mathrm{End}^+(\mathbb{C}^N)$ désigne l'ensemble des matrices $N \times N$ hermitiennes positives.

Proposition 2.5. — *Quitte à extraire une sous-suite de la suite (u^k), il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}^+$ telle que*

$$\forall Q \in \mathcal{A}^0 \quad \lim_{k \to \infty} \phi(Q, u^k) = \langle \mu, \kappa(\sigma(Q)) \rangle. \tag{2.41}$$

Preuve. On suit une démarche très classique inspirée de P. Gérard [**Gér91**]. Remarquons d'abord que les lemmes 2.3 et 2.4 impliquent

$$\forall Q \in \mathcal{A}^{-1}, \quad \lim_{k \to \infty} \phi(Q, u^k) = 0. \tag{2.42}$$

Soit $\chi \in C_0^\infty(|x| < \varepsilon)$, $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $E = E_i$ un opérateur scalaire pseudo-différentiel sur X de degré 0, à support près de $\mathrm{Car}\, P$, vérifiant $0 \leq \sigma(E) \leq 1$ et égal à l'identité au voisinage de $\mathrm{Car}\, P \cap$ support$(1 - \chi)$. D'après le lemme 2.4, pour $\varphi \in C_0^\infty(X)$ on a

$$(1 - \chi)(\mathrm{Id} - E)\varphi u^k \to 0, \quad H^1 \text{ fort}. \tag{2.43}$$

Si $Q = Q_i + Q_\partial \in \mathcal{A}^0$, en choisissant ε assez petit on aura $\chi Q_i \equiv 0$ et on écrira

$$Q = \chi Q + (1 - \chi)Q = \chi Q_\partial + (1 - \chi)QE + (1 - \chi)Q(\mathrm{Id} - E). \tag{2.44}$$

Alors χQ_∂ est un o.p.d. tangentiel, $(1-\chi)QE$ est un o.p.d. intérieur et $(1-\chi)Q(\mathrm{Id}-E)\varphi u^k \to 0$ dans H^1 fort pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\overline{X})$. Il en résulte pour $M \geq 0$

$$\forall Q \in \mathcal{A}^0_{\mathrm{sym}} \sigma(Q) \geq -M\,\mathrm{Id} \Rightarrow \liminf_{k\to\infty} \phi(Q,u^k) \geq -M \limsup_{k\to\infty} ||u^k||^2_{H^1}. \tag{2.45}$$

En effet, $\sigma(Q) \geq -M\,\mathrm{Id}$ implique $\sigma(\chi Q_\partial) = \sigma(\chi Q) \geq -M\,\mathrm{Id}$ et $\sigma((1-\chi)QE) = (1-\chi)\sigma(E)\sigma(Q) \geq -M\,\mathrm{Id}$ et il suffit donc de traiter indépendamment les cas $Q = Q_i$ et $Q = Q_\partial$. Par exemple, dans le cas $Q = Q_\partial$, il existe $\varphi \in C_0^\infty(\overline{X})$ tel que $\alpha_k = (\nabla Q_\partial u^k | \nabla u^k)_{L^2} = (Q_\partial \nabla(\varphi u^k)|\nabla(\varphi u^k))_{L^2} + \beta_k$ avec $\beta_k = ([\nabla, Q_\partial]u^k|\nabla u^k)_{L^2} \to 0$. Pour tout $\eta > 0$, il existe B_∂ de degré 0, C_∂ de degré -1, o.p.d. tangentiels tels que $Q_\partial + (M+\eta)\,\mathrm{Id} = B_\partial^* B_\partial + C_\partial$; comme $C_\partial \nabla(\varphi u^k) \to 0$ dans L^2 fort d'après le lemme 2.2 i), on a $\liminf \alpha_k \geq -(M+\eta)\limsup ||\nabla \varphi u^k||^2_{L^2}$ d'où (2.45).

On a aussi d'après le lemme 2.4 et (2.43)

(2.46)

$$Q \in \mathcal{A}^0, \;\; \sigma(Q) = 0 \;\text{ près de }\; x = 0 \;\text{ et }\; \sigma(Q)|_{\mathrm{Car}\,P} = 0 \Rightarrow \lim_k \phi(Q,u^k) = 0.$$

Soit $\sigma(\mathcal{A}^0) = \{q = \sigma(Q), Q \in \mathcal{A}^0\}$; c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions C^0 homogènes de degré zéro sur $T^*\overline{X}\backslash\overline{X}$ à valeur dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}^N)$, muni de la norme L^∞ et $\sigma(\mathcal{A}^0)$ possède une partie dense dénombrable. D'après les relations (2.42) et (2.45), quitte à extraire une sous-suite de la suite u^k, il existe une forme linéaire $\tilde{\phi}$ sur $\sigma(\mathcal{A}^0)$ telle que

$$\forall Q \in \mathcal{A}^0, \quad \lim_k \phi(Q,u^k) = \tilde{\phi}(\sigma(Q)), \tag{2.47}$$

$$|\tilde{\phi}(q)| \leq ||q||_{L^\infty} \limsup ||u^k||^2_{H^1}. \tag{2.48}$$

On a de plus

$$q \in \sigma(\mathcal{A}^0) \;\text{ et }\; \kappa(q) = 0 \Rightarrow \tilde{\phi}(q) = 0 \tag{2.49}$$

car si $\kappa(q) = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ à support près de $x = 0$ tel que $||\chi q||_{L^\infty} \leq \varepsilon$ et $(1-\chi)q = \sigma(Q)$ où $Q \in \mathcal{A}^0$ vérifie (2.46). D'après (2.48) et (2.49) et le théorème de représentation de Riesz, il existe une mesure de Radon μ, élément du dual de $C_0^0(S\hat{Z}; \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ telle que

$$\forall Q \in \mathcal{A}^0, \quad \lim_k \phi(Q,u^k) = \langle \mu, \kappa(\sigma(Q)\rangle \tag{2.50}$$

et μ est hermitienne positive d'après (2.45). □

On a $\hat{Z}|_{x=0} = T^*Y$, et quitte à extraire une nouvelle sous-suite de la suite (u^k), on construit de manière analogue des mesures sur $S(T^*Y) =$

$(T^*Y \setminus Y)/\mathbb{R}_+^*$, $\mu_\partial^{1/2}$, $\mu_\partial^{-1/2}$, μ_∂^0 éléments du dual de $C^0(S(T^*Y), \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ caractérisées par

$$\forall Q \in \mathcal{A}^0, \quad \lim_k \int_{\partial X} Qu^k \cdot \overline{\partial_x u^k} dy = \left\langle \mu_\partial^0, \sigma(Q)|_{x=0} \right\rangle, \tag{2.51}$$

$$\forall Q \in \mathcal{A}^1, \quad \lim_k \int_{\partial X} Qu^k \cdot \overline{u^k} dy = \left\langle \mu_\partial^{1/2}, \frac{\sigma(Q)}{|\eta|}\Big|_{x=0} \right\rangle, \tag{2.52}$$

$$\forall Q \in \mathcal{A}^{-1}, \quad \lim_k \int_{\partial X} Q\partial_x u^k \cdot \overline{\partial_x u^k} dy = \left\langle \mu_\partial^{-1/2}, |\eta|\sigma(Q)|_{x=0} \right\rangle. \tag{2.53}$$

Les mesures $\mu_\partial^{1/2}$ et $\mu_\partial^{-1/2}$ sont hermitiennes positives, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$|\langle \mu_\partial^0, a^*b \rangle|^2 \leq \langle \mu_\partial^{1/2}, b^*b \rangle \langle \mu_\partial^{-1/2}, a^*a \rangle. \tag{2.54}$$

On posera

$$\mu_\partial = \begin{pmatrix} \mu_\partial^{1/2} & (\mu_\partial^0)^* \\ \mu_\partial^0 & \mu_\partial^{-1/2} \end{pmatrix}, \tag{2.55}$$

où $(\mu_\partial^0)^*$ est définie par $\langle (\mu_\partial^0)^*, q \rangle = \overline{\langle \mu_\partial^0, q^* \rangle}$. Le lemme suivant prouve que μ détermine μ_∂.

Lemme 2.6. —

– *i) On a*

$$\mu 1_{\mathcal{H}} = 0 \quad et \quad \mu_\partial 1_{\mathcal{G} \cup \mathcal{H}} = 0. \tag{2.56}$$

– *ii) Soit θ la fonction sur $S\hat{Z}$ définie μ et μ_∂ presque partout d'après i), par*

$$\theta = \frac{\xi}{|\eta|} \quad dans \ x > 0; \quad \theta = i\frac{\sqrt{-r_0(y,\eta)}}{|\eta|} \quad sur \ \mathcal{E} \cup \mathcal{G}. \tag{2.57}$$

On a les identités

$$\begin{aligned} \mu_\partial^{1/2} &= \frac{2\theta}{i} \frac{1}{1+|\theta|^2} \mu 1_{x=0}, \\ \mu_\partial^0 &= -\frac{2|\theta|^2}{1+|\theta|^2} \mu 1_{x=0} = -i\overline{\theta} \mu_\partial^{1/2}, \\ \mu_\partial^{-1/2} &= |\theta|^2 \mu_\partial^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Preuve. Pour $Q_1 \in \mathcal{A}^1$ opérateur tangentiel, on a d'après ce qui précède

$$\overline{\lim} \, ||Q_1 u^k||_{L^2} \leq \mathrm{Cte} \left| \frac{\sigma(Q_1)}{|\eta|} \right|_{L^\infty} \overline{\lim} \, ||u^k||_{H^1}. \tag{2.59}$$

Il en résulte pour $Q_0 \in \mathcal{A}^0$ opérateur tangentiel

$$\overline{\lim} \Big|\Big| Q_0 \frac{\partial u^k}{\partial x} \Big|\Big|^2_{L^2} \leq \mathrm{Cte} \Big| \frac{r\sigma(Q_0)}{|\eta|^2} \Big|_{L^\infty} |\sigma(Q_0)|_{L^\infty} \overline{\lim} ||u^k||^2_{H^1}. \tag{2.60}$$

En effet, pour vérifier (2.60), on remarque que $\big[Q_0, \frac{\partial}{\partial x}\big] u^k \to 0$ dans L^2 fort et l'inégalité d'interpolation sur $\mathbb{R}_+$, $|f'|^2_{L^2} \leq C|f|_{L^2}|f''|_{L^2}$ implique, avec $E_1 = (1-\Delta_y)^{1/2}$,

$$\overline{\lim} ||\partial_x Q_0 u^k||^2_{L^2} \leq C \, \overline{\lim} ||E_1 Q_0 u^k||_{L^2} \, \overline{\lim} ||\partial_x^2 E_1^{-1} Q_0 u^k||_{L^2}. \tag{2.61}$$

L'inégalité (2.60) résulte donc de (2.59) puisque on a

$$\overline{\lim} ||E_1^{-1}[\partial_x^2, Q_0] u^k||_{L^2} = 0 \tag{2.62}$$

et

$$\overline{\lim} ||E_1^{-1} Q_0 \partial_x^2 u^k||_{L^2} = \overline{\lim} ||E_1^{-1} Q_0 R u^k||_{L^2}. \tag{2.63}$$

Soit w un élément de l'espace $\bigcap\limits_{k=0}^{2} H^k(]0,1[; H^{1-k}(Y)) = E^{(2)}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^N$ et à support compact dans $\overline{X}$. On obtient par intégration par parties (2.64)

$$(Pu|w)_{L^2(X)} - (u|P^*w)_{L^2(X)} = \int_{\partial X} (u \cdot \partial_x \overline{w} - \partial_x u \cdot \overline{w} - u \cdot \overline{M_0^*(w)}) dy.$$

En appliquant (2.64) à $w = w^k = (Q_0 + Q_{-1}\partial_x) u^k$ (qui appartient à $E^{(2)}$) avec $Q_j \in \mathcal{A}^j$, on obtient le membre de gauche de (2.64) convergeant vers zéro

$$\big\langle \mu^0_\partial - (\mu^0_\partial)^*, \sigma(Q_0^*) \big\rangle = \Big\langle \mu^{1/2}_\partial, \frac{\sigma(RQ^*_{-1})}{|\eta|} \Big\rangle + \big\langle \mu^{-1/2}_\partial, \sigma(Q^*_{-1})|\eta| \big\rangle, \tag{2.65}$$

ce qui prouve $\mu^0_\partial = (\mu^0_\partial)^*$ et

$$\mu^{1/2}_\partial \frac{r_0}{|\eta|^2} + \mu^{-1/2}_\partial = 0. \tag{2.66}$$

L'inégalité, pour $f \in H^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d_y)$

$$\big|\big| |\Delta_y|^{1/4} f|_{x=0} \big|\big|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathrm{Cte} \big|\big| |\Delta_y|^{1/2} f \big|\big|_{L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)} ||\partial_x f||_{L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)} \tag{2.67}$$

et (2.60) impliquent $\mu^{-1/2}_\partial|_{\mathcal{G}} = 0$; (2.66) entraîne alors $\mu^{\pm 1/2}_\partial|_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}} = 0$, donc aussi $\mu^0_\partial|_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}} = 0$ d'après (2.54), c'est-à-dire $\mu_\partial|_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}} = 0$.

Soit $\rho_0 = (y_0, \eta_0) \in \mathcal{H}$; notons $\beta_\pm = (y_0, x = 0, \eta_0, \pm\sqrt{r_0(y_0,\eta_0)})$ et $\gamma_\pm$ les deux demi-bicaractéristiques de $-\xi_n^2 + r$ issues de $\beta^\pm$. L'étude classique de la réflexion transverse nous apprend qu'il existe deux suites $u^k_\pm$, bornées dans H^1, de limites faibles nulles, concentrées près de $\gamma_\pm$, vérifiant $Pu^k_\pm \to 0$ dans L^2 et $||Q_0(u^k - (u^k_+ + u^k_-)||_{H^1} \to 0$ si $Q_0 \in \mathcal{A}^0$ est à support proche de ρ_0. Comme $u^k_\pm$ vérifient les équations pseudo-différentielles d'ordre 1 $\big(\frac{1}{i}\partial_x - Q_\pm\big) u^k_\pm = v^k_\pm$ avec

$v_\pm^k \to 0$ dans H^1 et $\sigma(Q_\pm) = \pm\sqrt{r}\,\mathrm{Id}$, les estimations d'énergie sur $\frac{1}{i}\partial_x - Q_\pm$ impliquent

(2.68) $\quad u^k|_{x=0}$ (resp. $\partial_x u^k|_{x=0}$) est borné dans H^1 (resp. L^2) près de ρ_0

et pour $\psi \in C_0^\infty$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_k} \left|\left|\psi(\frac{x}{\varepsilon}) Q_1 u^k\right|\right|_{L^2}^2 = 0$ pour $Q_1 \in \mathcal{A}^1$ à support près de ρ_0, d'où $\mu|_{\mathcal{H}} = 0$. Enfin, d'après le point i) et $\theta|_{\mathcal{G}} = 0$, il suffit de vérifier les relations (2.58) sur la région elliptique $\mathcal{E}$, où elles sont conséquences de la théorie elliptique standard. □

LEMME 2.7. — *Soient $Q_i \in \mathcal{A}^i$ des opérateurs tangentiels de degré $i = 1, 2$, de symboles principaux q_i. On a, avec $\lambda^2 = |\eta|^2(1+\theta^2)$*

$$\lim_{k\to\infty} \Big(\Big(Q_2 + Q_1 \frac{1}{i}\partial_x\Big) u^k | u^k\Big)_{L^2(X)} = \Big\langle \mu, \frac{(q_2 + q_1\theta|\eta|)}{\lambda^2}\Big\rangle. \tag{2.69}$$

PREUVE. On remarque d'abord que le membre de droite est bien défini car la fonction θ est définie μ presque partout. On peut supposer les Q_i à support près de $\rho_0 \in S\hat{Z}$. Lorsque ρ_0 est un point intérieur ($x(\rho_0) > 0$), (2.69) résulte de la construction de μ. Si ρ_0 est un point du bord, on choisit une fonction $\varphi \in C_0^\infty(]-1,1[)$ égale à 1 au voisinage de $[-1/2, 1/2]$ et pour $\varepsilon > 0$ on écrit

$$\begin{aligned} Q_{i,\varepsilon} &= (1-\varphi(x/\varepsilon)) Q_i (1 - \varphi(x/2\varepsilon)), \\ Q_i^\varepsilon &= Q_i - Q_{i,\varepsilon}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Alors puisque $Q_{i,\varepsilon}$ est supporté à l'intérieur,

(2.71)
$$\lim_{k\to\infty} \Big(\Big(Q_{2,\varepsilon} + Q_{1,\varepsilon} \frac{1}{i}\partial_x\Big) u^k | u^k\Big)_{L^2(X)} = \Big\langle \mu, \frac{(1-\varphi(x/2\varepsilon))(q_2 + q_1\theta|\eta|)}{\lambda^2}\Big\rangle$$

et quand ε tend vers 0, si Q est supporté près d'un point ϱ_0 hyperbolique, le terme de droite dans (2.71) tend vers

$$\Big\langle \mu 1_{x>0}, \frac{(q_2 + q_1\theta|\eta|)}{\lambda^2}\Big\rangle = \Big\langle \mu, \frac{(q_2 + q_1\theta|\eta|)}{\lambda^2}\Big\rangle \tag{2.72}$$

puisque $\mu 1_{\mathcal{H}} = 0$. Il reste à montrer que la contribution de Q_i^ε tend vers 0 quand ε tend vers 0. On écrit (modulo des restes régularisants) $Q_2 = -\Delta_y Op(\frac{\tilde{q_2}}{|\eta|^2})$ avec $\sigma(\tilde{q_2}) = \sigma(q_2)$ et $Q_1 = \sum_{j=1}^d D_{y_j} Op(q_{1,j})$. On obtient alors après intégrations par parties (en y),

$$\begin{aligned} &\Big|\lim_{k\to\infty} \Big(\Big(Q_2^\varepsilon + Q_1^\varepsilon \frac{1}{i}\partial_x\Big) u^k | u^k\Big)_{L^2(X)}\Big| \\ &\qquad \le \Big|\langle \mu, (1-\varphi(x/\varepsilon)) \frac{q_2}{|\eta|^2}\rangle\Big| + \sum_j |\langle \mu_{0,j}, (1-\varphi(x/\varepsilon)) q_j\rangle| \end{aligned} \tag{2.73}$$

et le terme de droite tend vers 0 quand ε tend vers 0 car $\mu 1_{\mathcal{H}} = 0$. Pour $\rho_0 \in \mathcal{E}$, (2.69) est conséquence de la théorie elliptique. Enfin pour $\rho_0 \in \mathcal{G}$, (2.60) et $\theta|_{\mathcal{G}} = 0$ montrent que seul le cas Q_2 est à considérer. En reprenant la même décomposition de Q_2 que pour le cas hyperbolique on obtient que la contribution quand ε tend vers 0 de $Q_{2,\varepsilon}$ tend vers

$$\langle \mu 1_{\rho \notin (\mathcal{G} \cup \mathcal{E})}, \frac{q_2}{\lambda^2} \rangle \tag{2.74}$$

Pour étudier la contribution de Q_2^ε, on considère $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 au voisinage de 0 et on note

$$Q_2^{\varepsilon,\varepsilon'} = Op(\psi(\frac{r_0(x,y,\eta)}{\varepsilon'|\eta|^2}))Q_2^\varepsilon \tag{2.75}$$

$Q_2^\varepsilon - Q_2^{\varepsilon,\varepsilon'}$ est donc supporté en dehors de $\mathcal{G}$, on peut donc lui appliquer ce qui précède. On obtient

$$\lim_{k\to\infty} \left(\left(Q_2^\varepsilon - Q_2^{\varepsilon,\varepsilon'} \right) u^k | u^k \right)_{L^2(X)} = \left\langle \mu 1_{\mathcal{G}^c}, \frac{q_2}{\lambda^2} \right\rangle. \tag{2.76}$$

Il reste à étudier la contribution de $Q_2^{\varepsilon,\varepsilon'}$.

$$\left(Q_2^{\varepsilon,\varepsilon'} u^k, u^k \right) = \left((-\Delta_y + 1)(-\Delta_y + 1)^{-1} Q_2^{\varepsilon,\varepsilon'} u^k, u^k \right). \tag{2.77}$$

On intègre par parties en y et on remarque que d'après (2.60), la limite quand $\varepsilon, \varepsilon'$ tendent vers 0 de $\lim\limits_{k\to+\infty} (\partial_x(-\Delta_y + 1)^{-1} Q_2^{\varepsilon,\varepsilon'} u^k, \partial_x u^k)$ est nulle. On en déduit que le terme de droite dans (2.77) est égal à $\langle \mu, \frac{q_2^{\varepsilon,\varepsilon'}}{|\eta|^2} \rangle + o(\varepsilon + \varepsilon'$. Quand $\varepsilon, \varepsilon'$ tendent vers O, on obtient que la contribution de $Q_2^{\varepsilon,\varepsilon'}$ est

$$\langle \mu 1_{\mathcal{G}}, \frac{q_2}{|\eta|^2} \rangle = \langle \mu 1_{\mathcal{G}}, \frac{q_2}{|\lambda|^2} \rangle. \tag{2.78}$$

La contribution de Q_1 se traite de la même manière. On remarquera que dans ce raisonnement on prend garde à toujours faire tendre k vers l'infini *avant* de faire tendre $\varepsilon, \varepsilon'$ vers 0. $\square$

2.2.1. Condition aux limites. — Nous allons à présent travailler près d'un point $\rho_0 \in T^*\partial X \setminus \partial X$

$$\rho_0 = (y_0, \eta_0) \in \mathcal{G} = \{r_0 = 0\}. \tag{2.79}$$

Soit $s_0 \in \mathbb{R}$ et $(f_k(y))$ une suite bornée de $H^{s_0}_{\mathrm{loc}}(Y, \mathbb{C}^N)$; pour $\alpha_0 \in T^*Y \setminus Y$ et $s \in \mathbb{R}$, on dira que la suite (f_k) est bornée dans $H^s_{\alpha_0}$ (resp. converge vers zéro fort dans $H^s_{\alpha_0}$) si il existe un o.p.d. $E(y, D_y)$ de degré $-s$, elliptique en α_0, à support compact dans Y, tel que la suite (Ef_k) soit bornée dans $L^2(Y, \mathbb{C}^N)$ (resp. converge vers zéro dans $L^2(Y, \mathbb{C}^N)$). Le mêmes propriétés restent alors valables pour tout o.p.d. E à support compact dans Y et dont le support essentiel est assez proche de α_0. Nous supposerons dans la suite qu'il existe une matrice B, d'o.p.d. sur Y, de degré -1 telle qu'on ait

$$\begin{cases} u^k|_{x=0} = B\Big(\frac{1}{i}(\partial_x u^k)\big|_{x=0}\Big) + h^k, \\ (h^k) \text{ converge vers zéro fort dans } H^1_{\rho_0}. \end{cases} \tag{2.80}$$

On notera b le symbole principal de B. Près d'un point $\varrho_0 \in \mathcal{G}$, la condition aux limites peut se mettre sous cette forme si et seulement si elle satisfait la condition de Lopatinski uniforme en $\rho_0 \in \mathcal{G}$, voir [**CP70**, ChapVII.3].

