Table des matières.

Introduction, énoncé du résultat.

Le problème du contrôle pour l'équation des plaques sur un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, Ω, a été étudié par J.L. Lions [Li]. En utilisant sa méthode H.U.M. et des techniques de multiplicateurs, J.L.Lions démontre des résultats de contrôlabilité exacte en temps fini (dépendant de la géométrie de l'ouvert), si le contrôle porte sur une partie Γ_0 du bord Γ de l'ouvert Ω définie de la manière suivante:

Soit $x_0 \in \mathbf{R}^n$, pour tout point $x \in \Gamma$ on note $n(x)$ la normale sortante au bord en x. On définit Γ_0 par

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma;\ n(x) \cdot (x - x_0) > 0\}.$$

Ces résultats ont été améliorés par E.Zuazua [Z] qui a démontré qu'on pouvait prendre un temps de contrôle arbitrairement petit (ce phénomène est dû au caractère non hyperbolique de l'équation des plaques).

A la suite des travaux de C.Bardos, G.Lebeau et J. Rauch [BLR] sur le contrôle de l'équation des ondes, G. Lebeau [Le] a appliqué les techniques d'analyse micro-locale à l'équation des plaques et obtenu des résultats de contrôlabilité exacte en temps arbitrairement petit avec des hypothèses sur Γ_0 plus naturelles que celles de J.L. Lions. Plus précisément, on dira que Γ_0 contrôle géométriquement Ω en temps T_0 si tout rayon partant d'un point $x_0 \in \Omega$ dans toute direction $\xi \in \mathbf{R}^n$, parcouru à vitesse 1, se réfléchissant sur le bord de Ω selon les lois de l'optique géométrique, atteint Γ_0 en temps inférieur à T_0 (pour une définition rigoureuse nous renvoyons à [BLR]). Le résultat de G.Lebeau dit alors que si Γ_0 contrôle géométriquement Ω en temps fini, on peut contrôler l'équation des plaques en temps arbitrairement petit avec un contrôle portant agissant sur Γ_0.

Il faut cependant noter que contrairement au cas de l'équation des ondes où le critère de contrôlabilité géométrique fournit des conditions nécessaires et suffisantes pour la contrôlabilité exacte, on n'a, pour l'équation des plaques, qu'une condition suffisante. En effet, les résultats de A.Haraux [H] sur le contrôle semi-interne de l'équation des plaques dans un rectangle de $\mathbf{R}^2$ où on autorise le contrôle à agir dans une bande parallèle à un des cotés , montrent que l'hypothèse de contrôlabilité géométrique n'est pas nécessaire. Ces derniers résultats ont ensuite été étendus par S.Jaffard [J] au cas du contrôle interne d'un rectangle c'est à dire au cas où on autorise le contrôle à agir seulement sur un ouvert quelconque du rectangle. Cependant ces résultats dont la démonstration fait appel à des techniques d'analyse harmoniques ne semblent pas généralisables à des situations géométriques plus complexes.

Nous allons nous intéresser au contrôle de l'équation des plaques dans un cadre géométrique où la partie du bord sur laquelle nous contrôlons ne contrôle plus géométriquement l'ouvert. Nous nous placerons donc dans la situation géométrique suivante:

Hypothèses

Soit $\widehat{\Omega}$ un ouvert de $\mathbf{R}^3$, connexe, borné , à frontière analytique . Soient $\theta_1, \cdots, \theta_N$, N fermés strictement convexes de $\widehat{\Omega}$, à frontière C^∞ tels que l'enveloppe convexe $\mathrm{conv}(\underset{i}{\cup}\theta_i)$, de l'union des θ_i soit inclue dans $\widehat{\Omega}$, et vérifiant de plus les hypothèses suivantes introduites par M. Ikawa [I3]:

$$H_1)\ \forall 1 \leq j_1, j_2, j_3 \leq N,\ j_i \neq j_k \Rightarrow \mathrm{conv}(\theta_{j_1} \cup \theta_{j_2}) \cap \theta_{j_3} = \emptyset.$$

$$H_2)\ \exists \alpha > 0\ ;\ \sum_{\gamma \text{ primitif}} \lambda_\gamma d_\gamma e^{\alpha d \gamma} < \infty,$$

où $\lambda_\gamma = \sqrt{\beta_\gamma \beta'_\gamma}$; β_γ et β'_γ sont les deux valeurs propres de module plus petit que 1 (strictement car les obstacles θ_i sont supposés strictement convexes) de l'application de Poincaré (billard) associée à la trajectoire captive γ; la sommation n'ayant lieu que sur les trajectoires primitives (voir définition au §6) et pour toute trajectoire captive γ,

$$\gamma = \bigcup_{i=0}^{n} [x_i, x_{i+1}], x_{n+1} = x_0,$$

$$d_\gamma = \sum_{i=0}^{n} \|x_i - x_{i+1}\|.$$

Remarque 1 : l'hypothèse $H1$ est essentiellement technique.

Remarque 2 : l'hypothèse $H2$ est une hypothèse sur la structure fortement hyperbolique de l'application de billard et est par exemple vérifiée si les θ_j sont des boules de rayons r, éloignées les unes des autres d'une distance $d > rN$.

Soit $\Omega = \widehat{\Omega} \backslash \bigcup_i \theta_i$.

Ce cadre géométrique a été étudié par C.Gérard [G] (dans le cas de deux obstacles) et M.Ikawa [I1,2,3], pour le calcul de la localisation des pôles de la matrice de diffusion pour l'équation des ondes à l'extérieur des obstacles. Le résultat que nous obtenons semblerait indiquer l'existence d'un lien qui reste à définir précisément, entre cette localisation et la contrôlabilité exacte.

Enoncé du théorème

Sous ces hypothèses, nous allons démontrer le théorème de contrôlabilité exacte suivant :

Théorème 0.1.— *Pour tout temps* $T_0 > 0$*, pour tout réel* $\varepsilon > 0$*, pour toutes conditions initiales* $(u_0, u_1) \in H^{1+\varepsilon}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H^{-1+\varepsilon}(\Omega)$*, il existe un contrôle* $g \in L^2(]0, T_0[\times \partial\widehat{\Omega})$ *tel que la solution du problème d'évolution :*

$$
\begin{aligned}
(\partial_t^2 + \Delta^2)u &= 0 \quad \textit{dans } \mathbf{R}_t \times \Omega, \\
u|_{\partial\Omega} &= 0, \\
\Delta u|_{\partial\Omega} &= g \times 1_{]0,T_0[\times\partial\widehat{\Omega}}, \\
u|_{t=0} &= u_0, \\
\partial_t u|_{t=0} &= u_1,
\end{aligned}
\tag{0.1}
$$

vérifie $u \equiv 0$ *pour tout* $t \geq T_0$*.*

Remarque 3 : ce résultat est légèrement plus faible que celui de G. Lebeau [Le], la perte sur la régularité des données initiales étant due au fait que $\partial\widehat{\Omega}$ ne contrôle plus géométriquement Ω en temps T_0 fini.

Remarque 4 : les hypothèses H_1 et H_2 sont évidemment vérifiées si on n'a que deux obstacles.

Remarque 5 : la dimension $n = 3$ ne jouant aucun rôle particulier, nos résultats semblent généralisables au cas n quelconque.

Le plan de l'article est le suivant : dans le §1 nous réduisons le problème à un problème de décroissance exponentielle de l'énergie, pour la démonstration duquel nous adapterons une stratégie inspirée de celle de M.Ikawa [I3] consistant à construire une paramétrixe de la solution de l'équation de Schrödinger. Le §2 est consacré à la construction des troncatures micro-locales dont nous aurons besoin par la suite. Dans le §3 nous donnons des résultats sur le comportement des rayons captifs. Ces résultats sont pour la plupart dus à M.Ikawa [I1], [I2], [I3]. Dans le §4 nous construisons la paramétrixe dont nous avons parlé plus haut. Dans le §5 nous estimons la décroissance de notre paramétrixe. Le §6 termine enfin la démonstration de notre théorème. Dans l'appendice A nous rappelons quelques résultats sur le calcul h-pseudo-différentiel et dans l'appendice B nous étudions la propagation des singularités h^s dans l'esprit de Lebeau [L].

Ce travail a constitué une thèse de l'Université de Paris Sud (Orsay). Je remercie chaleureusement G.Lebeau qui a dirigé cette thèse pour ses nombreuses indications et pour la constante disponibilité dont il a fait preuve.

1. Réduction du problème.

Nous allons réduire la démonstration du théorème 0.1 à la construction d'une paramétrixe de l'équation de Schrödinger avec conditions au bord de Dirichlet, vérifiant certaines propriétés de décroissance (analogues à la décroissance exponentielle démontrée par M. Ikawa pour les solutions de l'équation des ondes dans $\mathbf{R}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^{N} \theta_i$).

On commence par introduire quelques notations.
Soit $(e_\nu, \lambda_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ la base orthonormée de $L^2(\Omega)$ formée de vecteurs propres pour le Laplacien $-\Delta_{\text{Dirichlet}}$ associés aux valeurs propres λ_ν.

Soient $\rho > 1, \alpha < \rho^{-1}$. On note

$$F_{k,\rho,\alpha} = \{\nu \; ; \rho^k \alpha \leq \sqrt{\lambda_\nu} < \rho^k \alpha^{-1}\}$$

et

$$E_{k,\rho,\alpha} = \{u \in L^2(\Omega) \; ; u = \sum_{\nu \in F_{k,\rho,\alpha}} u_\nu e_\nu\}.$$

1.1 Définition des opérateurs d'évolution.

Notre point de départ est la constatation suivante :

Soit u solution de

$$(1.1) \qquad \begin{aligned} (ih\partial t - h^2\Delta)u &= 0, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \\ u|_{t=0} &= u_0. \end{aligned}$$

Nous poserons pour tout $k \in \mathbf{N}$, $h_k = \rho^{-k}$ et nous noterons $(1.1)_{h=h_k}$ le système (1.1) où on a fixé le coefficient $h = h_k$.

Soit $T_0 > 0$ et soit $\psi(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\psi|_{t \leq T_0/3} \equiv 0$, $\psi|_{t \geq 2T_0/3} \equiv 1$, $\psi(t) \in [0,1]$ et $\psi'(t)$ positive pour tout t.

Alors la fonction $v = \psi(t)u(x,t)$ vérifie

$$
\begin{aligned}
(ih\partial_t - h^2\Delta)v &= ih\psi'(t)u, \\
v|_{t\leq 0} &= 0, \\
v|_{\partial\Omega} &= 0.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Soit $A(h) : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ un opérateur dépendant de h comme paramètre, uniformément borné en h pour la norme L^2 .

L'isométrie (pour la norme L^2) $I(h)$: $u_0 \to u|_{t=T_0}$ peut alors se décomposer en somme de deux termes $I_1(h)$ et $I_2(h)$,

avec $I_1(h)$ défini par

$$
\begin{aligned}
I_1(h) \ : \qquad H_0^1(\Omega) &\to H_0^1(\Omega) \\
u_0 &\to v|_{t=T_0}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

avec v défini par

$$
\begin{aligned}
(ih\partial_t - h^2\Delta)v &= ih\psi'(t)A(h)(u), \\
v|_{t\leq 0} &= 0, \\
v|_{\partial\Omega} &= 0.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

et I_2 défini de la même façon en remplaçant A par $Id - A$.

On a alors

$$I_1 u_0(x) = \int_0^{T_0} \psi'(s) e^{-ih(T_0-s)\Delta_D} \left(A(h)[u(s)]\right) ds\,,$$

donc comme ψ' est positive

$$\|I_1(h)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|A(h)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nous allons montrer que le théorème suivant implique le théorème 0.1 :

Théorème 1.1.— *Il existe des réels $\rho > 1$, $\alpha' < \alpha < \rho^{-1}$ et $T_1 > 0$ et une fonction $r \in C^\infty(T^*\mathbf{R}^3)$, $0 \leq r \leq 1$, tangentielle près du bord de Ω (au sens de l'appendice A), nulle au voisinage du bord extérieur de Ω ($\partial\widehat{\Omega}$), tels que si $x \in \overline{\Omega}$, $r(x,\xi) \neq 1$ et $|\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$, le rayon généralisé issu de (x,ξ) parcouru à la vitesse $|\xi|$ rencontre $\partial\widehat{\Omega}$ en temps $t \in [-T_1, T_1]$ et tels qu'il existe une fonction $q \in C_0^\infty(T^*\Omega)$, $0 \leq q \leq 1$, vérifiant:*

$$q(x,\xi) \equiv 0 \quad \forall\, |\xi| \notin [\alpha', \alpha'^{-1}],$$
$$q(x,\xi) \equiv 1 \quad si \quad x \in X \quad et \quad |\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}],$$

avec X ouvert et $X \subset\subset T^*\Omega$, X vérifiant de plus :
il existe $T_0 > 0$ et $M \in \mathbf{N}^*$ tels que tout rayon généralisé issu de (x,ξ), $x \in \Omega$, $|\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$ parcouru à la vitesse $|\xi|$ restera dans X pendant un intervalle de temps de la forme $[nT_0, (n+1)T_0]$; $0 \leq n \leq M-1$ ou rencontrera le bord extérieur $\partial\widehat{\Omega}$ de l'ouvert Ω et restera dans le complémentaire du support de r pendant un intervalle de temps de la forme $[nT_0, (n+1)T_0]$; $0 \leq n \leq M-1$. L'opérateur I_1 associé à $Op(r)$ par la relation (1.3) vérifiant de plus:

(1.5)
$$\begin{gathered} \exists\, \varepsilon > 0;\ \exists A \in \mathbf{N}^*,\ \exists \sigma > 0,\ \exists\, C > 0;\ \forall\, s \in [-\varepsilon\ ; \varepsilon], \\ \exists k_0 > 0,\ \forall k \geq k_0,\ \forall\, u_k \in E_{k,\rho,\alpha}, \\ \|\, \left(I_{1|h=h_k}\right)^{Ak} I_s Op(q)_{h=h_k} u_k \|_{L^2} \leq C h_k^{\sigma} \|u_k\|_{L^2}, \end{gathered}$$

où on note I_s l'opérateur $u_0 \to u\ |_{t=s}= I_s u_0$, où u est la solution de $(1.1)_{h=h_k}$ associée à la donnée initiale u_0 et $Op(q)$ et $Op(r)$ les opérateurs h-pseudo-différentiels associés aux symboles r et q comme à l'appendice A.

Remarque: l'opérateur $Op(r)$ est un opérateur de troncature qui permet d'éliminer à chaque étape la partie micro-locale de l'énergie de la solution de l'équation de Schrödinger contrôlée par le bord extérieur de l'ouvert.

L'opérateur $Op(q)$ est essentiellement technique; il permet de localiser la fonction u en fréquence dans une zone $|\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$ et de se ramener à une donnée initiale à support compact dans Ω.

Nous avons dû utiliser des troncatures régulières du type de (1.4) plutôt que tronquer brutalement à l'instant $t = T_0$ ce qui correspondrait à remplacer $\psi'(t)$ par $\delta_{t=T_0}$, afin de pouvoir appliquer par la suite des résultats de propagation des singularités.

Pour réduire la démonstration du théorème 0.1 à celle du théorème 1.1, nous allons procéder en deux étapes.

la première étape consistera a montrer que le théorème suivant implique le théorème 0.1

Théorème 1.2.— *Il existe des réels $\rho > 1$, $\alpha' < \alpha < \rho^{-1}$ et $T_1 > 0$ et une fonction r vérifiant les hypothèses du théorème 1.1, tels qu'il existe α'', $\alpha < \alpha'' < \rho^{-1}$ et un entier k_0 tels que pour tous $\nu > 0$ il existe $C > 0$ tel* *que pour tout $k \geq k_0$ et toute fonction $u_{0,k} \in E_{k,\rho,\alpha''}$, on a, si u_k est la solution de (1.1)$_{h=h_k}$ associée à la donnée initiale $u_{0,k}$,*

$$(1.6) \quad \|u_k\|_{L^2}^2 \leq \frac{Ck^2}{\rho^k} \sum_{n=0}^{[\nu\rho^k T_0]} \int_\Omega \int_0^{T_0} |\mathrm{Op}(1-r)_{h=h_k}(u_k(x, nT_0+s))|^2 dxds\,.$$

La deuxième étape consistera à montrer que le théorème 1.1 implique le théorème 1.2.

1.2 le théorème 1.2 implique le théorème 0.1.

Supposons donc le théorème 1.2 démontré. Les réels α, α', α'' et ρ sont donc fixés.

Comme pour tout point (x,ξ) tel que $x \in \Omega$, $|\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$ et $r(x,\xi) \neq 1$, le rayon généralisé issu de (x,ξ), parcouru à la vitesse $|\xi|$, rencontre le bord extérieur de l'ouvert $\partial\widehat{\Omega}$ en un point non diffractif, en un temps $t \in [-T_1, T_1]$ si $r(x,\xi) \neq 1$, d'après les résultats de G.Lebeau [L], §3, on sait que si $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$; $\operatorname{supp}\phi \subset \left[-\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2}\right]$, on a alors:

Proposition 1.3.— *Pour toute suite $U_0 = (u_{0,k})_{k\in\mathbf{N}} \in B_{\rho,\alpha''}$, on notera $U = (u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ la suite des solutions u_k de (1.1)$_{h=h_k}$ associées aux données initiales $u_{0,k}$. On a alors pour tout $U \in B_{\rho,\alpha''}$ et tout $k \in \mathbf{N}$,*

(1.7)

$$\int \phi(t)^2 \int_\Omega |\mathrm{Op}(1-r)(u_k)|^2 dxdt \leq Ch_k^2 \int_{-2T_1}^{2T_1} \int_{\partial\widehat{\Omega}} |\partial_n u_k|^2 dxdt + O(U, h_k).$$

Preuve:(pour la définition de l'espace $B_{\rho,\alpha}$: cf. appendice B).

Avant de démontrer ce lemme remarquons d'abord que le O ne dépend pas en fait de U:

par l'absurde, si le O dépendait de U on aurait:

pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $U_n \in B$ et $k_n \in \mathbf{N}$ tels que

$$\int_\Omega |\mathrm{Op}\,(1-r)(u_{k_n})|^2 \geq Ch_k^2 \int_{-2T_1}^{2T_1} \int_{\partial\widehat{\Omega}} |\partial_n u_{k_n}|^2 dxdt + nh_{k_n},$$

alors nécessairement (k_n) n'est pas bornée car d'après l'inégalité de Gårding (voir appendice B),

$$\int_\Omega |\mathrm{Op}\,(1-r)(u_k)|^2 dx \leq (1 + Ch_k)\|u\|^2$$

et $\|u_k\| \leq 1$ car $u \in B$.

On peut donc, quitte à extraire une sous-suite, supposer k_n strictement croissante.

La suite

$$U = (u_k)\ ;\ u_k = u_{k_n} \quad \text{si} \quad k = k_n, \\ = O \quad \text{sinon} \quad ,$$

fournit alors une contradiction.

1.2.1 Estimation elliptique, relèvement et propagation.

Nous rappelons maintenant comment déduire la proposition 1.3 des résultats de G.Lebeau [L]

Lemme 1.4.— *Il existe $D > 0$ tel que pour tout opérateur h-pseudodifférentiel Q (tangentiel près du bord), à support dans $|\xi| \geq D$, ($|\xi'| \geq D$ près du bord), pour tout $U = (u_k)_{k\in\mathbf{N}} \in E_{\rho,\alpha}$, on a*

$$\int_0^T \int_\Omega |Q\, u_k|^2 dxdt = O(U, h_k)\,. \tag{1.8}$$

Lemme (1.4)'.— *Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^+), \chi \equiv 1$ sur $[\alpha', \alpha'^{-1}]$, alors pour tout $U \in B_{\rho,\alpha}$,*

$$\|(1-\chi)(h_k D_t)\psi(t)(1-Q)u_k\|_{L^2(\mathbf{R}t\times\Omega)} = O(U, h_k)\,.$$

Ces deux lemmes sont démontrés dans [L], ce sont les relations (8) et (11) du paragraphe 3.

On se ramène donc dans un domaine compact de l'espace des phases.

On note

$$|||u|||^2 = \int_{-2T_1}^{2T_1} h_k^2 \int_{\partial\widehat{\Omega}} |\partial_n\, u(t,x)|^2 dtdx.$$

Lemme 1.5.— *Pour tous $\alpha < \rho^{-1}$ et tout $U \in B_{\rho,\alpha}$,*

$WF_b(U) \subset \Sigma_b = \pi\{\tau \in [\alpha, \alpha^{-1}], |\xi|^2 = \tau\}$, où π est la projection de $T^*\mathbf{R}^3$ sur $T^*\partial\Omega\ +\ T^*\Omega = \widetilde{T}^*\Omega$.

(c'est le Lemme 1, §3 de [L] et son corollaire)
(pour la définition de $WF_b U$, cf. appendice B).