LEMME 2.8. — *Sous l'hypothèse (2.80), la suite $((\partial_x u^k)|_{x=0})$ est bornée dans $L^2_{\rho_0}$. De plus, cette suite converge vers zéro fort dans L^2_ρ pour $\rho \in \mathcal{E}$, proche de ρ_0.*

PREUVE. Soit $Q(x, y, D_y)$ un o.p.d. tangentiel de degré assez négatif et à support près de $x = 0$. La suite $f^k = (\partial_x^2 + R)u^k$ est bornée dans L^2 et $f^k|_{x=0}$ est bornée dans $H^{-1/2}_{\mathrm{loc}}(Y, \mathbb{C}^N)$. Par intégration par parties, on obtient, en tenant compte de $R^* = R$,

$$\begin{aligned}(f^k|Q\partial_x u^k)_{L^2} + (\partial_x Q^* u^k|f_k)_{L^2} + \int_Y Q^* u^k \cdot \overline{f}|_{x=0} \\ = \int_Y -\partial_x u^k \cdot \overline{Q\partial_x u^k} + u^k \cdot \overline{\partial_x Q \partial_x u^k} + \big(u, \left[\partial_x^2 + R, Q\partial_x\right] u\big).\end{aligned} \tag{2.81}$$

De plus, on a

$$\begin{cases} \partial_x Q \partial_x u^k|_{x=0} = -QRu^k|_{x=0} + g^k, \\ g^k = [\partial_x, Q]\partial_x u^k|_{x=0} + Q\left[v^k|_{x=0} - (M_0(\partial_x u^k)|_{x=0} - M_1 u^k|_{x=0}\right]. \end{cases} \tag{2.82}$$

Comme $(u^k|_{x=0})$ (resp. $(\partial_x u^k|_{x=0})$) est borné dans $H^{1/2}_{\mathrm{loc}}$ (resp. $H^{-1/2}_{\mathrm{loc}}$), et $(v^k|_{x=0})$ est borné dans $H^{-1/2}_{\mathrm{loc}}$, la suite (g^k) est bornée dans $H^{-1/2}_{\mathrm{loc}}(Y, \mathbb{C}^N)$, lorsque Q est de degré 0. On choisit Q elliptique en ρ_0 vérifiant $Q + B^*QRB = E^*E$, avec E elliptique en ρ_0, χ un opérateur scalaire tangentiel d'ordre 0 à support proche de ϱ_0 et χ_ε une famille d'o.p.d. de degré $-\infty$ convergeant (au sens où les symboles convergent pour la topologie sur l'espace des symboles) vers χ et on pose $Q_\varepsilon = \chi_\varepsilon^* Q \chi_\varepsilon$ vérifiant $Q_\varepsilon + B^* Q_\varepsilon RB = (E\chi_\varepsilon)^* (E\chi_\varepsilon) + A_{-1,\varepsilon}$ où $A_{-1,\varepsilon}$ est une famille d'o.p.d. de degré $-\infty$ convergeant vers un opérateur d'ordre -1, A_{-1}. En appliquant (2.81) à la famille Q_ε, on obtient (puisque $[\partial_x^2 + R, Q_\varepsilon \partial_x]$ est une famille uniformément bornée d'opérateurs de degrés 2),

$$\sup_\varepsilon \sup_k \left| \int_Y \partial_x u^k \cdot \overline{Q_\varepsilon \partial_x u^k} + u^k \cdot \overline{Q_\varepsilon R u^k} \right| \leq \mathrm{Cte}(Q), \tag{2.83}$$

où Cte(Q) désigne une constante dépendant de Q. En utilisant à présent la condition aux limites (2.80), on obtient lorsque le support essentiel de Q est proche de ρ_0

(2.84)
$$\int_Y \partial_x u^k \cdot \overline{Q_\varepsilon \partial_x u^k} + u^k \cdot \overline{Q_\varepsilon R u^k} = \Big(\partial_x u^k | (Q_\varepsilon + B^* Q_\varepsilon RB)\partial_x u^k\Big)_{L^2(Y;\mathbb{C}^N)} + \Big(h^k, Q_\varepsilon R h^k\Big) + \Big(h^k, Q_\varepsilon RB(\frac{\partial x}{i}u^k)\Big) + \Big(B(\frac{\partial_x}{i}u^k), Q_\varepsilon R h^k\Big),$$

ce qui implique, puisque h^k est bornée dans $H^1_{\varrho_0}$

$$\|E\chi_\varepsilon \partial_x u^k\|^2 \leq C\,(Q,\chi)\Big(1 + \|E\chi_\varepsilon \partial_x u^k\|\Big)\,, \tag{2.85}$$

soit

$$\|E\chi_\varepsilon \partial_x u^k\| \leq C'\,(Q,\chi)\,. \tag{2.86}$$

Passant à la limite $\varepsilon \to 0$, on obtient le résultat souhaité. Le fait que la suite $(\partial_x u^k)|_{x=0}$ converge vers zéro fort dans L^2_ρ pour $\rho \in \mathcal{E}$ proche de ρ_0 résulte de (2.80) et de la théorie elliptique standard. □

On notera ν la mesure hermitienne positive associée à la suite bornée $(\partial_x u^k|_{x=0})$ de $L^2_{\rho_0}$ (qui est de limite faible nulle d'après le lemme 2.2), après extraction éventuelle d'une sous-suite. Si $A(y, D_y)$ est un o.p.d. de degré 0 matriciel à support compact dans Y et à support essentiel proche de ρ_0, on a donc

$$\lim_{k\to\infty} \int_Y (A\partial_x u_k) \cdot \overline{\partial_x u_k} = \langle \nu, \sigma(A)\rangle, \tag{2.87}$$

où $\sigma(A)$ est le symbole principal de A qui appartient à $C^\infty(S(T^*Y), \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ et est à support proche de ρ_0. La mesure ν est portée par $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$ d'après le lemme 2.8.

Lemme 2.9. — *Pour $i = 0, 1$, soient $Q_i(x, y, D_y)$ des o.p.d. tangentiels matriciels de degré i, à support compact proche de $(y,\eta) = \rho_0$, $x = 0$, et $Q = Q_0 \frac{1}{i}\partial_x + Q_1$. On a*

$$\lim_{k\to\infty} \big(i[P^*Q - QP]u^k | u^k\big)_{L^2(X)} = \big\langle \nu, q_0 + b^* q_0 r_0 b + q_1 b + b^* q_1 \big\rangle, \tag{2.88}$$

avec $q_i = \sigma(Q_i)(y, \eta, x = 0)$.

Preuve. Rappelons qu'on a $u^k \in \bigcap_{\ell=0}^{3} H^\ell(]0,1[; H^{1-\ell}_{\mathrm{loc}}(Y))$ et $Pu^k = v^k$, où v^k tend fortement vers 0 dans $\bigcap_{\ell=0}^{1} H^\ell(]0,1[, H^{-\ell}_{\mathrm{loc}}(Y))$. Soit $\varphi \in C_0^\infty\left(\overline{X}\right)$, égale à 1 au voisinage du support des Q_i et $u^k_\varphi = \varphi u^k$. Par intégration par parties, on obtient

$$(2.89)\qquad (Pu^k|Q^* u^k_\varphi)_{L^2(X)} = (QPu^k|u^k_\varphi)_{L^2(X)} - i\int_Y v^k \cdot \overline{Q_0^* u^k_\varphi},$$

où par convention la dualité $(\alpha|\beta)_{L^2(X)}$ s'applique à $\alpha \in L^2(]0,1[, H^s(Y))$ et $\beta \in L^2(]0,1[, H^{-s}(Y))$ avec α ou β à support compact et $s \in \mathbb{R}$. De même, si les Q_i sont de degré assez négatifs, on obtient par intégration par parties

$$(2.90)\qquad (Qu^k|Pu^k_\varphi)_{L^2(X)} \\ = (P^*Qu^k|u^k_\varphi)_{L^2(X)} + \int_Y -Qu^k \cdot \overline{\partial_x u^k_\varphi} + \partial_x Qu^k \cdot \overline{u^k_\varphi} - M_0^*(Qu^k)\cdot \overline{u^k_\varphi}.$$

En retranchant (2.89) à (2.90), on obtient, pour des opérateurs Q^i de degré assez négatifs

$$(2.91)\qquad (Qu^k|Pu^k_\varphi)_{L^2(X)} - (Pu^k|Q^*u^k_\varphi)_{L^2(X)} = \big((P^*Q - QP)u^k|u^k_\varphi\big)_{L^2(X)} \\ + \int_Y -Qu^k \cdot \overline{\partial_x u^k_\varphi} + \partial_x Qu^k \cdot \overline{u^k_\varphi} - M_0^*(Qu^k)\cdot \overline{u^k_\varphi} + iv^k \cdot \overline{Q_0^* u^k_\varphi}.$$

Lorsque les opérateurs Q_i sont de degré i, on a $(P^*Q - QP) = \sum\limits_{j=0}^{2} A_{2-j}\partial_x^j$ où les A_ℓ sont des opérateurs tangentiels de degré ℓ, donc $\varphi(P^*Q - QP)u^k$ appartient à $L^2(]0,1[, H^{-1}(Y))$ et est à support compact dans $\overline{X}$. Si de plus les Q_i sont à support proche de ρ_0, on a d'après le lemme 2.8, $Qu^k|_{x=0} \in L^2$ et

$$(2.92)\qquad \partial_x Qu^k|_{x=0} = \frac{\partial Q_0}{\partial x}\ \frac{1}{i}\partial_x u^k\big|_{x=0} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} u^k|_{x=0} + Q_1 \partial_x u^k|_{x=0} \\ + Q_0 \frac{1}{i} v^k|_{x=0} + Q_0 \frac{1}{i}\big[-Ru^k - M_0\partial_x u^k - M_1 u^k\big]\big|_{x=0},$$

donc $\partial_x Qu^k|_{x=0}$ appartient à $H^{-1}(Y)$. L'identité (2.91) reste donc valable pour Q vérifiant les hypothèses du lemme 2.9. En faisant tendre k vers l'infini dans l'identité (2.91), on obtient alors (2.88) en utilisant la condition aux limites (2.80) et la définition (2.87) de la mesure ν. $\square$

Pour ρ proche de $\rho_0 \in T^*Y$, et ξ proche de zéro, on note $J_\xi(\rho)$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^N$ défini par

$$(2.93)\qquad J_\xi(\rho) = (\mathrm{Id} - \xi b(\rho))^{-1}(\mathrm{Id} + \xi b(\rho)),$$

où $b(\rho)$ est le symbole principal de B. On remarquera que $J_0(\rho) = \mathrm{Id}$ et $J_{-\xi}(\rho) = [J_\xi(\rho)]^{-1}$. L'endomorphisme $-J_\xi(\rho)$, pour $\rho \in \mathcal{H}$ décrit la réflexion hyperbolique associée à la condition aux limites (2.80) entre les points $(\rho, -\xi)$

et (ρ,ξ). Nous noterons également $C^{\infty,k}_{\mathrm{paire}}(p^{-1}(0),\mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ le sous-espace des fonctions q C^∞ homogènes de degré k de $p^{-1}(0)$ à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}^N)$, à support près de $x=0$, $\xi=0$, $(y,\eta)=\rho_0$ et qui vérifient la condition de symétrie (pour ρ proche de ρ_0)

$$\forall\xi,\quad J^*_\xi(\rho)q(x=0,\xi,\rho)J_\xi(\rho)=q(x=0,-\xi,\rho). \tag{2.94}$$

Soit μ la mesure associée à la suite (u^k). On a $\mu|_{\mathcal{E}}=0$ près de ρ_0 car d'après le lemme 2.8, les suites $u^k|_{x=0}$ et $\partial_x u^k|_{x=0}$ convergent vers zéro fort dans $H^{1/2}_{\rho_0}$ et $H^{-1/2}_{\rho_0}$. Comme $\mu|_{\mathcal{H}}=0$, on peut à présent considérer μ comme une mesure sur $p^{-1}(0)/\mathbb{R}^*_+$, c'est-à-dire comme un élément du dual de l'espace $C^0_0(p^{-1}(0)/\mathbb{R}^*_+;\mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ *via* l'application canonique

$$p^{-1}(0)\setminus 0/\mathbb{R}^*_+ \xrightarrow{j} SZ, \tag{2.95}$$

qui est un homéomorphisme de $(p^{-1}(0)\setminus\{x=0,\xi\neq 0\})/\mathbb{R}^*_+$ sur $SZ\setminus\mathcal{H}$.

Lemme 2.10. — *Soient*

$$m(x,\xi,\rho)=m_0(x,\rho)i\xi+m_1(x,\rho) \tag{2.96}$$

et

$$q\in C^{\infty,1}_{\mathrm{paire}}(p^{-1}(0),\mathrm{End}(\mathbb{C}^N)). \tag{2.97}$$

La mesure μ associée à la suite (u^k) (qui satisfait la condition aux limites de la relation (2.80)) vérifie l'équation

$$\Big\langle \mu, \frac{\{p,q\}+i(m^*q-qm)}{\lambda^2}\Big\rangle = 0. \tag{2.98}$$

Preuve. Soit $q\in C^\infty_0(p^{-1}(0),\mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$, homogène de degré 1, à support près de $(x=0,\xi=0,\rho_0)$. D'après le théorème de division de Malgrange (voir [**Hör83**, Chap VII.7.5]), il existe des opérateurs tangentiels Q_i de degré i, $i=0,1$, de symboles principaux q_i tels que

$$q=(q_0\xi+q_1)|_{p^{-1}(0)} \tag{2.99}$$

et on peut choisir les Q_i à support compact dans $\overline{X}$ et à support essentiel proche de $x=0$, $\rho=\rho_0$. En notant $Q=Q_0\frac{1}{i}\partial_x+Q_1$ et $M=M_0\partial_x+M_1$, on a

$$\begin{cases} i(P^*Q-QP) & = i[\partial_x^2+R,Q]+i(M^*Q-QM), \\ & = A_2+A_1\frac{1}{i}\partial_x+A_0P, \end{cases} \tag{2.100}$$

où les A_j sont des opérateurs à supports compacts, tangentiels matriciels de degré j, de symboles principaux a_j. On a donc l'égalité sur $p^{-1}(0)\setminus\mathcal{H}$ (avec θ

définie par (2.57))

$$a_2 + a_1\theta|\eta| = \{p, q\} + i(m^*q - qm)|_{p^{-1}(0)}. \tag{2.101}$$

D'après les lemmes 2.6, 2.7 et 2.8, l'identité (2.98) est donc conséquence de (2.101) si nous vérifions pour $q \in C^{\infty,1}_{\text{paire}}(p^{-1}(0), \operatorname{End}(\mathbb{C}^N))$ l'identité

$$(q_0 + b^*q_0rb + q_1b + b^*q_1)|_{(x=0)\setminus\mathcal{E}} \equiv 0. \tag{2.102}$$

D'après (2.94) et (2.99), on a sur $\{x = 0\} \cap p^{-1}(0)$

$$J^*_\xi \circ (q_0\xi + q_1) \circ J_\xi = -q_0\xi + q_1. \tag{2.103}$$

D'après (2.93), cela signifie que sur $x = 0 \cap p^{-1}(0)$, la fonction matricielle $\xi \mapsto (\operatorname{Id} - \xi b^*)^{-1}(q_0\xi + q_1)(\operatorname{Id} - \xi b)^{-1}$ est paire en ξ ; ceci équivaut à dire que sur $\{x = 0\} \cap p^{-1}(0) = \mathcal{G} \cup \mathcal{H}$, la fonction matricielle $\xi \mapsto (\operatorname{Id} + \xi b^*)(q_0\xi + q_1)(\operatorname{Id} + \xi b)$ est paire en ξ, ce qui entraîne $(q_0 + b^*q_0rb + q_1b + b^*q_1)|_{\mathcal{H}} = 0$, donc (2.102) par continuité puisque $\mathcal{G} \subset \overline{\mathcal{H}}$. □

3. Mesures invariantes

Dans ce paragraphe, nous noterons Σ un petit voisinage (pour que sur Σ (2.80) soit satisfaite), conique dans $Z = j(\operatorname{Car} P)$ du point $\rho_0 = (y_0, \eta_0) \in \mathcal{G}$, de sorte que la condition aux limites (2.80) soit satisfaite près de $\overline{\Sigma}$ (et $|\xi b(\rho)| < 1$ sur Σ). Près de ρ_0, on a donc

$$\begin{cases} \Sigma \cap (x > 0) = \big\{(y, \eta, x, \xi); \xi^2 = r(x, y, \eta)\big\}, \\ \Sigma \cap (x = 0) = \big\{(y, \eta); r_0(y, \eta) \geq 0\big\}. \end{cases} \tag{3.1}$$

L'espace Σ est un espace métrique localement compact. On remarquera que puisque ρ_0 est le projeté d'un point de la variété caractéristique vérifiant $\xi_0 = 0$, on a $\eta_0 \neq 0$.

3.1. Le flot de Melrose-Sjöstrand.

— On notera π la projection canonique de $\operatorname{Car} P = p^{-1}(0) = \{\xi^2 = r(x, y, \eta)\}$ sur Σ. L'ensemble Σ est stratifié par

$$\Sigma = \bigcup_{j=0}^{\infty} \Sigma^j \tag{3.2}$$

où

$$\begin{aligned}
\Sigma^0 &= \Sigma \cap (x > 0) \\
\Sigma^1 &= \mathcal{H} = \big\{(y,\eta); r_0(y,\eta) > 0\big\} \\
\Sigma^2 &= \big\{(y,\eta); r_0(y,\eta) = 0, r_1(y,\eta) \neq 0\big\} \\
&\dots \\
\Sigma^{k+3} &= \big\{(y,\eta); r_0(y,\eta) = 0, H^j_{r_0}(r_1) = 0, \forall j \leq k; H^{k+1}_{r_0}(r_1) \neq 0\big\} \\
&\dots \\
\Sigma^{\infty} &= \big\{(y,\eta); r_0(y,\eta) = 0, H^j_{r_0}(r_1) = 0, \forall j\big\}.
\end{aligned}$$

On a $\mathcal{G} = \{r_0 = 0\} = \underset{j\geq 2}{\cup} \Sigma^j$, et on décompose Σ^2 en l'union disjointe

$$\Sigma^2 = \mathcal{G}^{2,+} \cup \mathcal{G}^{2,-}, \quad \mathcal{G}^{2,\pm} = \big\{(y,\eta) \in \Sigma^2, \pm r_1(y,\eta) > 0\big\}. \tag{3.3}$$

Les points de $\mathcal{G}^{2,+}$ sont les points strictement diffractifs, et ceux de $\mathcal{G}^{2,-}$ les points strictement glissants. Les point de Σ^1 sont ceux en lesquels la bicaractéristique de p est transverse au bord $x = 0$ (points hyperboliques). Les points de Σ^j, $j \geq 2$ sont ceux en lesquels la bicaractéristique de p a un contact d'ordre j avec le bord $x = 0$. La fonction $p = -\xi^2 + r(x,y,\eta)$ étant homogène de degré 2 sur le fibré cotangent, le flot de son champ hamiltonien, H_p, n'induit pas un flot sur l'espace quotient homogène $\operatorname{Car} P/\mathbb{R}^*_+$. Pour remédier à ce fait, on reparamètre les bicaractéristiques de p en choisissant une fonction $\tau(y,\eta)$, homogène de degré 1 positive, C^∞ et ne s'annulant pas sur Σ (sauf pour $\eta = 0$). Les champs H_p et $\frac{1}{\tau}H_p$ ont les mêmes courbes intégrales, et sur $p^{-1}(0)$, on a $\frac{1}{\tau}H_p = H_p/\tau$. Le paramètre s que nous choisirons sur les bicaractéristiques généralisées sera le paramètre naturel pour le champ $\frac{1}{\tau}H_p$. Rappelons qu'un rayon est une application **continue** d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans Σ, $s \mapsto \gamma(s)$, qui vérifie en tout point $\rho_1 = \gamma(s_1)$.

- i) Si $\rho_1 \in \mathcal{H} \cup \mathcal{G}^{2,+}$: il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait $x(\gamma(s)) > 0$ pour $0 < |s - s_1| < \varepsilon$.
- ii) Si $\rho_1 \notin \mathcal{H} \cup \mathcal{G}^{2,+}$ ($\pi^{-1}(\rho_1)$ est alors un singleton dans $p^{-1}(0)$) : pour toute application f C^∞ de $p^{-1}(0)$ dans $\mathbb{R}$, et $\pi-$invariante, si on note $\tilde f$ l'unique application continue de Σ dans $\mathbb{R}$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(0) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R} \\
\Sigma \arrow[ur, "\tilde f"] &
\end{tikzcd}$$

la fonction $s \mapsto \tilde{f}[\gamma(s)]$ est dérivable en $s = s_1$ et on a

$$\frac{d}{ds}(\tilde{f} \circ \gamma)(s_1) = \frac{1}{\tau} H_p(f)[\pi^{-1}(\rho_1)]. \tag{3.4}$$

Dans toute la suite, on supposera qu'il n'y a pas de contact d'ordre infini entre les bicaractéristiques de p et le bord $x = 0$, c'est-à-dire

$$\exists J, \quad \Sigma = \bigcup_{j \leq J} \Sigma^j. \tag{3.5}$$

Sous l'hypothèse (3.5), R. Melrose et J. Sjöstrand ont prouvé [**MS82**] que par tout point ρ_1 de Σ il existe un unique rayon maximal $s \in]a, b[\xrightarrow{\gamma} \Sigma$ vérifiant $\gamma(0) = \rho_1$ et $\gamma(a+0) \cup \gamma(b-0) \in \overline{\Sigma} \setminus \Sigma$.

Dans la suite on notera $\phi(s, \rho)$ le flot de Melrose-Sjöstrand ainsi défini, vérifiant $\phi(0, \rho) = \rho$. Le flot ϕ est homogène pour l'action de $\mathbb{R}_+^*$ sur Σ, c'est-à-dire vérifie $\phi(s, t\rho) = t \cdot \phi(s, \rho)$, donc induit un flot, qu'on notera aussi ϕ sur le quotient $\Sigma / \mathbb{R}_+^*$.

3.2. Trivialisation du fibré le long du flot. — On note $\rho = (y, \eta)$ le point courant de $T^*Y \simeq T^*\partial X$ et $\mathcal{J}$ le morphisme de fibré vectoriel hermitien, $\mathbb{C}^N$ étant muni de son produit scalaire usuel

$$\begin{cases} p^{-1}(0) \times \mathbb{C}^N \xrightarrow{\mathcal{J}} p^{-1}(0) \times \mathbb{C}^N \\ \{(\rho, x, \xi); e\} \longmapsto (\rho, x, \xi); [J_\xi(\rho)]^{+1/2}(e)), \end{cases} \tag{3.6}$$

où $J_\xi(\rho)$ est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^N$ défini en (2.93) et

$$[J_\xi(\rho)]^{+1/2} = \exp\big(\frac{1}{2} \log J_\xi(\rho)\big).$$

Le morphisme $\mathcal{J}$ est bien défini près de $(\rho_0, 0, 0)$ et on a $\mathcal{J}|_{\mathcal{G}} = \mathrm{Id}$. Si $q \in C_0^\infty(p^{-1}(0), \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ est considérée comme forme hermitienne par le produit scalaire de $\mathbb{C}^N$, son image inverse par $\mathcal{J}$ notée $\tilde{q}$ est définie par

$$(\tilde{q}_{\rho,x,\xi}(e)|e) = \big((J_\xi^{*1/2}(\rho) q_{\rho,x,\xi} J_\xi^{1/2}(\rho))(e)|e\big). \tag{3.7}$$

On notera $\tilde{q}_\xi = J_\xi^{*1/2} q_\xi J_\xi^{1/2}$ pour simplifier les notations. Par définition, on a $q \in C^\infty_{\text{paire}}(p^{-1}(0), \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ si et seulement si $q \in C_0^\infty(p^{-1}(0), \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ et $J_\xi^* q_\xi J_\xi = q_{-\xi}$ sur le bord $x = 0$, ce qui équivaut à $\tilde{q}_{-\xi} = \tilde{q}_\xi$ sur le bord $x = 0$, puisque $J_{-\xi} = J_\xi^{-1}$. Si μ est la mesure du lemme 2.10, on définit la mesure hermitienne positive $\tilde{\mu}$, élément du dual de $C_0^0(p^{-1}(0)/\mathbb{R}_+^*, \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ par

$$\langle \tilde{\mu}, \tilde{q} \rangle = \langle \mu, q \rangle, \quad \tilde{q}_\xi = J_\xi^{*1/2} q_\xi J_\xi^{1/2}. \tag{3.8}$$

En d'autres termes, $\tilde{\mu}$ est l'image inverse de μ par l'isomorphisme $\mathcal{J}$. Si on note $C_+^{\infty,k}(p^{-1}(0)/\mathbb{R}_+^*, \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ l'espace des sections C^∞ $\tilde{q}$ homogènes de degré

k de $p^{-1}(0)/\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}^N)$, à support compact, et qui vérifient $\tilde{q}(\rho,0,\xi)=\tilde{q}(\rho,0,-\xi)$, le lemme 2.10 est équivalent à

$$\begin{aligned}\Big\langle \tilde{\mu}, \frac{\{p,\tilde{q}\}+i(n^*\tilde{q}-\tilde{q}n)}{\lambda^2}\Big\rangle = 0,\ \ \forall \tilde{q}\in C_+^{\infty,1}(p^{-1}(0),\mathrm{End}(\mathbb{C}^N))\\ \text{avec } \ n=J^{-1/2}mJ^{1/2}+i\{p,J^{-1/2}\}J^{1/2}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

On remarquera que le passage de la mesure μ à la mesure $\tilde{\mu}$ correspond exactement à un changement de structure hermitienne sur le fibré $p^{-1}(0)\times\mathbb{C}^N$, qui permet de ramener le morphisme d'identification $J_\xi(e)$ de la réflexion hyperbolique à l'identité ; les équations (2.98) et (3.9) vérifiées par les mesures μ et $\tilde{\mu}$ sont formellement identiques. Si $\Sigma\times\mathbb{C}^N$ est le fibré hermitien trivial sur Σ, $\mathbb{C}^N$ étant muni de son produit scalaire usuel, on notera $\hat{\mu}$ la mesure hermitienne positive élément du dual de $C_0^0\big(\Sigma/\mathbb{R}^*;\mathrm{End}(\mathbb{C}^N)\big)$ définie par

$$\langle\hat{\mu},q\rangle=\langle\tilde{\mu},q\circ\pi\rangle,\tag{3.10}$$

où $\pi : p^{-1}(0)/\mathbb{R}_+^*\to\Sigma/\mathbb{R}_+^*$ désigne la projection canonique. On remarquera que pour $q\in C_0^0(\Sigma/\mathbb{R}_+^*;\mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$, la relation de symétrie $(q\circ\pi)(\rho,x=0,\xi)=(q\circ\pi)(\rho,x=0,-\xi)$ est satisfaite. De plus, comme $\mu|_{\mathcal{H}}=0$, la mesure $\hat{\mu}$ détermine uniquement μ. On peut réécrire l'équation (3.9) sur $\tilde{\mu}$ sous forme homogène en posant $\tilde{q}=(\lambda^2/\tau)a$. On obtient

$$\begin{gathered}\forall a\in C_+^{\infty,0}(p^{-1}(0),\mathrm{End}(\mathbb{C}^N))\\ \Big\langle\tilde{\mu},\Big\{\frac{p}{\tau},a\Big\}+\ell^*a+a\ell\Big\rangle=0\\ \text{avec } \ \ell=\frac{1}{2}\frac{\tau}{\lambda^2}\Big\{\frac{p}{\tau},\frac{\lambda^2}{\tau}\Big\}\,\mathrm{Id}-i\frac{n}{\tau}.\end{gathered}\tag{3.11}$$

Soit $E_0=\mathbb{C}^N$ muni de son produit scalaire usuel $(e|e')_{\mathbb{C}^N}$; soit $s\mapsto\mathcal{L}(s)$ une application C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ et $s\mapsto M(s)$ la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dM}{ds}=\mathcal{L}M,\quad M(s=0)=\mathrm{Id}\,.\tag{3.12}$$

Soit $\mathcal{T}_0$ la trivilisation du fibré $\mathbb{R}\times\mathbb{C}^N$ sur $\mathbb{R}$

$$\begin{gathered}\mathbb{R}\times E_0\xrightarrow{\mathcal{T}_0}\mathbb{R}\times\mathbb{C}^N\\ (s,e)\longmapsto(s,M(s)e).\end{gathered}\tag{3.13}$$

Si $b(s)\in\Gamma(\mathbb{R},\mathrm{End}(\mathbb{C}^N)$ est identifiée à la forme hermitienne $(be|e')_{\mathbb{C}^N}$, son image inverse par $\mathcal{T}_0$ est

$$\mathcal{T}_0^*(b)(s)=M^*(s)b(s)M(s).\tag{3.14}$$

Si μ est une mesure élément du dual de l'espace $C_0^0(\mathbb{R}_s, \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$, son image inverse $\mathcal{T}_0^*(\mu)$ par $\mathcal{T}_0$ est alors définie par

$$\langle \mu, b\rangle = \langle \mathcal{T}_0^*(\mu), M^* b M\rangle \tag{3.15}$$

et on a

LEMME 3.1. — *Il y a équivalence entre*

i) $\mathcal{T}_0^*(\mu)$ *vérifie l'équation* $\frac{d}{ds}\mathcal{T}_0^*(\mu) = 0$.

ii) *On a* $\big\langle \mu, \frac{da}{ds} + \mathcal{L}^* a + a\mathcal{L}\big\rangle = 0$ *pour tout* $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}_s, \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$.