Lemme 1.6.— *Soit $\rho_0 = (y_0, \eta_0) = (t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \in \Sigma_b \cap \{t = 0\}$ tel que $r(x_0, \xi_0) \neq 1$, alors il existe un opérateur h-pseudodifférentiel A, elliptique en ρ_0 (tangentiel si $x_0 \in \partial\Omega$), une fonction $\varphi_0 \in C_0^\infty$ telle que $\varphi_0 \equiv 1$ près de x_0 et une constante $C > 0$ tels que*

$$\forall\, \rho > 1,\ \alpha < \rho^{-1},\ U \in B_{\rho,\alpha},\ \|A\varphi_0 u_k\|_{L^2} \leq C|||u_k||| + O(U, h_k). \tag{1.9}$$

Preuve :
Comme le point ρ_0 est contrôlé géométriquement par le bord extérieur de l'ouvert en temps $t \in [-T_1, T_1]$, c'est le lemme 3 de [L], §3.

On en déduit par un argument de compacité la proposition 1.3.
Les relations (1.6) et (1.7) entraînent alors le théorème suivant:

Théorème 1.7.— *Pour tout $\nu > 0$ il existe un entier k_0 et des réels $\rho > 1$, $\alpha'' < \rho^{-1}$, $C > 0$ et $T_1 > 0$ tels que pour tous $k \geq k_0$ et tout $u_k \in E_{k,\rho,\alpha''}$, on ait*

$$\|u_k\|_{L^2}^2 \leq C \frac{k^2}{\rho^{3k}} \int_0^{[\nu \rho^k T_1]} \int_{\partial\widehat{\Omega}} |\partial_n u_k|^2 dx dt\,. \tag{1.10}$$

1.2.2 Décomposition de Littlewood Paley.

On revient maintenant aux solutions de l'équation de Schrödinger :

$$\begin{aligned} (i\partial_t - \Delta)u &= 0, \\ u\,|_{\partial\Omega} &= 0, \\ u\,|_{t=0} &= u_0 \in H_0^1(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 1.8.— *Pour tout $\gamma > 0$ et tout $\varepsilon > 0$*

$$|||u||| = \int_{-\gamma}^{2\gamma} \int_{\partial\widehat{\Omega}} |\partial_n u|^2 dt dx$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$, le complété de $H_0^1(\Omega)$ pour cette norme W est inclus dans $H_0^{1-\varepsilon}$ et il existe une constante $C > 0$ telle que sur W on a

$$|||u||| \geq C\|u\|_{H^{1-\varepsilon}}\,.$$

Preuve :

On suit [L], §4.

Si on identifie maintenant les distributions $u_0 \in H_0^1$ avec les solutions de (1.11) et si on pose $v(x,t) = u(x, h_k t)$, on sait que:

il existe $\rho > 1$ et $\alpha'' < \rho$ tels que pour tout $\nu > 0$, il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$ et tout $u_0 \in E_{k,\rho,\alpha''}$ on a

$$\|v\|_{L^2}^2 \leq C \frac{k^2}{\rho^{3k}} \int_{-\nu\rho^k T_1}^{\nu\rho^k T_1} \int_{\partial\widehat{\Omega}} |\partial_n v|^2 dx dt,$$

donc

$$\|u_0\|_{L^2}^2 \leq C \frac{k^2}{\rho^{2k}} \int_{-\nu T_1}^{\nu T_1} \int_{\partial\widehat{\Omega}} |\partial_n u|^2 dx dt.$$

Or sur $E_{k,\rho,\alpha''}$, les normes $\rho^k \|u\|_{L^2}$ et $\|u\|_{H_0^1}$ sont équivalentes.

On a donc :

$$\|u\|_{H_0^1}^2 \leq C k^2 \int_{-\nu T_1}^{\nu T_1} \int_{\partial\widehat{\Omega}} |\partial_n u|^2 dx dt\,. \tag{1.12}$$

Compte tenu de l'invariance par rapport au temps de $\|u\|_{H_0^1}$, on a :

$$\exists T_1 > 0,\ \exists k_0 > 0\, \forall \nu > 0,\ \exists C > 0,\ \forall k \geq k_0\, \forall u \in E_{k,\rho,\alpha''},$$

$$\|u\|_{H_0^1}^2 \leq C k^2 \int_{0}^{2\nu T_1} \int_{\partial\widehat{\Omega}} |\partial_n u|^2 dx dt\,. \tag{1.13}$$

On note $\gamma = 3\nu T_0$ et $I_\ell = \{t\,;\, \gamma\ell \leq t < \gamma \cdot (\ell + 1)\}$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\varphi \equiv 1$ sur $[-\gamma/3, \gamma/3]$, support $(\varphi) \subset [-\gamma, \gamma]$, $0 \leq \varphi \leq 1$ et si $\varphi_\ell(t) = \varphi(t - \gamma\ell)$, $\sum\limits_{\ell \in \mathbf{Z}} \varphi_\ell = 1$.

Pour $a \in L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R} \times \partial\Omega) = H$, on pose

$$a_\ell = \varphi_\ell(t) \cdot a$$

et

$$\|a\|_H = \sup_\ell \|1_{I_\ell}(t) \cdot a\|_{L^2(I_\ell \times \partial\Omega)}.$$

Soit $F = C_0^\infty(\mathbf{R}_+^*)$ et $F_p(\tau) = F(\rho^{-2p}\tau)$.

On notera aussi F_p l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $F_p(\tau)$ avec la quantification :

$$F_p(u)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\int e^{i\tau\cdot t}\,F_p(\tau)\widehat{u}(\tau,x)d\tau\,.$$

Lemme 1.9.— *Pour toutes fonctions $\phi_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ et $\psi_0(t) \in C^\infty(\mathbf{R})$ bornée ainsi que toutes ses dérivées, pour tout $N > 0$, il existe une constante C_N telle que pour tout $\ell \in \mathbf{Z}$ vérifiant dist $(I_\ell, \mathrm{supp}\phi_0) \geq \delta > 0$ on a pour tout $a \in H$ et tout $p \geq 0$*

(1.15)

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} \|\phi_0(t)F_p\left((a)_\ell\right)\|_{L^2(\partial\widehat{\Omega})} \leq C_N\rho^{-2p(N-1)}\delta^{-N}(2\gamma)^{1/2}\|a\|_H\|\phi_0\|_{L^\infty},$$

$(1.15)'$

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} \|\phi_0(t)F_p\left((\psi_0(t)\cdot\partial_t\, a)_\ell\right)\|_{L^2(\partial\widehat{\Omega})} \leq C_N\rho^{-2p(N-2)}\delta^{-N}(2\gamma)^{1/2}\|a\|_H\|\phi_0\|_{L^\infty}\,.$$

Preuve :

Nous ne démontrons que la deuxième de ces inégalités, la démonstration de la première étant similaire.

$$\begin{aligned}
&\phi_0(t)F_p\left((\psi_0(t)\partial_t\, a)_\ell\right)(t,y)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int\int e^{i\tau(t-s)}F(\rho^{-2p}\tau)\phi_0(t)\psi_0(s)\varphi_\ell(s)\partial_s a(s,y)dsd\tau,\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{s=-\gamma+\ell}^{\gamma+\ell}\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\partial}{\partial_s}\left[e^{i\tau(t-s)}i^N\psi_0(s)\varphi_\ell(s)\partial_\tau^N[F(\rho^{-2p}\tau)]\phi_0(t)\right]\\
&\qquad\qquad \frac{a(s,y)}{(t-s)^N}dsd\tau
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&|(\phi_0(t)F_p(\psi_0(t)\partial_t\, a_\ell)(t,\cdot)/v)_{L^2(\partial\Omega)}|\\
&\quad \leq C'_N\frac{\rho^{-2p(N-2)}}{2\pi}\delta^{-N}\|\phi_0\|_\infty\|a\|_H(2\gamma)^{1/2}\|v\|_{L^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|\tau|)|F^{(N)}(\tau)|d\tau
\end{aligned}$$

où la constante C'_N ne dépend que de N et des normes L^∞ des fonctions ϕ_0 et ψ_0 et de leurs dérivées.

Pour $a \in H$, on peut donc d'après (1.15) poser

$$F_p(a) = \sum_l F_p(a_\ell),$$

la série étant localement convergente dans $L^\infty(\mathbf{R}, L^2(\partial\Omega))$ d'après ce qui précède.

Lemme 1.9'.— *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $a \in H$, pour tout $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$,*

$$\sum_{p=0}^{\infty} \|F_p(\psi a)\|^2_{L^2(\mathbf{R}\times\partial\widehat{\Omega})} \leq C\|\psi a\|^2_{L^2(\mathbf{R}\times\partial\widehat{\Omega})}. \tag{1.16}$$

Preuve :

$$\text{Cte} \sum_{p=0}^{\infty} \|F_p(\psi a)\|^2_{L^2} = \sum_{p=0}^{\infty} \int\int_{\mathbf{R}\times\partial\widehat{\Omega}} |F_p(\tau)|^2 |\widehat{\psi a}(\tau, x)|^2,$$

or

$$\sup_\tau \cdot \sum_{p=0}^{\infty} |F_p(\tau)|^2 \leq \text{ Cte}$$

car dans la série, on a au plus $\dfrac{1 + ln\, b - ln\, a}{2\, ln(2)}$ termes non nuls si F est à support dans $[a, b]$ et F est bornée.

Lemme 1.10.— *Soient $\phi_1 \in C_0^\infty(]0, \gamma[)$ et $\psi_1 \in C^\infty(\mathbf{R})$ bornée ainsi que toutes ses dérivées telle que $\psi_1 \equiv 1$ sur $I_{-1} \cup I_0 \cup I_1$.*
Alors pour tout $M > 0$, il existe une constante C_M telle que pour tout $a \in H$, $b \in H$, $\frac{\partial b}{\partial t} = a$ et tout $p \geq 0$ on ait

$$\|\phi_1(t)\left(F_p(a) - F_p(\psi_1 a)\right)\|_{L^2((\mathbf{R}\times\partial\widehat{\Omega})} \leq C_M \rho^{-2pM} \|b\|_H. \tag{1.17}$$

Preuve :

$$F_p(a) - F_p(\psi_1 a) = \sum_{|\ell|\geq 2} F_p(a_\ell) - F_p\left((\psi_1 a)_\ell\right)$$

et

$$\|\phi_1\left(F_p(a) - F_p(\psi_1 a)\right)\| \leq \sum_{|\ell|\geq 2} \|\phi_1 F_p(a_\ell)\| + \|\phi_1 F_p\left((\psi_1 a)_\ell\right)\|$$

D'après le lemme 1.9 appliqué pour $N = M+2$ à $\phi_0 = \phi_1$, $\psi_0 = 1$ et à b, puis à $\phi_0 = \phi_1$, $\psi_0 = \psi_1$ et à b, on a

$$\sum_{|\ell|\geq 2} \|\varphi_1(t) F_p(a_\ell)\|_{L^\infty(\mathbf{R}\,,\,L^2(\partial\widehat{\Omega}))}$$

$$\leq C_{M+2}\rho^{-2p(M)}\|b\|_H \gamma^{-(M+2)} \sum_{|\ell\geq 2} \frac{1}{(|\ell|-1)^{M+2}}\ (2\gamma)^{1/2},$$

et

$$\sum_{|\ell|\geq 2} \|\varphi_1(t) F_p(\psi_1 a_\ell)\|_{L^\infty(\mathbf{R}\,,\,L^2(\partial\widehat{\Omega}))}$$

$$\leq C_{M+2}\rho^{-2p(M)}\|b\|_H \gamma^{-(M+2)} \sum_{|\ell\geq 2} \frac{1}{(|\ell|-1)^{M+2}}\ (2\gamma)^{1/2},$$

d'où le lemme.

Posons maintenant :

(1.18) $$\chi(\tau) = 1_{\tau\geq 0} F(\tau^2)\ ;\ \chi_p(\tau) = 1_{\tau\geq 0} F_p(\tau^2), \\ = \chi(\rho^{-p}\tau)$$

et pour $u \in H_0^1$

(1.19) $$u \in \mathrm{Vect}\{\underset{k\leq N}{\cup} E_{k,\rho\alpha''}\},$$

(1.20) $$\chi_p(D)u = \sum_\nu \chi_p(\sqrt{\lambda\nu}) a_\nu e_\nu,$$

avec χ tel que $\operatorname{supp}\chi \subset]\frac{1}{2}, 2[$ et

(1.20′) $$\sum_{p=0}^{\infty} \chi_p^2(\tau) \geq 1 \quad \text{pour} \quad \tau \geq 1.$$

Alors $\chi_p(D)$ commute avec $\exp(-it\Delta_D)$
et $\chi_p(D)u \in E_{p,\rho\alpha''}$.

Comme $\varphi \equiv 1$ sur $[-\gamma/3, \gamma/3]$ et $\gamma = 3\nu T_0$, a donc d'après (1.12), si on note $u_p = \chi_p(D)u$, pour tout $p \geq p_0$,

$$\|u_p\|^2_{H^1_0} \leq Cp^2 \int\int_{\mathbf{R}\times\partial\widehat{\Omega}} |\varphi\, \partial_n u_p|^2, \tag{1.21}$$

$$\partial_n u\, |_{\partial\Omega} \in H \quad \text{et} \quad \|\partial_n u\|_H \leq C\|u\|_{H^1_0}. \tag{1.22}$$

En effet : si $\psi \in C_0^\infty$,

$$\begin{aligned}\int\int_{\mathbf{R}_t\times\Omega} (i\partial_t - \Delta)u\, \overline{\psi\partial_n u} = &- \int_{\mathbf{R}_t\times\partial\Omega} |\psi\, \partial_n u|^2 \\ &+ \int\int_{\mathbf{R}_t\times\Omega} u\overline{P}u\end{aligned}$$

avec $P = [i\partial_t - \Delta, \psi\partial_n]$ de degré 2.

Lemme 1.11.— *Pour tout u vérifiant (1.19)*

$$\partial_n \chi_p(D)u\, |_{\partial\Omega} = F_p(\partial_n u). \tag{1.23}$$

Preuve :

$$F_p(e^{it\lambda}) = \chi_p(\sqrt{\lambda})e^{it\lambda},$$

donc

$$\varphi(t)\partial_n \chi_p(D)u\, |_{\partial\widehat{\Omega}} = \varphi(t)F_p(\partial_n u), \tag{1.24}$$

Soient $a = \partial_n u\, |_{\partial\widehat{\Omega}}$ et $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\psi = 1$ sur $[-\gamma, 2\gamma]$.

Posons $u = \frac{\partial v}{\partial t}$ c'est à dire si

$$u = \sum_{j=1}^{N} e^{it\lambda_j} u_j e_j,$$

$$v = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{i\lambda_i} e^{it\lambda_j} u_j e_j.$$

Alors on a, en posant $b = \partial_n v\, |_{\partial\widehat{\Omega}}$, d'après le lemme 1.10 appliqué à $a = \frac{\partial b}{\partial t}$

(1.25)

$$\|\varphi(t)F_p(\partial_t b)\|^2_{L^2(\mathbf{R}\times\partial\widehat{\Omega})} \leq 2\|\varphi(t)F_p(\psi\partial_t b)\|^2_{L^2(\mathbf{R}\times\partial\widehat{\Omega})} + 2C_M^2\rho^{-4pM}\|b\|^2_H,$$

or

$$\|b\|_H \leq \|v\|_{H^1_0} = \|u\|_{H^{-1}},$$

donc d'après le lemme 1.9',

$$\sum_{p\geq p_1} \|\varphi(t)F_p(a)\|^2_{L^2} \leq C\|\psi a\|^2_{L^2(\mathbf{R}\times\partial\widehat{\Omega})} + 2C_M^2\rho^{-4pM}\|u\|^2_{H^{-1}}. \tag{1.26}$$

or

$$\|u\|^2_{H_0^{1-\varepsilon}} \leq \sum_{p=1}^{N}(\frac{1}{p^2})\|u_p\|^2_{H^1_0} + \|u_{-1}\|^2_{H^1_0}$$

avec $u_{-1} = \sum_{\lambda_\nu\leq 1} a_\nu e_\nu$ et $u_0 = \sum_{\sqrt{\lambda}_\nu<\alpha\rho^N} a_\nu e_\nu$.

Donc pour tout $p_1 \geq p_0$, d'après 1.21, le lemme 1.11 et 1.26 on a
(1.27)

$$\sum_{p=0}^{N}\frac{1}{p^2}\|u_p\|^2_{H^1_0} \leq C\int_{-\gamma}^{2\gamma}\int_{\partial\widehat{\Omega}}|\partial_n u|^2 + \sum_{-1\leq p\leq p_1}\|u_p\|^2_{H^1_0} + C'_M\rho^{-4p_1M}\|u\|^2_{H^{-1}}.$$

On en déduit que pour p_1 assez grand (indépendant de N), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe C (indépendant de N) tel que

$$\|u\|^2_{H_0^{1-\varepsilon}} \leq C\Big(\int_{-\gamma}^{2\gamma}\int_{\partial\Omega}|\partial_n u|^2 + \sum_{-1\leq p\leq p_1}\|u_p\|^2_{H^1_0}\Big). \tag{1.28}$$

On voit ici apparaître la perte de notre théorème par rapport au résultat obtenu si les hypothèses de contrôle géométrique de [L] étaient vérifiées. On pourrait en fait espérer contrôler dans un espace à poids du type

$$\left\{(1+|\xi|^2)^{1/2}\times\frac{1}{\log(1+|\xi|)^2}|\hat{u}(\xi)| \in L^2\right\}.$$

1.2.3 Conclusion.

Pour conclure, on commence par déduire de (1.22) qu'on peut passer à la limite pour

$$u_N = \sum_{\lambda_\nu \leq \rho^N} u_\nu e_\nu \overset{N\to\infty}{\to} u \in H_0^1$$

et que la relation (1.28) reste vraie pour tout $u \in H_0^1$.

Nous allons maintenant éliminer le deuxième terme par l'argument d'unicité suivant :

Soit $N = \{u \in H_0^1 \; ; \partial_n u \mid_{\partial\widehat{\Omega}} = 0 \,\forall\, t \in]-\gamma, 2\gamma[\}$.

Alors $\sum_{-1 \leq p \leq p_1} \|u_p\|^2_{H_1^0}$ est une norme sur N qui est donc de dimension finie.

Nous allons maintenant montrer que l'espace N est invariant par l'opérateur ∂_t.

En effet : soit $u \in H_0^1$, soient $v_h(t,x) = \frac{u(t+h,x)-u(t)}{h}$ définis pour tout $h > 0$ assez petit.

Si $u \in N$ et si $h \leq h_0$ alors $v_h \in N_{h_0} = \{u \in H_0^1 \; ; \partial_n u = 0; \forall\, t \in [-\gamma + h_0, 2\gamma - h_0]\}$. On sait maintenant que si on prend h_0 assez petit et p_1 assez grand, $\sum_{-1 \leq p \leq p_1} \|u_p\|^2_{H_1^0}$ est une norme sur N_{h_0} qui est donc de dimension finie. On a de plus:

$$\|v_h - v_{h'}\|_{N_{h_0}} \leq \sum_{\lambda_\nu \leq \rho_1^p} \left| \frac{e^{ih\lambda_\nu} - 1}{h} - \frac{e^{ih'\lambda_\nu} - 1}{h'} \right|^2 u_\nu^2$$
$$\to 0 \; \textit{quand } h \, \textit{et} \, h' \to 0,$$

donc la suite v_h est de Cauchy dans N_{h_0} quand $h \to 0$. Sa limite est (au sens des distributions) $\partial_t v$ qui est donc dans $\bigcup_h N_h = N$.

Donc N est invariant par ∂_t.

Soit alors $u \in N$; $i\partial_t u = zu$

u s'écrit $u(t,x) = e^{-itz}v$, avec $\Delta v = zv$; $v \mid_{\partial\Omega} = 0$; $\partial_n v \mid_{\partial\widehat{\Omega}=0}$

donc $v \equiv 0$ et $N = \{0\}$.

On en déduit que $|||\cdot|||$ est une norme sur H_0^1 et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1$

$$\|u\|^2_{H_0^{1-\varepsilon}} \leq C \int_{-\gamma}^{2\gamma} \int_{\partial\widehat{\Omega}} |\partial_n u|^2 \,. \tag{1.29}$$

On en déduit alors d'après la méthode HUM de J-L. Lions et [L] §5 le théorème 0.1.

1.3 le théorème 1.1 implique le théorème 1.2.

Nous allons maintenant aborder la deuxième étape de la réduction de notre problème au théorème 1.1 : montrer que le théorème 1.1 implique le théorème 1.2.

Supposons le théorème 1.1 démontré. Jusqu'à la fin du paragraphe 1, les réels ρ, α, α', σ et T_1 sont donc fixés. On rappelle qu'ils vérifient $0 < \alpha' < \alpha < \rho^{-1} < 1$, $T_1 > 0$ et $\sigma > 0$.

On notera pour tout $\alpha'' < \rho^{-1}$, $\alpha'' > 0$

$$F_{k,\alpha''} = \{\nu \ ; \rho^k \alpha'' \leq \sqrt{\lambda_\nu} < \rho^k \alpha''^{-1}\},$$

$$E_{k,\alpha''} = \{u \in L^2(\Omega) \ ; u = \sum_{\nu \in F_{k,\alpha''}} u_\nu e_\nu\}.$$

On notera $\Pi_{k,\alpha''}$ la projection orthogonale sur $E_{k,\alpha''}$.

Proposition 1.12.— *Il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que pour tout α'', $\alpha < \alpha'' < \rho^{-1}$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $u_k \in E_{k,\alpha''}$, on a*

$$\|(I_1)_{h=h_k}^{[Ak]+p} u_k\|_{L^2} \leq C h_k^\sigma \|u_k\|_{L^2},$$

avec les notations et hypothèses du théorème 1.1.

La preuve de cette proposition repose sur des estimations de commutation et de propagation

1.3.1 Commutations.

Nous allons montrer qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout α'', $\alpha < \alpha'' < \rho^{-1}$, il existe $C > 0$ tel que

$$\|(I_1)^{Ak+p}_{h=h_k} \circ \Pi_{k,\alpha''}\|_{(L^2(\Omega))} \leq C h_k^{\sigma}. \tag{1.30}$$

Pour on montre l'inégalité analogue sur l'adjoint

$$\left((I_1)^{+Ak+p}_{h=h_k} \circ \Pi_{k,\alpha''}\right)^* = \Pi_{k,\alpha''} \circ \left((I_1)^*_{h=h_k}\right)^{Ak+p}. \tag{1.30$'$}$$

Or on a

Lemme 1.13.— *L'opérateur I_1^* est défini par la construction suivante Soient u', v' telles que*

$$\begin{aligned}
(ih\partial_t - h^2\Delta)u' &= 0,\\
u' \mid_{t=T_0} &= u'_0,\\
u' \mid_{\partial\Omega} &= 0,\\
(ih\partial_t - h^2\Delta)v' &= -ih\psi'(t)Op(r)^* u',\\
v' \mid_{t\geq T_0} &= 0,\\
v' \mid_{\partial\Omega} &= 0,
\end{aligned} \tag{1.31}$$

alors $I_1^* u'_0 = v' \mid_{t=0}$.

Preuve :
On reprend la notation de la définition de I_1 , alors

$$\begin{aligned}
ih\partial_t \int_\Omega v\bar{u}'dx &= \int h^2\Delta v\bar{u}' + ih\psi'(t)Op(r)u\bar{u}' - vh^2\Delta\bar{u}'dx\\
&= + \int ih\psi'(t)u\overline{Op(r)^* u'}dx\\
&= - \int u(\overline{h^2\Delta - ih\partial t})v'dx\\
&= -ih\partial_t \int u\bar{v}'dx
\end{aligned} \tag{1.32}$$

donc $\int\limits_\Omega v\bar{u}' + u\bar{v}'dx$ est indépendant du temps.

Pour $t = 0$ et $t = T_0$, on obtient

$$(I_1 u_0, u_0') = (u_0, v' \mid_{t=0}) .$$

L'opérateur I_1^* est donc un opérateur du même type que I_1, on va donc pouvoir appliquer les théorèmes de propagation de l'appendice B.

On rappelle qu'on a noté à l'appendice B

$$B = \{U = (u_{0,k})_{k \in \mathbf{N}} \ ; \ \forall k \ v_{0,k} \in E_{k,\rho,\alpha} \ ; \ \|u_{0,k}\|_{L^2(\Omega)} \leq 1\}.$$

Nous commençons par montrer que les opérateurs $(I_1)^*_{h=h_k}$ et $\Pi_{k,\alpha}$ “commutent presque” :

Lemme 1.14.— *Pour tout β et β_1 tels que $\alpha < \beta < \beta_1 < \rho^{-1}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe C_n tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$,*

$$\|\Pi_{k,\beta_1}(I_1)^{p+Ak}_{h=h_k} - \Pi_{k,\beta_1}(I_1)^{p+Ak}_{h=h_k}\Pi_{k,\beta}\|_{L^2} \leq C_n h_k^n . \tag{1.35}$$

$$\|\Pi_{k,\beta_1}(I_1^*)^{p+Ak}_{h=h_k} - \Pi_{k,\beta_1}(I_1)^{*p+Ak}_{h=h_k}\Pi_{k,\beta}\|_{L^2} \leq C_n h_k^n . \tag{1.35$'$}$$

Preuve :

Démontrons par exemple la première inégalité.

Nous allons montrer que pour tout $\gamma < 1$ et tout $n \in \mathbf{N}$ il existe une constante $C_n > 0$ telle que pour tout β tel que $\alpha \leq \beta < \rho^{-1}$, en posant $\beta' = \beta \cdot (1 + h_k^\gamma)$ on a

$$\|\Pi^\perp_{k,\beta}(I_1)^*_{h=h_k}(\Pi_{k,\beta'})\| \leq C_n h_k^n . \tag{1.36}$$

En effet :
soit $u_0 \in E_{k,\beta}$,

$$u_0 = \Sigma u_\nu e_\nu \Rightarrow u = \Sigma e^{ith_k\lambda\nu} u_\nu e_\nu .$$

Posons $\Pi^\perp_{k,\beta} I_1^* u = \Sigma v_\mu e_\mu$ (projection orthogonale sur l'orthogonal de $E_{k,\rho,\beta}$)
alors

$$(ih_k\partial_t - h_k^2\Delta)v = -ih_k\psi'(t)\Sigma e^{ith_k\lambda_\nu} u_\nu Op(r)^* e_\nu,$$

$$\Rightarrow \quad \partial_t \left(e^{-ih_k\lambda_\mu t} v_\mu\right) = -\psi'(t) \sum_\nu e^{ith_k(\lambda_\nu - \lambda\mu)} u_\nu (Op(r)^* e_\nu, e_\mu),$$

$$\Rightarrow v_\mu(0) = \int_0^{T_0} \psi'(t) \sum_\nu e^{ith_k(\lambda_\nu - \lambda\mu)} u_\nu (Op(r)^* e_\nu, e_\mu)_{L^2(\Omega)}.$$

On intègre par parties en t et on obtient donc en utilisant (1.37)

$$|v_\mu(0)| \leq C_n \sum_{\nu \in F_{k,\beta'}} \left(\frac{1}{h_k|\lambda_\nu - \lambda_\mu|} \right)^n (1 + Ch_k).$$

Or pour $\nu \in F_{k,\beta'}$ et $\mu \notin F_{k,\beta}$ on a

$$|\sqrt{\lambda_\nu} - \sqrt{\lambda_\mu}| \geq Ch_k^\gamma h_k^{-1}$$

donc comme $\sqrt{\lambda_\nu} \geq \beta' h_k^{-1}$

$$|\lambda_\nu - \lambda_\mu| \geq Ch_k^\gamma h_k^{-2}$$

et

$$\sharp \left\{ \lambda_\nu < \frac{C}{h_k^2} \right\} \leq Ch_k^{-3}$$

d'après la formule de Weyl.
D'où le résultat si on prend n assez grand.

Nous avons utilisé ici que $Op(r)$ est borné indépendamment de h (car les opérateurs h-pseudo-différentiels d'ordre 0 sont continus pour la norme L^2). On a en fait plus précisément l'inégalité suivante (inégalité de Gårding) que nous démontrons à l'appendice A

(1.37)
$$\begin{aligned} \exists C > 0\,;\ \|(Op(r)_{h=h_k})\|_{L^2} &\leq (1 + Ch_k), \\ \exists C > 0\,;\ \|(Op(1-r)_{h=h_k})\|_{L^2} &\leq (1 + Ch_k), \end{aligned}$$

donc

(1.37)′
$$\begin{aligned} \exists C > 0\,;\ \|(I_1)_{h=h_k}\|_{L^2} &\leq (1 + Ch_k), \\ \exists C > 0\,;\ \|(I_2)_{h=h_k}\|_{L^2} &\leq (1 + Ch_k). \end{aligned}$$

On a alors

(1.38

$$\|\Pi_{k,\beta_1}(I_1)_{h=h_k}^{p+Ak} - \Pi_{k,\beta_1}(I_1)_{h=h_k}^{p+Ak}\Pi_{k,\beta}\|$$
$$= \|\Pi_{k,\beta_1}(I_1)_{h=h_k}^{p+Ak} \circ (Id - \Pi_{k,\beta})\|$$
$$= \|\Pi_{k,\beta_1}(I_1)_{h=h_k}^{p+Ak} \circ \Pi_{k,\beta}^\perp\|$$
$$\leq \|\Pi_{k,\beta_1} \circ ((I_1)_{h=h_k}^{p+Ak-1}) \circ (\Pi_{k,\beta(1+h_k^\gamma)}^\perp + \Pi_{k,\beta(1+h_k^\gamma)}) \circ (I_1)_{h=h_k}\Pi_{k,\beta}^\perp\|$$

$$\leq (1+Ch_k)^{p+Ak-1}C_n h_k^n \;+\; \|\Pi_{k,\beta_1}(I_1)_{h=h_k}^{p+Ak-1} \circ \Pi^{\perp}_{k,\beta(1+h_k^\gamma)}\| \times (1+Ch_k)$$
$$\leq \cdots$$
$$\leq \Big[Ak \times C_n h_k^n \;+\; \|\Pi_{k,\beta_1}(I_1)_{h=h_k} \circ \Pi^{\perp}_{k,\beta(1+h_k^\gamma)^{Ak}}\|\Big] \times (1+Ch_k)^{Ak+p-1}$$
$$\leq C'_n h_k^{n-1}$$

Nous avons donc démontré le lemme 1.14.

1.3.2 Propagation.

Compte tenu de ce lemme, nous pouvons donner un sens évident au front d'onde d'ordre σ OF_b^σ et au front d'onde WF_b de suites de fonctions de la forme

$$U = \widetilde{I}_1^* \circ (I_1^*)^{Ak+p} u_{0,k} \tag{1.39}$$

où $A \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{N}$, $(u_{0,k})_{k\in\mathbf{N}} \in B_{\rho,\alpha''}$ $(\alpha < \alpha'' < \rho^{-1})$ et où on note $\widetilde{I}_1^* u_0(x,t) = v'(x,t)$, v' étant la solution de $(1.31)_{h=h_k}$ associée à la donnée initiale $u'_0 = u_{0,k}$ puisque compte tenu de l'inégalité de gårding si U est de cette forme alors il existe $V = (v_k)$ et $C > 0$ tels que $\|v_k\|_{L^2(\Omega)} = O(h_k^\infty)$ et $C(U - V) \in B_{\rho,\alpha}$.

On déduit des lemmes B6 et B7, que si on note $g(s,\rho_0)$ le flot sur $\widetilde{T}^*(\mathbf{R}_t \times \Omega) = T^*(\mathbf{R}_t \times \Omega) \cup T^*(\partial(\mathbf{R}_t \times \Omega))$ orienté dans la direction des temps positifs on a

Lemme 1.15.— *Pour tout $\rho_0 \in \widetilde{T}^*(\Omega \times \mathbf{R}_t)$ et tout $U =, (u_{0,k})_{k\in\mathbf{N}} \in B_{\rho,\alpha''}$ on a*

$$\rho_0 \in OF_b^\sigma(((\widetilde{I}_1^*)_{h=h_k})u_{0,k}) \cap \{t=0\}$$
$$\Rightarrow\ \exists s \in [T_0/3, 2T_0/3]\, g(s,\rho_0) \in OF_b^\sigma(u') \cap \{t=s\}$$

et comme $OF_b^\sigma(u')$ est invariant par le flot

$$g(T_0,\rho_0) \in OF_b^\sigma(u') \cap \{t=T_0\}.$$

De plus il est clair que le lemme 1.15 reste vrai si on remplace l'hypothèse "$U \in B_{\rho,\alpha}$" par l'hypothèse "U est de la forme (1.39)".

Si on note $\rho = (t,x,\tau,\xi)$ $\rho - (s,0,0,0) = (t-s,x,\tau,\xi)$, on a

Lemme 1.16.— *Pour tout* α''; $\alpha < \alpha'' < \rho^{-1}$ *et tout* $\rho_0 \in \widetilde{T}^*(\Omega \times \mathbf{R}_t)$ *et tout* $(u_{0,k})_k \in B_{\rho,\alpha''}$

$$\rho_0 \in OF_b^\sigma((\widetilde{I}_1^*)_{h=h_k} \circ (I_1)_{h=h_k}^{*(p)} u_{0,k}) \cap \{t = 0\}$$
$$\Rightarrow g(pT_0, \rho_0) - (pT_0, 0, 0, 0) \in OF_b^\sigma((\widetilde{I}_1)_{h=h_k}^* u_{0,k}) \cap \{t = 0\}\,.$$

Preuve:

$\rho_0 \in OF_b^\sigma((\widetilde{I}_1^*)_{h=h_k} \circ (I_1)_{h=h_k}^{*(p)} u_{0,k}) \cap \{t = 0\}$ entraîne d'après le lemme 1.14 $g(T_0, \rho_0) \in OF_b^\sigma(\widetilde{I}_1((I_1^*)_{h=h_k}^p) u_{0,k})$.

Or par construction les opérateurs $\widetilde{I}_1((I_1^*)^{p-1})u_{0,k}$ et $(\widetilde{I}_1^*)((I_1^*)_{h=h_k}^{p-1} u_{0,k})(t - T_0, \cdot)$ coïncident au voisinage de $t = 0$ puisque $\psi'(t) \equiv 0$ près de $t = 0$, d'où le lemme.

Nous revenons maintenant à le démonstration de la relation (1.30).

Il suffit maintenant, d'après le lemme 1.14, de montrer que pour tout α'' tel que $\alpha < \alpha'' < \rho^{-1}$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|(I_1^*)_{h=h_k}^{p+Ak} \Pi_{k,\alpha''}\| \leq C h_k^\sigma. \tag{1.39}$$

Soit $u = (u_k)_{k\in\mathbf{N}} \in B$.
Nous allons montrer que si M est l'entier introduit au théorème 1.1 et pour tout α'' tel que $\alpha < \alpha'' < \rho^{-1}$ on a pour tout $(u_k)_k \in H_0^1(\Omega)$; $\|u_k\| \leq 1$

$$OF_b^\sigma\left((\widetilde{I}_1^*)_{h=h_k}) \circ (I_1^*)_{h=h_k}^{M+Ak-1} \circ \Pi_{k,\alpha''} u_k\right)_{k\in\mathbf{N}} \cap \{t = 0\} = \emptyset. \tag{1.40}$$

En effet, soit $\rho \in OF_b^\sigma\left((\widetilde{I}_1^*)_{h=h_k} \circ (I_1^*)_{h=h_k}^{M+Ak-1} \circ \Pi_{k,\alpha''} u_k\right)_{k\in\mathbf{N}} \cap \{t = 0\}$;

alors d'après le lemme 1.16 pour tout $l = 1, \ldots, M$

$$g(lT_0, \rho_0) - (lT_0, 0, 0, 0)$$
$$\in OF_b^\sigma\left((\widetilde{I}_1^*)_{h=h_k} \circ (I_1^*)_{h=h_k}^{(M-l-1)+Ak} \circ \Pi_{k,\alpha''} u\right) \cap \{t = 0\}.$$

Or, d'après l'hypothèse faite sur les troncatures q et r, il existe un entier $m \in \{0, \ldots, M-1\}$ tel qu'on ait

$$\pi_{(x,\xi)}(g(mT_0, \rho_0)) \in \{q \equiv 1\}, \tag{1.41$'$}$$

ou

$$(1.41) \qquad g(t,\rho_0) \in \mathrm{Int}(\{r=0\}) \forall t \in [(m-1)T_0, mT_0]$$

car d'après (1.35) et (1.35)' on a

$$\begin{aligned}
&OF_b^\sigma\left((\widetilde{I}_1^*)_{h=h_k} \circ (I_1^*)^{M+Ak-1} \circ \Pi_k, \alpha'' u\right) \\
&\qquad = OF_b^\sigma\left((\widetilde{I}_1^*)_{h=h_k} \circ \Pi_{k,\alpha} \circ ((I_1^*)M-1+Ak)_{h=h_k} \circ \Pi_{k,\alpha''} u\right) \\
&\qquad \subset \{\tau \in [\alpha^2, \alpha^{-2}] \ ; \ |\xi|^2 = \tau\} \subset \{|\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]\}
\end{aligned}$$

,

d'après le lemme 1.14 et [L], comme $\alpha < \alpha''$ (car $OF_b^\sigma(u) \subset WF_b(u)$).

Etudions d'abord le cas (1.41)':

on démontre comme le lemme B7 que si $g(t,\rho_0) \in Int\{r=0\}$ pour tout $t \in [(m-1)T_0, mT_0]$, on a

$$g(mT_0,\rho_0) - (mT_0,0,0,0)$$

$$\notin OF_b^\sigma\left((\widetilde{I}_1)^*_{h=h_k}) \circ (I_1)^{p+Ak-m-1}_{h=h_k} \circ \Pi_{k,\alpha''} u_k\right)_{k\in\mathbf{N}} \cap \{t=0\}$$

Le cas (1.41)' n'est donc pas possible, on a donc nécessairement (1.41).

On choisit un entier m vérifiant (1.41).

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\varphi(0)=1$ et φ à support assez petit tel que sur le support de φ,

$$U = (U_k)_{k\in\mathbf{N}} = ((\widetilde{I}_1)^*_{h=h_k} \circ (I_1)^{*(M-m+Ak-1)}_{h=h_k} \circ \Pi_{k,\alpha''} u_k)_{k\in\mathbf{N}}$$

vérifie

$$\begin{aligned}
&(ih_k\partial_t - h_k^2\Delta)U_k = 0, \\
&\qquad\qquad U_k\mid_{t=0} = ((I_1^*)^{(M+Ak-m)})_{h=h_k} \circ \Pi_{k,\alpha_{\prime\prime}} u_k.
\end{aligned}$$

(c'est possible car la fonction ψ de (1.31) vérifie $\psi \equiv 0$ au voisinage de 0).

On pose

$$\begin{aligned}
PU_k &= \varphi(t)Op(q)U_k \\
&= \varphi(t)\left(\frac{1}{2\pi h_k}\right)^3 \int e^{i[(x-y)\cdot\xi]/h_k} q(x,\xi)U_k(y,s)dyd\xi\,.
\end{aligned}$$

Nous allons montrer que

$$\|PU_k\|_{L^2(\mathbf{R}^t\times\Omega)} \leq Ch_k^\sigma,$$

ce qui impliquera $g(mT_0,\rho_0) \notin OF_b^\sigma U$ et donc que

$$OF_b^\sigma\left((\widetilde{I}_1^*)_{h=h_k}) \circ (I_1^*)_{h=h_k}^{(M+Ak-1)} \circ \Pi_{k,\alpha''} u_k\right)_{k\in\mathbf{N}} \cap \{t=0\} = \emptyset.$$

D'après le théorème 1.1 :
il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $s \in [-\varepsilon,\varepsilon]$

$$\|(I_1^{M+Ak-m})_{h=h_k} \circ I_s \circ Op(q) \circ \Pi_{k,\alpha}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch_k^\sigma.$$

Or au voisinage de $t=0$

$$\widetilde{I}_1^* = I_t I_1^*, \tag{1.42}$$

où on note I_t l'opérateur défini au théorème 1.1. Comme $Op(q)^*_{h=h_k} = Op(q)_{h=h_k} + O(h_k)$ (d'après l'appendice A car le symbôle q est à valeurs réelles), on en déduit en passant à l'adjoint que $\|\Pi_{k,\alpha}\circ(PU_k)\|_{L^2} \leq Ch_k^\sigma$ si le support de la fonction φ est assez petit.
Il reste donc à majorer

$$\|(1-\Pi_{k,\alpha})\circ(PU_k)\|.$$

D'après le lemme 1.14 pour tout $t \leq T_0/3$ et α_1 tel que $\alpha < \alpha_1 < \alpha''$,

$$U_k = \Pi_{k,\alpha_1} U_k \ + \ O(h_k^\infty)$$

donc

$$\|(1-\Pi_{k,\alpha})(PU_k)\| = \|(1-\Pi_{k,\alpha})P\Pi_{k,\alpha_1}U_k\| + O(h_k^\infty).$$

Si on a pris dans la définition de PU le support de φ assez petit, alors sur ce support, U vérifie $(ih_k\partial_t - h_k^2\Delta)u = 0$, donc

$$\begin{aligned}(ih_k\partial_t &- h_k^2\Delta)(P\circ\Pi_{k,\alpha_1}U_k)\\ &= [ih_k\partial_t - h_k^2\Delta, \varphi Op(q)]\Pi_{k,\alpha_1}U_k,\\ &= h_k\psi(t)R\Pi_{k,\alpha_1}U_k\end{aligned}$$

avec $\|R\| \leq C$ et supp $\psi \subset$ supp φ.
On en déduit comme à la démonstration du lemme 1.14 que

$$\|(1-\Pi_{k,\alpha})\circ P\circ\Pi_{k,\alpha_1}U_k\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\Omega)} = O(h_k^\infty).$$

Nous avons donc montré que

$$OF_b^\sigma\left((\widetilde{I}_1^*)_{h=h_k}\circ(I_1^*)_{h=h_k}^{(M-1+N_k)}\circ\Pi_{k,\alpha''}u\right)=\emptyset.$$

Pour tout α''' tel que $\alpha<\alpha'''<\alpha''$, en prenant l'adjoint de (1.35) on obtient

$$(I_1^{*(p+Ak)})_{h=h_k}\circ\Pi_{k,\alpha''}=\Pi_{k,\alpha'''}\circ(I_1^{*(p+Ak)})_{h=h_k}\circ\Pi_{k,\alpha''}+O(h_k^\infty).$$

On en déduit comme dans [L], en utilisant (1.42) et en se ramenant d'abord à un domaine compact de l'espace des phases que

$$\|((\widetilde{I}_1)^*_{h=h_k}\circ(I_1^*)(M+Ak)-1)_{h=h_k}\circ\Pi_{k,\alpha''}u\|\leq C\,h_k^\sigma$$

donc

$$\|((I_1^*)(M+Ak))_{h=h_k}\circ\Pi_{k,\alpha''}u\|\leq C\,h_k^\sigma$$

On obtient par l'absurde comme à la proposition 1.3 que la constante C est indépendante de la suite U choisie. D'après le lemme 1.14 on a donc pour tout α'' tel que $\alpha<\alpha''<\rho^{-1}$

$$\|\Pi_{k,\alpha}\circ(I_1^{*(p+Ak)})_{h=h_k}\|\leq C\,h_k^\sigma.$$

En appliquant encore le lemme 1.14 on obtient (1.39) ce qui termine la démonstration de la proposition 1.12.