PREUVE. Le lemme 3.1 est conséquence de l'identité $\frac{d}{ds}(M^* a M) = M^*\big(\frac{da}{ds} + \mathcal{L}^* a + a\mathcal{L})M$. □

Compte tenu du lemme 3.1, l'équation (3.11) vérifiée par la mesure $\tilde{\mu}$ est donc *formellement* équivalente à l'invariance par le flot $\phi(s,\rho)$ de l'image inverse de la mesure $\hat{\mu}$ sur $\Sigma/\mathbb{R}_+^*$, par la trivilisation $\mathcal{T}$ du fibré $\Sigma/\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}^N$

$$\begin{cases} \big(I \subset \mathbb{R} \times \Sigma/\mathbb{R}_+^*\big|_S\big) \times E_0 \xrightarrow{\mathcal{T}} \Sigma/\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}^n \\ \qquad\qquad ((s,\rho), e) \longmapsto (\phi(s,\rho), M(s,\rho)(e)), \end{cases} \tag{3.16}$$

où S est une hypersurface transverse au flot, et où l'application matricielle $s \mapsto M(s,\rho)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dM}{ds}(s,\rho) = \ell(\phi(s,\rho))M(s,\rho), \quad M(0,\rho) = \mathrm{Id}\,. \tag{3.17}$$

On considèrera l'équation (3.17) comme équation différentielle ordinaire en s, avec paramètre $\rho \in \Sigma$. On notera qu'à ρ fixé, la fonction $s \mapsto \ell(\phi(s,\rho))$ est bornée, C^0 sauf en un nombre fini de points s_i où elle admet (éventuellement) une discontinuité de première espèce et possède des limites à gauche et à droite en chacun de ces points. Les points de discontinuité s_i correspondent aux valeurs de s pour lesquelles $\rho_i = \phi(s_i, \rho) \in \Sigma_1$, *i.e.* aux points de réflexion hyperbolique de la trajectoire. Il en résulte l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3.17) pour tout $\rho \in \Sigma$.

La proposition suivante assure la continuité de la trivialisation $\mathcal{T}$ (3.16), ce qui permet de définir sans ambiguité l'image inverse $\mathcal{T}^*(\hat{\mu})$.

PROPOSITION 3.2. — *La solution* $M(s,\rho)$ *de l'équation différentielle (3.17) est continue en* $(s,\rho) \in \mathbb{R} \times \Sigma$.

PREUVE. On a

$$M(t,\rho) = \mathrm{Id} + \int_0^t \ell(\phi(s,\rho))M(s,\rho)ds, \tag{3.18}$$

d'où avec des constantes localement uniformes en ρ

$$||M(t,\rho)|| \leq C; \quad ||M(t,\rho) - M(t',\rho)|| \leq C|t-t'|. \tag{3.19}$$

Il suffit donc de vérifier pour tout t, la continuité en ρ de $M(t,\rho)$. Posons

$$\Delta(t,\rho_1,\rho_2) = \int_0^t ||\ell(\phi(s,\rho_1) - \ell(\phi(s,\rho_2)||ds \tag{3.20}$$

$$D(t,\rho_1,\rho_2) = ||M(t,\rho_1) - M(t,\rho_2)||. \tag{3.21}$$

Les fonctions Δ et D sont continues en t, et on a

$$D(t,\rho_1,\rho_2) \leq C\Big[\Delta(t,\rho_1,\rho_2) + \int_0^t D(s,\rho_1,\rho_2)ds\Big]. \tag{3.22}$$

Par le lemme de Gronwall, on a donc

$$D(t,\rho_1,\rho_2) \leq C\Delta(t,\rho_1,\rho_2)\exp(\mathrm{Cte}\, t). \tag{3.23}$$

La proposition est donc conséquence de

$$\forall \rho_2, \quad \lim_{\rho_1\to\rho_2} \Delta(t,\rho_1,\rho_2) = 0. \tag{3.24}$$

Comme le flot $\phi(s,\rho)$ est continu, et puisque y,η,x,ξ^2 sont des fonctions continues sur Σ, il suffit de vérifier

$$\forall \rho_2, \quad \lim_{\rho_1\to\rho_2} \int_0^t |\xi(\phi(s,\rho_1)) - \xi(\phi(s,\rho_2))ds = 0. \tag{3.25}$$

La fonction $(s,\rho) \mapsto \xi(\phi(s,\rho))$ est uniformément bornée, continue en tout point (s_0,ρ_0) tel que $\phi(s_0,\rho_0) \notin \Sigma_1$, et d'après l'hypothèse $\Sigma^\infty = \emptyset$ il n'existe qu'un nombre fini de valeurs de $s \in [0,1]$ telles que $\phi(s,\rho_2) \in \Sigma_1$. D'après le théorème de convergence dominée, on obtient (3.25). $\square$

3.3. Le théorème de propagation. — On note $\dot\sigma$ l'image de $\sigma \in \Sigma$ dans $\Sigma/\mathbb{R}^*_+$. Rappelons que $\Sigma/\mathbb{R}^*_+$ est un espace métrisable. On notera $\mathrm{dist}(\dot\sigma,\dot\sigma')$ une distance sur $\Sigma/\mathbb{R}^*_+$. Soit Ω un ouvert homogène de Σ et $U = \pi^{-1}(\Omega)$. Si $\tilde\mu$ est une mesure hermitienne positive élément du dual de $C^0_0\big(U/\mathbb{R}^*_+, \mathrm{End}(\mathbb{C}^N)\big)$, et vérifiant $\tilde\mu|_{\mathcal{H}} = 0$ on notera $\hat\mu$ l'image de $\tilde\mu$ par la projection $\pi : p^{-1}(0) \to \Sigma$

$$\langle \hat\mu, q\rangle = \langle \tilde\mu, q\circ\pi\rangle, \quad q \in C^0_0\big(\Omega/\mathbb{R}^*_+, \mathrm{End}(\mathbb{C})\big). \tag{3.26}$$

On dira que $\tilde\mu$ vérifie l'équation "$\dot{\tilde\mu} = 0$" sur U si on a

$$\Big\langle \tilde\mu, \Big\{\frac{p}{\tau}, a\Big\} + \ell^* a + a\ell \Big\rangle = 0, \ \ \forall a \in C^{\infty,0}_+(U, \mathrm{End}(\mathbb{C}^N)), \tag{3.27}$$

où $\ell(y,\eta,n,\xi) \in C^{\infty,0}(p^{-1}(0), \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ est défini en (3.11). On note toujours $\mathcal{T}$ la trivialisation du fibré hermitien $\Sigma/\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{C}^N$ associée à ℓ par (3.16) et (3.17). On dira que $\hat\mu$ est invariante sur Ω si $\mathcal{T}^*(\hat\mu)$ est invariante par le flot de Melrose-Sjöstrand remonté trivialement sur le fibré $\Sigma/\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{C}^N$ par la formule

$$(\rho, e) \longmapsto (\phi(s,\rho), e), \quad \rho \in \Sigma/\mathbb{R}^*_+, \quad e \in \mathbb{C}^N. \tag{3.28}$$

L'objet de ce paragraphe est de vérifier le théorème de propagation suivant.

THÉORÈME 1. — *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) $\hat{\mu}$ *est invariante.*

ii) $\tilde{\mu}$ *vérifie l'équation "$\dot{\tilde{\mu}} = 0$"* **et** $\tilde{\mu}|_{\mathcal{G}^{2,+}} = 0$.

PREUVE DU THÉORÈME 1. On vérifie d'abord i) $\Rightarrow$ ii).

Soit $a \in C_+^{\infty,0}(p^{-1}(0), \mathrm{End}\,\mathbb{C}^N))$; on a $a(\rho, x = 0, \xi) = a(\rho, x = 0, -\xi)$, donc a définit une section $\hat{a} \in C_0^0\big(\Sigma/\mathbb{R}_+^*, \mathrm{End}(\mathbb{C}^N)\big)$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(0) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{End}(\mathbb{C}^N) \\ \Sigma \arrow[ur, "\hat{a}"] & \end{tikzcd}$$

(On identifie $\hat{a}$ à la section homogène de degré zéro de $C_0^0(\Sigma, \mathrm{End}(\mathbb{C}^N)))$. Soit $s \mapsto \phi(s, \rho)$ un rayon. La fonction continue $s \mapsto \hat{a}(\phi(s, \rho))$ est dérivable à gauche et à droite en tout point et on a

$$\frac{d}{ds}\hat{a}(\phi(s, \rho))|_{g,d} = \Big\{\frac{p}{\tau}, a\Big\}(\sigma_{g,d}), \tag{3.29}$$

où $\sigma_{g,d}$ est un des au plus 2 points de $p^{-1}(0)$ éléments de $\pi^{-1}(\phi(s, \rho))$. En particulier, $s \mapsto \hat{a}(\phi(s, \rho))$ est dérivable en tout point s tel que $\phi(s, \rho) \notin \mathcal{H}$ et y vérifie $\frac{d}{ds}\hat{a}(\phi(s, \rho)) = \big\{\frac{p}{\tau}, a\big\}(\phi(s, \rho))$. Comme $\hat{\mu}|_{\mathcal{H}} = 0$ (car $\hat{\mu}$ est invariante et $\mathcal{H}$ est transverse au flot) l'équation (3.27) est conséquence de

$$\Big\langle \hat{\mu}, \frac{\partial \hat{a}}{\partial s} + \ell^* \hat{a} + \hat{a}\ell \Big\rangle = 0, \quad \forall a \in C_+^{\infty,0}(p^{-1}(0), \mathrm{End}(\mathbb{C}^N)). \tag{3.30}$$

Il suffit alors de remarquer que (3.30) résulte comme dans le lemme 3.1 de la construction de la trivialisation $\mathcal{T}$ définie par (3.16) et (3.17). Enfin, on a $\hat{\mu}|_{\mathcal{G}^{2,+}} = 0$ car $\mathcal{G}^{2,+}$ est transverse au flot de Melrose-Sjöstrand et $\hat{\mu}$ est invariante donc $\tilde{\mu}|_{\mathcal{G}^{2,+}} = 0$.

Vérifions à présent ii) $\Rightarrow$ i).

Le théorème étant de nature locale près de chaque point $\sigma = (y, \eta, x, \xi)$ de $p^{-1}(0)$, nous procédons par récurrence sur la strate Σ^j telle que $\pi(\sigma) \in \Sigma^j$. Lorsque $\pi(\sigma) \in \Sigma^0$ (*i.e.* dans $x > 0$), le résultat est conséquence du lemme 3.1, et près des points de réflexion hyperbolique, $\pi(\sigma) \in \Sigma^1$, du lemme 3.1 et de la formule des sauts (on pourrait aussi utiliser le calcul explicite de la paramétrixe près des points hyperboliques, voir [**Gér85**] ou [**GL93**] pour le cas $N = 1$).

Pour traiter les cas $\pi(\sigma) \in \Sigma^j$, avec $j \geq 2$, on commence (voir la proposition 3.4) par construire des mesures auxiliaires qui permettent de généraliser l'équation (3.27) à des fonctions $b \in C^{\infty,0}(p^{-1}(0), \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$, C^∞ à support compact, homogènes de degré zéro de $p^{-1}(0)$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}^N)$, mais ne vérifiant pas nécessairement la relation de symétrie entre les points ξ et $-\xi$ sur $x = 0$.

Tout élément b de $C^{\infty,0}(p^{-1}(0), \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ se décompose d'une infinité de façons sous la forme

$$b = a^0 + \xi a^{-1}, \quad a^j \in C_+^{\infty,j}(p^{-1}(0), \mathrm{End}(\mathbb{C}^N)), \tag{3.31}$$

où les a^j sont des fonctions paires de ξ sur $x = 0$. On peut par exemple prendre

$$a^0(\rho, x, \xi) = (b((\rho, x, \xi) + b((\rho, x, -\xi))/2 \tag{3.32}$$

et

$$a^1(\rho, x, \xi) = (b((\rho, x, \xi) - b((\rho, x, -\xi))/2\xi. \tag{3.33}$$

On a

$$\Big\langle \tilde{\mu}, \Big\{\frac{p}{\tau}, b\Big\} + \ell^* b + b\ell \Big\rangle = \Big\langle \tilde{\mu}, \Big\{\frac{p}{\tau}, \xi a^{-1}\Big\} + \xi \ell^* a^{-1} + \xi a^{-1}\ell \Big\rangle \stackrel{\text{def}}{=} I. \tag{3.34}$$

On choisit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $\chi(x) = 1$ pour $x \leq 1$, $\chi(x) = 0$ pour $x \geq 2$ et $\chi' \leq 0$; on pose $\phi = 1 - \chi$. Pour tout $\varepsilon > 0$ petit on a $\xi a^{-1}\phi(\frac{x}{\varepsilon}) \in C_+^{\infty,0}(p^{-1}(0), \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ d'où

$$I = \Big\langle \tilde{\mu}, \Big\{\frac{p}{\tau}, \xi a^{-1}\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big\} \Big\rangle + \Big\langle \tilde{\mu}, \xi\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)(\ell^* a^{-1} + a^{-1}\ell) \Big\rangle. \tag{3.35}$$

Le terme $\langle \tilde{\mu}, \xi\chi(\frac{x}{\varepsilon})(\ell^* a^{-1} + a^{-1}\ell) \rangle$ converge quand $\varepsilon \to 0$ par le théorème de convergence dominée vers $\langle \tilde{\mu} 1_{x=0}\xi, \ell^* a^{-1} + a^{-1}\ell \rangle$ qui est nul car $\tilde{\mu}|_{\mathcal{H}} = 0$ et $\xi|_{\Sigma^j} = 0$ pour $j \geq 2$. On a donc

$$\begin{cases} I = I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon + I_3^\varepsilon \\ I_1^\varepsilon = \Big\langle \tilde{\mu}, \xi\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big\{\frac{p}{\tau}, a^{-1}\Big\} \Big\rangle \\ I_2^\varepsilon = \Big\langle \tilde{\mu}, \frac{1}{\tau}\Big(-\frac{\partial p}{\partial x}\Big) a^{-1}\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \Big\rangle \\ I_3^\varepsilon = \Big\langle \tilde{\mu}, \xi a^{-1}\Big\{\frac{p}{\tau}, \chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big\} \Big\rangle. \end{cases} \tag{3.36}$$

Comme précédemment, on a $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_1^\varepsilon = 0$. Par convergence dominée, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_2^\varepsilon = -\Big\langle \tilde{\mu} 1_{x=0}, a^{-1}\frac{r_1}{\tau} \Big\rangle. \tag{3.37}$$

Pour calculer la limite du terme I_3^ε, on utilise

$$\xi a^{-1}\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \in C_+^{\infty,0}(p^{-1}(0), \mathrm{End}(\mathbb{C}^N)), \tag{3.38}$$

d'où

$$\Big\langle \tilde{\mu}, \Big\{\frac{p}{\tau}, \xi a^{-1}\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big\} + \xi\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)(\ell^* a^{-1} + a^{-1}\ell) \Big\rangle = 0. \tag{3.39}$$

On a

$$\Big\langle \tilde\mu, \Big\{\frac{p}{\tau}, \xi a^{-1}\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big\}\Big\rangle = \Big\langle \tilde\mu, \Big\{\frac{p}{\tau}, \xi a^{-1}\Big\}\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big\rangle - I_3^\varepsilon. \tag{3.40}$$

Or d'après (3.36)

$$I_3^\varepsilon = 2\Big\langle \tilde\mu, \frac{\xi^2}{\tau\varepsilon} a^{-1}\chi'\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big\rangle, \tag{3.41}$$

d'où

$$I_3^\varepsilon = \Big\langle \tilde\mu, \Big(\Big\{\frac{p}{\tau}, \xi a^{-1}\Big\} + (\xi\ell^* a^{-1} + \xi a^{-1}\ell)\Big)\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big\rangle. \tag{3.42}$$

Lemme 3.3. — *On a pour tout a^{-1}, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_3^\varepsilon(a^{-1}) = \langle T_0, \tau a^{-1}\rangle$ où T_0 est une mesure hermitienne positive, élément du dual de $C_0^0\big(\Sigma/\mathbb{R}_+^*, \mathrm{End}(\mathbb{C}^N)\big)$, et portée par $\mathcal{H} = \Sigma_1$.*

Preuve. On a d'après (3.42)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_3^\varepsilon(a^{-1}) = \big\langle \tilde\mu 1_{x>0}, \big\{\frac{p}{\tau}, \xi a^{-1}\big\} + \xi\ell^* a^{-1} + \xi a^{-1}\ell\big\rangle \tag{3.43}$$

et pour a^{-1} hermitienne positive, on a $I_3^\varepsilon(a^{-1}) \geq 0$, d'après (3.41). Comme une limite faible de mesures hermitiennes positives est une mesure hermitienne positive, on obtient l'existence de T_0. La mesure T_0 est portée par $\{x = 0\}$ d'après (3.41). Comme $\tau a^{-1} \mapsto \big\langle \tilde\mu 1_{x>0}, a^{-1}\big\{\frac{p}{\tau}, \xi\big\} + \xi\ell^* a^{-1} + \xi a^{-1}\ell\big\rangle$ est une mesure qui ne charge pas $x = 0$, on en déduit que

$$a^{-1} \longmapsto \Big\langle \tilde\mu 1_{x>0}, \Big\{\frac{p}{\tau}, a^{-1}\Big\}\xi\Big\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \big\langle S, a^{-1}\tau\big\rangle \tag{3.44}$$

est une mesure, et il reste à vérifier que S ne charge pas $\bigcup\limits_{j\geq 2}\Sigma^j = \{x = \xi = 0\}$; on remplace alors a^{-1} par $a^{-1}\theta\big(\frac{x}{\beta}\big)\psi\big(\frac{\xi}{\alpha\tau}\big)$ avec $\theta, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, paire, $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ et $\frac{\alpha^2}{\beta} \to 0$. On a

$$\Big\langle S, \tau a^{-1}\theta\Big(\frac{x}{\beta}\Big)\psi\Big(\frac{\xi}{\alpha\tau}\Big)\Big\rangle = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \tag{3.45}$$

$$S_1 = \Big\langle \tilde\mu 1_{x>0}, \Big\{\frac{p}{\tau}, a^{-1}\Big\}\theta\Big(\frac{x}{\beta}\Big)\psi\Big(\frac{\xi}{\alpha\tau}\Big)\xi\Big\rangle \longrightarrow 0, \tag{3.46}$$

$$S_2 = \Big\langle \tilde\mu 1_{x>0}, -\frac{2\xi^2}{\beta\tau}\theta'\Big(\frac{x}{\beta}\Big)\psi\Big(\frac{\xi}{\alpha\tau}\Big)a^{-1}\Big\rangle \longrightarrow 0, \tag{3.47}$$

par convergence dominée car

$$\Big|\frac{\xi^2}{\beta\tau}\psi\Big(\frac{\xi}{\alpha\tau}\Big)\theta'\Big(\frac{x}{\beta}\Big)a^{-1}\Big| \leq \mathrm{Cte}\,\frac{\alpha^2}{\beta} \longrightarrow 0. \tag{3.48}$$

$$S_3 = \Big\langle \tilde\mu 1_{x>0}, -\frac{\xi}{\tau^2\alpha}\psi'\Big(\frac{\xi}{\alpha\tau}\Big)\frac{\partial r}{\partial x}\theta\Big(\frac{x}{\beta}\Big)a^{-1}\Big\rangle \longrightarrow 0, \tag{3.49}$$

car $\frac{a^{-1}\xi}{\tau^2\alpha}\psi'\big(\frac{\xi}{\alpha\tau}\big)\frac{\partial r}{\partial x}\theta\big(\frac{x}{\beta}\big)1_{x>0}$ tend vers zéro partout et est borné et de même

$$S_4 = \Big\langle \tilde\mu 1_{x>0}, \frac{\xi^2}{\alpha}\psi'\Big(\frac{\xi}{\alpha\tau}\Big)\Big\{\frac{p}{\tau}, \frac{1}{\tau}\Big\}\theta\Big(\frac{x}{\beta}\Big)a^{-1}\Big\rangle \longrightarrow 0, \tag{3.50}$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

D'après (3.36) à (3.41) et le lemme 3.3, on a obtenu la

Proposition 3.4. — *Pour tout $a^j \in C_+^{\infty,j}(p^{-1}(0), \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ on a avec $b = a^0 + \xi a^{-1}$*

$$\Big\langle \tilde\mu, \Big\{\frac{p}{\tau}, b\Big\} + \ell^* b + b\ell\Big\rangle = \Big\langle -\frac{r_1}{\tau^2}\mathbf{1}_{x=0}\tilde\mu + T_0(\tilde\mu), \tau a^{-1}\Big\rangle. \tag{3.51}$$

La mesure $\frac{r_1}{\tau^2}\mathbf{1}_{x=0}\tilde\mu$ est portée par $\underset{j\geq 2}{\cup}\Sigma_j$. La mesure hermitienne positive $T_0(\tilde\mu)$, portée par $\Sigma_1 = \mathcal{H}$ étant définie par

$$\langle T_0(\tilde\mu), \tau a^{-1}\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\Big\langle \tilde\mu, \frac{\xi^2}{\tau\varepsilon}a^{-1}\chi'\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big\rangle, \tag{3.52}$$

où $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ est croissante, vérifie $\chi(x) = 0$ pour $x \leq 1$ et $\phi(x) = 1$ pour $x \geq 2$.