1.3.3 Conclusion.

Avec les notations du théorème 1.1, quitte à prendre une constante α plus grande, nous nous trouvons maintenant dans la situation suivante :

–$I(h)$ est une isométrie

–$I_1(h)$ et $I_2(h)$ sont deux opérateurs de norme inférieure à $(1+C\,h)$ (d'après l'inégalité de Gårding)

–$I_1+I_2=I$.

L'opérateur I_1 vérifie de plus la relation

$$\exists\rho>1,\ \alpha<\rho,\ C>0,\ \sigma>0\ k_0>0\ A\in\mathbf{N}^*\ ;\ \forall k\geq k_0$$

$$\|(I_1)_{h=h_k}^{Ak}\circ\Pi_{k,\alpha}\|\leq C\,h_k^\sigma.$$

On en déduit :

Lemme 1.18.— *Pour tout α'' tel que $\alpha < \alpha'' < \rho^{-1}$ il existe un entier $k_0 > 0$ et une constante $C > 0$ tels que pour tout $k \geq k_0$ et tout $u_k \in E_{k,\alpha''}$,*

$$\|u_k\|_{L^2}^2 \leq Ck \sum_{n=0}^{Ak} \|I_2\left(u_k(nT_0)\right)\|_{L^2}^2.$$

Preuve:
$\|u_k\|_{L^2} = \|I^{Ak}u_k\|_{L^2}$
Nous allons montrer par récurrence sur n que pour tout $n \leq Ak$, on a

$$\|u_k\|_{L^2} \leq \sum_{p=1}^{n} \|(I_2)_{h=h_k}(I)_{h=h_k}^{Ak-p}u_k\|_{L^2}(1+C\,h)^{p-1} + \|(I_1)_{h=h_k}^{n}(I)_{h=h_k}^{Ak-n}u_k\|_{L^2}\,.$$

Preuve:
–$n = 1$

$$\|u_k\| \leq \|(I_2)_{h=h_k}(I)_{h=h_k}^{Ak-1}u_k\| + \|(I_1)_{h=h_k}(I)_{h=h_k}^{Ak-1}u_k\|\,.$$

–Supposons la relation vérifiée au rang n, alors

$$\|u_k\| \leq \sum_{p=1}^{n} \|(I)_{h=h_k}^{Ak-p}u_k\|_{L^2}(1+C\,h)^{p-1} + \|(I_1)_{h=h_k}^{n+1}(I)_{h=h_k}^{Ak-(n+1)}u_k\| + \|(I_1)_{h=h_k}^{n}(I_2)_{h=h_k}(I)_{h=h_k}^{Ak-(n+1)}u_k\|\,.$$

Comme $\|(I_1)_{h=h_k}^{n}\| \leq (1+C\,h)^n$, on en déduit la relation au rang $n+1$ donc

$$\|u_k\| \leq \left(C\sum_{p=0}^{Ak} \|(I_2)_{h=h_k}\left(u_k(pT_0)\right)\|_{L^2} + C\,h_k^{\sigma}\|u_k\|\right).$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient le lemme 1.18.

Nous montrons maintenant le

Lemme 1.19.— *Pour tout α'' tel que $\alpha < \alpha'' < \rho^{-1}$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $u_k \in E_{k,\rho,\alpha''}$,*

$$\|(I_2)_{h=h_k}u_k\|_{L^2}^2 \leq C\int_0^{T_0} \|Op(1-r)u_k(x,s)\|_{L^2}^2 ds.$$

Preuve :

Soit v_k solution de

$$ih\partial_t - h^2\Delta\, v_k = ih\psi'(t)Op(1-r)(u_k(t,x)),$$
$$v_k \mid_{\partial\Omega} = 0$$
$$, v_k \mid_{t\leq 0} = 0$$
$$.$$

On a

$$v_k(T_0,x) = \int_0^{T_0} \psi'(s)e^{-i(T_0-s)\Delta_{Dirichlet}}Op(1-r)u_k(s,x)ds.$$

Comme par définition $I_2 u_k = v_k(T_0)$, on obtient le lemme 1.19.

Appliquant alors le lemme 1.19 aux instants Ak, $2Ak$, $\cdots$, $[\nu(\rho^k/Ak)]Ak$, et utilisant la conservation de $\|u\|_{L^2}$ en temps, on obtient dd'après le lemme 1.18, le théorème 1.2.

2. Construction des troncatures micro-locales.

Nous noterons dans toute la suite de cet article $\Gamma = \bigcup_i \partial\theta_i$ et $\Gamma_i = \partial\theta_i$. Nous allons dans ce paragraphe construire des troncatures r et q vérifiant les hypothèses du théorème 1.1.

2.1 Définitions, propriétés géométriques.

Définitions 2.1.—

- *On notera $H(x, \xi, t_0)$ le rayon généralisé se réfléchissant sur $\partial\Theta$ ($\Theta = \mathbf{R}^3 \setminus \underset{i}{\cup}\theta_i$) issu de (x, ξ, t_0), paramétrisé par le temps t.*
- *On notera pour tout $i = 1, \cdots, N$ et tout point $x \in \Gamma_i$, $n(x)$ la normale à l'obstacle θ_i dirigée vers l'extérieur de l'obstacle.*
- *On posera $\rho(x, \xi) = \xi$, si $x \in \Theta$ ou si $x \in \partial\Theta$ et $\xi \cdot n(x) \geq 0$; $\rho(x, \xi) = \xi - 2(n(x) \cdot \xi)n(x)$ sinon.*
- *On notera $\tau_0(x, \xi) = \inf\{t > 0\, x + t\rho(x, \xi) \in \partial\Theta\}$.*
- *On notera $L_0(x, \xi) = \{x + \tau\rho(x, \xi)\ ;\ \tau \leq \tau_0(x, \xi)\}$.*
- *On notera $X^1(x, \xi) = x + \tau_0\rho(x, y)$.*
- *On notera $\Xi^1(x, \xi) = \rho(X^1(x, \xi), \xi)$.*
- *On peut recommencer ces opérations et définir $L_i(x, \xi), \tau_i(x, \xi), X^i(x, \xi), \Xi^i(x, \xi)$ tant que $\tau_{i-1}(x, \xi) < \infty$.*
- *On peut faire de même pour les entiers négatifs i en partant dans la direction $\rho(x, -\xi)$.*
- *On notera pour tout réel t:*

$$X_t(x, \xi) = X^i(x, \xi) + \left(t - \sum_{j=0}^{i} \tau_j(x, \xi)\right) \Xi_i(x, \xi)$$

$$\Xi_t(x, \xi) = \Xi^i(x, \xi),$$

si

$$t \in \left[\sum_{j=0}^{i} \tau_j(x,\xi) \;;\; \sum_{j=0}^{i+1} \tau_j(x,\xi) \right].$$

- *On notera $\mathcal{O}d_q X(x,\xi)$ le q-uplet $(j_1, \cdots, j_q)$ défini par $X^i(x,\xi) \in \Gamma_{j_i}$.*

Nous rappelons le lemme suivant dû à M.Ikawa ([I3], lemme 3.1) :

Lemme 2.2.— *Pour tout α tel que $0 < \alpha < 1$, il existe $\delta_1 > 0$ et $d_0 > 0$ tels que pour tout $i = 1, ..., N$ et tout (x,ξ) tel que $x \in \Gamma_i$ et $|\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$, si $X^1(x,\xi) \in \Gamma_j$ alors*

$$-n(X^1(x,\xi)).\xi \le \delta_1 \Rightarrow L_1(x,\xi) \cap \{y\,;\, \mathrm{dist}(y, \underset{i\neq j}{\cup} \theta_i) \le d_0\} = \emptyset.$$

Preuve:

Soit $x \in \Gamma_i$. Si $n(X^1(x,\xi)).\xi = 0$ et si $X^2(x,\xi) \in \Gamma_{j'}$ existe, alors nécessairement $j_2 \neq j$ et $X^1 \in \mathrm{Conv}(\theta_j \cup \theta_{j_2})$, ce qui est absurde d'après l'hypothèse H_1.

On en déduit le lemme 2.2 par un argument de compacité.

Lemme 2.3.— *Pour tout α , $0 < \alpha < 1$ il existe $\delta_1' > 0$ et $d_0' > 0$ tels que pour tout $j = 1, \cdots, N$ si $x \in \Gamma_j$ et $|\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$, si $-n(x).\xi \le \delta_1'$ alors le rayon issu de (x,ξ) ne rencontre pas un d_0'-voisinage de $\underset{i\neq j}{\cup} \theta_i$ soit dans le passé soit dans le futur. On notera $(P1_j)$ cette propriété.*

La preuve de ce lemme est identique à celle du lemme 2.2.

Soit $(U_i, k_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini de Ω vérifiant la propriété (A.5). Soit (φ_i) une partition de l'unité associée à ce recouvrement. Nous supposerons de plus qu'au voisinage de Γ les fonctions φ_i sont indépendantes de la distance $d(x,\Gamma)$ du point x considéré à Γ et que si $U_i \bigcap \Gamma \neq \emptyset$, les coordonnées k_i sont des coordonnées géodésiques normales (en particulier $k_i(x)_n = dist\ (x,\Gamma)$).

On déduit du lemme 2.3 par un argument de continuité le lemme suivant:

Lemme 2.4.— *Pour tout α', $0 < \alpha' < 1$, il existe $\delta_1 > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tous $k = 1, \cdots, N$ et $j \in I$ et tout $(x,\xi) \in \overline{T}^*\Omega = \{(z,\zeta) \in T^*\mathbf{R}^3;\, z \in \bar{\Omega}\}$ tels que $x \in \mathrm{supp}(\varphi_j)$, $\mathrm{dist}(x, \Gamma_k) \le \varepsilon$ et $|\xi| \in [\alpha', \alpha'^{-1}]$ et si on pose $(y,\eta) = (k_j(x), {}^t dk_j^{-1}(\xi))$ ($(y,\eta) = (y_n, y', \eta_n, \eta')$) alors si $|{}^t dk_j(\eta_n, 0)| \le \delta_1$, le rayon issu de (x,ξ) vérifie la propriété $(P1_k)$.*

Preuve : Pour $x \in \Gamma$ le lemme 2.4 est juste une écriture en cartes locales du lemme 2.3, on conclut par compacité pour $\mathrm{dist}(x,\Gamma) \leq \varepsilon$ si on prend ε assez petit, quitte à prendre une constante δ_1 plus petite.

2.2 Construction de la troncature r.

Nous fixons maintenant la constante α' jusqu'à la fin du paragraphe 2. On remarque que nos constantes δ_1 et ε ne dépendent pas des fonctions φ_i, on pourra donc supposer de plus que la partition de l'unité (φ_i) vérifie la propriété suivante:

Pour tout $i \in I$, si $\mathrm{supp}(\varphi_i) \cap \Gamma \neq \emptyset$ alors $\mathrm{supp}(\varphi_i) \subset \{x \in \mathbf{R}^3 \,;\, \mathrm{dist}(x,\Gamma) \leq \varepsilon/2\}$, où ε est la constante du lemme 2.4.

Soient α une constante telle que $\alpha' < \alpha < 1$ et $\varepsilon_1 > 0$.

Pour tout $j \in I$, on peut définir une fonction $R_j \in C^\infty(T^*\mathbf{R}^3)$, $0 \leq R_j \leq 1$ vérifiant :

- Si supp $(\varphi_j) \cap \Gamma = \emptyset$,

$$\begin{aligned}
R_j(y,\eta) &= 1 \; si \; |({}^t dk_j)_{k_j^{-1}(y)}(\eta)| \in [\alpha, \alpha^{-1}] \;,\; y \in k_j(\mathrm{supp}(\varphi_j)) \\
&\qquad et \; k_j^{-1}(y) \in Conv(\bigcup_{i=1}^{N} \theta_i), \\
&= 0 \; si \; |({}^t dk_j)_{k_j^{-1}(y)}(\eta)| \notin [\alpha', \alpha'^{-1}] \; ou \; y \notin k_j(\mathrm{supp}(\varphi_j)) + B(0,1) \\
&\qquad ou \; k_j^{-1}(y) \notin Conv(\bigcup_{i=1}^{N} \theta_i) + B(0,\varepsilon_1),
\end{aligned}$$

$R_j \in C_0^\infty(T^*\mathbf{R}^3)$ et supp $(R_j) \subset \{(y,\eta);\; |({}^t dk_j)_{k_j^{-1}(y)}(\eta)| \in [\alpha', \alpha'^{-1}]\}$.

- Si supp $(\varphi_j) \cap \Gamma \neq \emptyset$ et pour $\varepsilon_2 > 0$ et $\varepsilon_3 > 0$ deux constantes que nous fixerons par la suite,

$$\begin{aligned}
R_j(y,\eta) &= 0 \; si \; y_n \geq \varepsilon \; ou \; si \; y_n \leq -2\varepsilon_2 \; ou \; si \; y \notin k_j(\mathrm{supp}(\varphi_j)) + B(0,1), \\
&= 0 \; si \; -2\varepsilon_2 \leq y_n \leq \varepsilon \; et \; |({}^t dk_j)_{k_j^{-1}(y)}(\eta',0)| \geq \alpha - \varepsilon_3, \\
&= 1 \; si \; -\varepsilon_2 \leq y_n \leq \varepsilon/2 \; et \; |({}^t dk_j)_{k_j^{-1}(y)}(\eta',0)| \leq \alpha - 2\varepsilon_3,
\end{aligned}$$

où ε est la constante du lemme 2.4.

On supposera que $R_j(y,\eta)$ ne dépend que de (y,η'), que R_j considérée comme fonction de (y,η') est dans $C_0^\infty(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^2)$ et qu'au voisinage de $y_n = 0$, R_j est indépendante de y_n et qu'il existe une fonction $g_j(y)$ telle que $0 \leq R_j(y,\eta) \leq g_j(y) \leq 1$ et au voisinage de $\eta' = 0$, $R_j(y,\eta) = g_j(y)$.

2.3 Quelques propriétés des troncatures.

Soit $\varepsilon_4 > 0$ que nous fixerons par la suite.

Comme l'enveloppe convexe fermée $\overline{\text{conv } \bigcup_i \theta_i}$ de l'union des obstacles est incluse dans $\widehat{\Omega}$, il existe une fonction $\overline{q} \in C_0^\infty(\widehat{\Omega})$ telle que $0 \leq \overline{q} \leq 1$, $\overline{q} = 1$ sur $\overline{\text{conv } \cup \theta_i}$ et $\overline{q} = 0$ sur $\partial\widehat{\Omega} + B(0,\varepsilon_4)$ si on prend la constante ε_4 assez petite.

Il existe des constantes $\alpha, \alpha' < \alpha < 1$, $T_1 > 0$ et $\varepsilon_3 > 0$ telles que la fonction

$$r(x,\xi) = \overline{q}(x) \times \sum_i \varphi_i(x) R_i(k_i(x), {}^t dk_i^{-1}(\xi))$$

vérifie la propriété suivante.

Propriété 2.5.— *Pour tout $(x,\xi) \in \overline{T}^*\Omega$ tel que $r(x,\xi) \neq 1$ et $|\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$, le rayon issu de (x,ξ) rencontre le bord extérieur de l'ouvert, $\partial\widehat{\Omega}$, en temps $t \in [-T_1, T_1]$.*

En effet :

$$\begin{aligned} r(x,\xi) \neq 1 \Leftrightarrow & \exists j \,;\, R_j(k_j(x), {}^t dk_j^{-1}(\xi)) \neq 1 \text{ } et \text{ } \varphi_j(x) \neq 0 \\ & ou \qquad \overline{q}(x) \neq 1. \end{aligned}$$

Dans le premier cas, si on pose $(y,\eta) = (k_j(x), {}^t dk_j^{-1}(\xi))$, comme $|\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$, supp $(\varphi_j) \cap \Gamma \neq \emptyset$, $0 \leq y_n \leq \varepsilon/2$ et $|{}^t dk_j \left({}^t dk_j^{-1}(\xi)', 0\right)| \in [\alpha - 2\varepsilon_3, |\xi|]$, on a

$$1 \leq \frac{|\xi|}{|{}^t dk_j \left({}^t dk_j^{-1}(\xi)', 0\right)|} \leq \frac{\alpha^{-1}}{\alpha - 2\varepsilon_3}$$

donc

$$|n(x) \cdot \xi| \leq \delta(\alpha, \varepsilon_3)|\xi| \leq \alpha^{-1}\delta(\alpha, \varepsilon_3)$$

avec δ fonction de α et ε_3 qui tend vers 0 quand α tend vers 1 et ε_3 vers 0. Donc si α est assez proche de 1 et ε_3 assez proche de 0, on est sous les hypothèses du lemme 2.4. Les constantes α et ε_3 étant ainsi choisies, $T_1 =$ diam $\widehat{\Omega} \times \alpha^{-1}$ permet alors de conclure.

Dans le deuxième cas, comme $x \notin \overline{\text{conv } \bigcup_i \theta_i}$, la propriété est facilement vérifiée.

De la même façon, on peut choisir α et ε_3 tels qu'on ait la propriété suivante:

Propriété 2.5'.— *Il existe $\delta > 0$ et $T_0 > 0$, tels que pour tout $i = 1, \cdots, N$, tout $x_0 \in \Gamma_i$ et tout ξ tel que $|\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$, si $-\delta < n(x) \cdot \xi \leq 0$ alors le rayon issu de (x_0, ξ_0) est resté dans le passé dans le complémentaire du support de $r(x, -\xi)$ entre les points (x_0, ξ_0) et $(x_0 - 4T_0\xi_0, \xi_0)$.*

Il suffit en effet de prendre δ et α tels que $-\delta < n(x) \cdot \xi \leq 0$ implique $|({}^t dk_j)_x \left(\left({}^t dk_j^{-1}\right)_{k_j(x)} (\xi_0)', 0\right)| \geq \alpha - \varepsilon_3$ au voisinage de x_0, on peut alors choisir $T_0 > 0$ assez petit qui vérifie la propriété 2.5'.

On fixe à partir de maintenant la constante α et on choisit $\rho > 0$ tel que $\alpha < \rho^{-1}$.

Remarque 2.5'.— *La fonction r est indépendante de la distance de x à Γ au voisinage de Γ. On en déduit donc que pour tout $x \in \Gamma$ et tout ξ tel que $|\xi| \leq C$, la fonction*

$$t \in]\varepsilon, \varepsilon[\mapsto r\left(X_t(x, \xi), \Xi_t(x, \xi)\right)$$

est de classe C^∞ avec des normes C^p indépendantes de x et ξ pour tout p.

On choisit une constante $\varepsilon_5 > 0$ que nous fixerons par la suite. Il existe une fonction $q_0(x, \xi) \in C_0^\infty(T^*\mathbf{R}^3)$ telle que

$$\begin{aligned} q_0(x, \xi) &= 1 \ si\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq 2\varepsilon_5\ et\ si\ |\xi| \in [\alpha, (\alpha)^{-1}], \\ &= 0\ si\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon_5\ ou\ si\ |\xi| \notin [\alpha', (\alpha')^{-1}]. \end{aligned}$$

Soit $q_1(x, \xi) \in C_0^\infty(T^*\mathbf{R}^3)$ telle que

- $q_1(x, -\xi) = 0$ si $\{x - \tau\xi\ ;\ \tau \geq 0\} \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^N (\theta_i + B(0, \delta_0)) \right) = \emptyset$,
- $q_1(x, -\xi) = 1$ si $\{x - \tau\xi\ ;\ \tau \geq 0\} \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^N (\theta_i + B(0, \delta_0/2)) \right) \neq \emptyset$.