Soit à présent $j_0 \geq 2$ un entier, σ_0 un point de Σ^{j_0}. Nous allons vérifier l'assertion i) $\Rightarrow$ ii) du théorème 1 au voisinage de σ^0 par récurrence sur j_0 en supposant qu'elle est vraie au voisinage de tout point de Σ^j pour $j < j_0$. On notera (z, ζ) un système de coordonnées symplectiques homogènes près de σ_0 tel que $z(\sigma_0) = 0$ et $r_0 = \zeta_1\tau$ près de σ_0 (ce système existe d'après le théorème de la base symplectique incomplète de Darboux). On a donc $\zeta_1(\sigma_0) = 0$ et $p = -\xi^2 + r = -\xi^2 + \zeta_1\tau + xr_1(z,\zeta) + \mathcal{O}(x^2)$. Les fonctions z, ζ sont dérivables sur les rayons et vérifient

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial r}{\partial \zeta}(x(s), z(s), \zeta(s)), \quad \frac{d\zeta}{ds} = -\frac{\partial r}{\partial z}(x(s), z(s), \zeta(s)). \tag{3.53}$$

En particulier, près de σ_0, on a $\frac{dz_1}{ds} \sim \tau > 0$, donc $s \mapsto z_1(s)$ est strictement croissant sur les rayons et l'hypersurface $S = \{z_1 = 0\}$ est transverse au flot. Soit ω un petit voisinage ouvert homogène de σ_0 dans S et Ω l'ouvert de Σ,

$$\Omega_{\varepsilon_0} = \big\{\phi(s,\sigma); \sigma \in \omega, |s| < \varepsilon_0\big\}. \tag{3.54}$$

Quitte à diminuer ω, on peut supposer que $\Omega_{\varepsilon_0} \cap \Sigma_j = \emptyset, \forall j > j_0$. Soit $\omega_{j_0} = \big\{\sigma \in \omega, \exists s, |s| < \varepsilon_0, \phi(s,\sigma) \in \Sigma^{j_0}\big\}$ et soit F l'adhérence dans Ω_{ε_0} de $\big\{\phi(s,\sigma); |s| < \varepsilon_0,\ \sigma \in \omega_{j_0}\big\}$, et V l'ouvert de Ω_{ε_0}, $V = \Omega_{\varepsilon_0} \setminus F$. Il existe alors un ouvert ω_v de ω tel que qu'on ait

$$V = \big\{\phi(s,\sigma), \sigma \in \omega_v, |s| < \varepsilon_0\big\}. \tag{3.55}$$

Comme $\underset{j>j_0}{\cup} \Sigma^j$ est fermé, en choisissant ω et ε_0 assez petits, on a $V \cap \Sigma^j = \phi$ pour tout $j \geq j_0$. Comme on a "$\dot{\tilde{\mu}} = 0$" sur l'ouvert V, et $\tilde{\mu}|_{\mathcal{G}}^{2,+} = 0$, $\hat{\mu}|_V$ est invariante par hypothèse de récurrence et V étant un tube de rayon de la forme (3.55), il en résulte que la mesure hermitienne positive $\mathbf{1}_{V/\mathbb{R}_+^*} \hat{\mu}|_{(\Omega_{\varepsilon_0}/\mathbb{R}_+^*)}$ est invariante sur Ω_{ε_0}. Comme on a déjà vérifié l'assertion i) $\Rightarrow$ ii) du théorème 1, on a donc "$\mathbf{1}_{V/\mathbb{R}_+^*} \dot{\tilde{\mu}} = 0$" sur Ω_{ε_0}. D'après l'identité $\tilde{\mu}|_{\Omega_{\varepsilon_0}} = \mathbf{1}_V \tilde{\mu}|_{\Omega_{\varepsilon_0}} + \mathbf{1}_F \tilde{\mu}|_{\Omega_{\varepsilon_0}}$, on en déduit "$\mathbf{1}_F \dot{\tilde{\mu}}|_{\Omega_{\varepsilon_0}} = 0$" sur Ω_{ε_0}. Comme on a pour ω et ε_0 assez petits

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \{\phi(s,\sigma), |s| < \varepsilon_0, \sigma \in \tilde{\omega}\} \qquad \text{avec} \\ \tilde{\omega} = \{\sigma \in \omega, \exists s, |s| \leq \varepsilon_0, \phi(s,\sigma) \in \Sigma^{j_0}\}, \end{array} \right. \tag{3.56}$$

on peut donc supposer que près de σ_0, la mesure $\tilde{\mu}$ est portée par une réunion de rayons qui rencontrent Σ^{j_0}. On va à présent distinguer trois cas : $\sigma_0 \in \mathcal{G}^{2,+}$, $\sigma_0 \in \mathcal{G}^{2,-}$, $\sigma_0 \in \Sigma^{j_0}$, $j_0 \geq 3$.

3.3.1. 1er cas. — $\sigma_0 \in \mathcal{G}^{2,+}$. C'est le cas strictement diffractif. D'après l'hypothèse, on peut supposer $\tilde{\mu}$ portée par les rayons qui rencontrent $\mathcal{G}^{2,+}$, près de σ_0. D'après (3.51), $T_0(\tilde{\mu})1_{\mathcal{H}} \equiv 0$ et puisque $T_0(\tilde{\mu})$ est portée par $\mathcal{H}$ d'après la proposition 3.4, on a $T_0(\tilde{\mu}) \equiv 0$ près de σ_0, et comme par hypothèse on a $\tilde{\mu}|_{\mathcal{G}^{2,+}} = 0$ on déduit de (3.51)

$$\left\langle \tilde{\mu}, \left\{\frac{p}{\tau}, b\right\} + \ell^* b + b\ell \right\rangle = 0, \ \ \forall b \in C^{\infty,0}(p^{-1}(0), \mathrm{End}\,(\mathbb{C}^N)). \tag{3.57}$$

Comme les rayons issus de $\mathcal{G}^{2,+}$ sont les courbes intégrales de $H_{p/\tau}$ contenues dans $p = 0$ et restent dans $x \geq 0$, la mesure $\hat{\mu}$ est invariante d'après le lemme 3.1.

3.3.2. 2ème cas. — $\sigma_0 \in \mathcal{G}^{2,-}$. C'est le cas strictement glissant. D'après l'hypothèse, on peut supposer $\tilde{\mu}$ portée par les rayons qui rencontrent $\mathcal{G}^{2,-}$ près de σ_0. Or ces rayons sont tout entier contenus dans $\mathcal{G}^{2,-}$ près de σ_0, de sorte qu'on peut supposer $\tilde{\mu}$ à support dans $\mathcal{G}^{2,-}$. On a

$$\forall a \in C_+^{\infty,0}(p^{-1}(0), \mathrm{End}(\mathbb{C}^N)) \ \left\langle \tilde{\mu}, \left\{\frac{p}{\tau}, a\right\} + \ell^* a + a\ell \right\rangle = 0 \tag{3.58}$$

et

$$\left\{\frac{p}{\tau}, a\right\}\big|_{\mathcal{G}^{2,-}} = \frac{1}{\tau} H_{r_0}(a|_{x=0})|_{r_0=0} \text{ pour } a \in C_+^{\infty,0}(p^{-1}(0), \mathrm{End}(\mathbb{C}^N)) \tag{3.59}$$

(car $a|_{x=0}$ est paire en ξ donc $\frac{\partial}{\partial \xi} a|_{x=0,\xi=0} = 0$). De plus, l'application de $C_+^{\infty,0}(p^{-1}(0), \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ dans $C^{\infty,0}(\mathcal{G}^{2,-}, \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$, $a \mapsto a|_{x=0,\xi=0}$ est surjective. L'assertion i) $\Rightarrow$ ii) du théorème 1 est donc d'après (3.58) conséquence du lemme 3.1

3.3.3. 3ème cas. — $\sigma_0 \in \Sigma^{j_0}$, $j_0 \geq 3$. Posons $j_0 = k+3$, on a

(3.60)
$$\Sigma^{j_0} = \Big\{(z,\zeta); r_0(z,\zeta) = \tau\zeta_1 = 0; \partial_{z_1}^{\ell} r_1(z,\zeta) = 0, \forall \ell \leq k, \partial_{z_1}^{k+1} r_1(z,\zeta) \neq 0\Big\}.$$

Soit $g_k(z,\zeta) = \partial_{z_1}^k r_1(z,\zeta)$; on a donc

$$\Sigma^{j_0} \subset \big\{(z,\zeta); g_k(z,\zeta) = 0, \partial_{z_1} g_k \neq 0\big\} \overset{\text{def}}{=} G. \tag{3.61}$$

Par le théorème des fonctions implicites, G est localement près de σ_0 une hypersurface lisse de la forme $G = \{z_1 = \Theta(z',\zeta)\}$ avec $z = (z_1, z')$. Notons à nouveau F la réunion des rayons près de σ_0 qui rencontrent Σ^{j_0}. Sur chaque rayon, z_1 est une fonction strictement croissante de s et le flot est transverse à G d'après (3.53). On pose

$$\begin{cases} F^+ = \{(z,\zeta,x,\xi) \in F, \ \ z_1 > \Theta(z',\zeta)\} \\ F^- = \{(z,\zeta,x,\xi) \in F, \ \ z_1 < \Theta(z',\zeta)\} \\ F^0 = \{(z,\zeta,x,\xi) \in F, \ \ z_1 = \Theta(z',\zeta)\} \supset \Sigma^{j_0} \cap F. \end{cases} \tag{3.62}$$

On identifie G à son image dans Σ. On peut supposer $\tilde{\mu}$ à support dans $F = F^- \cup F^0 \cup F^+$. On pose $\tilde{\mu}^{\pm} = \tilde{\mu}|_{\pm z_1 > \Theta(\zeta',\zeta)}$. Par hypothèse de récurrence ($F^{\pm} \cap \Sigma^j = \phi$ pour $j \geq j_0$) les mesures $\hat{\mu}^{\pm}$ sont invariantes sur les ouverts $\pm z_1 > \Theta(z',\zeta)$. On peut les prolonger par transport en mesures invariantes à support dans F, qu'on notera $\tilde{\mu}^{\pm}$. On a donc près de σ_0

$$\tilde{\mu} = \mathbf{1}_{z_1 > \Theta}\tilde{\mu}^+ + \mu_0 + \mathbf{1}_{z_1 < \Theta}\tilde{\mu}^-, \tag{3.63}$$

où la mesure μ_0 est portée par F^0. L'équation de propagation (3.27) implique

(3.64)
$$\Big\langle \mu_0, \Big\{\frac{p}{\tau}, a\Big\} + \ell^* a + a\ell\Big\rangle = -\Big\langle \mathbf{1}_{z_1 > \Theta}\mu^+ + \mathbf{1}_{z_1 < \Theta}\mu^-, \Big\{\frac{p}{\tau}, a\Big\} + \ell^* a + a\ell\Big\rangle$$

pour tout $a \in C_+^{\infty,0}(U, \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ à support près de σ_0. Notons $Tr(\mu^{\pm})$ les mesures à support dans F_0, qui sont définies comme les traces sur F_0 des mesures $\tilde{\mu}^{\pm}$. On a alors

$$\Big\langle \mu_0, \Big\{\frac{p}{\tau}, a\Big\} + \ell^* a + a\ell\Big\rangle = -\big\langle tr(\mu^+) - tr(\mu^-), a\big\rangle. \tag{3.65}$$

Il en résulte

$$\Big|\Big\langle \mu_0, \Big\{\frac{p}{\tau}, a\Big\}\Big\rangle\Big| \leq \mathrm{Cte}\, ||a||_{L^\infty}. \tag{3.66}$$

Or on a $\big\{\frac{p}{\tau}, a\big\}|_{F_0} = \big\{\frac{r_0}{\tau}, a\big\}|_{F_0} = \frac{\partial a}{\partial z_1}|_{F_0}$. L'inégalité (3.66) implique donc que $\partial_{z_1}\mu_0$ est une mesure, mais comme μ_0 est portée par F^0 qui est transverse à ∂_{z_1}, on en déduit $\mu_0 \equiv 0$, et l'égalité (3.65) entraîne alors $tr(\mu^+) = tr(\mu^-)$. D'après l'identité (3.63), on a donc $\tilde{\mu} = \mu^+ = \mu^-$ ce qui prouve que $\hat{\mu}$ est invariante. □

3.4. La condition $\tilde{\mu}|_{\mathcal{G}^{2,+}} = 0$. — Soit $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de H^1 convergeant faiblement vers zéro, vérifiant l'équation $Pu^k = v^k$ (où v^k vérifie la relation (2.21) dans $x > 0$), et la condition aux limites (2.80) sur $x = 0$. Soient $\mu, \tilde{\mu}, \hat{\mu}$ les mesures associées à la suite (u^k). D'après (3.11), on a "$\dot{\tilde{\mu}} = 0$", et d'après le théorème 1, l'invariance de la mesure $\hat{\mu}$ va être conséquence de la propriété $\tilde{\mu}|_{\mathcal{G}^{2,+}} = 0$.

LEMME 3.5. — *On a $\tilde{\mu}|_{\mathcal{G}^{2,+}} = 0$ si et seulement si pour tout $\underline{\rho} \in \mathcal{G}^{2,+}$ tout $a^j \in C_+^{\infty,j}(p^{-1}(0), \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$ à support près de $\underline{\rho}$ avec a^{-1} hermitienne positive, et en posant $b = a^0 + \xi a^{-1}$, la mesure $\tilde{\mu}$ vérifie l'inégalité*

$$\Big\langle \tilde{\mu}, \Big\{\frac{p}{\tau}, b\Big\} + \ell^* b + b\ell \Big\rangle \geq 0. \tag{3.67}$$

PREUVE. En effet, $\mathcal{G}^{2,+}$ est défini par l'inéquation $r_1 > 0$. Le lemme 3.5 est donc conséquence de la formule (3.51) de la proposition 3.4, puisque la mesure positive $T_0(\tilde{\mu})$, portée par $\Sigma_1 = \mathcal{H}$, ne charge pas $\mathcal{G}^{2,+}$. □

On remarquera que (3.67) n'est pas une conséquence de l'équation "$\dot{\tilde{\mu}} = 0$" puisque on teste ici contre une classe plus grande de fonctions.

Soit alors $q \in C_0^\infty(p^{-1}(0), \mathrm{End}(\mathbb{C}^N))$, homogène de degré 1, à support près de $(x = 0, \xi = 0, \rho_0)$. En écrivant $q = (q_0\xi + q_1)|_{p^{-1}(0)}$ comme dans (2.99), on a d'après (2.100) et (2.101) et le lemme 2.9, avec $\lambda^2 = |\eta|^2(1 + \theta^2)$, $\theta = \frac{\xi}{|\eta|}$

$$\Big\langle \mu, \frac{\{p, q\} + i(m^* q - qm)}{\lambda^2} \Big\rangle = \big\langle \nu, q_0 + b^* q_0 r b + q_1 b + b^* q_1 \big\rangle. \tag{3.68}$$

Comme ν est une mesure hermitienne positive (voir (2.87)), la relation (3.67) est conséquence, d'après (3.8), de l'implication : si a^0, a^{-1}, q_0, q_1 sont liés sur $p^{-1}(0)$ par la relation

$$J_\xi^{*1/2}(q_0\xi + q_1)J_\xi^{1/2} = \lambda(a^0 + \xi a^{-1}), \tag{3.69}$$

alors $a^{-1} \geq 0$ implique $(q_0 + b^* q_0 r b + q_1 b + b^* q_1)|_{x=0} \geq 0$. Comme λ est une fonction paire de ξ, il s'agit donc de calculer la partie impaire en ξ de la fonction matricielle sur $p^{-1}(0) \cap \{x = 0\}$

$$\xi \longmapsto J_\xi^{*1/2}(q_0\xi + q_1)J_\xi^{1/2}. \tag{3.70}$$

Soit donc

$$M = \frac{1}{\xi}\Big(J_\xi^{*1/2}(q_0\xi + q_1)J_\xi^{1/2} - J_{-\xi}^{*1/2}(-q_0\xi + q_1)J_{-\xi}^{1/2}\Big). \tag{3.71}$$

On doit vérifier $M \geq 0 \Rightarrow q_0 + b^* q_0 r b + q_1 b + b^* q_1 \geq 0$ sur $\{x = 0\} \cap p^{-1}(0)$. On a $M \geq 0 \Leftrightarrow N \geq 0$ avec

$$N = \frac{1}{\xi}\Big(J_\xi^*(q_0\xi + q_1)J_\xi + (q_0\xi - q_1)\Big) \tag{3.72}$$

et d'après (2.93), $N \geq 0$ équivaut à $L \geq 0$ avec

$$L = \frac{1}{\xi}(L_\xi - L_{-\xi}); \quad L_\xi = (\mathrm{Id} - \xi b^*)^{-1}(q_0\xi + q_1)(\mathrm{Id} - \xi b)^{-1}. \tag{3.73}$$

Soit $S_\xi = (\mathrm{Id} - \xi b)(\mathrm{Id} + \xi b)$; on a $S_\xi = S_{-\xi}$ et $L \geq 0$ équivaut à $\tilde{L} \geq 0$ avec $\tilde{L} = S_\xi^* L S_\xi$. On a

$$\tilde{L} = \frac{1}{\xi}(\tilde{L}_\xi - \tilde{L}_{-\xi}); \quad \tilde{L}_\xi = S_\xi^* L_\xi S_\xi \tag{3.74}$$

et sur $p^{-1}(0) = \{\xi^2 = r\}$

$$\begin{cases} \tilde{L}_\xi = (1 + \xi b^*)(q_0\xi + q_1)(1 + \xi b) \\ \quad\ = \big[q_1 + r(b^* q_0 + q_0 b + b^* q_1 b)\big] + \xi\big[q_0 + b^* q_0 r b + q_1 b + b^* q_1\big], \end{cases} \tag{3.75}$$

d'où sur $p^{-1}(0) \cap \{x = 0\}$,

$$\tilde{L} \geq 0 \iff q_0 + b^* q_0 r_0 b + q_1 b + b^* q_1 \geq 0, \tag{3.76}$$

ce qui achève la vérification de l'invariance de la mesure $\hat{\mu}$.

4. Le système de Lamé, notations

4.1. Ondes transversale et longitudinale. — On considère le système de Lamé dans un domaine régulier (C^∞), $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et borné :

$$\begin{cases} \big(\partial_t^2 - \mu\Delta - (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div}\big) u &= \big(\partial_t^2 + A\big) u = 0, \\ u\,|_{\partial\Omega} &= 0, \\ u\,|_{t=0} = u_0 \in H_0^1(\Omega)^3 & \partial_t u\,|_{t=0} = u_1 \in L^2(\Omega)^3, \end{cases} \tag{4.1}$$

où λ, μ sont les coefficients de Lamé qui vérifient $\mu > 0$ et $\lambda + 2\mu > 0$. On supposera $\mu \neq \lambda + 2\mu$. On a une énergie naturelle qui est un invariant de l'évolution :

$$E(u)(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\partial_t u|^2 + \mu|\nabla u|^2 + (\lambda + \mu)\,|\operatorname{div} u|^2. \tag{4.2}$$

On peut alors décomposer la solution u en somme de deux termes u_L et u_T de rotationnel et de divergence nuls respectivement :

LEMME 4.1. — *Il existe* $(\varphi, \psi) \in H^2_{loc}\big(\mathbb{R}_t \times \overline{\Omega}\big)^{1+3}$ *vérifiant*

1. $u = \nabla\varphi + \operatorname{rot}\psi = u_L + u_T$, $u_L = \nabla\varphi$, $u_T = \operatorname{rot}\psi$,
2. $(\partial_t^2 - c_L^2\Delta)\varphi = 0$, $(\partial_t^2 - c_T^2\Delta)\psi = 0$,
3. $\operatorname{div}\psi = 0$, $\operatorname{rot} u_L = 0$, $\operatorname{div} u_T = 0$.

4. *il existe $C > 0$ tel que pour tout intervalle $I \subset\subset \mathbb{R}$*

$$\|\varphi\|^2_{H^2(I\times\Omega)} \leq C|I|E\,(u)\,, \tag{4.3}$$

$$\|\psi\|^2_{H^2(I\times\Omega)} \leq C|I|E\,(u)\,, \tag{4.4}$$

en particulier si on note

$$E_{L,T}\,(u_{L,T}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\partial_t u_{L,T}|^2 + c^2_{L,T}|\nabla u_{L,T}|^2, \tag{4.5}$$

avec $c_L^2 = \lambda + 2\mu$, $c_T^2 = \mu$, on obtient

$$E_{L,T}\,(u_{L,T}) \leq CE\,(u)\,. \tag{4.6}$$

Preuve. Pour démontrer ce lemme, on décompose u sur une base de $H^1_0\,(\Omega)^3$ formée de vecteurs propres de l'opérateur $A_D = -\mu\Delta - (\lambda+\mu)\,\nabla\operatorname{div}$ avec conditions au bord de Dirichlet, $(e_\nu, \lambda_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^*}$:

$$u\,(t,x) = \sum_{\nu\in\mathbf{Z}^*} e^{\operatorname{signe}(\nu)it\sqrt{\lambda_{|\nu|}}}u_\nu e_{|\nu|} \tag{4.7}$$

et on note

$$U = A_D^{-1}u = \sum_{\nu\in\mathbf{Z}^*} e^{\operatorname{signe}(\nu)it\sqrt{\lambda_{|\nu|}}}\frac{u_\nu}{\lambda_{|\nu|}}e_{|\nu|}. \tag{4.8}$$

La fonction U vérifie

$$\left(\partial_t^2 + A\right)U = 0 \tag{4.9}$$

et on a $U \in C^k\left(\mathbb{R}_t; H^{3-k}\,(\Omega)^3\right), \forall k\in\mathbb{N}$. On note

$$\varphi = -c_L^2\operatorname{div}U \in C^k\left(\mathbb{R}_t; H^{2-k}\,(\Omega)\right), \forall k\in\mathbb{N}, \tag{4.10}$$

$$\psi = -c_T^2\operatorname{rot}U \in C^k\left(\mathbb{R}_t; H^{2-k}\,(\Omega)^3\right), \forall k\in\mathbb{N}. \tag{4.11}$$

Compte tenu de (4.9), les fonctions φ et ψ vérifient respectivement $(\partial_t^2 - c_L^2\Delta)\varphi = P_L\varphi = 0$ et $(\partial_t^2 - c_T^2\Delta)\psi = P_T\psi = 0$, $\nabla\varphi + \operatorname{rot}\psi = -c_L^2\nabla\operatorname{div}U - c_T^2\operatorname{rot}\operatorname{rot}U = AU = -\partial_t^2 U = u$. Enfin la troisième condition du lemme est triviale et la dernière est conséquence de la construction. □

4.2. Géométrie. — Soit $M = \mathbb{R}_t\times\Omega$. On note

$$\operatorname{Car}\mathcal{L} \subset T^*\mathbb{R}^{d+1}\,|_{\overline{M}} = \{(t,\tau,z,\zeta)\,;(x,t)\in\overline{M}, \tau^2 = c_L^2|\zeta|^2\} \tag{4.12}$$

et

$$\operatorname{Car}\mathcal{T} \subset T^*\mathbb{R}^{d+1}\,|_{\overline{M}} = \{(t,\tau,z,\zeta)\,;(x,t)\in\overline{M}, \tau^2 = c_T^2|\zeta 2\}, \tag{4.13}$$

les deux variétés caractéristiques des deux opérateurs des ondes. On note aussi $Z_{\mathcal{L};\mathcal{T}} = j\left(\operatorname{Car}\mathcal{L};\mathcal{T}\right) \subset {}^{b}T^{*}M$ les projections de ces deux variétés caractéristiques. Dans un système de coordonnées géodésiques où $\Delta = \partial_x^2 + R\left(x,y,D_y\right) + Q_1\left(x,y,D_y\right) + Q_0\left(x,y,D_y\right)\partial_x$ où Q_i sont d'ordre i, si on note $r_0 = r\mid_{x=0}$, on a

$$Z_{\mathcal{L},\mathcal{T}} \cap \{x=0\} = \{(t,y,\tau,\eta)\,;\nu_{L,T}^2\tau^2 + r_0 \geq 0\}, \tag{4.14}$$

avec $\nu_{L,T} = c_{L,T}^{-1}$, et on a les décompositions

$$T^*\partial M = \mathcal{H}_L \cup \mathcal{G}_L \cup \mathcal{E}_L = \mathcal{H}_T \cup \mathcal{G}_T \cup \mathcal{E}_T, \tag{4.15}$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{L,T} = \{(t,y,\tau,\eta)\,;\nu_{L,T}^2\tau^2 + r_0 > 0\}, \\ \mathcal{G}_{L,T} = \{(t,y,\tau,\eta)\,;\nu_{L,T}^2\tau^2 + r_0 = 0\}, \\ \mathcal{E}_{L,T} = \{(t,y,\tau,\eta)\,;\nu_{L,T}^2\tau^2 + r_0 < 0\}. \end{cases} \tag{4.16}$$

4.3. Mesures. — On considère $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'énergie bornée de solutions du système de Lamé. On suppose que la suite (u_k) converge faiblement vers 0. Les suites $(u_k)_{L,T}$ qui lui sont associées sont des suites de solutions d'équations d'ondes $\left(\nu_{L,T}^2\partial_t^2 - \Delta\right)u_{k,L,T} = 0$ d'énergies bornées et convergent également faiblement vers 0. Nous allons leur associer deux mesures, $\mu_{L,T}$ éléments du dual topologique de $C^0\left({}^{b}S^*M;\operatorname{End}\left(\mathbb{C}^3\right)\right)$.

4.3.1. A l'intérieur. — Quitte à extraire une sous suite, les procédures standard (voir P. Gérard [**Gér91**] ou L. Tartar [**Tar90**]) montrent qu'il existe deux mesures $\mu_{L,T}$ éléments du dual de l'espace des fonctions continues sur S^*M à valeurs endomorphismes, telles que pour tout opérateur pseudodifférentiel Q à valeurs endomorphismes de $\mathbb{C}^3$, de degré 0 et à support compact dans M, on a

$$\langle \mu_{L,T}, \sigma(Q)\rangle = \lim_{k\to+\infty}\left(Qu_{k,L,T}, u_{k,L,T}\right)_{H^1_{L,T}}, \tag{4.17}$$

où on a noté

$$\begin{aligned} \left(Qu_L, u_L\right)_{H^1_L} &= \int_M \left(\partial_t Qu_{k,L}, \partial_t u_{k,L}\right) + \mu\left(\nabla Qu_{k,L}, \nabla u_{k,L}\right) \\ &\qquad + (\lambda+\mu)\left(\operatorname{div} Qu_{k,L}, \operatorname{div} u_{k,L}\right), \\ &= \int_M \left(\partial_t Qu_{k,L}, \partial_t u_{k,L}\right) + (\lambda+2\mu)\left(\nabla Qu_{k,L}, \nabla u_{k,L}\right) \end{aligned} \tag{4.18}$$

et

$$\left(Qu_T, u_T\right)_{H^1_T} = \int_M \left(\partial_t Qu_{k,T}, \partial_t u_{k,T}\right) + \mu\left(\nabla Qu_{k,T}, \nabla u_{k,T}\right). \tag{4.19}$$

Les résultats standard de régularité elliptique montrent aussi que ces deux mesures sont portées par les variétés caractéristiques respectives, Car$\mathcal{L}$ et Car$\mathcal{T}$.

4.3.2. Près d'un point du bord. — On se place dans un système de coordonnées géodésiques près d'un point $(x_0 = 0, y_0)$. Dans ce système M à la forme $X =]0,1[_x \times Y$, $Y = B(0,1)_y$, le bord de M a pour équation $x = 0$, le laplacien Δ a la forme suivante :

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_x \sqrt{\det g} \partial_x + P(x, y, D_y), \tag{4.20}$$

où x désigne la variable normale au bord, y la variable tangentielle, $P(x, y, D_y)$ est un opérateur différentiel tangentiel et la métrique g est donnée par

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M(x,y) \end{pmatrix}, \qquad g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha(x,y) \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

où ${}^t\eta\alpha\ |_{x=0}\ \eta = \|\eta\|^2$ est la norme naturelle sur $T^*\partial\Omega$, duale de la norme sur $T\Omega$ induite par la métrique sur Ω, et ${}^t\eta\partial_x\alpha\ |_{x=0}\ \eta = -2\kappa(y,\eta)\,\|\eta\|^2$. La convention de signe que nous avons choisi est telle que $\kappa > 0$ sur $\mathcal{G}^{2,+}$.

On considère les fonctions $\widetilde{u}_{L,T} = \det g^{1/4} u_{L,T}$ dans ce système de coordonnées et on note

$$\widetilde{P}_{L,T} = \det g^{1/4} P_{L,T} \det g^{-1/4} \quad \text{où } P_{L,T} = \Delta - \nu_{L,T}^2 \partial_t^2. \tag{4.22}$$

Les opérateurs $\widetilde{P}_{L,T}$ sont autoadjoints pour la métrique $dx|dy|dt$ et de la forme $\partial_x^2 + \widetilde{R}_{L,T}(x, y, D_y, D_t)$, où les opérateurs $\widetilde{R}_{L,T}$ sont des opérateurs différentiels de degrés 2, tangentiels et autoadjoints pour la mesure $dx|dy|dt$. Le symbole principal de l'opérateur $\widetilde{R}_{L,T}$, $r_{L,T}(x, y, \eta)$, vaut

$$r_{L,T}(x, y, \eta, \tau) = \nu_{L,T}^2 \tau^2 - {}^t\eta\alpha(x,y)\,\eta, \tag{4.23}$$

ce qui implique

$$r_{0,L,T} = r\ |_{x=0} = \nu_{L,T}^2 \tau^2 - \|\eta\|^2 \tag{4.24}$$

et

$$r_{1,L,T} = \partial_x r\ |_{x=0} = 2\|\eta\|^2 \kappa(y,\eta). \tag{4.25}$$

On peut d'après la remarque 2.1, quitte à extraire une sous suite, associer des mesures $\breve{\mu}_{L,T}$ et $\breve{\mu}_{\partial,L,T}^{1/2,0,-1/2}$ aux suites $\widetilde{u}_{k,L,T}$ et $(\widetilde{u}_{k,L,T}\ |_{x=0}, \partial_x \widetilde{u}_{k,L,T}\ |_{x=0})$ comme à la section 2.

LEMME 4.2. — *Les mesures $\breve{\mu}_{\partial,L,T}^{1/2,0,-1/2}$ sont nulles.*

!Preuve Preuve. On suppose par exemple $c_L > c_T$ (l'autre cas se traitant de la même manière). On a alors

$$T^*Y = \mathcal{H}_T \cup \mathcal{G}_T \cup \mathcal{E}_T; \qquad \mathcal{H}_L \cup \mathcal{G}_L \subset \mathcal{H}_T. \tag{4.26}$$

On remarque d'abord que la condition aux limites

$$u_{k,L}\mid_{x=0} + u_{k,T}\mid_{x=0} = 0 \tag{4.27}$$

implique $\breve{\mu}^{1/2}_{\partial,L} = \breve{\mu}^{1/2}_{\partial,T}$. D'après le lemme 2.6, les mesures $\breve{\mu}^{1/2,0,-1/2}_{\partial,T}$ sont portées par $\mathcal{E}_T$. Mais près d'un point $\rho_0 \in \mathcal{E}_T$ (qui est donc elliptique pour l'opérateur $\partial_t^2 + A$), d'après le théorème de régularité elliptique pour le problème de Dirichlet, les fonctions u_k sont uniformément bornées dans H^s au voisinage de ρ_0, pour tout $s \in \mathbb{R}$. D'après la construction de $u_{k,T}$ et $u_{k,L}$ à partir de u_k, il en est de même des suites $u_{k,T}$ et $u_{k,L}$, ce qui montre que les mesures $\breve{\mu}^{1/2,0,-1/2}_{\partial,L,T}$ sont toutes nulles au voisinage de ρ_0. On obtient ainsi que les mesures $\breve{\mu}^{1/2,0,-1/2}_{\partial,T}$ sont nulles partout. Donc la mesure $\breve{\mu}^{1/2}_{\partial,L} = \breve{\mu}^{1/2}_{\partial,T}$ est aussi nulle, puis en utilisant les relations (2.58) on obtient que les mesures $\breve{\mu}^{0,-1/2}_{\partial,L}$sont aussi nulles. □

Soient $\zeta_{L,T}$ les fonctions sur $S\widehat{Z}$ définies $\breve{\mu}_{L,T}$ presque partout par

$$\begin{cases} \zeta\left(x,y,\xi,\eta,\tau\right) = \frac{\nu^2_{L,T}\tau^2 + \|\xi,\eta\|^2}{\tau^2+|\xi,\eta|^2} & \text{si } x>0, \\ \zeta\left(x,y,\xi,\eta,\tau\right) = \frac{\nu^2_{L,T}\tau^2 + \|0,\eta\|^2}{\tau^2+|0,\eta|^2} & \text{si } x=0, \end{cases} \tag{4.28}$$

où $\|\xi,\eta\|^2 = \xi^2 + {}^t\eta A\left(x,y\right)\eta$, $|\xi,\eta|^2 = \xi^2 + {}^t\eta\eta$. On définit alors la mesure $\mu_{L,T}$ comme étant la mesure qui, dans ce système de coordonnées vaut

$$\mu_{L,T} = \zeta\left(x,y,\xi,\eta,\tau\right)\breve{\mu}_{L,T}. \tag{4.29}$$

Le lemme suivant montre que cette multiplication par ζ permet de retrouver l'énergie naturelle.

Lemme 4.3. — *Pour tout opérateur pseudodifférentiel $\widetilde{Q}$ sur X, d'ordre 0, tangentiel près de $\{x=0\}$ et à support compact, si on note Q l'opérateur pseudodifférentiel sur M qui lui correspond, on a, dL désignant la mesure de Lebesgue sur Ω,*

$$\begin{aligned} &\langle \mu_{L,T}, \kappa\left(\sigma\left(\widetilde{Q}\right)\right)\rangle \\ &\quad = \lim_{k\to+\infty}\int_M \nu^2_{L,T}\left(\partial_t Q u_{k,L,T}, \partial_t u_{k,L,T}\right) + \left(\nabla Q u_{k,L,T}, \nabla u_{k,L,T}\right) dt dL. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Preuve. En effet (en notant $\frac{d}{dn}$ le champ normal extérieur à Ω),

$$\begin{aligned} I_k &= \int_M \nu^2_{L,T}\left(\partial_t Q u_{k,L,T}, \partial_t u_{k,L,T}\right) + \left(\nabla Q u_{k,L,T}, \nabla u_{k,L,T}\right) dt dL \\ &= -\int_M \left(\left(\nu^2_{L,T}\partial_t^2 + \Delta\right) Q u_{k,L,T}, u_{k,L,T}\right) dt dL + \int_{\partial M} \frac{d}{dn} Q u_k \overline{u_k} d\sigma. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Puisque les mesures $\check{\mu}_{\partial,L,T}^{1/2,0,-1/2}$ sont toutes nulles, le terme de bord tend vers 0 quand $k \to +\infty$ et

$$\begin{aligned} I_k &= -\int_M \left(\left(\nu_{L,T}^2 \partial_t^2 + \Delta\right) Q u_{k,L,T}, u_{k,L,T}\right) dt dL + o(1), \\ &= -\int_X \left(\left(\nu_{L,T}^2 \partial_t^2 + \Delta\right) \widetilde{Q} \det g^{-1/4} \widetilde{u}_{k,L,T}, \det g^{-1/4} \widetilde{u}_{k,L,T}\right) \\ &\qquad\qquad \sqrt{|\det g|}^{1/2} dt dx |dy| + o(1), \end{aligned}$$

qui converge, d'après les lemmes 2.7 et 4.2 vers

$$\langle \check{\mu}_{L,T}, \kappa \left(\zeta \sigma \left(\widetilde{Q}\right)\right) \rangle, \tag{4.32}$$

puisqu'on a dans le système de coordonnées géodésiques normales

$$-\sigma\left(\nu_{L,T}^2 \partial_t^2 + \Delta\right) = \nu_{L,T}^2 \tau^2 + \|\xi, \eta\|^2;\ \lambda^2 = \tau^2 + |\xi, \eta|^2. \tag{4.33}$$

□

En utilisant une partition de l'unité, on peut ainsi définir deux mesures $\mu_{L,T}$ éléments du dual de l'espace des fonctions continues sur $S\widehat{Z}_{\mathcal{L},\mathcal{T}}$ à valeurs endomorphismes de $\mathbb{C}^3$, vérifiant pour tout Q, opérateur pseudodifférentiel sur M d'ordre 0, tangentiel (ou plus précisement somme d'opérateurs qui sont dans des systèmes de coordonnées géodésiques tangentiels),

$$\begin{aligned} &\langle \mu_{L,T}, \kappa \left(\sigma \left(\widetilde{Q}\right)\right) \rangle \\ &\quad = \lim_{k \to +\infty} \int_M \nu_{L,T}^2 \left(\partial_t Q u_{k,L,T}, \partial_t u_{k,L,T}\right) + \left(\nabla Q u_{k,L,T}, \nabla u_{k,L,T}\right) dt dL. \end{aligned} \tag{4.34}$$

On identifiera par la suite ces deux mesures aux mesures correspondantes définies sur le dual de l'espace des fonctions continues sur ${}^bS^*M$ (${}^bT^*M$ quotienté par l'action naturelle de $\mathbb{R}^+$), à valeurs endomorphismes de $\mathbb{C}^3$.On remarquera que d'après (4.34), u est une section du fibré tangent à Ω et la fibre $\mathbb{C}^3$ est l'espace tangent en chaque point à Ω. Enfin, d'après les lemmes 2.7, 4.2 et 4.3, si Q est un opérateur pseudo-différentiel sur M, d'ordre 2, qui près du bord est de la forme $Q = \sum_{j=0}^{2} Q_{2-j} \partial_x^j$, avec Q_i tangentiels de degrés i, en remarquant que $Q u_{k,L,T} = (\sum_{j=0}^{1} Q_{2-j} \partial_x^j - Q_0 \tilde{R}_{L,T}) u_{k,L,T}$, on obtient

$$\lim_{k \to +\infty} \int_M \left(Q u_{k,L,T}, u_{k,L,T}\right) dt dL = \langle \mu_{L,T}, \frac{q}{\nu_{L,T}^2 \tau^2 + \|\xi, \eta\|^2} \rangle, \tag{4.35}$$

où q est le symbole principal de Q.

Proposition 4.4. — *Les mesures μ_L et μ_T sont mutuellement singulières (au sens de la théorie de la mesure).*

Preuve. A l'intérieur ce résultat est immédiat puisque les mesures μ_L et μ_T sont portées par $j\,(\mathrm{Car}\mathcal{L})$ et $j\,(\mathrm{Car}\mathcal{T})$ respectivement (et ces deux ensembles sont disjoints). Il suffit donc de montrer la proposition en remplaçant $\mu_{L,T}$ par $\mu_{L,T}1_{\partial M}$. Près d'un point du bord, ρ_0, on suppose par exemple $c_L > c_T$. Si $\rho_0 \in \mathcal{H}_T$, alors la proposition est vérifiée près de ρ_0 puisque $\mu_T 1_{\mathcal{H}_T} = 0$ d'après le lemme 2.6. Si $\rho_0 \in \mathcal{E}_T$ alors ρ_0 est elliptique pour l'opérateur $\partial_t^2 + A$ et les résultats standard de régularité elliptique pour le problème de Dirichlet montrent que u_k (et donc aussi $u_{k,L}$ et $u_{k,T}$) est uniformément bornée dans H^s pour tout s, donc μ_L et μ_T sont nulles près de ρ_0. Enfin, si $\rho_0 \in \mathcal{G}_T \subset \mathcal{E}_L$, comme $\mu_{\partial,L}^{1/2} = 0$, la régularité elliptique pour l'opérateur $\nu_L^2\partial_t^2 - \Delta$ avec conditions de Dirichlet montre que, près de ρ_0, $u_{k,L}$ converge fortement vers 0 dans H^1 donc $\mu_L = 0$. □

4.3.3. Polarisation. — Nous n'étudions ici que la polarisation de la mesure μ_T puisque c'est celle dont nous nous servirons ultérieurement, néanmoins il est clair qu'un résultat analogue est vrai pour la mesure μ_L. Soit $\Pi\,(x,\xi)$ l'opérateur égal à l'intérieur ou en un point du bord $\rho_0 \in \mathcal{G}_T$ au projecteur orthogonal sur le plan orthogonal à ξ. Cet opérateur est défini μ_T presque partout et vaut $\Pi = \mathrm{Id} - \Pi^{\perp}$ avec

$$\forall X \in \mathbb{C}^3, \quad \Pi^{\perp}\,(x,\varrho)\,(X) = \frac{\langle \varrho, X\rangle}{\|\varrho\|^2} g^{-1}\varrho. \tag{4.36}$$

Lemme 4.5. — *Pour tout* $q \in C^0\left({}^bS^*M; \mathrm{End}\left(\mathbb{C}^3\right)\right)$

$$\langle \mu_T, q\rangle = \langle \mu_T, \Pi q\rangle = \langle \mu_T, q\Pi\rangle = \langle \mu_T, \Pi q \Pi\rangle. \tag{4.37}$$

Preuve. Soit B un opérateur pseudo-différentiel de degré 0, tangentiel près du bord, de symbole principal b. On peut appliquer (4.35) à $Q = B\nabla\,\mathrm{div}$, d'où en utilisant $\mathrm{div}\, u_T = 0$,

$$\langle \mu_T, \frac{\|\xi,\eta\|^2}{\nu_T^2\tau^2 + \|\xi,\eta\|^2} b\Pi^{\perp}\rangle = 0, \tag{4.38}$$

ce qui implique la première relation de (4.37). La deuxième s'obtient à partir de la première puisque la mesure μ_T est hermitienne et la troisième est conséquence des deux premières. □

5. Le théorème de propagation dans le cas où $\mu_L = 0$

On suppose ici que $\mathrm{div}\, u_k = \mathrm{div}\, u_{k,L}$ converge vers 0 dans $L^2\,(]0,T[\times\Omega)$ quand $t \to +\infty$. Nous allons démontrer qu'alors la mesure μ_T est invariante par un certain flot qu'on explicitera. On commence par montrer que μ_L est nulle. On a $-\,\mathrm{div}\, u_{k,L} = c_L^2\,\mathrm{div}\,\nabla\,\mathrm{div}\, U_k = c_L^2\Delta\,\mathrm{div}\, U_k$. En dehors de la variété caractéristique de l'opérateur $\partial_t^2 + A$, (U_k) converge fortement vers 0 dans tous les espaces H^s et près de la variété caractéristique, l'opérateur ∂_t^2 est elliptique, tangentiel et on a $\partial_t^2 \operatorname{div} U_k = c_L^2 \Delta \operatorname{div} U_k = -\operatorname{div} u_{k,L} \to 0$ dans L^2. D'après la régularité elliptique, $\operatorname{div} U_k \to 0$ dans H^2 et donc $u_{k,L} = -c_L^2 \nabla \operatorname{div} U_k \to 0$ dans H^1, soit $\mu_L = 0$.

On rappelle que le support de μ_T est inclus dans la projection de la variété caractéristique $Z_{\mathcal{T}}$. Puisque les fonctions $u_{k,T}$ sont solutions de l'équation $(\partial_t^2 - c_T^2 \Delta) u_{k,T} = 0$, il est standard que la mesure μ_T est près de tout point intérieur $\rho_0 \in Z_{\mathcal{T}} \cap T^*M$ invariante par le flot du champ Hamiltonien homogène $H_{p_T/\tau}$.

5.1. Près d'un point $\rho_0 \in \mathcal{H}_L$. — Près d'un point hyperbolique pour l'onde longitudinale les résultats standard de régularité pour les solutions de l'équation des ondes montrent, puisque $u_{k,L}$ tend vers 0 dans $H^1_{\varrho_0}$,

$$\|u_{k,L}\,|_{\partial M}\,\|_{H^1_{\rho_0}} \leq C \|u_{k,L}\|_{H^1_{\rho_0}} \tag{5.1}$$

et

$$\|\partial_n u_{k,L}\,|_{\partial M}\,\|_{L^2_{\rho_0}} \leq C \|u_{k,L}\|_{H^1_{\rho_0}}. \tag{5.2}$$

Les deux traces de $u_{k,L}$ convergent donc fortement vers 0 dans H^1 et L^2 respectivement près de ρ_0. Près de ρ_0, $u_{k,T}$ vérifie donc des conditions au bord de Dirichlet :

$$\left(\partial_t^2 - c_T^2 \Delta\right) u_{k,T} = 0, \tag{5.3}$$

$$u_{k,T}\,|_{\partial M} = -u_{k,L}\,|_{\partial M} = o\,(1)_{H^1_{\varrho_0}}\,. \tag{5.4}$$

Le théorème de propagation de la mesure de la section 3 montre alors que μ_T est invariante par le flot de Melrose et Sjöstrand (ici la trivialisation du fibré $\Sigma/\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}^3$ est celle qui est donnée par la relation (3.16), pour $J_\xi = \mathrm{Id}$, avec $M\,(s, \rho) = Id$). On note $\xi_\pm$ les deux points (éventuellement confondus) de la variété caractéristique qui se projettent sur ρ et $\Pi_\pm$ le projecteur orthogonal sur le plan orthogonal à $\xi_\pm$. On notera encore $\Pi_\pm$ les transportés par le flot de ces projecteurs et $\Pi_{+,-}$ le projecteur orthogonal sur l'espace orthogonal à l'espace engendré par ξ_+ et ξ_-. D'après le théorème de propagation près de ρ_0 et le lemme 4.5, près de ρ_0, on a

$$\mu_T = \Pi_+ \mu_T \Pi_+ = \Pi_- \mu_T \Pi_- = \Pi_{+,-} \mu_T \Pi_{+,-}. \tag{5.5}$$

On remarquera que sauf dans le cas d'un rayon normal ou tangent au bord, cette information est non triviale puisqu'alors $\Pi_{+,-}$ est le projecteur orthogonal sur la droite normale à la fois à la direction incidente et à la normale au bord en ρ_0.

5.2. Près d'un point $\rho_0 \in \mathcal{E}_L$. — Ce cas est non trivial uniquement dans le cas où $c_L > c_T$. En effet dans le cas contraire, $Z_{\mathcal{T}} \cap \mathcal{E}_L = \emptyset$ et la mesure μ_T est nulle près de ρ_0. Pour l'étude on se place dans un système de coordonnées géodésiques près de ρ_0. On note $\chi : M \to X$ le changement de variables correspondant. Soit $v_{k,T}$ le champs de vecteurs sur X, $v_{k,T} = T\chi\,(u_{k,T})$. On calcule le système de conditions au bord vérifié par les fonctions $v_{k,T}$ (on en déduira simplement celui vérifié par $\widetilde{u}_{k,T}$). Les fonctions φ_k associées à (u_k) par le lemme 4.1 vérifient $P_L\varphi_k = 0$ et le point ρ_0 est elliptique pour l'opérateur P_L. Il existe donc, d'après la théorie elliptique, un opérateur pseudodifférentiel, $E_{-1}\,(y, D_y)$, d'ordre -1 tel que près de ρ_0,

$$\varphi_k \mid_{\partial M} = E_{-1}\left(\frac{\partial \varphi_k}{i\partial x} \mid_{\partial M}\right) \tag{5.6}$$

et le symbole principal e_{-1} de E_{-1} vaut

$$e_{-1}\,(y,\eta) = \frac{-i}{\sqrt{\|\eta\|^2 - \tau^2\nu_L^2}}. \tag{5.7}$$

Les conditions aux limites vérifiées par les trois composantes du vecteur $v_{k,T}$ sont

$$\begin{aligned} v_{k,T,x} \mid_{\partial M} &= -\partial_x\varphi \mid_{\partial M}, \\ \begin{pmatrix} v_{k,T,y_1} \\ v_{k,T,y_2} \end{pmatrix} &= -\alpha \begin{pmatrix} \partial_{y_1}\varphi|_{\partial M} \\ \partial_{y_2}\varphi|_{\partial M} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

La condition $\operatorname{div} u_{k,T} = 0$ s'écrit $\operatorname{div}_g v_{k,T} = 0$, soit

$$\partial_x v_{k,T,x} + \partial_{y_1} v_{k,T,y_1} + \partial_{y_2} v_{k,T,y_2} = \mathcal{O}\,(1)_{H^1_{\rho_0}}. \tag{5.9}$$

D'après (5.7) (5.8) et (5.9), on obtient près de ρ_0,

$$v_{k,T,x} \mid_{\partial M} = Q_{-1}\left(\frac{\partial v_{k,T,x}}{i\partial x} \mid_{\partial M}\right) + o\,(1)_{\partial, H^1_{\rho_0}}, \tag{5.10}$$

où Q_{-1} est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre -1, elliptique de symbole principal

$$q_{-1}\,(y,\eta) = \frac{-i\sqrt{\|\eta\|^2 - \tau^2\nu_L^2}}{\|\eta\|^2}. \tag{5.11}$$

Reportant cette relation dans (5.8) et en utilisant (5.7) on obtient aussi

$$\begin{pmatrix} v_{k,T,y_1} \\ v_{k,T,y_2} \end{pmatrix} = -\alpha \begin{pmatrix} \partial_{y_1} \\ \partial_{y_2} \end{pmatrix} E_{-1}Q_{-1}\,(\partial_x v_{k,T,x} \mid_{\partial M}) + o\,(1)_{\partial, H^1_{\rho_0}}. \tag{5.12}$$

Finalement le système de conditions aux limites que $v_{k,T}$ vérifie est de la forme

$$v_{k,T} = B'_{-1}\left(\frac{\partial v_{k,T,}}{i\partial x}\right) + o\,(1)_{\partial, H^1_{\rho_0}}, \tag{5.13}$$

où B'_{-1} est une matrice 3×3 d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre -1 de symbole principal

$$b'_{-1}(y,\eta) = \begin{pmatrix} \frac{-i\sqrt{\|\eta\|^2-\tau^2\nu_L^2}}{\|\eta\|^2} & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{\|\eta\|^2}\begin{pmatrix}\eta_1 \\ \eta_2\end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

Si on revient aux conditions aux limites vérifiées par $\widetilde{u}_{k,T} = (\det g)^{1/4} u_{k,T}$, on obtient

$$\widetilde{u}_{k,T} = B_{-1}\left(\frac{\partial \widetilde{u}_{k,T}}{i\partial x}\right) + o(1)_{\partial, H^1_{\rho_0}}, \tag{5.15}$$

où $B_{-1} = T\chi^{-1} B'_{-1} T\chi$. Nous nous trouvons donc exactement dans le cadre d'application du théorème de propagation de la mesure de la section 3. Il ne reste donc qu'à identifier les objets géométriques qui interviennent dans la définition du flot : les endomorphismes J_ξ et $M(s)$. *A priori* le théorème de propagation décrit la propagation de la mesure $\check{\mu}_T$ (dont on déduit la propagation de la mesure $\mu_T = \zeta \check{\mu}_T$). Evidement, l'endomorphisme J_ξ est le même pour les deux mesures. En ce qui concerne $M(s)$, il est plus simple de calculer directement l'endomorphisme associé à la mesure μ_T.