On pose

$$q(x, \xi) = q_0(x, \xi) \times q_1(x, \xi).$$

Remarque 2.5".— *On déduit du lemme 2.3 que si $q(x,-\xi)\neq 0$ et si la droite issue de (x,ξ) rencontre dans le futur θ_i, alors on a*

$$\{z+\tau\Xi^1(z,\xi)\ ;\ \tau\geq 0\ ;\ z\in\Gamma_i\ ,\ 0\geq\xi\cdot n(z)\geq-\delta_1\}\bigcap\bigcup_{j\neq i}\theta_j=\emptyset$$

et

$$\{z+\tau\xi\ ;\ \tau\geq 0\ ;\ z\in\theta_i\}\bigcap\bigcup_{j\neq i}\theta_j=\emptyset$$

(c'est à dire que la zone d'ombre de l'obstacle θ_i associée à la phase incidente $\frac{x\cdot\xi}{|\xi|}$ ne rencontre pas $\bigcup\limits_{j\neq i}\theta_j$).

Nous allons montrer qu'il existe des constantes $\varepsilon_4>0$ et $\varepsilon_5>0$ telles que les fonctions r et q vérifient les hypothèses du théorème 1.1 (les constantes α, α' et ε_3 sont fixées vérifiant les hypothèses des propositions précédentes).

Il reste à montrer la propriété suivante:

Propriété 2.6.— *Il existe un temps T_0' et une constante M tels que pour tout point $(x,\xi)\in\overline{T}^*\Omega$ tel que $|\xi|\in[\alpha,\alpha^{-1}]$, le rayon généralisé issu de (x,ξ) parcouru à la vitesse $|\xi|$ a rencontré le bord extérieur de l'ouvert $\partial\widehat{\Omega}$ en temps $t\in[-4MT_0',0]$ ou est resté dans le complémentaire du support de (1-q) pendant un intervalle de temps de la forme $[-4nT_0';-4(n-1)T_0']$ pour un entier $n\in\{1,...,M\}$.*

Preuve

Si on prend $T_0>0$ et

$$8T_0'\leq\min\left\{\inf_{x\in\theta_i+B(0,\varepsilon_5),i=1,\dots,N,\ y\in\partial\widehat{\Omega}+B(0,\varepsilon_5)}\{\text{dist}\,(x,y)\times\alpha\},\frac{\alpha}{3}min_{i,j}\,\{\text{dist}\,(\theta_i,\theta_j)\}\right\}$$

et $M\geq\frac{2\text{diam}\hat{\Omega}\times\alpha^{-1}}{T_0'}+1$, alors si le rayon ne rencontre pas le bord de l'obstacle pendant l'intervalle de temps $[0,MT_0']$, c'est qu'il rentre dans $\text{conv}(\cup_i\theta_i)$ et qu'il rencontre au moins deux obstacles consécutivement. Comme les obstacles sont strictement convexes, si on prend ε_5 assez petit, le rayon ne peut rester dans un ε_5-voisinage d'un obstacle que pendant un temps arbitrairement petit (dépendant de ε_5 et du minimum des courbures des bords), qu'on peut donc supposer inférieur à T_0'; il est donc resté entre les deux obstacles dans le complémentaire du support de $(1-q)$ (car entre deux obstacles $q_1 \equiv 1$) pendant un temps au moins égal à $6T_0'$ et est donc resté dans la zone $q_0 \equiv 1$, $q_1 \equiv 1$ pendant un intervalle de temps de la forme $[-4nT_0'; -4(n-1)T_0']$ pour un entier $n \in \{1, ..., M\}$. D'autre part si le rayon a touché le bord extérieur de l'obstacle, comme r est identiquement nulle au voisinage du bord de l'obstacle, il est resté dans le complémentaire du support de r pendant un intervalle de temps de longueur fixe (dépendant de la constante ε_4 de la définition de la fonction $\bar{q}$).

Nous avons donc montré que les fonctions r et q vérifient les hypothèses du théorème 1.1. si on prend $0 < T_0 \leq T_0'$, T_0 assez petit et M assez grand (en fonction de T_0).

Nous allons maintenant montrer une propriété supplémentaire de la fonction r:

Lemme 2.7.— *Il existe $0 < T_0 \leq T_0'$, $\varepsilon_2 > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $x \in \Gamma$ et tout $\xi \in [\alpha', \alpha'^{-1}]$ tel que $\xi . n(x) \geq -\delta$, le point $X(t) = (x + t\xi, \xi)$ est resté dans le passé dans l'ensemble $\overline{\overset{\circ}{\{(y,\eta)\,;\, r(y,\eta) = 0\}}}$ pendant un intervalle de temps de longueur supérieure à $4T_0$, $[-t_0 - 4T_0, -t_0]$ et entre les instants $t = -t_0 - 4T_0$ et $t = 0$, il est resté dans l'ensemble $\overline{\overset{\circ}{\{(y,\eta)\,;\, q(y,\eta) = 0\}}}$.*

Preuve:
On va commencer par montrer la première partie de ce lemme (celle concernant la troncature r)
On a le lemme géométrique suivant:

Lemme 2.8.— *Pour tous $j = 1, \cdots, N$, $C > 0$, $\delta > 0$, il existe $\delta' > 0$ tel que pour tout $x \in \Gamma_j$ et tout ξ tel que $|\xi| \leq C$ et $n(x).\xi \geq \delta$, si on note y le deuxième point d'intersection de la droite $D(x, \xi)$ avec Γ_j, alors on a $-n(y).\xi \geq \delta'$.*

La preuve par l'absurde est évidente.

Par contraposée on en déduit que la meilleure constante $\delta'(\delta)$ telle que pour tout $x \in \Gamma$ et tout ξ tel que $|\xi| \leq C$ et $0 \leq n(x).\xi \leq \delta$, on ait:

$$0 \leq -n(y).\xi \leq \delta'$$

tend vers 0 quand δ tend vers 0.

On peut maintenant démontrer le lemme 2.7.

On fixe des constantes δ et δ_0 que nous préciserons plus tard. On a trois cas :

i) $-\delta \leq \xi \cdot n(x) \leq 0$

ii) $0 \leq \xi \cdot n(x) \leq \delta_0$

iii) $\delta_0 \leq \xi \cdot n(x)$

Le deuxième cas se ramène au premier en appliquant le lemme 2.8 si on prend δ_0 assez petit.

Le premier cas est une conséquence de la propriété 2.5'.

Il reste à étudier le troisième cas. C'est pour ce cas que nous allons ajuster la constante ε_2 de la construction de r que nous n'avons toujours pas fixée.

Soit θ_i l'obstacle sur lequel est situé le point x, soit y le deuxième point d'intersection de la droite $D(x,\xi)$ avec θ_i, soient $\eta > 0$ et $\theta_\eta = \{z \in \theta\,;\, \mathrm{dist}(z, \partial\theta) \geq \eta\}$. Alors θ_η est un convexe (non vide si η est assez petit). Soit x' (resp^t y') le point de $\partial\theta_\eta$ intersection de $\partial\theta_\eta$ avec la droite $D(x,\xi)$ situé le plus proche de x (resp^t y). Alors on a $\|x - x'\| \leq C(\eta)$ avec $C(\eta)$ ne dépendant que de δ_0 et du minimum des courbures sur Γ et tendant vers 0 quand η tend vers 0. En effet, si on fixe le point x, cette relation est évidente et pour avoir la relation pour tous les points x tels que $n(x).\xi \geq \delta$, on fait un raisonnement par l'absurde comme précédemment. On a la même relation pour $\|y - y'\|$.

On démontre maintenant par l'absurde la première partie du lemme 2.7 dans le cas iii) si on prend la constante ε_2 de (2.1) assez petite.

Comme dans tous les cas on est resté entre les instants $t = -t_0 - 4T_0$ et $t = 0$ dans $\theta_j + B(0, 4T_0(\alpha')^{-1})$, on en déduit qu'on peut choisir $T_0 > 0$ vérifiant le lemme 2.7.

On supposera de plus par la suite qu'on a $T_0 < \frac{\varepsilon_4}{4}\alpha$ et $T_0 < \frac{\varepsilon_5}{4}\alpha$.

3. Quelques résultats sur les phases et les transformations de billard.

Les résultats de cette partie sont pour un certain nombre démontrés (parfois sous une forme plus faible ($n = 2$ obstacles) par M. Ikawa dans [I1] [I2] et [I3]. Dans ce cas, nous rappellerons les démonstrations données par M.Ikawa (éventuellement légèrement modifiées).

Dans ce paragraphe on notera α une constante strictement positive et strictement plus petite que 1 qu'on pourra éventuellement augmenter un nombre fini de fois.

Définitions 3.1.—

- On appellera fonction phase toute fonction φ définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de classe C^∞ jusqu'au bord de l'ouvert $\mathcal{U}$ telle que $|\nabla\varphi| = 1$.

- On appellera front d'onde de φ les surfaces $\mathcal{C}\varphi(x) = \{y\ ; \varphi(y) = \varphi(x)\}$.

- On dira que la phase φ définie sur l'ouvert $\mathcal{U}$ vérifie (P) sur Γ_j si :

i) les courbures principales de $\mathcal{C}\varphi$ par rapport à la normale $(-\nabla\varphi)$ sont positives en tout point de $\mathcal{U}$.

ii) $$\{y + \tau\nabla\varphi(y)\ ; \tau \geq 0\ ; y \in \overline{\mathcal{U}} \cap \Gamma_j;\ \nabla\varphi(y)\cdot n(y) \geq 0\} \supset \bigcup_{\ell \neq j} \theta_\ell.$$

iii) pour tout $A \in \mathbf{R}$ les ensembles $\{x \in \mathcal{U}\ ;\ \varphi(x) \leq A\}$ sont vides ou convexes.

-Soit $\delta_1 > 0$. On notera $\Gamma_p(\varphi) = \{x \in \Gamma_p\ ; -n(x).\nabla\varphi(x) \geq \delta_1\}$.

On notera $\mathcal{U}_p(\varphi) = \bigcup_{X^1(x,\nabla\varphi_J)\in\Gamma_p(\varphi)} \{X^1(x.\nabla\varphi) + \tau\ \Xi^1(x,\nabla\varphi)\ ; \tau > 0\}$

3.1 Construction des phases réfléchies.

Proposition 3.2.— *([I3] lemme 3.5). Il existe* $\delta_1 > 0$ *tel que si* φ *est une phase vérifiant* (P) *sur* Γ_j*, alors pour tout* $p \neq j$ *on peut définir, sur l'ouvert* $\mathcal{U}_p(\varphi)$*, une phase* φ_p *vérifiant* (P) *sur* Γ_p*, par la relation :*

$$\varphi_p(X^1(x,\nabla\varphi) + \tau\ \Xi^1(x,\nabla\varphi)) = \varphi(X^1(x,\nabla\varphi)) + \tau\ .$$

De plus pour tout $x_0 \in \mathcal{U}_p(\varphi) \cap \widehat{\Omega}$*, les courbures principales de la surface* $\mathcal{C}_{\varphi_p}(x_0)$ *sont supérieures en tout point à une constante* $\kappa > 0$ *ne dépendant que de la géométrie de l'ouvert.*

Preuve : On choisit la constante δ_1 assez petite pour qu'elle vérifie les lemmes 2.2 et 2.3. Nous allons montrer que les points i), ii) et iii) de la définition 3.1 sont vérifiés.

i) Soit $x_0 = X_1(x,\nabla\varphi)$. Nous allons montrer que les courbures principales de $\mathcal{C}\varphi_p(x_0))$ sont supérieures à $2K(x_0)$, où $K(x_0)$ est le minimum des courbures principales de Γ en x_0 :

Prenons un système de coordonnées tel que :

$$\text{(3.1)}\qquad \begin{gathered} n(x_0) = \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right. \ \partial_{\eta_1} y(0) = \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right. \quad \partial_{\eta_2} y(0) = \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right. \\ \Gamma = \{y(\eta)\ ; \eta \in U \subset \mathbf{R}^2\}\ ,\ y(0) = x_0. \end{gathered}$$

Soit ω un système de coordonnées de $\mathcal{C}_\varphi(x_0)$ tel que

$$\text{(3.2)}\qquad \begin{aligned} &\{\omega(\sigma)\ ; \sigma \in \widetilde{U}\} = \mathcal{C}_\varphi(x_0)\ , \omega(0) = x_0\ , \\ &\partial_{\sigma_i}\omega(0).\partial_{\sigma_j}\omega(0) = \delta_{i,j}, \\ &\frac{\partial i}{\partial \sigma_j}(0) = K_j \partial_{\sigma_j}\omega(0) \quad \text{avec} \quad i(\sigma) = \nabla\varphi(\omega(\sigma)), \end{aligned}$$

où K_1 et K_2 sont les courbures principales de $\mathcal{C}\varphi(x_0)$.

Alors

$$\text{(3.3)}\qquad \mathcal{C}\varphi_p = \{\tau(\sigma) = y(\eta(\sigma)) - \ell(\sigma) r(\sigma)\},$$

avec

$$r(\sigma) = i(\sigma) - 2\{i(\sigma).n(y(\eta(\sigma)))\} n(y(\eta(\sigma)))$$

où $\eta(\sigma) = (\eta_1(\sigma), \eta_2(\sigma))$ et $\ell(\sigma)$ sont déterminés pour tout $\sigma \in \tilde{U}$ par

$$\text{(3.4)}\qquad y(\eta(\sigma)) = \omega(\sigma) + \ell(\sigma) i(\sigma) \qquad .$$

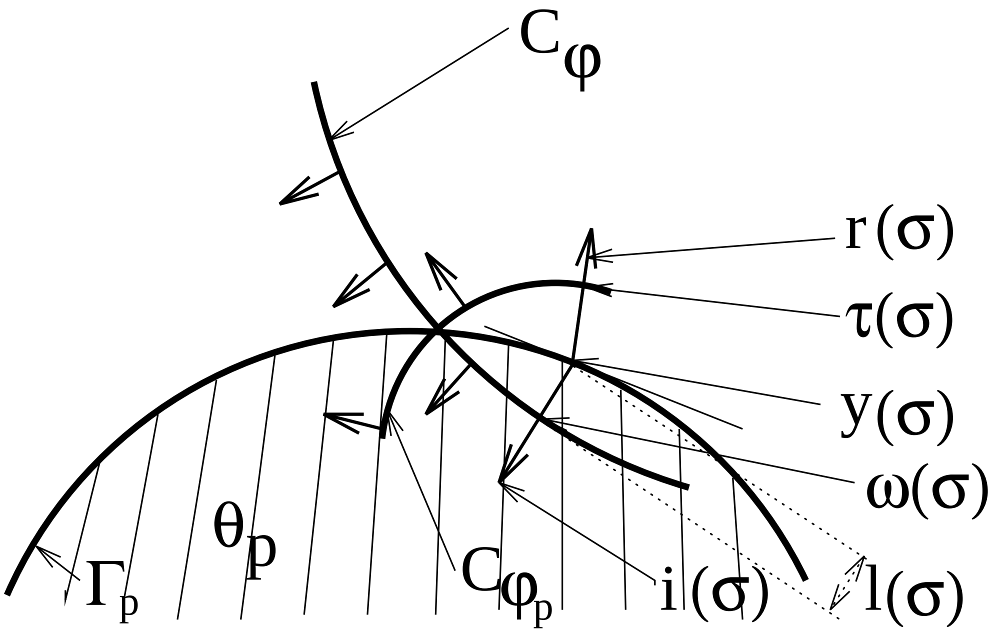

figure 1

On a

$$r(\sigma) = \nabla\varphi_p(\tau(\sigma)).$$

On peut supposer

$$-i(0) = \left| \begin{matrix} \sin v \\ 0 \\ \cos v \end{matrix} \right. .$$

Quitte à permuter σ_1 et σ_2, il existe θ_0 tel que

$$\text{(3.5)} \qquad \frac{\partial\omega}{\partial\sigma_1}(0) = \left| \begin{matrix} -\cos\theta_0\cos v \\ \sin\theta_0 \\ \cos\theta_0\sin v \end{matrix} \right. , \qquad \frac{\partial\omega}{\partial\sigma_2}(0) = \left| \begin{matrix} \sin\theta_0\cos v \\ \cos\theta_0 \\ -\sin\theta_0\sin v \end{matrix} \right. .$$

Différentions (3.4) par rapport à σ_j

$$\partial_{\eta_1} y \partial_{\sigma_j}\eta_1 + \partial_{\eta_2} y \partial_{\sigma_j}\eta_2 = \partial_{\sigma_j}\omega + (\partial_{\sigma_j}\ell)\ i + \ell\partial_{\sigma_j} i$$

or $\ell(0) = 0$; on a donc on a donc en utilisant (3.5)

$$\text{(3.6)} \qquad \partial_{\sigma_1}\ell(0) = tgv\cos\theta_0\ ,\ \partial_{\sigma_2}\ell(0) = -tgv\sin\theta_0$$

et

$$\text{(3.7)} \quad \begin{pmatrix} \partial_{\sigma_1}\eta_1 & \partial_{\sigma_2}\eta_1 \\ \partial_{\sigma_1}\eta_2 & \partial_{\sigma_2}\eta_2 \end{pmatrix}_{\sigma=0} = \begin{pmatrix} \cos v^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} T\,.\,\Theta.$$

Différentions la relation $\tau(\sigma) = y(\eta(\sigma)) - \ell(\sigma)r(\sigma)$ par rapport à σ_j.

En utilisant (3.6) et (3.7), on obtient

$$(3.8)\qquad (\partial_{\sigma_1}\tau\ ,\ \partial_{\sigma_2}\tau)_{\sigma=0} = \begin{pmatrix} \cos v & 0 \\ 0 & 1 \\ \sin v & 0 \end{pmatrix} \Theta$$

Soient K'_1 et K'_2 les courbures principales de Γ par rapport à $-n(x_0)$ au point x_0. Soit ψ l'angle de $\partial_{\eta_1} y(0)$ par rapport à la direction principale correspondant à K_1.
Alors

$$(3.9)\qquad (\partial_{\eta_1} n(y(\eta))\ ;\partial_{\eta_2} n(y(\eta)))_{\eta=0} = (\partial_{\eta_1} y\ ;\partial_{\eta_2} y)^t \Psi K \Psi$$

avec

$$(3.10)\qquad \Psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}\ et\, K = \begin{pmatrix} K'_1 & 0 \\ 0 & K'_2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$(3.11)\qquad \begin{aligned} &(\partial_{\sigma_1} n\left(y\left(\eta\left(\sigma\right)\right)\right)\ ,\partial_{\sigma_2}\left(n\left(y\left(\eta\left(\sigma\right)\right)\right)\right))_{\sigma=0} \\ &\quad = (\partial_{\eta_1} n\ ,\ \partial_{\eta_2} n)_{\eta=0} (\partial_{\sigma_j}\eta_i)_{i,j,\sigma=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t\Psi K \Psi T \Theta. \end{aligned}$$

Or

$$(3.12)\qquad \partial_{\sigma_j} r = \partial_{\sigma_j} i - 2(\partial_{\sigma_j} i.n)n - 2(i.\partial_{\sigma_j} n) - 2(i.n)\partial_{\sigma_j} n,$$

et

$$(3.13)\qquad (\partial_{\sigma_1} i - 2(\partial_{\sigma_1} i.n)n)|_{\sigma=0} = K_1 \begin{pmatrix} \cos v & 0 \\ 0 & 1 \\ \sin v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \end{pmatrix}$$

et
(3.14)

$$-2(i.\partial_{\sigma_1} n)n - 2(i.n)\partial_{\sigma_1} n = 2 \begin{pmatrix} \cos v \\ 0 \\ \sin v \end{pmatrix} (\partial_{\sigma_1} n)_1 + 2\cos v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (\partial_{\sigma_1} n)_2$$

où $(\partial_{\sigma_i} n)_j$ est la j^e composante de $\partial_{\sigma_i} n$.
On en déduit

$$(3.15)\qquad \partial_{\sigma_1} r|_{\sigma=0} = \begin{pmatrix} \cos v & 0 \\ 0 & 1 \\ \sin v & 0 \end{pmatrix} (K_1 I + 2\cos v T^t \Psi K \Psi T) \begin{pmatrix} -\cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \end{pmatrix}$$

et de même

$$(3.16)\qquad \partial_{\sigma_2} r|_{\sigma=0} = \begin{pmatrix} \cos v & 0 \\ 0 & 1 \\ \sin v & 0 \end{pmatrix} (K_2 I + 2\cos v T^t \Psi K \Psi T) \begin{pmatrix} \sin\theta_0 \\ \cos\theta_0 \end{pmatrix},$$

soit
(3.17)

$$(\partial_{\sigma_1} r\ ,\ \partial_{\sigma_2} r)_{\sigma=0} = \begin{pmatrix} \cos v & 0 \\ 0 & 1 \\ \sin v & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} + 2\cos v T^t \Psi K \Psi T \right] \Theta.$$