5.2.1. L'opérateur J_ξ. — Calculons l'opérateur J_ξ dans la base $(\partial_x, \partial_{y_1}, \partial_{y_2})$, c'est à dire la matrice J'_ξ :

$$J'_\xi = T\chi J_\xi T\chi^{-1}. \tag{5.16}$$

On a $J'_\xi = \left(Id - \xi b'_{-1}\right)^{-1}\left(Id + \xi b'_{-1}\right)$, soit

$$J'_\xi = \begin{pmatrix} \frac{\|\eta\|^2-\xi\delta}{\|\eta\|^2+\xi\delta} & 0 & 0 \\ \frac{-2\xi}{\|\eta\|^2+\xi\delta}\alpha\begin{pmatrix}\eta_1 \\ \eta_2\end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}, \tag{5.17}$$

avec $\delta = i\sqrt{\|\eta\|^2 - \tau^2\nu_L^2}$. Compte tenu de ce que la mesure μ_T est polarisée perpendiculairement à la direction de propagation (ξ,η), on s'intéresse juste à son action sur le plan $(\xi,\eta)^\perp$. Une base de ce plan est donnée par les vecteurs

$$e_1(\xi) = (0, Y), e_2(\xi) = \left(\|\eta\|^2, -\alpha(\eta)\xi\right), \tag{5.18}$$

où Y est un vecteur de l'espace tangent TY, tel que $\langle Y, \eta\rangle = 0$. On a donc

$$J'_\xi(e_1(-\xi)) = e_1(\xi), \tag{5.19}$$

$$J'_\xi(e_2(-\xi)) = \frac{\|\eta\|^2 - \xi\delta}{\|\eta\|^2 + \xi\delta} e_2(\xi). \tag{5.20}$$

Puisque $\delta \in i\mathbb{R}$, l'endomorphisme $-J_\xi$ qui traduit le reflexion hyperbolique est donc une isométrie de $(-\xi,\eta)^\perp$ sur $(\xi,\eta)^\perp$ (ce caractère isométrique traduit la conservation de l'énergie). Les relations (5.19), (5.20) nous permettent de retrouver la relation (5.30) de [**LZ98**] (calculée par des arguments d'optique géométrique).

5.2.2. L'endomorphisme $M(s)$. — La description précédente de l'endomorphisme J_ξ caractérise la propagation de la mesure μ_T le long du rayon issu du point $\rho_0 \in \mathcal{E}_L$, sauf si ce rayon est un rayon glissant près de ρ_0 ($\gamma(s) \in \mathcal{G}^{2,-}$ pour $\pm s \in]0,\varepsilon]$). Pour terminer la description du cas $\rho_0 \in \mathcal{E}_L$, il nous suffit donc de décrire l'endomorphisme $M(s)$, *le long d'un rayon glissant.* Puisque l'opérateur de Laplace est autoadjoint, la mesure μ_T vérifie pour tout $q \in C^{\infty,1}_{\text{paire}}\left(p^{-1}(0)\,;\mathrm{End}\,\mathbb{C}^3\right)$

$$\langle \mu_T, \frac{\{p,q\}}{\lambda^2}\rangle = 0, \tag{5.21}$$

avec

$$\lambda^2 = \zeta(\tau^2 + |\eta|^2), \qquad \lambda^2\mid_{\mathcal{G}} = \nu_T^2\tau^2 + \|\eta^2\|. \tag{5.22}$$

L'endomorphisme m de la relation (2.98) est donc nul. L'endomorphisme n de la relation (3.9) vaut donc

$$n = i\{p, J_\xi^{-1/2}\}J_\xi^{1/2}, \tag{5.23}$$

or $J_\xi\mid_{\mathcal{G}} = \mathrm{Id}$, donc

$$n\mid_{\mathcal{G}} = -\frac{i}{2}\{p, J_\xi\} = i\frac{\partial p}{\partial x}b_{-1}\mid_{\mathcal{G}}. \tag{5.24}$$

D'après (5.23), l'endomorphisme l de la relation (3.11) vaut donc dans la base $\partial_x, \partial_{y_1}, \partial_{y_2}$, et en se restreignant à $\tau > 0$

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{2}\frac{\tau}{\lambda^2}\{\frac{p}{\tau}, \frac{\lambda^2}{\tau}\} - i\frac{n}{\tau} = -i\frac{n}{\tau}, \\ &= \frac{2\kappa(y,\eta)}{\tau}\begin{pmatrix} -\delta & 0 & 0 \\ -\alpha\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Calculons l'action de l'opérateur l sur le trièdre de Fresnel (t, n, b) le long d'une bicaractéristique γ. Comme γ est un rayon glissant, sa projection spatiale est une géodésique du bord pour la métrique induite, t est le vecteur tangent à la projection spatiale de γ, n est la normale intérieure au bord et $b = t \wedge n$. Notre choix de paramétrage donne le long de la bicaractéristique

$$\frac{d}{ds}y = -2\frac{\alpha\left(\begin{smallmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{smallmatrix}\right)}{\tau}. \tag{5.26}$$

et en notant $\kappa = \kappa(y,\eta)$,

$$\left\{\begin{array}{l} n = (1_x, 0_y), \\ t = \left(0, \dfrac{\alpha(\eta)}{\|\eta\|}\right), \\ l(t) = 0, \\ l(b) = 0, \\ l(n) = \dfrac{-2\kappa}{\tau}(\delta n + \alpha(\eta)) \end{array}\right. . \tag{5.27}$$

Or sur $\mathcal{G}$, $\nu_T^2\tau^2 = \|\eta\|^2$, donc

$$l(n) = -\frac{2\kappa}{\tau}\delta n + 2\kappa\nu_T t. \tag{5.28}$$

La géodésique du bord est paramétrée à vitesse $2\nu_T$. En effet

$$\|\frac{d}{ds}y\| = \|2\alpha(\eta)\|/\tau = 2\nu_T. \tag{5.29}$$

Les dérivées du trièdre de Fresnel valent donc :

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix} = 2\nu_T \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\zeta \\ 0 & \zeta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}, \tag{5.30}$$

où $|\kappa|$ est la courbure et ζ la torsion de la géodésique vue comme une courbe de $\mathbb{R}^3$. On remarquera qu'avec nos conventions, $\kappa < 0$ sur $\mathcal{G}^{2,-}$.

Soient $(\alpha(s), \beta(s), \gamma(s))$ les solutions du système où M est défini par la relation (3.12)

$$(\alpha t + \beta n + \gamma b) = M(s)(\alpha_0 t_0 + \beta_0 n_0 + \gamma_0 b_0), \tag{5.31}$$

qui vérifient donc

$$\begin{aligned} \dot\alpha t + \dot\beta n + \dot\gamma b - 2\nu_T\alpha(\kappa n) + 2\nu_T\beta(\kappa t - \zeta b) + 2\nu_T\gamma(\zeta n) \\ = \beta\left(-\frac{2\kappa}{\tau}\delta n + 2\kappa\nu_T t\right), \end{aligned} \tag{5.32}$$

soit

$$\left\{\begin{array}{l} \dot\alpha = 2\nu_T\kappa\beta - 2\kappa\nu_T\beta = 0, \\ \dot\beta = 2\nu_T\kappa\alpha - 2\nu_T\zeta\gamma - \dfrac{2\kappa}{\tau}\delta\beta, \\ \dot\gamma = 2\nu_T\zeta\beta. \end{array}\right. \tag{5.33}$$

On ne s'intéresse qu'à des ondes polarisées perpendiculairement à la direction de propagation, on vérifie donc que si $\alpha_0 = 0$ alors $\alpha(s) = 0$, ce qui correspond à la première équation. L'opérateur $M(s)$ restreint au plan engendré par n et b est donc décrit par le système :

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= -2\nu_T\zeta\gamma - \frac{2\kappa}{\tau}\delta\beta, \\ \dot{\gamma} &= 2\nu_T\zeta\beta, \end{aligned} \tag{5.34}$$

dont on vérifie qu'il est bien une isométrie de ce plan (ceci correspond à la conservation de l'énergie), puisque la matrice $\begin{pmatrix} -2\kappa\delta/\tau & -2\nu_T\zeta \\ 2\nu_T\zeta & 0 \end{pmatrix}$ est anti-adjointe (car δ est imaginaire pur).

5.3. Près d'un point $\rho_0 \in \mathcal{G}_L$. — On se place dans un système de coordonnées géodésiques près du point x_0. On notera χ le changement de variables correspondant et $J_\xi = T\chi^{-1}J'_\xi T\chi$ l'opérateur défini près de ϱ_0 dans S^*Y par (5.17) où

$$\delta = \begin{cases} i\sqrt{\|\eta\|^2 - \tau^2\nu_L^2} & \text{si } \varrho \in \mathcal{E}_L \\ \sqrt{\tau^2\nu_L^2 - \|\eta\|^2} & \text{si } \varrho \in \mathcal{H}_L \cup \mathcal{G}_L \end{cases} \tag{5.35}$$

On notera $C^{\infty,1}_{\text{paire}}\left(p^{-1}(0)\,;\mathrm{End}\,\mathbb{C}^3\right)$ l'espace des fonctions q C^∞ homogènes de degré 1, de $p^{-1}(0)$ à valeurs dans $\mathbb{C}^3$ à support près de $(x_0 = 0, \xi = \pm\xi_0, y_0, \eta_0)$ et vérifiant la condition de symétrie

$$J^*_\xi q(x=0,\xi,y,\eta)\, J_\xi = q(x=0,-\xi,y,\eta)\,. \tag{5.36}$$

PROPOSITION 5.1. — *Soit $q \in C^{\infty,1}_{paire}\left(p^{-1}(0)\,;\mathrm{End}\,\mathbb{C}^3\right)$. Alors, on a*

$$\langle \mu_T, \frac{\{p,q\}}{\lambda^2}\rangle = 0, \tag{5.37}$$

où λ est la fonction définie en (5.22).

COROLLAIRE 5.2. — *La mesure μ_T est, près de ϱ_0 invariante par le flot associé à la reflexion hyperbolique décrite par J_ξ*

Puisque la mesure μ_T est polarisée perpendiculairement à la direction de propagation, il suffit pour décrire complètement sa propagation de décrire l'action de J_ξ sur le plan perpendiculaire à (ξ,η), qui est la même que celle des relations (5.19) et (5.20), avec notre nouvelle définition de δ. On remarquera que cette description est, dans la région $\mathcal{H}_L$ compatible avec la description de la section 5.1 (celle correspondant aux conditions aux limites de Dirichlet), puisqu'alors on sait que la mesure μ_T est polarisée le long de e_1 et que les deux descriptions coïncident alors.

PREUVE DE LA PROPOSITION 5.1. Si $\varrho_0 \in \mathcal{E}_T$, d'après le lemme 4.2, $u_{k,T}\mid_{\partial M}$ converge fortement vers 0 dans $H^{1/2}$, d'après les résultats standard de régularité elliptique, on en déduit que $u_{k,T}$ converge fortement vers 0 dans H^1 près de ϱ_0. Si $\varrho_0 \in \mathcal{H}_T$. Les traces $\widetilde{u}_{k,T}$ et $\partial_x \widetilde{u}_{k,T}$ sont donc bornées dans $H^1_{\varrho_0}$ et $L^2_{\varrho_0}$ respectivement. On peut donc leur associer une mesure $\mu_\partial = \begin{pmatrix} \mu^1_\partial & (\mu^{1/2}_\partial)^* \\ \mu^{1/2}_\partial & \mu^0_\partial \end{pmatrix}$ sur S^*Y caractérisée par

$$(5.38)\qquad \begin{cases} \forall Q \in \mathcal{A}^1_I, & \lim_k \int_{\partial X} Q\widetilde{u}^k_T \cdot \overline{\partial_x \widetilde{u}^k_T} dy = \langle \mu^{1/2}_\partial, \frac{\sigma(Q)}{|\eta|}\Big|_{x=0} \rangle, \\ \forall Q \in \mathcal{A}^2_I, & \lim_k \int_{\partial X} Q\widetilde{u}^k_T \cdot \overline{\widetilde{u}^k_T} dy = \Big\langle \mu^1_\partial, \frac{\sigma(Q)}{|\eta|^2}\Big|_{x=0} \Big\rangle, \\ \forall Q \in \mathcal{A}^0_I, & \lim_k \int_{\partial X} Q\partial_x\widetilde{u}^k_T \cdot \overline{\partial_x \widetilde{u}^k_T} dy = \langle \mu^0_\partial, \sigma(Q)|_{x=0} \rangle. \end{cases}$$

Soit $\widetilde{\mu}_T = \mu_T/\zeta$ la mesure associée dans notre système de coordonnées à la suite $\widetilde{u}_{k,T}$. On a, avec $\lambda_0^2 = \tau^2 + |\xi, \eta|^2$,

$$(5.39)\qquad \langle \mu_T, \frac{\{p,q\}}{\lambda^2} \rangle = \langle \widetilde{\mu}_T, \frac{\{p,q\}}{\lambda_0^2} \rangle.$$

Soit $Q = Q_0 \left(\frac{\partial_x}{i}\right) + Q_1$ où Q_i sont des opérateurs pseudodifférentiels tangentiels d'ordre i à supports proches de ϱ_0. On a

$$(5.40)\qquad \left(i\left(\widetilde{P}^*_T Q - Q\widetilde{P}_T\right)\widetilde{u}_{T,k}, \widetilde{u}_{T,k}\right)_{L^2} = \int_Y -Q_0\partial_x^2 \widetilde{u}_{T,k}\overline{\widetilde{u}_{T,k}} - iQ_1\partial_x\widetilde{u}_{T,k}\overline{\widetilde{u}_{T,k}} + iQ_1\widetilde{u}_{T,k}\overline{\partial_x\widetilde{u}_{T,k}} + Q_0\partial_x\widetilde{u}_{T,k}\overline{\partial_x\widetilde{u}_{T,k}} + o(1).$$

On en déduit que

$$(5.41)\qquad \langle \widetilde{\mu}_T, \frac{\{p, q_0\xi + q_1\}}{\lambda_0^2} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \mu^1_\partial & (\mu^{1/2}_\partial)^* \\ \mu^{1/2}_\partial & \mu^0_\partial \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_0 r_T & -iq_1 \\ iq_1 & q_0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Pour $q \in C^{\infty,1}\left(p^{-1}(0); \operatorname{End}\mathbb{C}^3\right)$, il existe deux opérateurs tangentiels Q_i tels que $q = q_0\xi + q_1$. En utilisant le théorème de division de Malgrange, on montre comme à la preuve du lemme 2.9 que la relation (5.41) reste vraie pour un tel symbole. Il suffit donc pour conclure de vérifier que si q est paire, alors le terme de droite dans (5.41) est nul. Puisque $\widetilde{u}_{k,T}$ vérifie sur $\mathcal{E}_L$ la condition aux limites (5.15), le lemme 2.10 montre que ce terme est nul sur $\mathcal{E}_L$. La fonction $u_{k,T}$ vérifie par ailleurs sur $\mathcal{H}_L$ la condition aux limites $u_{k,T}\mid_{\partial M} = o(1)_{H^1_{\varrho_0}}$ et $v_{k,T} = T\chi u_{k,T}$ vérifie $\operatorname{div}_g v_{k,T} = 0$, donc

$$(5.42)\qquad \partial_x v_{k,T,x} + \partial_{y_1} v_{k,T,y_1} + \partial_{y_2} v_{k,T,y_2} = o(1)_{L^2_{\varrho_0}},$$

ce qui implique $\partial_x v_{k,T,x}\mid_{\partial M} = o(1)_{L^2_{\varrho_0}}$ et en particulier $v_{k,T}$ verifie aussi sur $\mathcal{H}_L$ la condition aux limites (5.13), où on remplace $i\sqrt{\|\eta\|^2 - \tau^2\nu_L^2}$ par

$\sqrt{\tau^2\nu_L^2 - \|\eta\|^2}$ (et donc $\widetilde{u}_{k,T}$ vérifie la condition (5.15)). Le terme de droite dans (5.41) est donc aussi nul sur $\mathcal{H}_L$. Il est donc égal à

$$\left\langle 1_{\mathcal{G}_L} \begin{pmatrix} \mu_\partial^1 & (\mu_\partial^{1/2})^* \\ \mu_\partial^{1/2} & \mu_\partial^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_0 r_T & -iq_1 \\ iq_1 & q_0 \end{pmatrix} \right\rangle. \tag{5.43}$$

Soient $\widetilde{q}_i = (T\chi^{-1})^* q_i T\chi^{-1}$ et $\widetilde{\mu}_\partial$ définie par

$$\langle \widetilde{\mu}_\partial, \widetilde{q} \rangle = \langle \mu_\partial, q \rangle. \tag{5.44}$$

Il nous faut donc montrer que si $\widetilde{q} = \widetilde{q}_0\xi + \widetilde{q}_1$ et $\widetilde{q}$ paire, c'est à dire

$$J_\xi'^* \widetilde{q}\,(x=0,\xi,y,\eta)\, J_\xi' = \widetilde{q}\,(x=0,-\xi,y,\eta)\,, \tag{5.45}$$

avec

$$J_\xi' = T\chi J_\xi T\chi^{-1}, \tag{5.46}$$

alors

$$\left\langle 1_{\mathcal{G}_L} \begin{pmatrix} \widetilde{\mu}_\partial^1 & (\widetilde{\mu}_\partial^{1/2})^* \\ \widetilde{\mu}_\partial^{1/2} & \widetilde{\mu}_\partial^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widetilde{q}_0 r_T & -i\widetilde{q}_1 \\ i\widetilde{q}_1 & \widetilde{q}_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \tag{5.47}$$

On a $\widetilde{v}_{k,T}\,|_{\partial M} = -\,(\det g)^{1/4}\,\nabla\,(\det g)^{-1/4}\,\widetilde{\varphi}_k\,|_{\partial M}$ où $\widetilde{\varphi}_k$ est une suite de solutions convergeant fortement vers 0 dans $H^2_{\varrho_0}$ (car $u_{k,L}$ tend vers 0 dans $H^1_{\varrho_0}$) de l'équation $\widetilde{P}_L\widetilde{\varphi}_k = (\partial_x^2 + \widetilde{R}_L)\widetilde{\varphi} = 0$ et ses traces $\widetilde{\varphi}_k\,|_{\partial M}$ et $\partial_x\widetilde{\varphi}_k\,|_{\partial M}$ sont bornées dans $H^2_{\varrho_0}$ et $H^1_{\varrho_0}$ respectivement. On a alors, si $Q = -Q_2\partial_x$ avec Q_2 un opérateur tangentiel d'ordre 2,

$$\int_X \left(P_L^*Q - QP_L\right)\varphi_k\overline{\varphi_k} = \int_{\partial X} \partial_x Q_2 \partial_x \varphi_k \overline{\varphi_k} + Q_2\partial_x\varphi_k\overline{\partial_x\varphi_k} \tag{5.48}$$

Le terme de gauche dans (5.48) tend vers 0, celui de droite (modulo extraction d'une sous suite) vers

$$0 = \langle \nu^2, r_L q_2 \rangle + \langle \nu^1, q_2 \rangle, \tag{5.49}$$

où ν_2 et ν_1 sont les mesures de défaut (voir P. Gérard [**Gér91**] et L. Tartar [**Tar90**]) dans $H^2(\partial M)$ et $H^1(\partial M)$ respectivement des suites $(\widetilde{\varphi}_k\,|_{\partial M})$ et $(\partial_x\widetilde{\varphi}_k\,|_{\partial M})$. Localisant cette dernière équation sur $\mathcal{G}_L$, on obtient $\nu^1 1_{\mathcal{G}_L} = 0$. Comme $\widetilde{v}_{k,T,x}\,|_{\partial M} = -\partial_x\widetilde{\varphi}_k\,|_{\partial M} + o(1)_{H^1}$, on en déduit que les mesures $\widetilde{\mu}_\partial^1 1_{\mathcal{G}_L}$ et $\widetilde{\mu}_\partial^{1/2} 1_{\mathcal{G}_L}$ sont de la forme

$$\widetilde{\mu}_\partial^1 1_{\mathcal{G}_L} = 1_{\mathcal{G}_L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\mu}_{\partial,2,2}^1 & \widetilde{\mu}_{\partial,2,3}^1 \\ 0 & \widetilde{\mu}_{\partial,3,2}^1 & \widetilde{\mu}_{\partial,3,3}^1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\mu}_\partial^{1/2} 1_{\mathcal{G}_L} = 1_{\mathcal{G}_L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\mu}_{\partial,2,2}^{1/2} & \widetilde{\mu}_{\partial,2,3}^{1/2} \\ 0 & \widetilde{\mu}_{\partial,3,2}^{1/2} & \widetilde{\mu}_{\partial,3,3}^{1/2} \end{pmatrix}. \tag{5.50}$$

Les relations

$$\operatorname{div}\widetilde{v}_{k,T} = \partial_x\widetilde{v}_{k,T,x} + \partial_{y_1}\widetilde{v}_{k,T,y_1} + \partial_{y_2}\widetilde{v}_{k,T,y_2} = \mathcal{O}(1)_{H^1_{\varrho_0}} \tag{5.51}$$

et

$$\widetilde{v}_{k,T,y}\ |_{\partial M} = -\nabla_y \widetilde{\varphi} + o\,(1)_{H^1_{\varrho_0}} \tag{5.52}$$

montrent

$$\widetilde{v}_{k,T,y}\ |_{\partial M} = C_{-1}\left(\frac{\partial_x}{i}\widetilde{v}_{k,T,x}\right) + o\,(1)_{H^1_{\varrho_0}}\ , \tag{5.53}$$

où le symbole principal de l'opérateur C_{-1} est $-\alpha(\eta)/\|\eta\|^2$.

Si on note

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{\|\eta\|^2}\begin{pmatrix}\eta_1 \\ \eta_2\end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \tag{5.54}$$

on peut réécrire le terme de gauche dans (5.47) sous la forme

$$\langle 1_{\mathcal{G}_L}\widetilde{\mu}^0_\partial, \widetilde{q}_0 + b^*\widetilde{q}_0 r_T b + \widetilde{q}_1 b + b^*\widetilde{q}_1\rangle \tag{5.55}$$

et le même calcul algébrique qu'à la démonstration du lemme 2.10 montre que si $\widetilde{q}$ est pair, alors le terme de droite dans (5.55) est nul sur $\mathcal{G}_L$; ce qui termine la démonstration de la proposition 5.1. □

Terminons cette partie avec la definition suivante :

DÉFINITION 5.3. — *On appellera rayon de polarisation transversale sur* Ω *toute application*

$$\gamma : s \in I \subset \mathbb{R} \mapsto \gamma(s) \in S\hat{Z} \times T\mathbb{R}^3\ |_{\overline{\Omega}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \tag{5.56}$$

où I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$, $S\hat{Z}$ *est l'espace associé à* $M = \mathbb{R}_t \times \Omega$, *défini en* (2.36)*) et* $T\mathbb{R}^3\ |_{\overline{\Omega}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ *est le complexifié de l'espace tangent à* $\overline{\Omega}$ *; et telle que :*

1. *La projection,* $s \mapsto \pi_{x,t}(\gamma(s))$, *sur la base de* $S\hat{Z}$, $\mathbb{R}_t \times \overline{O}$ *est un rayon bicaractéristique généralisé au sens de Melrose et Sjöstrand.*
2. *Si* $\pi_{x,t}(\gamma(s_0)) \in \mathbb{R}_t \times \Omega$ *alors la projection* $s \mapsto \pi_X(\gamma(s))$ *sur le dernier facteur est constante au voisinage de* s_0 *et orthogonale à la direction de propagation :* $\langle \pi_\xi(\gamma(s)), \pi_X(\gamma(s))\rangle = 0$.
3. *Si* $\pi_{x,t,\xi,\tau}(\gamma(s_0)) \in \mathcal{H}_T \cap \overline{\mathcal{H}_L}$ *alors* $\gamma(s_0-0)$ *et* $\gamma(s_0+0)$ *existent et* $s \mapsto \pi_X(\gamma(s))$ *est continue près de* s_0.
4. *Si* $\pi_{x,t,\xi,\tau}(\gamma(s_0)) \in \mathcal{E}_L \cap \mathcal{H}_T$ *alors* $\gamma(s_0-0)$ *et* $\gamma(s_0+0)$ *existent et vérifient*

$$\pi_X(\gamma(s_0+0)) = J_{\pi_{\xi(\gamma(s_0-0))}}(\pi_X(\gamma(s_0+0))). \tag{5.57}$$

5. *Si* $\pi_{x,t,\xi,\tau}(\gamma(s_0)) \in \mathcal{E}_T$ *alors* $\pi_X(\gamma(s))$ *est de classe* C^1 *près de* s_0 *et vérifie en* s_0 *l'équation différentielle* (5.32) *(sur les coordonnées du repère de Fresnel).*

C'est à dire que la variation de la composante du fibré tangent d'un rayon de polarisation est décrite par les différents cas que nous venons d'étudier dans cette section.