Les courbures principales de $\mathcal{C}_{\varphi_p}$ sont donc les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} + 2\cos v T^t \Psi K \Psi T,$$

car

$$(3.18)\qquad (\partial_{\sigma_1}\tau, \partial_{\sigma_1}\tau) = \begin{pmatrix} \cos v & 0 \\ 0 & 1 \\ \sin v & 0 \end{pmatrix} \Theta.$$

Elles vérifient donc

$$(3.19)\qquad \min(K_1, K_2) + 2\min(K_1', K_2') \leq K_1''\ ,\ K_2''$$

$$\leq \max(K_1, K_1) + 2\cos v \max(K_1', K_2').$$

Il reste à vérifier que les courbures principales restent positives le long de $\{x_0 + \tau\nabla\varphi_p\}$, ce qui est immédiat car

$$(3.20)\qquad K_i''(x_0 + \tau\nabla\varphi_p) = K_i''(x_0) \times \frac{1}{1 + \tau K_i''(x_0)}.$$

Nous allons démontrer maintenant les parties ii) et iii) de la proposition 3.2.
On sait que

$$(3.21)\qquad \theta_p \subset \bigcup_{x\in\Gamma_j\cap\overline{\mathcal{U}}} \{x + \tau\nabla\varphi(x)\}\ .$$

Nous allons montrer que pour tout $i \neq p$,

$$(3.21)' \qquad \theta_i \subset \bigcup_{x\in\Gamma_p(\varphi)} \{x+\tau\nabla\varphi(x)\ ,\ \tau\geq 0\}\ .$$

On notera

$$K=\{x+\tau\nabla\varphi(x)\ ;\ x\in\theta_p\}.$$

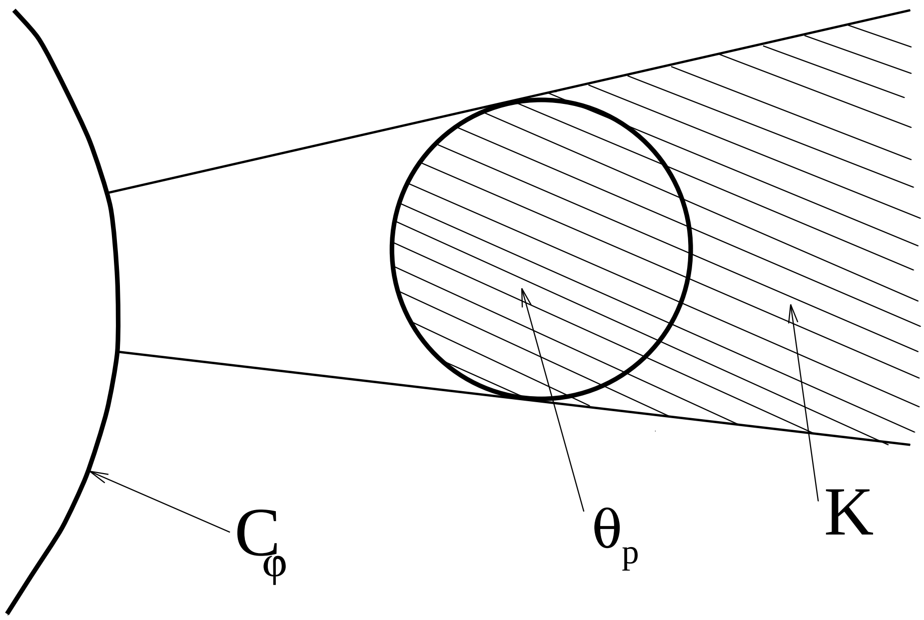

figure 2

On prolonge φ_p en reprenant la construction précédente pour tout $\delta_1>0$.

Nous commençons par montrer que $\mathbf{R}^3\setminus K$ est connexe.
En effet, comme

$$\theta_p\subset\bigcup_{x\in\Gamma_j\cap\overline{\mathcal{U}}}\{x+\tau\nabla\varphi(x)\},$$

l'ensemble $K'=\{y+\tau\nabla\varphi(y); y\in\mathcal{U}\cap\Gamma_j\}$ est un voisinage de K et pour tout point x de $K'\setminus K$, il existe un rayon issu de $y\in\Gamma_j$ qui arrive en x et ce rayon ne rencontre pas K entre les points x et y car sinon le point x serait dans K.

Si on prend maintenant un point de $\mathbf{R}^3\setminus K'$, on le relie à θ_j par une droite quelconque. Si cette droite rencontre K, il existe $y\in K'\setminus K$ tel que le segment $[x,y]$ ne rencontre pas K. On peut donc dans tous les cas relier le point x à l'obstacle θ_j par un chemin continu. $\mathbf{R}^3 \setminus K$ est donc connexe par arcs.

Nous allons montrer que l'ensemble des rayons réfléchis recouvre $\mathbf{R}^3 \setminus K$. Pour cela on montre que l'ensemble des points des rayons réfléchis est ouvert et fermé dans $\mathbf{R}^3 \setminus K$.

Il est fermé:
Soient $x_n = y_n + \tau_n \nabla\varphi_p(y_n)$ tels que $x_n \to x \in \mathbf{R}^3 \setminus K$.
On peut supposer quitte à extraire des sous-suites, que $y_n \to y \in \Gamma_p$ et $\tau_n \to \tau \geq 0$.
On a par passage à la limite $\nabla\varphi(y) \cdot n(y) \leq 0$.
On ne peut pas avoir $\nabla\varphi(y) \cdot n(y) = 0$ car sinon on aurait $\nabla\varphi_p(y_n) \to \nabla\varphi(y)$ et donc $x \in K$.
La phase φ_p est donc définie au point y et on a alors $x = y + \tau\nabla\varphi_p(y)$.

Nous allons maintenant montrer que l'ensemble des points des rayons réfléchis est ouvert dans $\mathbf{R}^3 \setminus K$.

Soit $x_0 = y_0 + \tau_0 \nabla\varphi_p(y_0)$ $(\tau_0 \geq 0)$. On choisit un point $z_0 \in \mathbf{R}^3 \setminus \cup_1^N \theta_i$ tel que $y_0 = z_0 + \eta_0 \nabla\varphi(z_0)$ $(\eta_0 \geq 0)$.
Comme $x_0 \notin K$ on a $\nabla\varphi(y_0) \cdot n(y_0) < 0$.
Il existe un convexe C et un voisinage U de z_0 dans $\mathcal{C}\varphi(z_0)$ tels que $V \subset \partial C$ (car les courbures principales de $\mathcal{C}\varphi$ sont strictement positives).
De plus, quitte à diminuer V, comme $\nabla\varphi(y_0) \cdot n(y_0) < 0$, on peut supposer que l'application $z \in V_1 \mapsto X^1(z, \nabla\varphi(z))$ est un difféomorphisme, l'application inverse étant la projection sur le convexe C.
Soient $V_1 \subset\subset V$ et $W_1 \subset\subset W$.
Les points z_0 et y_0 réalisent un minimum local strict de la fonction $(z, y) \subset \overline{V_1} \times \overline{W_1} \mapsto \|z - y\| + \|y - x_0\|$. Quitte à diminuer les voisinages V_1 et W_1, on peut supposer que c'est un minimum global strict.

On montre maintenant par l'absurde qu'il existe un voisinage U de x_0 tel que pour tout point $x \in U$ si y et z sont des points réalisant le minimum de la fonction $(z, y) \subset \overline{V_1} \times \overline{W_1} \mapsto \|z - y\| + \|y - x\|$ alors $z \in V_1$ et $y \in W_1$.
En effet, il existerait sinon des suites de points $(x_n) \to x_0$, (z_n) et (y_n) telles que pour tout n, $y_n \in \partial W_1$ ou $z_n \in \partial V_1$. On en déduit alors que $y_n \in \partial W_1$ et $z_n \in \partial V_1$. On peut de plus supposer que $z_n \to z \in \partial V_1$ et $y_n \to y \in \partial W_1$. Comme $\|z_n - y_n\| + \|y_n - x_0\| \leq \|z_n - y_n\| + \|y_n - x_n\| + \|x_n - x_0\|$, par passage à la limite quand $n \to +\infty$ on contredit le fait que le minimum de la fonction $(z, y) \subset \overline{V_1} \times \overline{W_1} \mapsto \|z - y\| + \|y - x_0\|$ est un minimum strict.

Comme les points z et y sont à l'intérieur de V_1 et de W_1, il est aisé de voir que pour tout point x de U, si z et y sont définis comme précédemment, $y = X^1(z, \nabla\varphi)$ et $x \in L^1(z, \nabla\varphi)$.

Il reste à voir que pour atteindre un point de l'obstacle θ_i $(i \neq p)$ on peut se limiter aux rayons issus de $\Gamma_p(\varphi)$, ce qui est une conséquence du lemme 2.1.

Pour démontrer la proposition 3.2, il suffit maintenant de montrer la propriété suivante

Propriété 3.2'.— *Il existe une constante $\kappa > 0$ ne dépendant que de la géométrie de l'ouvert Ω, telle que si φ est une phase définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ vérifiant (P) sur Γ_j alors pour tout $p \neq j$ et tout point $x_0 \in \widehat{\Omega} \cap \mathcal{U}_p(\varphi)$, les courbures principales de la surface $\mathcal{C}_{\varphi_p}(x_0)$ sont strictement supérieures à κ en tout point.*

Preuve:
Il existe un point $y \in \theta_p$ tel que $\varphi_p(x_0) = \varphi(y) + \text{dist}(x_0, y)$; et pour tout point $x \in \mathcal{C}_{\varphi_J}(x_0)$ il existe un point $z \in \theta_p$ tel que $\varphi_p(x) = \varphi(z) + \text{dist}(x, z)$. Comme $|\nabla\varphi| = 1$ sur θ_p, on en déduit que si $\delta = max_{i\neq j}\text{dist}(\theta_i, \theta_j)$, on a $\text{dist}(x, z) = \varphi_p(x) - \varphi(z) \leq \delta + \varphi_p(x_0) - \varphi(y) \leq \delta + \text{diam}(\widehat{\Omega})$. Comme au point z les courbures principales de $\mathcal{C}_{\varphi_p}$, K_1 et K_2, sont supérieures à une constante strictement positive, d'après ce qui précède, celles de $\mathcal{C}_{\varphi_p}(x_0)$ en x, $\frac{K_1}{1+\text{dist}(x,z)K_1}$ et $\frac{K_2}{1+\text{dist}(x,z)K_2}$, sont strictement supérieures à une constante κ strictement positive.

On notera $\varphi_p = \Phi_j^p \varphi$.

Soient
(3.22)
$$\mathcal{I}^{(n)} = \{J = (j_1, \cdots, j_n)\ ;\ j_\ell \in \{1, \cdots, N\}\ , j_{\ell+1} \neq j_\ell\ \forall 1 < \ell < n\},$$
$$\mathcal{I}_j^{(n)} = \{J = (j = j_1, \cdots, j_n)\ ;\ j_\ell \in \{1, \cdots, N\}\ , j_\ell{+}1 \neq j_\ell\},$$
$$\mathcal{I} = \cup_n \mathcal{I}^{(n)}\ , \mathcal{I}_j = \cup_n \mathcal{I}_j^{(n)}.$$

Pour $J \in \mathcal{I}_j$, φ vérifiant (P) sur Γ_j, on peut définir

$$\varphi_J \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{j_{n-1}}^{j_n} \cdots \Phi_j^{j_1} \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_J \varphi.$$

Si on note $J' = (j = j_1, \cdots, j_{n-1})$, la fonction φ_J est définie dans

$$(3.23) \qquad \mathcal{U}_J(\varphi) = \bigcup_{x \in \Gamma_{j_n}(\varphi_{J'})} \{X_n(x, \nabla_\varphi) + \tau \nabla \varphi_j \,;\, \tau \geq 0\}$$

qui est un voisinage de $\bigcup_{p \neq j_n} \theta_p$.

On peut donc définir pour $x \in \mathcal{U}_J(\varphi)$ et pour tout ℓ tel que $1 \leq \ell \leq n+1$, $X^{-\ell}(x, \nabla \varphi_J)$.

3.2 Comportement exponentiel du billard.

3.2.1 Le billard en variables d'espace.

Propriété 3.3.— *([I3] lemme 3.6 , sans démonstration) Il existe une constante $\kappa > 0$ telle que, si φ est une phase définie sur $\mathcal{U}$ vérifiant la propriété (P) sur Γ_{j_0} et telle que pour tout point $x_0 \in \mathcal{U} \cap \widehat{\Omega}$, les courbures principales de $\mathcal{C}_\varphi(x_0)$ sont plus grandes que κ en tout point, alors pour tout $j \neq j_0$, si φ_j est la phase construite à partir de la phase φ après rebond sur l'obstacle θ_j, pour tout $x_0 \in \mathcal{U} \cap \widehat{\Omega}$, pour tous $x, y \in \mathcal{C}_{\varphi_j}(x_0)$, pour tout $\tau \geq 0$,*

$$(3.24) \qquad \mathrm{dist}(x + \tau \nabla \varphi_j(x), y + \tau \nabla \varphi_j(y)) \geq (1 + \tau\, \kappa)\, \mathrm{dist}(x, y).$$

Preuve :

On prend κ comme à la propriété 3.2'.

Nous allons prolonger la fonction φ_j en une fonction $\tilde{\varphi}_j$ définie sur $\mathbf{R}^3$ telle pour tout point $x_0 \in \mathbf{R}^3$ il existe un nombre fini de courbes simples (c'est à dire ne se recoupant pas) et fermées de $\mathbf{R}^3$, de classe C^1, telles qu'en dehors de ces courbes, la surface de niveau $\mathcal{C}_{\tilde{\varphi}_j}(x_0)$ est de classe C^2 et a des courbures principales supérieures à une constante $\kappa > 0$, et telle que l'ensemble $E_j(A) = \{x ;\, x \in \mathbf{R}^3 ;\, \varphi_j(x) \leq A\}$ soit convexe.

On commence par prolonger φ_j en étendant la construction précédente aux points correspondant à $\cos v > 0$, c'est à dire jusqu'aux points issus des normales à $\mathcal{C}_{\varphi_j}$ qui sont aussi tangentes à l'obstacle θ_j, ce qui définit une nouvelle fonction $\tilde{\varphi}_j$, prolongeant la fonction φ_j, à l'extérieur du volume K.

On pose maintenant $\tilde{\varphi}_j = \varphi_j$ sur K.

D'après la construction de la phase φ_j, les surfaces de niveau de la nouvelle fonction $\tilde{\varphi}_j$ sont continues et de classe C^∞ en dehors de ∂K et d'après la propriété 3.2', pour tout point $x_0 \in \widehat{\Omega}$, les courbures principales de la surface $\mathcal{C}\tilde{\varphi}_j(x_0)$ sont supérieures à κ, en tout point $x \in \widehat{\Omega} \setminus \partial K$. Pour conclure, il suffit donc de vérifier que l'ensemble $\mathcal{C}\tilde{\varphi}_j(x_0) \cap \partial K$ est une courbe simple et fermée de $\mathbf{R}^3$ de classe C^1. Nous supposerons que $\mathcal{C}\varphi(x)$ n'est pas réduite à un seul point (sinon la propriété 3.3 est évidente).

Lemme 3.4.— *L'ensemble E des points du bord de l'obstacle θ_j tels que en ces points la normale à la surface $\mathcal{C}_\varphi$ est aussi tangente à l'obstacle, forme une courbe de classe C^∞ de $\mathbf{R}^3$.*

Preuve:

Considérons le difféomorphisme de classe C^∞:

$$x \in \partial\theta_j \mapsto n(x) \in S^2.$$

Comme la courbure de l'obstacle θ_j est bornée (par compacité), on peut l'étendre à un voisinage de θ_j dans $\mathbf{R}$ ce qui nous donne un difféomorphisme

$$\Psi \ : V(\theta_j) \to V(S^2).$$

On cherche maintenant à résoudre l'équation

$$(\|\Psi(x)\|, \nabla\varphi(x).\Psi(x)) = (1, 0).$$

On se place au voisinage de x_0, une solution de cette équation. Quitte à faire une rotation, on peut supposer que $\Psi(x_0) = \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$ donc que $d\|\Psi(x)\|(x_0) = dx_1 \circ d\Psi$.Soit $H = \nabla\varphi(x_0)$. On a alors

$$H(\nabla\varphi(x).\Psi(x))(x_0) = Hess\varphi_{x_0} H.\Psi(x_0) \ + \nabla\varphi(x_0).d\Psi_{x_0}(H)$$

Or $Hess\varphi_{x_0}(\nabla\varphi(x_0)) = 0$; donc

$$\begin{aligned} H(\nabla\varphi(x_0).\Psi(x_0)) &= \nabla\varphi(x_0).d\Psi_{x_0}(\nabla\varphi(x_0)), \\ &= \tilde{l}(\nabla\varphi(x_0), \nabla\varphi(x_0)), \end{aligned} \tag{3.25}$$

où $\tilde{l}$ est la seconde forme fondamentale de la surface $\partial\theta_j$ au point x_0 et est donc strictement supérieure à une constante $\kappa > 0$ (nous rappelons que les courbures principales d'une surface de $\mathbf{R}^3$ sont les deux valeurs propres de sa seconde forme fondamentale). On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites et conclure que l'ensemble E est localement une courbe;

et comme E est clairement fermé et inclus dans $\partial\theta_j$ donc compact, E est nécessairement réunion finie de courbes fermées de classe C^∞.

Le bord du volume K est donc une surface de classe C^1 (c'est le recollement de deux surfaces $\partial\theta_j$ et $\{x = x_0 + \tau\nabla\varphi(x_0);\ \tau \in \mathbf{R}_+^*;\ x_0 \in E\}$ de classe C^∞ le long d'une courbe de classe C^∞, le recollement étant fait de telle manière que les espaces tangents à nos deux surfaces coïncident aux points d'intersection (ces espaces sont engendrés dans les deux cas par la tangente à la courbe de E passant par x_0 et par le vecteur $\nabla\varphi(x_0)$)). Les points où notre surface $\tilde{\mathcal{C}}_{\varphi_j}$ n'est pas de classe C^∞ sont les points de l'intersection des surfaces $\mathcal{C}_\varphi$ et ∂K. Cette intersection est transverse: en effet, soit x un point de l'intersection. Si x n'est pas un point de $\partial\theta_j$ alors la normale à la surface $\mathcal{C}_\varphi$ est tangente à la surface ∂K au point x. Si x est un point de $\partial\theta_j$ et si les normales aux surfaces $\mathcal{C}_\varphi$ et $\partial\theta_j$ sont colinéaires, on a alors nécessairement $\tilde{\mathcal{C}}_{\varphi_j} = \{x\}$, cas que nous avons exclus.

Comme notre intersection Γ est fermée, on sait que c'est la réunion d'un nombre fini de courbes de classe C^1.

Nous allons maintenant montrer que les ensembles $E_j(A)$ sont convexes pour toute constante A. Pour cela, fixons un point x_0 de l'espace $\mathbf{R}^3$; nous allons montrer que sur tout segment I contenant I dans son intérieur, le point x_0 n'est pas un maximum local (sur I) de la fonction $\tilde{\varphi}_j$. En effet, si $x_0 \notin \partial K$, alors la surface $\tilde{\mathcal{C}}\varphi_j(\varphi_j(x_0))$ est régulière au voisinage de x_0, strictement convexe et de normale $\nabla\tilde{\varphi}_j(x_0)$. Si le segment I n'est pas orthogonal au vecteur $\nabla\varphi_j(x_0)$, le point $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ n'est pas un maximum local de la fonction φ_j. Si le segment I est orthogonal au vecteur $\nabla\varphi_j(x_0)$, il est dans le plan tangent à la surface $\tilde{\mathcal{C}}\varphi_j(\varphi_j(x_0))$ qui est strictement convexe; donc le point x_0 est un minimum local de la fonction φ_j. Il nous reste à étudier le cas où le point x_0 est sur la surface ∂K. On se ramène au cas précédent en remarquant qu'au voisinage de x_0 on a $\tilde{\varphi}_j(x_0) \geq \varphi(x)$ donc que la surface $\tilde{\mathcal{C}}\varphi_j(x_0)$ est " à l'intérieur" de la surface $\mathcal{C}\varphi(x_0)$. En effet : on fixe une surface de niveau $\mathcal{C}\varphi(B)$ telle que $B < A$, d'où provient le rayon qui rencontre l'obstacle θ_j et parvient en x_0. Alors au voisinage de x_0 les rayons (incidents ou après rebond sur l'obstacle) proviennent d'un voisinage de X_0 où X_0 vérifie $X_0 \in \mathcal{C}\varphi(B)$ et $X_0 + (A-B)\nabla\varphi(X_0) = x_0$. Si on prend ce voisinage de X_0 assez petit, on peut le compléter de telle manière que ce soit une partie du bord d'un convexe C et il devient alors clair que $\varphi(x) = \mathrm{dist}(x, C) \leq \varphi_j(x)$ car $\varphi_j(x)$ est la distance de x au convexe C en suivant une ligne brisée.

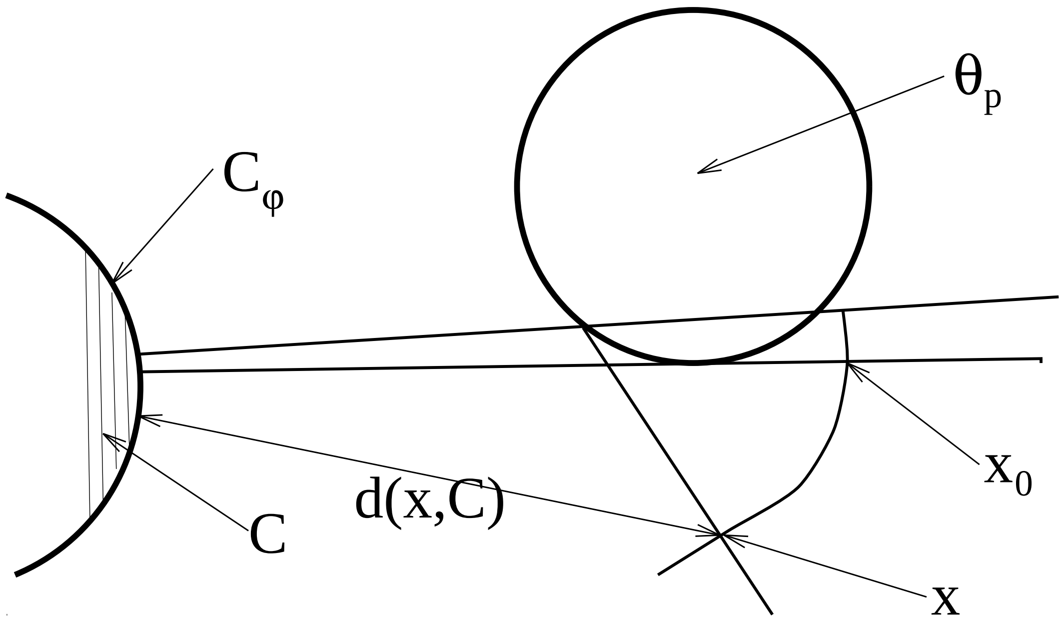

figure 3

On en déduit maintenant que l'ensemble $E_j(A)$ est convexe: il est clair que si on prend deux points de cet ensemble, le maximum de la fonction φ_j est atteint au bord du segment donc le segment est tout entier inclus dans $E_j(A)$.

Nous allons montrer le lemme essentiel à la démonstration du lemme 3.3:

Lemme 3.5.— *Il existe $\kappa > 0$ tel que pour tout $j_0 = 1, \cdots N$, si φ est une phase définie sur l'ouvert $\mathcal{U}$, vérifiant la propriété (P) sur Γ_{j_0}, alors pour tout point $x \in \widehat{\Omega}$ et $y \in \mathcal{C}_{\varphi_j}(x_0)$, si x et y sont des points réguliers de la surface $\mathcal{C}_{\varphi_j}$ (c'est à dire des points qui ne sont pas sur ∂K), si on note X le point de $\mathbf{R}^3$ situé sur la normale en x à la surface $\mathcal{C}_{\varphi_j}$ à l'intérieur à la distance $\frac{1}{\kappa}$, alors le point y est dans la boule centrée en X et de rayon $\frac{1}{\kappa}$.*

Preuve

On prend κ comme à la propriété 3.2'.

Nous allons commencer par nous ramener à une situation plane: soit y un point de $\mathcal{C}_{\varphi_j}$. Considérons un plan P passant par les trois points x, X et y. Soit C_ε le cercle centré au point $X_\varepsilon = x - \frac{n(x)}{(\kappa-\varepsilon)}$ et de rayon $R_\varepsilon = \frac{1}{\kappa-\varepsilon}$. Ce cercle est tangent extérieurement à la courbe $\mathcal{C}$, intersection du plan P avec la surface $\mathcal{C}_{\varphi_j}$, qui est aussi le bord du convexe D, intersection du plan P avec le convexe $E_j(A)$. Comme le point y est sur la courbe C, il nous suffit de vérifier que la courbe $\mathcal{C}$ est toute entière contenue dans la boule B_ε centrée en X_ε et de rayon R_ε. Nous faisons un raisonnement par l'absurde:

Supposons que la courbe $\mathcal{C}$ intersecte le cercle C_ε. On repère les points sur le cercle par l'angle θ avec $\theta \in [-\pi, \pi[$ qu'il font avec le vecteur $\overrightarrow{Xx}$. Soit z un point de $C_\varepsilon \cap \mathcal{C}$ tel que le module de l'angle qui lui est associé est minimum. Comme au voisinage du point x, la courbe $\mathcal{C}$ est strictement à l'intérieur de la boule B_ε, on sait que cet angle θ n'est pas nul. On choisit un repère tel que le point X_ε est l'origine, le point x sur l'axe des abscisses du coté des abscisses positives et que le point z est dans le demi-plan supérieur.

Soit B'_ε la partie de B_ε située au dessus de la corde $[z, x]$. Soit $D' = D \cap B'_\varepsilon$. On considère maintenant les boules fermées B_t de rayon R_ε centrées sur la médiatrice du segment $[z, x]$ qu'on paramétrise par l'ordonnée t de leur centre. Soit $t_0 = sup\{t \leq 0;\ B_t \cap B'_\varepsilon \subset D'\}$. Comme pour t assez petit $B_t \cap B'_\varepsilon = \emptyset$, on sait que t_0 existe.

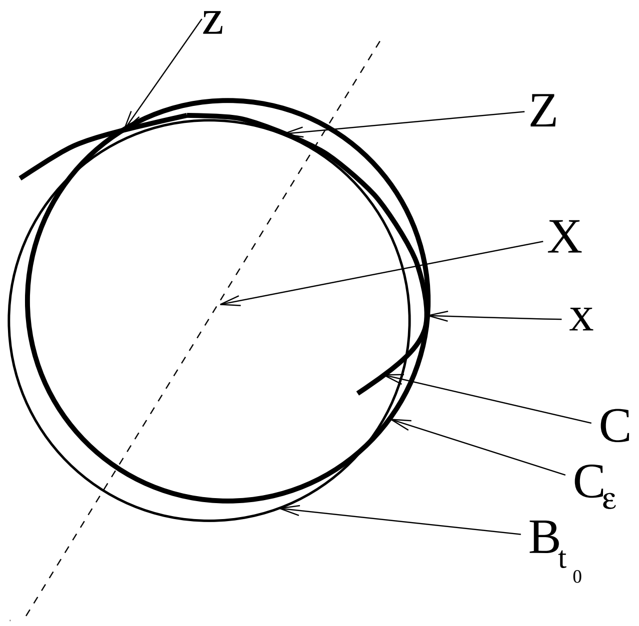

figure 4

On vérifie d'abord que $t_0 < 0$. En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait alors $B_t \cap B_\varepsilon \subset D'$ pour tout $t < 0$ donc $B_\varepsilon \subset D'$ ce qui est impossible d'après l'hypothèse de convexité au voisinage du point x (D' est strictement incluse dans B au voisinage de x). On en déduit donc qu'il existe un point $Z \in B_{t_0} \cap \partial D$ et comme $t_0 < 0$ on a $Z \neq z$ et $Z \neq x$.

Au voisinage de ce point, la boule B_{t_0} est dans le convexe D et lui est donc nécessairement tangente ce qui est impossible d'après l'hypothèse sur la convexité de D (on sait que D est "plus courbée" que la courbe $P \cap \mathcal{C}_\varphi$ qui elle-même a une courbure supérieure à κ). On en déduit que le convexe D est inclus dans la boule B_ε quelque soit le réel $\varepsilon > 0$ donc qu'il est inclus dans la boule B_0.

Le lemme 3.4 est donc démontré.

Nous pouvons maintenant finir la démonstration du lemme 3.3:

Nous avons la situation suivante:
Soient C et C' deux sphères de même rayon $R = \frac{1}{\kappa}$ centrées en O et O'. Soit x ($resp^t$ y) un point de C ($resp^t$ C') tel que x ($resp^t$ y) est dans la boule fermée de centre O'($resp^t$ O) et de rayon R. Soit n(x) ($resp^t$ $n(y)$) la normale extérieure à la sphère C ($resp^t$ C') au point x ($resp^t$ y). Nous voulons montrer que pour tout $d \geq 0$, on a

$$\|(x + dn(x)) - (y + dn(y))\| \geq (1 + d\kappa)\|x - y\|.$$

On prend un système de coordonnées ayant pour origine le milieu du segment $[O, O']$ et tel que l'axe des z soit dirigé suivant $\overrightarrow{OO'}$.
Dans ce système, on a:

$$O = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{vmatrix}, \qquad O' = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{vmatrix}, \qquad x = \begin{vmatrix} b \\ c \\ e \end{vmatrix}, \qquad y = \begin{vmatrix} f \\ h \\ -g \end{vmatrix}, \tag{3.26}$$

avec $a > 0$, $e \geq 0$ et $g \geq 0$ (c'est l'hypothèse que x ($resp^t$ y) est dans la boule fermée de centre O'($resp^t$ O) et de rayon R).

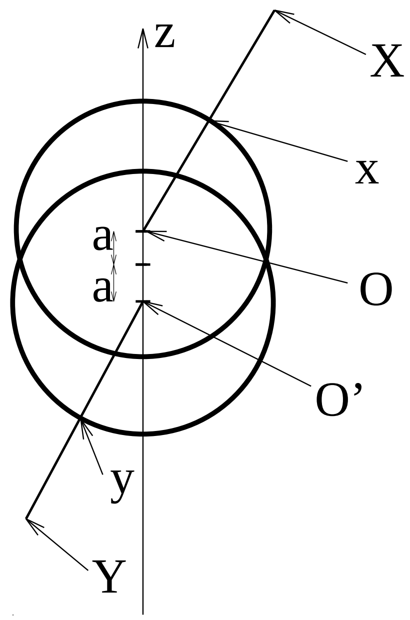

figure 5

On a alors

$$X = \left| \begin{array}{c} (1+d\kappa)\times b \\ (1+d\kappa)\times c \\ (1+d\kappa)(e+a)-a \end{array} \right. ,$$

$$Y = \left| \begin{array}{c} (1+d\kappa)\times f \\ (1+d\kappa)\times h \\ (1+d\kappa)(-g-a)+a \end{array} \right. .$$

On en déduit donc le résultat annoncé ce qui termine la démonstration du lemme 3.3.

Lemme 3.5'.— *([I3] lemme 3.7). Soit φ vérifiant (P) sur Γ_j, soient $x, y \in \Gamma_j$ tels qu'il existe p tel que $x_1 = X^1(x, \nabla\varphi)$ et $y_1 = X^1(y, \nabla\varphi)$ appartiennent à Γ_p.*

Quitte à échanger les points x et y, on peut supposer $\varphi(x_1) \leq \varphi(y_1)$.

Soit x_1^i le point de $\{x + \tau\nabla\varphi\ ;\tau \geq 0\}\ ;\varphi(x_1^i) = \varphi(y_1)$.

Soit x_1^r le point de $L_1(x, \nabla\varphi)$ tel que $\varphi_p(x_1^r) = \varphi(y_1)$.

Alors

$$\text{dist }(x_1^i, y_1) \leq \text{dist }(x_1^r, y_1).$$

Preuve :

Elle découle de la convexité de Γ_p :

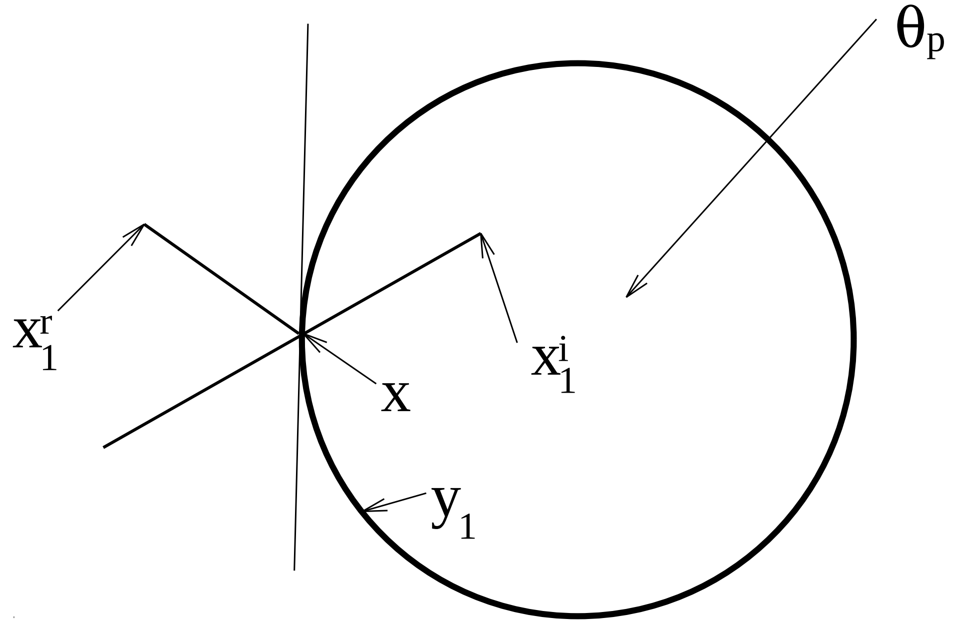

figure 6

Lemme 3.6.— *([I3] lemme 3.8). Il existe α tel que $0 < \alpha < 1$ et pour tout $\delta_1 > 0$ il existe $C > 0$ tel que si φ est une phase définie sur un ouvert $\mathcal{U}$, vérifiant (P) sur Γ_j et si $x, y \in \Gamma_j$ vérifient*

$$\begin{aligned} -n(x).\nabla\varphi(x) &\geq \delta_1, \\ -n(y).\nabla\varphi(y) &\geq \delta_1, \\ \textit{et } \mathcal{O}d_q\ X(x,\nabla\varphi) &= \mathcal{O}d_q\ X(y,\nabla\varphi), \end{aligned} \tag{3.27}$$

alors

$$|x - y| \leq C\alpha^q\ .$$

Preuve :
Soient

$$\begin{aligned} &x_0 = x, \cdots, x_q = X^q(x,\nabla\varphi), \\ &y_0 = y, \cdots, y_q = X^q(y,\nabla\varphi), \\ &\mathcal{O}d_q\ X(x,\nabla\varphi) = (j = j_1, \cdots, j_q). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Posons pour tout $p \leq q$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} w_p = x_p, \\ z_p = y_p, \end{cases} \quad \text{si} \quad \varphi_{(j,j_1,\cdots,j_{p-1})}(x_p) \leq \varphi_{(j,j_1,\cdots,j_{p-1})}(y_p), \\ &\begin{cases} w_p = y_p, \\ z_p = x_p, \end{cases} \quad \text{sinon} \quad . \end{aligned} \tag{3.29}$$

Soient w_p^i et w_p^r comme au lemme 3.4.

Alors $|x-y| \leq \delta^{-1}|w_0^r - z_0|$ (les courbures principales de $\mathcal{C}\varphi$ sont positives).
Or

$$|\varphi(w_1^i) - \varphi(w_0^r)| = |\varphi(z_1) - \varphi(z_0)| \geq d_{\min} = \min_{i \neq j} \operatorname{dist}(\theta_i, \theta_j),$$

donc

$$\begin{aligned} |z_1 - w_1^i| &\geq |z_0 - w_0^r|, \\ |z_1 - w_1^r| &\geq |z_1 - w_1^r|. \end{aligned}$$

Comme les courbures principales de $\varphi_{(j,j_1)}$ sur $\widehat{\Omega} \cap \mathcal{U}_{J_1}(\varphi)$ sont plus grandes qu'une constante $K > 0$, on obtient, d'après le lemme 3.3,

$$|z_2 - w_2^i| \geq (1 + d_{\min}K)|z_1 - w_1^r|$$

On a donc

$$|z_2 - w_2^r| \geq |z_2 - w_2^i| \ ,$$
$$|z_2 - w_2^r| \geq (1 + d_{\min} K)|z_1 - w_1^r|,$$
$$|z_p - w_p^r| \geq (1 + d_{\min} K)^{p-1}|z_0 - w_0^r| \ .$$

Or

$$|z_p - w_p| \leq \rho |w_p - w_p^r| \leq \rho,$$

donc

$$(1 + d_{\min} K)^{p-1} \delta |x - y| \leq 2\rho = \sup_i \operatorname{diam}(\theta_i).$$

3.2.2 Le billard en variables de directions.

Lemme 3.6'.— *([I3] lemme 3.9). Pour tout $\kappa > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si φ et $\tilde{\varphi}$ sont deux phases définies sur un ouvert $\mathcal{U}$ vérifiant (P) sur Γ_j, et si les courbures principales de la phase φ sont supérieures à κ en tout point de $\mathcal{U} \cap \widehat{\Omega}$, alors pour tout $p \neq j$ et tout $i \neq p$, on a*

$$\sup_{x \in \Gamma_i} |\nabla \varphi_p(x) - \nabla \tilde{\varphi}_p(x)|, \leq \alpha \sup_{x \in \Gamma_p} |\nabla \varphi(x) - \nabla \tilde{\varphi}(x)|. \tag{3.30}$$

Preuve : (Nous donnons ici une démonstration différente de celle d'Ikawa).
Soit z un point de Γ_i. Il existe des points x et y de Γ_p, tels que $z = x + d\nabla\varphi_p(x)$ et $z = y + d'\nabla\widetilde{\varphi}_p(y)$.
Pour tout $y \in \Gamma_p$,

$$\|\nabla \varphi_p(y) - \widetilde{\nabla} \varphi_p(y)\| \leq \|\nabla \varphi(y) - \nabla \widetilde{\varphi}(y)\|,$$

(on note ici encore φ_p le prolongement de la phase φ_p défini sur le complémentaire de θ_p comme précédemment).
En effet:
Si $\nabla\varphi(y) \cdot n(y) \leq 0$ alors $\nabla\varphi_p(y) = \nabla\varphi(y) - 2n(y) \cdot \nabla\varphi(y) n(y)$ et $\nabla\widetilde{\varphi}_p(y) = \nabla\widetilde{\varphi}(y) - 2n(y) \cdot \nabla\widetilde{\varphi}(y) n(y)$. On a donc

$$\|\nabla \varphi_p(y) - \widetilde{\nabla} \varphi_p(y)\| = \|\nabla \varphi(y) - \nabla \widetilde{\varphi}(y)\|.$$

Si $\nabla\varphi(y)\cdot n(y)\geq 0$, on a $\nabla\varphi_p(y)=\nabla\varphi(y)$ et $\nabla\widetilde{\varphi}_p(y)=\nabla\widetilde{\varphi}(y)-2n(y)\cdot\nabla\widetilde{\varphi}(y)n(y)$, donc

$$\begin{aligned}\|\nabla\varphi_p(y)-\widetilde{\nabla}\varphi_p(y)\|^2 &= \|\nabla\varphi(y)-\nabla\widetilde{\varphi}(y)\|^2+4(n(y)\cdot\nabla\widetilde{\varphi}(y))(n(y)\cdot\nabla\varphi(y))\\ &\leq \|\nabla\varphi(y)-\nabla\widetilde{\varphi}(y)\|^2.\end{aligned}$$

Ainsi, il suffit de démontrer que

$$\|\nabla\varphi_p(z)-\nabla\widetilde{\varphi}_p(z)\|\leq\alpha\|\nabla\varphi_p(y)-\nabla\widetilde{\varphi}_p(y)\|.$$

On considère le chemin inclus dans $\widehat{\Omega}$

$$y(s)=y+s\nabla\widetilde{\varphi}_p(y)$$

et sur ce chemin l'application

$$f(s)=\nabla\varphi_p(y(s)).\nabla\widetilde{\varphi}_p(y).$$

Cette application est continue sur $[0,d']$ et de classe C^1 sauf en des points isolés. En effet, elle est de classe C^1 sauf sur le bord de l'ensemble K associé à la phase φ. D'autre part, l'intersection d'une droite D avec le bord de K n'est pas une réunion de points isolés, seulement dans le cas où la droite a pour direction $\nabla\varphi(x)$ avec $x\in D\cap\partial K$. Ce cas est exclu car $z\notin K$ (K ne rencontre pas l'obstacle θ_i).