6. Décroissance exponentielle de l'énergie pour les solutions du système de la thermoélasticité.

On considère $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ un ouvert régulier, relativement compact, $(u_0, u_1, \theta_0) \in H_0^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega)^{d+1}$, (u, θ) la solution donnée par le théorème de Hille Yosida du système

$$\text{(6.1)} \qquad \begin{cases} \left(\partial_t^2 - \mu\Delta - (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div}\right) u + \alpha \nabla\theta = 0, \\ \partial_t \theta - \Delta\theta + \beta \operatorname{div} \partial_t u = 0, \\ u \mid_{\partial\Omega} = 0, \qquad \theta \mid_{\partial\Omega} = 0, \\ u \mid_{t=0} = u_0 \in H_0^1(\Omega)^3, \quad \partial_t u \mid_{t=0} = u_1 \in L^2(\Omega)^3, \\ \theta \mid_{t=0} = \theta_0 \in L^2(\Omega); \end{cases}$$

et son énergie naturelle :

$$\text{(6.2)} \qquad E(u,\theta)(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[|\partial_t u|^2 + \mu |\nabla u|^2 + (\lambda+\mu) |\operatorname{div} u|^2 + \frac{\alpha}{\beta} |\theta|^2| \right] dx,$$

qui vérifie

$$\text{(6.3)} \qquad \frac{dE}{dt} = -\frac{\alpha}{\beta} \int_\Omega |\nabla\theta|^2| dx \leq 0.$$

Pour simplifier la présentation on se placera dans cette partie dans le cas le plus difficile à étudier (et pertinent du point de vue physique) où $\lambda + \mu > 0$.

G.Lebeau et E.Zuazua ont démontré dans [**LZ98**], théorème 1.1 (voir aussi relations (3.6) et (3.7)), le résultat suivant

Théorème 2 **(Lebeau-Zuazua)**. — *La décroissance de l'énergie pour les solutions du système* (6.1) *est* uniforme *: il existe $C, \varepsilon > 0$ tels que pour tous $(u_0, u_1, \theta_0) \in H_0^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega)^{d+1}$,*

$$\text{(6.4)} \qquad E(u,\theta)(t) \leq C e^{-\varepsilon t} E(u,\theta)(0),$$

si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

– i) Toute solution, $\varphi \in H_0^1(\Omega)^d$ du système

$$\text{(6.5)} \qquad -\Delta\varphi = \gamma^2 \varphi \ \textit{dans}\ \Omega,$$

$$\text{(6.6)} \qquad \operatorname{div} \varphi = 0$$

est nulle

– *ii) Il existe $T>0$ et $C>0$ tels que pour tous $(u_0,u_1)\in H_0^1(\Omega)^d\times L^2(\Omega)^d$, la solution du système de Lamé (4.1) vérifie*

$$\|u_0\|^2_{H^1(\Omega)^d}+\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)^d}\leq C\int_0^T\int_\Omega|\operatorname{div}u|^2dxdt. \tag{6.7}$$

REMARQUE 6.1. — *En toute rigueur, le théorème 1.1 de* [**LZ98**] *correspond à prendre les normes L^2 et H^{-1} dans le terme de gauche et la norme H^{-1} dans le terme de droite de* (6.7)*. Néanmoins l'opérateur $\sqrt{A_D}$ réalisant une isométrie de H^1 sur L^2 et de L^2 sur H^{-1} et commutant à l'évolution, On voit facilement que l'équation (9) de* [**LZ98**] *est bien équivalente à* (6.7)*.*

Dans la cas où $d=2$, ils en ont déduit une condition nécessaire et suffisante pour que (6.4) soit vérifiée. Nous allons généraliser cette étude au cas $d=3$.

THÉORÈME 3 **(condition suffisante)**. — *On suppose que $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ n'a pas de contact d'ordre infini avec ses tangentes et que la condition i) précédente est vérifiée (c'est le cas génériquement dans la classe des ouverts C^∞) et*

– *iii) Il existe $T>0$ tel que tout rayon bicaractéristique généralisé pour l'opérateur $P_T=\nu_T^2\partial_t^2-\Delta$ rencontre l'ensemble*

$$\mathcal{H}_L\setminus\{\|\eta\|=0\}\cap\{t\in]0,T[\} \tag{6.8}$$

(au moins) deux fois et en deux points où les directions critiques qui sont en ces points les normales à la direction de propagation et à la normale au bord n'appartiennent pas au même rayon de polarisation transversale (voir définition 5.3).

Alors (6.4) est vérifiée (l'énergie décroît exponentiellement).

REMARQUE 6.2. — *Si la condition iii) est vérifiée, alors la condition i) ne peut être violée que par un nombre fini de fonctions φ et si on note F l'espace vectoriel engendré par les triplets de la forme $u_0=c_0\varphi, u_1=c_1\varphi, \theta_0=0$, on obtiendrait sous l'hypothèse iii) que la distance de $(u(t),\partial_t u(t),\theta(t))$ à F décroît exponentiellement (voir* [**LZ98**]*, Remark 2.2).*

THÉORÈME 4 **(condition nécessaire)**. — *Soit $T>0$. On suppose qu'il existe un rayon bicaractéristique généralisé pour l'opérateur $P_T=\nu_T^2\partial_t^2-\Delta$ qui ne rencontre l'ensemble*

$$\mathcal{H}_L\setminus\{\|\eta\|=0\}\cap\{t\in[0,T]\} \tag{6.9}$$

qu'en des points où les directions critiques appartiennent au même rayon de polarisation transversale. Alors il existe une suite de données initiales

$\left(u_0^k, u_1^k, \theta_0^k = 0\right)$ *telles que la solution de (6.1) vérifie*

$$E\left(u_0^k, u_1^k, \theta_0^k, t=0\right) = 1, \tag{6.10}$$

$$\lim_{k\to+\infty} E\left(u_0^k, u_1^k, \theta_0^k, t=T\right) = 1. \tag{6.11}$$

□Preuve du théorème 3. Un argument d'unicité-compacité désormais classique (voir [**BLR92**]) permet de montrer que les conditions i) et ii)) sont équivalentes aux conditions i) et ii'), avec

– ii') Il existe $T > 0$ et $C > 0$ tels que pour tous $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega)^d$, la solution du système de Lamé (4.1) vérifie

$$\begin{aligned}\|u_0\|^2_{H^1(\Omega)^d} + \|u_1\|^2_{L^2(\Omega)^d} \\ \leq C\left[\int_0^T\int_\Omega |\operatorname{div} u|^2 dxdt + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \|u_1\|^2_{H^{-1}(\Omega)^d}\right].\end{aligned} \tag{6.12}$$

Nous allons montrer que la condition iii) implique la condition ii'). En effet supposons la condition iii) vérifiée et raisonnons par l'absurde. Si la condition ii') n'est pas vérifiée, alors on peut construire une suite (u^k) de solutions du système de Lamé (4.1) vérifiant

$$\begin{aligned}\|u_0^k\|^2_{H^1(\Omega)^d} + \|u_1^k\|^2_{L^2(\Omega)^d} \\ > k\left[\int_0^T\int_\Omega |\operatorname{div} u^k|^2 dxdt + \|u_0^k\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \|u_1^k\|^2_{H^{-1}(\Omega)^d}\right].\end{aligned} \tag{6.13}$$

Quitte à normaliser la suite (u^k) et à extraire une sous suite, on peut supposer que le terme de gauche est égal à 1, et que la suite converge faiblement vers une limite qui d'après (6.13) ne peut être que 0. On obtient ainsi une suite de solutions (u^k) du système de Lamé convergeant faiblement vers 0 et vérifiant $\operatorname{div} u^k \to 0$ dans $L^2(]0,T[\times\Omega)$. On peut alors appliquer à cette suite les constructions de la section précédente et on obtient ainsi une mesure μ_T (définie sur $SZ\cap]0,T[_t$ et invariante sur cet ensemble par le flot que nous avons décrit. On sait aussi que cette mesure est polarisée perpendiculairement à la direction de propagation et que près de tout point de $\mathcal{H}_L \setminus \{\|\eta\| = 0\}$, elle est polarisée le long de la direction critique. Comme par hypothèse, tout rayon rencontre $]0,T[$ en au moins deux points qui ne sont pas connectés par la propagation, le théorème d'invariance de la mesure implique qu'en tout point de $]0,T[$, la mesure est polarisée à la fois le long de 2 vecteurs linéairement indépendants (inclus dans le plan orthogonal à la direction de propagation), donc qu'elle est nulle. Comme

$$\mu_T\left(SZ\cap]0,T[\right) = T \times \lim_{k\to+\infty} \|u_0^k\|^2_{H^1(\Omega)^d} + \|u_1^k\|^2_{L^2(\Omega)^d} = 1 \tag{6.14}$$

on obtient une contradiction.

PREUVE DU THÉORÈME 4. Notons $\gamma(s)$ un rayon bicaractéristique généralisé pour l'opérateur $P_T = \nu_T^2\partial_t^2 - \Delta$ qui ne rencontre l'ensemble

$$\mathcal{H}_L \setminus \{\|\eta\| = 0\} \cap \{t \in [0,T]\} \tag{6.15}$$

qu'en des points où les directions critiques, sont connectées par la propagation. On peut supposer que sur γ, on à $\tau = +c_T$. On remarque d'abord que si γ n'a pas de point intérieur dans $[0,T]$ ($\gamma \subset S^*\partial M$), alors il est inclus dans la région $\mathcal{G}_T \subset \mathcal{E}_L$, donc si γ_n est une suite de rayons réfléchis qui convergent vers γ (il en existe puisque Ω n'a pas avec ses tangentes de contact d'ordre infini, voir [**MS78**]), pour n assez grand, γ_n ne peut rencontrer $S^*\partial M$ qu'en des points de la région $\mathcal{E}_L$, donc vérifie encore la même hypothèse. On peut donc supposer que γ possède un point intérieur, x_0. On peut aussi supposer que ce point correspond sur γ au temps $t = 0$ et au paramètre $s = 0$. On note $D = (D_1, D_2, D_3)$ la direction de polarisation obtenue pour $s = 0$ et que le flot envoie sur les directions critiques obtenues à chaque contact du rayon avec $\mathcal{H}_L \setminus \{\|\eta\| = 0\} \cap \{t \in [0,T]\}$. Par changement de variables orthonormales, on se ramène au cas $x_0 = 0, \xi_0 = (1,0,0), \tau_0 = c_T, t_0 = 0$ et $D = (0,1,0)$. On peut alors construire une suite de données initiales, (u_0^k, u_1^k) d'énergies égales à 1 et telles que les mesures $\mu_{T,L}$ associées vérifient pour $|t| << 1$

– a) μ_L=0

– b) Le support de μ_T est γ et de plus μ_T est polarisée le long de D

En effet, pour $|t| << 1$, puisque le point x_0 est un point intérieur, la vitesse finie de propagation du support permet de ne pas tenir compte du bord, si on prend les données initiales à support assez petits. Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. On considère les fonctions

$$\psi_k(x) = C^{-1}k^{-5/4}e^{ikx_1}\psi\left(\sqrt{k}x\right); \quad C = c_T\left(\int |\psi|^2\right)^{1/2} \tag{6.16}$$

et

$$u_0^k = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\psi^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_{x_2}\psi^k \\ \partial_{x_1}\psi^k \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad u_1^k = ikc_T u_0^k \tag{6.17}$$

et on leur associe la suite (u^k) de solutions du système de Lamé de données initiales (u_0^k, u_1^k). L' énergie de la suite (u^k) tend vers 1 et il est facile de voir que pour $|t| << 1$, d'une part la mesure μ_L est nulle et d'autre part la mesure μ_T est supportée par γ et polarisée le long de $D = (0,1,0)$. Notons $D(s)$ la direction obtenue par propagation le long de $\gamma(s)$ de la direction D, $\mathcal{P}(t)$ la proposition :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{« Au voisinage de } [0,t] \text{ la mesure } \mu_L \text{ est nulle et } \mu_T \text{ est supportée} \\ \quad \text{par } \gamma \text{ et polarisée le long de } D(s).\text{ »} \end{array}\right. \tag{6.18}$$

et $\mathcal{T}$ l'ensemble des $t \in [0,T]$ tels que $\mathcal{P}(t)$ est vérifiée. Cet ensemble est non vide et ouvert dans $[0,T]$. Si nous montrons qu'il est aussi fermé, on aura montré que la suite u^k vérifie

$$E\left(u^k\right) \to 1, \quad \text{et} \quad \operatorname{div} u^k \to 0 \text{ dans } L^2\left(\Omega \times [0,T]\right). \tag{6.19}$$

Cette suite contredira donc l'estimation (6.7). On pourrait également en utilisant le résultat de découplage pour le système de la thermoélasticité de G.Lebeau-E.Zuazua [**LZ98**], lemme 3.1, montrer que la suite de solutions du système de la thermoélasticité (6.1) associées à la suite de données initiales $\left(u_0^k, u_1^k, \theta_0 = 0\right)$ vérifie

$$E\left(u^k, \theta^k\right)(0) \to 1, \quad \text{et} \quad E\left(u^k, \theta^k\right)(T) \to 1. \tag{6.20}$$

Montrons que l'ensemble $\mathcal{T}$ est fermé dans $[0,T]$. Supposons que $t_n \in \mathcal{T} \to t$. Le seul cas à étudier est $t_n < t, \forall n$. Soit s_0 le paramètre sur γ correspondant à $t(s_0) = t$. Nous allons étudier les différents cas selon la nature du point $\varrho_0 = \gamma(s_0)$. Il nous suffit de montrer que la mesure μ_L est nulle près de ϱ_0, et d'appliquer les résultats de la section précédente.

- i) ϱ_0 est un point intérieur
- ii) ϱ_0 est un point elliptique pour l'onde longitudinale
- iii) ϱ_0 est un point hyperbolique pour l'onde longitudinale et $\|\eta\| \neq 0$
- iv) ϱ_0 est un point hyperbolique pour l'onde longitudinale et $\|\eta\| = 0$
- v) ϱ_0 est un point diffractif ou glissant pour l'onde longitudinale

6.0.1. Les cas i) et ii). — Le théorème d'invariance de la mesure μ_T au voisinage de ϱ_0 est encore vrai dans ces cas, puisque la démonstration n'utilise pas et prouve (car l'énergie est conservée) le fait que $\mu_L = 0$. La propriété $\mathcal{P}(t_0)$ est donc vérifiée.

6.0.2. le cas iii). — On reprend les notations de la section précédente. Supposons seulement qu'une des demi-bicaractéristiques issues de ϱ_0 (dont on exclue le point ϱ_0), par exemple celle correspondant à $\xi > 0$, n'est pas dans le support de la mesure μ_L. Par la théorie hyperbolique standard on sait alors qu'il existe un opérateur elliptique d'ordre 1, E_{-1}, tel que près de ρ_0,

$$\widetilde{\varphi}\,|_{\partial M} = E_{-1}\left(\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{i\partial x}\,|_{\partial M}\right) + o(1)_{H^2_{\partial,\rho_0}} \tag{6.21}$$

et le symbole principal e_{-1} de E_{-1} vaut

$$e_{-1}(y,\eta) = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 \nu_L^2 - \|\eta\|^2}}. \tag{6.22}$$

En reprenant l'étude réalisée à la section précédente près d'un point $\varrho_0 \in \mathcal{E}_L$, on obtient que le système de conditions aux limites que $\widetilde{v}_{k,T}$ vérifie près de ϱ_0

est de la forme

$$\widetilde{v}_{k,T} = B'_{-1}\left(\frac{\partial \widetilde{v}_{k,T,}}{i\partial x}\right) + o\left(1\right)_{H^1_{\partial,\rho_0}}, \tag{6.23}$$

où B'_{-1} est une matrice 3×3 d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre -1 de symbole principal

$$b'_{-1}\left(y,\eta\right) = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{\tau^2/\nu_L^2 - \|\eta\|^2}}{\|\eta\|^2} & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{\|\eta\|^2}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\end{pmatrix}. \tag{6.24}$$

Nous nous trouvons donc exactement dans le cadre d'application du théorème de propagation de la mesure de la section 3. Il ne reste donc qu'à identifier les endomorphismes J_ξ. Décrivons l'opérateur $J'_\xi = T\chi J_\chi T_\xi^{-1}$. On a $J'_\xi = \left(Id - \xi b'_{-1}\right)^{-1}\left(Id + \xi b'_{-1}\right)$, soit

$$J'_\xi = \begin{pmatrix} \frac{\|\eta\|^2 - \xi\delta}{\|\eta\|^2 + \xi\delta} & 0 & 0 \\ \frac{-2\xi}{\|\eta\|^2+\xi\delta}\alpha\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} & \begin{matrix}1\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\1\end{matrix}\end{pmatrix}, \tag{6.25}$$

avec $\delta = \sqrt{\tau^2\nu_L^2 - \|\eta\|^2}$. Compte tenu de ce que la mesure μ_T est polarisée perpendiculairement à la direction de propagation (ξ,η), on ne s'intéresse encore qu'à son action sur le plan $(\xi,\eta)^\perp$. Une base de ce plan est donnée par les vecteurs

$$e_1\left(\xi\right) = \left(0, Y\right), e_2\left(\xi\right) = \left(\|\eta\|^2, \alpha(\eta)\xi\right), \tag{6.26}$$

où Y est un vecteur tangent au bord, de norme 1 et tel que $\langle Y,\eta\rangle = 0$. On a alors

$$J'_\xi\left(e_1\left(-\xi\right)\right) = e_1\left(\xi\right), \tag{6.27}$$

$$J'_\xi\left(e_2\left(-\xi\right)\right) = \frac{\|\eta\|^2 - \xi\delta}{\|\eta\|^2 + \xi\delta}e_2\left(\xi\right). \tag{6.28}$$

Puisque l'onde incidente μ_T est polarisée le long de $D\left(s\right)$ et que $D\left(s_0\right) = e_1$, le calcul précédent montre que l'onde réfléchie est de *même masse totale.* la conservation de l'énergie pour les solutions du système de Lamé implique donc que μ_L est nulle au voisinage de ϱ_0. La propriété $\mathcal{P}\left(t_0\right)$ est donc vérifiée.

6.0.3. Le cas iv). — On ne fait pas dans ce cas d'hypothèse sur la polarisation de l'onde incidente. D'après l'étude précédente, on sait *a priori* que la mesure μ_L est supportée près de ϱ_0 par la réunion des rayons qui rencontrent l'ensemble $\eta = 0$ (rayons normaux au bord). Donc la mesure H^2 de $\widetilde{\varphi}$ est supportée par ce même ensemble et celle de $\widetilde{\varphi}\mid_{\partial M}$ aussi, donc

$$\widetilde{v}_{k,T,1}\mid_{\partial M}=-\partial_{y_1}\widetilde{\varphi}+o\left(1\right)_{H^1_{\varrho_0}}=o\left(1\right)_{H^1_{\varrho_0}}, \tag{6.29}$$

$$\widetilde{v}_{k,T,2}\mid_{\partial M}=-\partial_{y_2}\widetilde{\varphi}+o\left(1\right)_{H^1_{\varrho_0}}=o\left(1\right)_{H^1_{\varrho_0}}, \tag{6.30}$$

puisque les symboles $\eta_{1,2}$ s'annulent sur l'ensemble $\{\eta=0\}$. On obtient donc d'après l'équation (5.9)

$$\partial_x v_{k,T,x}\mid_{\partial M}=o\left(1\right)_{L^2_{\varrho_0}}. \tag{6.31}$$

Il y a donc réflexion totale pour la mesure μ_T et le même argument de conservation de l'énergie implique que $\mu_L=0$ près de ϱ_0. La propriété $\mathcal{P}\left(t_0\right)$ est donc aussi vérifiée.

6.0.4. Le cas v). — L'étude de ce cas est proche de celle réalisée pour l'étude de la transmission à travers une interface dans une géométrie similaire à la notre par L.Miller [**Mil96**].

On note μ la mesure associée à $\partial_t\widetilde{\varphi}$ et

$$\begin{pmatrix}\mu^1_\partial & \mu^{*,1/2}_\partial\\ \mu^{1/2}_\partial & \mu^0_\partial\end{pmatrix} \tag{6.32}$$

les mesures de ses traces sur le bord (qui sont bornées dans H^1 et L^2 respectivement puisque $\varrho_0\in\mathcal{H}_T$). Soit $Q=Q_1+Q_0\frac{\partial_x}{i}$, avec Q_i des opérateurs pseudodifférentiel tangentiels d'ordre i à support compact.

En calculant $\left(\left[\widetilde{P}_L,Q\right]\partial_t\widetilde{\varphi},\partial_t\widetilde{\varphi}\right)$ et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\left\langle\mu,\frac{-2r_L\partial_x q_0-2\xi\partial_x q_1+\{r_L,q_0\xi+q_1\}}{\lambda^2}\right\rangle&\\ =\langle\mu^1_\partial,\frac{q_0r_L}{|\eta|^2}\rangle+\langle\mu^0_\partial,q_0\rangle+2\langle\mathrm{Re}\mu^{1/2}_\partial,\frac{q_1}{|\eta|}\rangle.&\end{aligned} \tag{6.33}$$

On prend dans un premier temps $q_1=0$ et

$$q_0\left(x,y,t,\eta,\tau\right)=q^0_0\left(y,t,\eta,\tau\right)\theta\left(x/\varepsilon\right)\psi\left(r_L/\varepsilon^2\right), \tag{6.34}$$

avec θ et ψ deux fonctions C^∞ à supports compacts égales à 1 au voisinage de 0. On obtient par convergence dominée

$$\langle\mu,\frac{-\partial_x r_L q_0}{\lambda^2}1_{x=0}1_{\mathcal{G}_L}\rangle=\langle\mu^0_\partial,q^0_0 1_{\mathcal{G}_L}\rangle. \tag{6.35}$$

Soit ϱ_1 un point du bord voisin mais différent de ϱ_0. Comme la mesure μ_T incidente est nulle au voisinage de ϱ_1, on obtient d'après la théorie hyperbolique standard, près de ϱ_1, une relation pseudodifférentielle sur les deux traces de $\widetilde{v}_k$ de la forme

$$(\widetilde{v}_k)_{\partial M}=E_{-1}\left(\partial_x(\widetilde{v}_k)_{\partial M}\right)+o(1)_{H^1_{\varrho_1}}, \tag{6.36}$$

où E_{-1} est un o.p.d. *scalaire* d'ordre -1 de symbole principal

$$e_{-1}(y,\eta) = \frac{1}{\sqrt{\tau^2\nu_T^2 - \|\eta\|^2}}. \tag{6.37}$$

D'après (5.8) et (5.9), on obtient pour $\partial_t\widetilde{\varphi}$ la condition aux limites

$$\partial_t\widetilde{\varphi}_{\partial M} = B_{-1}\left(\frac{\partial_x}{i}\partial_t\widetilde{\varphi}_{\partial M}\right) + o(1)_{H^1_{\varrho_1}}, \tag{6.38}$$

où B_{-1} est un o.p.d. d'ordre -1 de symbole principal

$$b_{-1}(y,\eta) = \frac{\sqrt{\tau^2/\nu_T^2 - \|\eta\|^2}}{\|\eta|^2}. \tag{6.39}$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de propagation pour la mesure μ qui est donc invariante près de ϱ_1 par le flot associé à cette condition aux limites. Il en résulte que si $s \mapsto \gamma(s)$ est la bicaractéristique généralisée de $-\xi^2 + r_L$ vérifiant $\gamma(0) = \varrho_0$ (avec $s \mapsto t(s)$ croissant), on a

$$\begin{cases} \text{Le support de } \mu \text{ est contenu dans } \{\gamma(s)\,;s \geq 0\} \\ \text{et } \mu \text{ est invariante par le flot précédent sur } \{\gamma(s)\,;s > 0\} \end{cases} \tag{6.40}$$

Comme près de ϱ_0, $\gamma(s)$ ne rencontre pas $\mathcal{H}_L$, le crochet de Poisson $\{-\xi^2 + r_L, q_1\}(\gamma(s))$ vaut $\tau\frac{d}{ds}q_1(\gamma(s))$ (voir (3.29)). Il résulte alors de (6.33)

$$\langle\mu, \frac{\tau}{\lambda^2}\frac{d}{ds}q_1(\gamma(s))\rangle = 2\langle\mathrm{Re}\mu_\partial^{1/2}, \frac{q_1}{|\eta|}\rangle \tag{6.41}$$

Or les bicaractéristiques peuvent être paramétrées par une des variables tangentes (t, y, τ, η), donc (6.41) implique que $\frac{d\mu}{ds}$ est une mesure. En particulier μ ne charge pas ϱ_0. D'après (6.35), μ_∂^0 ne charge donc pas non plus ϱ_0. L'inégalité de Cauchy Schwartz implique

$$|\mu_\partial^{1/2}| \leq C\sqrt{|\mu_\partial^0||\mu_\partial^1|} \tag{6.42}$$

La mesure $\mu_\partial^{1/2}$ ne charge donc pas non plus ϱ_0 ; donc (6.41) implique que $\frac{d\mu}{ds}$ est une mesure qui ne charge pas ϱ_0. D'après (6.40) et la formule des saut, la mesure μ est donc nulle; ce qui implique $u_{k,L} \to 0$ dans $H^1_{\varrho_0}$. On peut donc appliquer le résultat de la section précédente qui démontre que la propriété $\mathcal{P}(t_0)$ est vérifiée.

Appendice A

Les théories elliptique et hyperbolique « standard »

Dans cette annexe nous démontrons les résultats classiques près des points hyperboliques ou elliptiques. Nous démontrons ces résultats dans le cas elliptique par la technique des projecteurs de calderón et dans le cas hyperbolique par des estimations d'énergie.

A.1. La théorie elliptique. — Nous montrons dans cette partie deux résultats : d'une part qu'indépendament de toute condition aux limites les deux traces de la solution d'un problème elliptique d'ordre 2 sont liées par une relation pseudodifférentielle et que dans le cas d'un problème aux limites vérifiant les conditions de Lopatinski, ces deux traces sont essentiellement nulles dans la région elliptique. On limitera notre étude à celle d'un problème aux limites et nous supposerons connus les résultats dans le cas intérieur.

A.1.1. Sans condition aux limites. — On reprend les notations de la section 2 et on se place près d'un point $\varrho_0 = (x_0 = 0, y_0, \eta_0) \in \mathcal{E}$, ce qui se traduit par la relation

$$-r(x, y, \eta) \geq C\|\eta|^2 \tag{A.1}$$

près de ϱ_0. On considère une suite (u^k) bornée dans $H^1(]0,1[\times Y)$ et telle que

(A.2)
$$Pu^k = \big((\partial_x^2 + R(x, y, D_y))\,\mathrm{Id} + M_0\partial_x + M_1\big)\,u^k = v^k \to 0 \text{ dans } L^2(]0,1[\times Y)$$

Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ à support proche de (x_0, y_0) et égale à 1 près de ce point et $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ homogène de degré 0 pour $|\eta| \geq 1$ à support dans un petit voisinage conique de η_0 et égale à 1 près de ce point. On note $p(x, y, \xi, \eta = -\xi^2 + r(x, y, \eta)$ et $m(x, y, \xi, \eta)$ un symbole matriciel (polynomial en la variable ξ) tel que

$$P = \mathrm{Op}(-\xi^2 + r(x, y, \eta) + m(x, \xi, y, \eta)). \tag{A.3}$$

On définit

$$E_M = \sum_{l=0}^{M} E^l \tag{A.4}$$

une paramétrixe de l'opérateur P à l'ordre M par la procédure suivante :

$$E^0 = \mathrm{Op}\left(\frac{\varphi(x, y)\psi(\eta)}{-\xi^2 + r(x, y, \eta)}\right)\,\mathrm{Id} \tag{A.5}$$

et les $E^l = (E^l_{i,j})_{i,j=1}^N$ sont des matrices $N \times N$ d'opérateurs pseudodifférentiels définis par récurence par les relations

$$E^1 \times p = -\sum_{|\alpha|=1} \frac{1}{i^{|\alpha|}} \partial^\alpha_{\xi,\eta} E^0 \times \partial^\alpha_x p - E^0 \times m, \tag{A.6}$$

$$E^n \times p = -\sum_{\substack{|\alpha|+k=n,\\ k\neq n,}} \frac{1}{i^{|\alpha|}} \partial^\alpha_{\xi,\eta} E^k \times \partial^\alpha_x p - \sum_{|\alpha|+k=n-1} \frac{1}{i^{|\alpha|}} \partial^\alpha_{\xi,\eta} E^k \times \partial^\alpha_x m, \tag{A.7}$$

où $p = (-\xi^2 + r)$ Id et $\times$ désigne la multiplication des matrices (si on a choisi les supports des fonctions φ et ψ assez petits, p est inversible sur le support des termes de droite de (A.6), (A.7)).

Le calcul symbolique des opérateurs pseudodifférentiels montre que

$$E_M \circ P = \varphi(x)\psi(D_y)\ \mathrm{Id} + R_M, \tag{A.8}$$

où R_M est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $-1-M$.

On note $\underline{u^k}$ le prolongement par 0 dans $\{x<0\}$ de u^k. D'après la formule des sauts, on a

$$P\underline{u^k} = \partial_x u^k\ |_{x=0} \otimes \delta_{x=0} - u\ |_{x=0} \otimes \delta'_{x=0} + \underline{v^k}. \tag{A.9}$$

Soit $\tilde\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{1+d})$, égale à 1 au voisinage du support de φ. Appliquant $E_M \circ \tilde\varphi$ à (A.9) (avec $M \geq 3$), on obtient

$$\begin{aligned} &\varphi(x,y)\psi(D_y)\underline{u^k} \\ &\quad = E_M(\tilde\varphi(x=0,y)\partial_x u^k\ |_{x=0} \otimes \delta_{x=0} - \tilde\varphi(x=0,y) u\ |_{x=0} \otimes \delta'_{x=0}) + w^k, \end{aligned} \tag{A.10}$$

avec

$$\begin{aligned} w^k &\to 0 \text{ dans } H^2(]-1,1[\times Y), \\ \partial_x w^k &\to 0 \text{ dans } H^2(]-1,1[; H^{-1}(Y)). \end{aligned} \tag{A.11}$$

Notons $e_M(x,y,\xi,\eta)$ le symbole de l'operateur E_M qui est d'après (A.5), (A.6) et (A.7) méromorphe en la variable ξ avec des pôles aux points $\xi^\pm = \pm i\sqrt{-r(x,y,\eta)}$. On a

$$\begin{aligned} &E_M(\tilde\varphi(x=0,y)\partial_x u^k\ |_{x=0} \otimes \delta_{x=0})(x,y) \\ &\quad = (2\pi)^{-d-1} \int e^{i(x\cdot\xi + (y-y')\cdot\eta)} e_M(x,y,\xi,\eta)\tilde\varphi(x=0,y)\partial_x u\ |_{x=0}\ (y')dy'd\eta d\xi. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Pour calculer cette expression pour $x<0$, on déforme le contour d'intégration en ξ dans le demi plan $\{\mathrm{Im}\xi < 0\}$ et on obtient par la formule des résidus

(pour $x < 0$)

$$(A.13)\quad E_M(\partial_x u^k\,|_{x=0} \otimes \delta_{x=0})(x,y)$$
$$= (2\pi)^{-d} e^{i\xi^-(x,y,\eta)\cdot x} \int e^{i(y-y')\cdot\eta} n_M(x,y,\eta)\partial_x\tilde{\varphi}(x=0,y)u\,|_{x=0}\,(y')dy'd\eta,$$

où $n_M(x,y,\eta)$ est le résidu de la fonction $-ie_M$ au point ξ^-. En particulier n_M est un symbole de degré -2 de partie principale égale à

$$\sigma_{-2}(n_M) = \frac{-\varphi(x,y)\psi(\eta)}{2\sqrt{-r(x,y,\eta)}}. \tag{A.14}$$

De la même façon on calcule pour $x < 0$

$$(A.15)\quad E_M(-\tilde{\varphi}(x=0,y)u^k\,|_{x=0} \otimes \delta'_{x=0})(x,y)$$
$$= (2\pi)^{-d} e^{i\xi^-(x,y,\eta)\cdot x} \int e^{i(y-y')\cdot\eta} d_M(x,y,\eta)\partial_x\tilde{\varphi}(x=0,y)u\,|_{x=0}\,(y')dy'd\eta,$$

où $d_M(x,y,\eta)$ est un symbole de degré -1 de partie principale égale à

$$\sigma_{-2}(d_M) = \frac{-\varphi(x,y)\psi(\eta)}{2}. \tag{A.16}$$

Puisque $\underline{u^k} = 0$ dans l'ensemble $\{x < 0\}$, on obtient d'après (A.10), (A.11) que la somme des termes apparaîssant dans (A.13) et (A.15) tend vers 0 dans $H^2(]-1,0[\times Y)$, ce qui implique en prenant la trace sur $x = 0^-$ que

(A.17)
$$\mathrm{Op}(n_M)\,|_{x=0}\,(\partial_x u^k\,|_{x=0}) - \mathrm{Op}(d_M)\,|_{x=0}\,(u^k\,|_{x=0}) \to 0 \text{ dans } H^{3/2}(Y);$$

ce qui montre qu'indépendament de toute condition aux limites il existe une relation pseudodifférentielle entre les deux traces.

A.1.2. La condition aux limites. — On suppose que la suite (u^k) vérifie de plus une condition aux limites (avec A et B des opérateurs pseudodifférentiels de degré 0 et 1 respectivement)

$$A(u\,|_{x=0}) + B(\partial_x u\,|_{x=0}) \to 0 \text{ dans } H^1(Y) \tag{A.18}$$

On suppose que cette condition aux limites vérifie les conditions de Lopatinski uniformes, ce qui se traduit simplement par le fait que le système

$$\begin{pmatrix} -\sigma_{-2}(d_M) & \sigma_{-1}(n_M) \\ \sigma_0(A) & \sigma_1(B) \end{pmatrix} \tag{A.19}$$

est indépendant.

On déduit alors de (A.17), (A.18)

$$\begin{aligned} u\,|_{x=0} &\to 0 \text{ dans } H^1_{\varrho_0}, \\ \partial_x u\,|_{x=0} &\to 0 \text{ dans } L^2_{\varrho_0}. \end{aligned} \tag{A.20}$$

A.2. La théorie hyperbolique. — Dans cette partie nous démontrons trois résultats dans le cas microlocalement hyperbolique pour une suite de solutions bornée dans l'espace d'énergie H^1 : d'une part que les traces ont la régularité H^1 et L^2 respectivement, d'autre part que si on suppose que la solution est meilleure (à l'intérieur) sur une des deux demi-bicaractéristiques alors on a une relation pseudo-différentielle entre les deux traces ; et enfin que si elle est meilleure que H^1 sur les deux demi-bicaractéristiques, alors les deux traces sont « nulles ».

On se place près d'un point ϱ_0 hyperbolique, ce qui se traduit par

$$r(x,y,\eta) \geq c|\eta|^2 \tag{A.21}$$

près de ϱ_0. On considère une suite u^k bornée dans $H^1(]0,1[\times Y)$ et telle que

$$\begin{aligned} Pu^k = \big((\partial_x^2 + R(x,y,D_y))\ \mathrm{Id} + M_0\partial_x + M_1\big)\, u^k = v^k \\ \to 0 \text{ dans } L^2(]0,1[\times Y). \end{aligned} \tag{A.22}$$

Les résultats de cette partie reposent sur le lemme de factorisation suivant (voir [**Hör85**, lemme 23.2.8]) :

Lemme A.1. — *Soit $\varrho_0 \in \mathcal{H}$ un point hyperbolique. Alors il existe $\Lambda^{\pm} = Op(\lambda^{\pm}(x,y,\eta))$ et $R = Op(r(x,y,\eta))$ des opérateurs pseudodifférentiels tangentiels d'ordre 1 et $-\infty$ respectivement tels que près de ϱ_0 on a*

$$\begin{aligned} P &= \partial_x^2 + R(x,y,D_y) + M_0(x,y,D_y)\partial_x + M_1(x,y,D_y) \\ &= -(D_x - \Lambda^+(x,y,D_y)(D_x - \Lambda^-(x,y,D_y) + R(x,y,D_y). \end{aligned} \tag{A.23}$$

De plus le symbole principal de $\Lambda^{\pm}$ est près de ϱ_0 égal à $\sigma_1(\Lambda^{\pm}) = \sqrt{r}$.

Preuve. La preuve de ce lemme est identique à celle de Hörmander dans le cas scalaire. Nous la rappelons : on procède par approximations successives. On choisit d'abord Λ_1^+ un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal égal près de ϱ_0 à $\lambda_1^+(x,y,\eta) = \sqrt{r}(x,y,\eta)$. On pose $\Lambda_1^- = -\Lambda_1 + iM_0$ et on obtient

$$(D_x - \Lambda_1^+)(D_x - \Lambda_1^-) = D_x^2 - (\Lambda_1^+ + \Lambda_1^-)D_x - \Lambda_1^+\lambda_1^- - \frac{1}{i}\partial_x(\Lambda_1^-). \tag{A.24}$$

Comme le symbole principal de $-\Lambda_1^+\Lambda_1^-$ est le même que celui de R on obtient que

$$P + (D_x - \Lambda_1^+)(D_x - \Lambda_1^-) = R_1, \tag{A.25}$$

où R_1 est un opérateur pseudo-différentiel tangentiel de degré 1.

Supposons maintenant qu'on a construit $\Lambda_i^{\pm}$ et R_i des opérateurs pseudo-différentiels de degrés respectifs 1 et $2-i$ tels que

$$P + (D_x - \Lambda_i^+)(D_x - \Lambda_i^-) = R_i. \tag{A.26}$$

On cherche alors Λ_{i+1} sous la forme $\Lambda^{\pm}_{i+1} = \Lambda^{\pm}_i + S^{\pm}_{i+1}$ où les $S^{\pm}_{i+1}$ sont des opérateurs pseudodifférentiels tangentiels de degré $2-(i+1)$. On obtient

(A.27)
$$\begin{aligned} P + (D_x - \Lambda^+_{i+1})(D_x - \Lambda^-_{i+1}) &= R_i + S^+_{i+1}(D_x - \Lambda^-_i) + (D_x - \Lambda^+_i)S^-_{i+1} \\ &\quad + S^+_{i+1}S^-_{i+1}, \\ &= R_i + (S^+_{i+1} + S^-_{i+1})D_x - S^+_{i+1}\Lambda^-_i - S^-_{i+1}\Lambda^+_i \\ &\quad + [D_x - \Lambda^+_i, S^-_{i+1}] + S^+_{i+1}S^-_{i+1}. \end{aligned}$$

Comme le symbole principal de $\Lambda^{\pm}_i$ est d'après notre construction *scalaire* (et égal à $\pm\sqrt{r}$), la contribution de la dernière ligne dans (A.27) est de degré $2-(i+1)$, Si on prend

$$S^+_{i+1} + S^-_{i+1} = 0, \tag{A.28}$$

et S^+_{i+1} un opérateur pseudodifférentiel tangentiel de symbole principal égal à

$$\sigma_{2-(i+1)}(S^+_{i+1}) = \frac{\sigma_i(R_i)}{-\sqrt{r}}, \tag{A.29}$$

on voit facilement que le terme de droite dans (A.27) est un opérateur pseudodifférentiel tangentiel de degré $2-(i+1)$. Une procédure de sommation des symboles à la Borel permet alors de définir $\Lambda^{\pm}_{+\infty}$ (pour notre propos, on aurait pu en fait se limiter a définir une factorisation approchée, c'est à dire à définir les $\Lambda^{\pm}_i$ pour i assez grand). □

Remarque A.2. — *On peut de la même façon construire des opérateurs* $\widetilde{\Lambda}^{\pm}$ *de symboles principaux égaux à* $\pm\sqrt{r}$ *et* $\widetilde{R}$ *tels que*

$$\begin{aligned} P &= \partial_x^2 + R(x,y,D_y) + M_0(x,y,D_y)\partial_x + M_1(x,y,D_y), \\ &= -(D_x - \widetilde{\Lambda}^-(x,y,D_y)(D_x - \widetilde{\Lambda}^+(x,y,D_y) + \widetilde{R}(x,y,D_y). \end{aligned} \tag{A.30}$$

Soit $q_0(y,\eta)$ un symbole de degré 0 égal à 1 dans un voisinage conique de ϱ_0 et à support proche de ϱ_0. On note $q^{\pm}(x,y,\eta)$ la solution de l'équation

$$(\partial_x \mp H_{\sqrt{r(x,y,\eta)}})q^{\pm} = 0, \qquad q^{\pm}\,|_{x=0} = q_0, \tag{A.31}$$

où $H_{\sqrt{r}}$ est le champ hamiltonien associé à $\sqrt{r}$ (ici la variable x est considérée comme un paramètre). Si le support de q_0 est assez proche de ϱ_0, cette équation a bien un sens (au moins pour $|x|$ assez petit). On remarquera aussi que $q^{\pm}$ est alors invariante le long de la projection en (x,y,η), $\gamma^{\pm}$, de la courbe intégrale du champ hamiltonien du symbole $p = \xi^2 - r(x,y,\eta)$ issue du point $\varrho = (x=0, y, \xi = \pm\sqrt{r}(0,y,\eta), \eta)$.

Soit $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_x)$ égale à 1 au voisinage de 0. Le symbole $\varphi(x)q(x,y,\eta)$ est alors à support compact en x,y et ce support peut être choisit arbitrairement proche de $\gamma^\pm$ si le support de q_0 est choisi proche de ϱ_0. On notera $Q^\pm = \mathrm{Op}(q^\pm)$ et

$$w_+^k = (Q^+(D_x - \Lambda^-)u^k, \qquad w_-^k = (Q^-(D_x - \widetilde{\Lambda}^+)u^k, \tag{A.32}$$

solutions de

$$(D_x - \Lambda^+)w_+^k = [D_x - \Lambda^+, Q^+](D_x - \Lambda^-)u^k + Q^+v^k, \tag{A.33}$$

$$(D_x - \widetilde{\Lambda}^-)w_-^k = [D_x - \widetilde{\Lambda}^-, Q^-](D_x - \widetilde{\Lambda}^+)u^k + Q^-v^k. \tag{A.34}$$

Les termes de droite dans (A.33) et (A.34) sont bornés dans L^2. Les inégalités d'énergie usuelles (voir [**Hör85**, §23.1]) pour l'opérateur $(D_x - \Lambda^+)$ montrent (puisque $v^k \equiv 0$ pour $x >> 0$) que

$$w_+^k \in C([0,1]; L^2(Y)). \tag{A.35}$$

On a le même résultat pour w_-^k, ce qui implique que $(Q_0(D_x - \Lambda_-)u^k) \mid_{x=0}$ et $(Q(D_x - \widetilde{\Lambda}_-)u^k) \mid_{x=0}$ sont bornés dans L^2, dont on déduit que $D_x u^k \mid_{x=0}$ et $u^k \mid_{x=0}$ sont bornés dans $L^2_{\varrho_0}$ et $H^1_{\varrho_0}$ respectivement.

On revient à l'analyse de (A.33).

Puisque le symbole principal de $[D_x - \Lambda^+, Q^+]$ est égal d'après (A.31) à

$$\frac{1}{i}\left(\partial_x(q_0) - \{\sqrt{r}, q_0\}\right) + \frac{1}{i}\left(\partial_x(\varphi) - \{\sqrt{r}, \varphi\}q_0\right) = -i\varphi'(x)q_0, \tag{A.36}$$

la seule contribution qui ne converge pas fortement vers 0 dans L^2 dans le membre de droite de (A.33) est celle de l'intersection du support de q_0 (un petit voisinage de γ^+) avec le support de φ'). Si on fait l'hypothèse additionnelle que u^k converge fortement vers 0 microlocalement dans $\{x > 0\}$ au voisinage la demi bicaractéristique issue du point $\varrho = (x = 0, y_0, \xi_0 = \sqrt{r}(0, y_0, \eta_0), \eta_0)$ (ou dit autrement que le support de la mesure de défaut associée à (u^k) ne rencontre pas, au voisinage de ϱ_0, pour $x > 0$, cette demi-bicaractéristique), le terme de droite de (A.33) converge fortement vers 0 dans L^2 et on en déduit par les estimations d'énergie usuelles pour l'opérateur $(D_x - \Lambda^+)$

$$Q_0(D_x u^k \mid_{x=0} - \Lambda^- u^k \mid_{x=0}) \to 0 \text{ dans } L^2(Y). \tag{A.37}$$

La relation (A.37) nous donne donc une relation pseudodifférentielle entre les deux traces de u^k. Si on fait l'hypothèse symétrique que le support de la mesure de défaut associée à (u^k) ne rencontre pas, au voisinage de ϱ_0, pour $x > 0$, la demi-bicaractéristique issue de $(x = 0, y_0, \xi_0 = -\sqrt{r}, \eta_0)$, on obtient une relation pseudodifférentielle symétrique

$$\begin{aligned} &Q_0(D_x u^k \mid_{x=0} - \widetilde{\Lambda}^+ u^k \mid_{x=0}) \to 0 \text{ dans } L^2(Y) \\ \Leftrightarrow\ &Q_0(D_x u^k \mid_{x=0} + \Lambda^- u^k \mid_{x=0}) \to 0 \text{ dans } L^2(Y). \end{aligned} \tag{A.38}$$

Si les deux relations pseudo-différentielles précédentes sont vérifiées, on en déduit facilement que les deux traces de (u^k) convergent fortement vers 0 dans $H^1_{\varrho_0}$ et $L^2_{\varrho_0}$ respectivement.

Références

[BLR92] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary. *Siam Journal of Control and Optimization*, 305 :1024–1065, 1992.

[CP70] J. Chazarain and A. Piriou. *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires.* Gauthier Vilars, 1970.

[Den82] N. Denker. On the propagation of the polarization set for systems of real principal type. *Journal of Functional Analysis*, 46 :351–373, 1982.

[Gér85] C. Gérard. Propagation de la polarisation pour des problemes aux limites convexes pour les bicaracteristiques. *Commun. Partial Differ. Equations*, 10 :1347–1382, 1985.

[Gér91] P. Gérard. Microlocal defect measures. *Communications in Partial Differential Equations*, 16 :1761–1794, 1991.

[GL93] P. Gérard and E. Leichtnam. Ergodic properties of eigenfunctions for the dirichlet problem. *Duke Mathematical Journal*, 71 :559–607, 1993.

[Hör83] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, volume 256 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer Verlag, 1983.

[Hör85] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*, volume 274 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer Verlag, 1985.

[KT95] H. Koch and D. Tataru. On the spectrum of hyperbolic semigroups. *Comm. Partial Differential Equations*, 20(5-6) :901–937, 1995.

[Leb96] G. Lebeau. Equation des ondes amorties. In A. Boutet de Monvel and V. Marchenko, editors, *Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics*, pages 73–109. Kluwer Academic, The Netherlands, 1996.

[LZ98] G. Lebeau and E. Zuazua. Decay rates for the three-dimensional linear system of thermoelasticity. *Prépublications du Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique*, 98-3, 1998.

[Mil96] L. Miller. *Propagation d'ondes semi-classiques à travers une interface et mesures 2-microlocales.* PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1996.

[MS78] R.B. Melrose and J. Sjöstrand. Singularities of boundary value problems I. *Communications in Pure Applied Mathematics*, 31 :593–617, 1978.

[MS82] R.B. Melrose and J. Sjöstrand. Singularities of boundary value problems I & II. *Communications in Pure Applied Mathematics*, 31 & 35 :593– 617 & 129–168, 1978 & 1982.

[Tar90] L. Tartar. H-measures, a new approach for studying homogenization, oscillations and concentration effects in partial differential equations. *Proceedings of the Royal Society Edinburgh*, 115-A :193–230, 1990.

N. BURQ, Université de Paris Sud, UMR 8628 du CNRS, Mathématiques, Bât 425, 91405 Orsay Cedex, FRANCE

G. LEBEAU, Centre de Mathématiques, UMR 7640 du CNRS, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, FRANCE