Comme

$$\begin{aligned}f(0)&=\nabla\varphi_p(y).\nabla\widetilde{\varphi}_p(y),\\ f(d')&=\nabla\varphi_p(z).\nabla\widetilde{\varphi}_p(z)\end{aligned}$$

et

$$\frac{df}{ds}(y(s))=Hess\,(\varphi_p)_{x(s)}\,(\nabla\widetilde{\varphi}_p(y)).\nabla\widetilde{\varphi}_p(y),$$

si on note $v(s)$ le projeté du vecteur $\nabla\widetilde{\varphi}_p(y)$ sur l'espace tangent en $y(s)$ à la surface $\mathcal{C}\varphi_p(y(s))$, on a

$$\frac{df}{ds}(y(s))\geq\kappa\|v(s)\|^2,$$

or $\|v(s)\|^2=(1-f(s)^2)$ donc

$$\frac{df}{ds}\geq\kappa(1-f^2),$$

$$\left|\frac{1-f(0)}{1+f(0)}\right|) \geq \left|\frac{1-f(d')}{1+f(d')}\right| e^{2\kappa d'}.$$

Si on note θ_0 l'angle des vecteurs $\nabla\varphi(y)$ et $\nabla\widetilde{\varphi}(y)$ et θ_1 celui des vecteurs $\nabla\varphi(z)$ et $\nabla\widetilde{\varphi}(z)$, on a donc

$$tg^2(\theta_0/2) \geq e^{2\kappa d'} tg^2(\theta_1/2).$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que comme les obstacles sont convexes de diamètres inférieurs à une constante $\delta > 0$ et sont éloignés les uns des autres d'une distance $d > 0$ on a $|tg(\theta_1/2)| \leq \frac{\delta}{2d}$. Il existe donc une constante $0 < \alpha < 1$ (ne dépendant que de κ, d et δ) telle que

$$\alpha \times \sin^2(\theta_0/2) \geq \sin^2(\theta_1/2),$$

ce qui est la relation annoncée.

Corollaire 3.6".— *([I3] lemme 3.9). Il existe un réel $0 < \alpha < 1$ tel que si φ et $\widetilde{\varphi}$ sont des phases définies sur un ouvert $\mathcal{U}$, vérifiant (P) sur Γ_j alors pour tout $J = (j, j_2, \cdots, j_n) \in \mathcal{I}$ et tout $i \neq j_n$ on a*

$$|\nabla\varphi_J - \nabla\widetilde{\varphi}_J|_{\Gamma_i} \leq \alpha^{|J|-1} |\nabla\varphi - \nabla\widetilde{\varphi}|_{\Gamma_{j_2}}.$$

3.3 Quelques estimations C^∞.

Définition : On munit $\mathbf{R}^3$ de la norme euclidienne. Pour toute fonction $f : U \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, tout point $x \in U$ et tout ouvert $V \subset U$, on notera

$$|f|_m(x) = \max_{j\leq m} \max_{\substack{a_i\in S^2\\ i=1,\cdots,j}} |X_{a_1}\cdots X_{a_j}(x)|,$$

$$|f|_{(m)}(x) = \max_{\substack{a_i\in S^2\\ i=1,\cdots,m}} |X_{a_1}\cdots X_{a_j} f(x)|,$$

$$|f|_m(V) = sup_{x\in V} |f|_m(x),$$

$$|f|_{(m)}(V) = sup_{x\in V} |f|_{(m)}(x),$$

ou $X_a = a^1\partial_{x_1} + a^2\partial_{x_1} + a^3\partial_{x_3}$.

Dans toute la suite, α désignera une constante $0 < \alpha < 1$ qu'on pourra augmenter un nombre fini de fois.

Lemme 3.7.— *([I1] lemme 5.1). Soient $x_0 \in \mathbf{R}^3$ et φ une phase définie au voisinage de la demi-droite issue de x_0 et de direction $\nabla\varphi(x_0)$.*

Soit $K = \min\{K_1, K_2\}$ où K_1 et K_2 sont les courbures principales de $\mathcal{C}_\varphi(x_0)$. Pour tout $\ell > 0$, on a alors

$$|\nabla\varphi|_{(1)}(x_0 + \ell\nabla\varphi(x_0)) \leq \frac{1}{1+\ell K}|\nabla\varphi|_{(1)}(x_0).$$

Preuve : Reprenons les notations de la preuve du lemme 3.2 :

$$\mathcal{C}_\varphi(x_0) = \{\omega(\sigma) \; ; \sigma \in \tilde{U}\}.$$

On peut supposer de plus que

$$\partial_{\sigma_1}\omega(0) = \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$$

$$\partial_{\sigma_2}\omega(0) = \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right. \tag{3.36}$$

$$n(0) = \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

L'application $(\sigma, \tau) \mapsto \omega(\sigma) + \tau n(\sigma)$ est donc un système de coordonnées au voisinage de $x_0 = (0, 0, 0)$. De plus, si on note $\sigma_3 = \tau$, on a

$$\partial_{x_k}\sigma_j(x_0) = \delta_{j,k}. \tag{3.37}$$

On en déduit

$$(X_a\nabla\varphi)(x_0) = [a_1\partial_{\sigma_1}n + a_2\partial_{\sigma_2}n](0),$$

car $\partial_\tau n = 0$.

De même : prenons une représentation de $\mathcal{C}\varphi(x_1) = \{\tilde{\omega}(\eta)\}$ vérifiant les mêmes propriétés (3.36)'. On a alors

$$(X_a\nabla\varphi)(x_1) = a_1\partial_{\eta_1}\nu + a_2\partial_{\eta_2}\nu(0) \tag{3.38}$$

où $\nu(\eta) = \nabla\varphi(\tilde{\omega}(\eta))$.

Si $x_1 = x_0 + \ell\nabla\varphi(x_0)$, on peut définir, pour tout η assez proche de 0, $\sigma(\eta)$ par

$$\tilde{\omega}(\eta) = \omega(\sigma(\eta)) + \ell n(\sigma(\eta)). \tag{3.39}$$

Dérivons cette relation par rapport à σ_j; on obtient

$$\partial_{\eta_j}\sigma_i(0) = (1+\ell K_j)^{-1}\delta_{i,j} \quad \text{d'après (3.36) et (3.36)'} \quad . \tag{3.40}$$

Si on reporte dans (3.38), on obtient

$$(3.40)' \qquad X_a \nabla\varphi(x_1) = a_1(1+\ell K_1)^{-1}\partial_{\sigma_1} n(0) + a_2(1+\ell K_2)^{-1}\partial_{\sigma_2} n(0)$$

d'où le lemme 3.7.

Lemme 3.8.— *([I1] lemme 5.2). Il existe $C_2 > 0$, tel que si $x_0 \in \mathbf{R}^3$, si φ est une phase définie au voisinage de la demi-droite issue de x_0 et de direction $\nabla\varphi(x_0)$ et si $K = \min\{K_1, K_2\}$ où K_1 et K_2 sont les courbures principales de $\mathcal{C}_\varphi(x_0)$, pour tout $\ell > 0$, on a*

$$|\nabla\varphi|_{(2)}(x_0 + \ell\nabla\varphi(x_0)) \leq (1+\ell K)^{-3}|\nabla\varphi|_{(2)}(x_0) + C_2|\nabla\varphi|_1(x_0).$$

Preuve :
Dérivons (3.39) par rapport à η_k et η_h; il vient
(3.41)

$$\frac{\partial^2\tilde{\omega}}{\partial\eta_k\partial\eta_h} = \sum_{j=1}^{2}(\partial_{\sigma_j}\omega + \ell\partial_{\sigma_j} n)\partial^2_{\eta_k,\eta_h}\sigma_j + \sum_{i,j=1}^{2}\left(\partial^2_{\sigma_i,\sigma_j}\omega + \ell\partial^2_{\sigma_i,\sigma_j} n\right)\frac{\partial\sigma_i}{\partial\eta_k}\frac{\partial\sigma_j}{\partial\eta_h}.$$

Plaçons nous en $\eta = 0$ et prenons le produit scalaire avec $\partial_{\sigma_j}\omega(0)$, on obtient d'après (3.40)

(3.42)

$$\begin{aligned}\partial^2_{\eta_k,\eta_h}\omega \,.\, \partial_{\sigma_j}\omega(0) \\ &= (1+\ell K_j)\partial^2_{\eta_k,\eta_h}\sigma_j + \ell\partial_{\sigma_j}\omega\cdot\partial^2_{\sigma_k,\sigma_h} n(1+\ell K_k)^{-1}(1+\ell K_h)^{-1} \\ &\quad + \partial_{\sigma_j}\omega\cdot\partial^2_{\sigma_k\sigma_h}\omega(1+\ell K_k)^{-1}(1+\ell K_h)^{-1}.\end{aligned}$$

Or on peut choisir ω et $\tilde{\omega}$ vérifiant (3.36) et (3.36)' et tels de plus que

$$(3.43) \qquad \begin{aligned}\sum_{|\gamma|\leq m}|(D^\gamma_\sigma\omega)(0)| &\leq C_m\sum_{|\gamma|\leq m}|D^\gamma_x\varphi(x_0)|, \\ \sum_{|\gamma|\leq m}|D^\gamma_\eta\tilde{\omega}(0)| &\leq C_m\sum_{|\gamma|\leq m}|D^\gamma_x\varphi(x_1)|,\end{aligned}$$

avec C_m indépendant de x_0, x_1 et ℓ. On obtient donc
(3.44)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\sigma_j}{\partial_{\eta_k}\partial_{\eta_h}}(0) &= -(1+\ell K_j)^{-1}(1+\ell K_h)^{-1}(1+\ell K_k)^{-1}\ell\partial_{\sigma_j}\omega(0)\partial^2_{\sigma_k\sigma_h} n(0) \\ &\quad + I_{j,k,h},\end{aligned}$$

avec

$$|I_{j,k,h}| \leq C_2(|\nabla\varphi|_1(x_1) + |\nabla\varphi|_1(x_0). \tag{3.45}$$

Or d'après 3.40

$$\partial^2_{\eta_k,\eta_h}\nabla\varphi(\tilde{\omega}(\eta))|_{\eta=0} = \partial^2_{\sigma_k,\sigma_h}n(0)(1+\ell K_k)^{-1}(1+\ell K_h)^{-1}$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\partial_{\sigma_j}n(0)\partial^2_{\eta_k,\eta_h}\sigma_j(0).$$

Prenons le produit scalaire avec $\partial_{\sigma_j}\omega(0)$; utilisant (3.44), (3.45) et (3.2), on obtient

$$\begin{aligned}&\partial_{\sigma_j}\omega(0)\partial^2_{\eta_k,\eta_h}\nabla\varphi(\tilde{\omega}(\eta))|_{\eta=0} = \\ &\quad\partial_{\sigma_j}\omega(0)\cdot\partial^2_{\sigma_k,\sigma_h}n(0)(1+\ell K_k)^{-1}(1+\ell K_h)^{-1}(1+\ell K_j)^{-1}\\ &\quad+K_jI_{j,h,k}.\end{aligned} \tag{3.47}$$

Or $\partial_{\sigma_j}n(\sigma)\cdot n(\sigma)=0$, on a donc

$$\left|\partial^2_{\sigma_j,\sigma_k}n\cdot n\;|_{\sigma=0}\right| = \left|\partial_{\sigma_j}n\cdot\partial_{\sigma_k}n\right| \leq |\nabla\varphi|_1^2\,(x_0)$$

et

$$(X_aX_b)\nabla\varphi(x) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3} b_ja_i\left[\partial^2_{\sigma_k,\sigma_h}n\partial_{x_j}\sigma_k\partial_{x_i}\sigma_h + \partial_{\sigma_k}n\partial^2_{x_j,x_i}\sigma_k\right].$$

Or $\partial_{\sigma_3}n=0$, donc utilisant (3.37)

$$X_aX_b\nabla\varphi(x_0) = \sum_{i,j=1}^{2}a_ib_j\partial^2_{\sigma_i,\sigma_j}n + II, \tag{3.47$'$}$$

$$|II| \leq C|\nabla\varphi|_1(x_0)\ .$$

De la même manière on obtient :

$$(X_aX_b)\nabla\varphi(x_1) = \sum_{i,j=1}^{2}a_ib_j\partial^2_{\eta_i,\eta_j}\nabla\varphi(\tilde{\omega}(\eta))|_{\eta=0} + II' \tag{3.48}$$

avec $|II'| \leq C|\nabla\varphi|_1(x_1)$.

On en déduit :

$$(3.49) \qquad |\sum_{k,h=1}^{2} a_k b_h \partial^2_{\eta_k,\eta_h}\nu(0)|^2 = \sum_{j=1}^{2}\left|\sum_{k,h=1}^{2} a_k b_h \partial_{\sigma_j}\omega(0)\cdot\partial^2_{\eta_k,\eta_h}\nu(0)\right|^2,$$

d'après (3.47)

$$= \sum_{j=1}^{2}(1+\ell K_j)^{-2}\left|\sum_{k,h=1}^{2}\frac{a_k b_h}{(1+\ell K_k)(1+\ell K_h)}(\partial_{\sigma_j}\omega(0)\cdot\partial^2_{\sigma_j,\sigma_h}n(0))\right|^2 + II''$$

$$\leq (1+\ell K)^{-2}|X_{\tilde{a}}X_{\tilde{b}}\nabla\varphi(x_0)|^2 + II'''$$

avec

$$K = \min(K_1, K_2),$$
$$|II'''| \leq C|\nabla\varphi|_1(x_0),$$
$$|II''| \leq C|\nabla\varphi|_1(x_1),$$
$$\tilde{a} = \left(\frac{a_1}{1+\ell K_1}, \frac{a_2}{1+\ell K_2}, 0\right)\tilde{}; \qquad b = \left(\frac{b_1}{1+\ell K_1}, \frac{b_2}{1+\ell K_2}, 0\right).$$

En combinant cette dernière inégalité avec (3.48), on en déduit le lemme.

De la même façon, on démontre par récurrence sur m le

Lemme 3.9.— *([I1] relation (5.15). Soit $x_0 \in \mathbf{R}^3$ et φ une phase définie au voisinage de la demi-droite issue de x_0 et de direction $\nabla\varphi(x_0)$.*
Soit $K = \min\{K_1, K_2\}$, où K_1 et K_2 sont les courbures principales de $\mathcal{C}_\varphi(x_0)$. Pour tout $\ell > 0$, on a alors

$$(3.50) \qquad |\nabla\varphi|_{(m)}(x_0 + \ell\nabla\varphi) \leq (1+\ell K)^{-(2m-1)}|\nabla\varphi|_{(m)}(x_0) + C_m|\nabla\varphi|_{m-1}(x_0).$$

Lemme 3.10.— *([I1] lemme 5.3). Il existe $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que si φ est une phase vérifiant (P) sur Γ_j, pour tout $p \neq j$ et tout $x_0 \in \Gamma_p(\varphi)$, on a*

$$(3.51) \qquad \begin{aligned} |\nabla\varphi_p|_{(1)}(x_0) &\leq |\nabla\varphi|_{(1)}(x_0) + C_1|\nabla\varphi|_0(x_0), \\ |\nabla\varphi_p|_{(2)}(x_0) &\leq |\nabla\varphi|_{(2)}(x_0) + C_2|\nabla\varphi|_1(x_0). \end{aligned}$$

Preuve :

On reprend les notations de la démonstration du lemme 3.2.
D'après (3.4) et (3.44), comme $y = (\eta(\sigma)) = w(\sigma) + \ell(\sigma)i(\sigma)$ et $\ell(0) = 0$, on a

$$|(D_\sigma^\gamma i)(0)| \leq C_\gamma |\nabla\varphi|_{|\gamma|}(x_0),$$
$$|(D_\sigma^\gamma y)(0)| \leq C_\gamma |\nabla\varphi|_{|\gamma|-1}(x_0).$$

La direction $r(\sigma)$ vaut

$$r(\sigma) = i(\sigma) - \left[2i\left(\sigma\right).n\left(y\left(\eta\left(\sigma\right)\right)\right)\right].n\left(y\left(\eta\left(\sigma\right)\right)\right)$$

et on en déduit :

$$\left|D_\sigma^\gamma r(0) - \left[D_\sigma^\gamma i(0) + 2D_\sigma^\gamma i(0).n(x_0)n(x_0)\right]\right| \leq C_\gamma |\nabla\varphi|_{|\gamma|-1}(x_0).$$

Or

$$\left|X_a \nabla\varphi(x_0) - \sum_1^2 a_j \partial_{\sigma_j} i(0)\right| \leq C|\nabla\varphi|(x_0)$$

$$\left|X_a X_b \nabla\varphi(x_0) - \sum_1^2 a_j b_k \partial^2_{\sigma_j\sigma_k} i(0)\right| \leq C|\nabla\varphi|_1(x_0)$$

si $a = \xi_1 \partial_{\sigma_1} r(0) + \xi_2 \partial_{\sigma_2} r(0) + \xi_3 r(0)$ et $X_a = \xi_1 \partial_{y_1} + \xi_2 \partial_{y_2} + \xi_3 \partial_{y_3}$.
On en déduit

$$(3.52) \qquad \begin{aligned} &\left|X_a \nabla\varphi_p(x_0) - \sum_1^2 a_j \partial_{\sigma_j} r(0)\right| \leq C|\nabla\varphi_p|_0, \\ &\left|X_a X_b \nabla\varphi_p(x_0) - \sum_1^2 \xi_j \xi_k \partial^2_{\sigma_j\sigma_k} i(0)\right| \leq C|\nabla\varphi_p(x_0)|_1. \end{aligned}$$

Comme

$$|D_\sigma^\gamma i(0)| = |D_\sigma^\gamma i(0) - 2D_\sigma^\gamma i \cdot n(x_0)n(x_0)|,$$
$$|\nabla\varphi|_0 = 1 = |\nabla\varphi_p|_0 \quad , \quad |a| = |\xi|$$

et $a \to \xi$ est bijective $S^2 \to S^2$, on en déduit

$$(3.53) \qquad \begin{aligned} |\nabla\varphi_p|_{(1)}(x_0) &\leq |\nabla\varphi|_{(1)}(x_0) + C|\nabla\varphi|_0(x_0), \\ |\nabla\varphi_p|_{(2)}(x_0) &\leq |\nabla\varphi|_{(2)}(x_0) + C|\nabla\varphi|_1(x_0). \end{aligned}$$

De la même façon, on démontre le

Lemme 3.11.— *Pour toute phase φ vérifiant (P) sur Γ_j et tout point $x_0 \in \Gamma_p(\varphi)$, on a*

$$|\nabla\varphi_p|_{(m)}(x_0) \leq |\nabla\varphi|_{(m)}(x_0) + C_m|\nabla\varphi|_{m-1}(x_0). \tag{3.54}$$

Soit $J \in \mathcal{I}$.
Soit φ une phase vérifiant (P) sur Γ_j. Nous allons démontrer des estimations sur la phase φ_J construite au lemme 3.2.

Lemme 3.12.— *([I1] proposition 5.4). Pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe $C_p > 0$ tel que pour toute phase φ vérifiant (P) sur Γ_j, tout $J = (j, j_2, \cdots, j_n) \in \mathcal{I}$ et pour tout $x \in \mathcal{U}_J(\varphi)$, on a*

$$|\nabla\varphi_J|_p(x) \leq C_p|\nabla\varphi|_p(X^{-|J|}(x, \nabla\varphi_J)).$$

Preuve :
Nous allons faire une récurrence sur p.

- $p = 0$: $|\nabla\varphi_J|_0 = 1 = |\nabla\varphi|_0$.
- Supposons la propriété vérifiée pour $p = 0, 1, \ldots, h$. On sait qu' il existe $\kappa > 0$, tel que pour tout $s \in \mathbf{N}$ tel que $s \geq 2$, les courbures principales de $\mathcal{C}\varphi_{(j,j_2,\cdots j_s)}$, $(K_{s,i})_{i=1;2}$ en un point $x \in \widehat{\Omega} \cap \mathcal{U}_{(j,\cdots,j_s)}$ vérifient pour $j = 1\ ;2$

$$K_{J,j} \geq \kappa,$$

où κ ne dépend que du minimum des courbures principales de Γ et du diamètre de $\widehat{\Omega}$.

Alors, d'après le lemme 3.9, on a, pour tout $x \in \mathcal{U}_J(\varphi)$.

$$|\nabla\varphi_J|_{(h+1)}(x) \leq |\nabla\varphi_J|_{(h+1)}(X^{-1}(x, \nabla\varphi_J)) + C_h|\nabla\varphi_J|_h(X^{-1}(x, \nabla\varphi)).$$

Posons pour $s \leq n$ $\varphi_s = \varphi_{j,j_2,\ldots,j_s}$, $y = X^{-|J|}(x, \nabla\varphi_J) \in \Gamma_{j_2}$, $y_s = X^s(y, \nabla\varphi)$,
alors $X^{-1}(x, \nabla\varphi_J) = y_n$ et

$$|\nabla\varphi_J|_{(h+1)}(y_n) \leq |\nabla\varphi_{n-1}|_{(h+1)}(y_n) + C_h|\nabla\varphi_{n-1}|_h(y_n), \tag{3.55}$$

d'après le lemme 3.11.

Appliquant alternativement les lemmes 3.9 et 3.12, et comme, si $\ell_s^{s+1} = \mathrm{dist}(y_s, y_{s+1})$, $(1+\ell_s^{s+1}K_j) \geq 1+d_{\min}\kappa$, on obtient, en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
&|\nabla\varphi_J|_{(h+1)}(y_n)\\
&\leq (1+d_{\min}K_0)^{-(2h+1)}|\nabla\varphi|_{(h+1)}(X^{-|J|}(x,\nabla\varphi_J))\\
&\quad +2C_h(1+(1+d_{\min}K_0)^{-(2h+1)}+\ldots+(1+d_{\min}K_0)^{-j(2h+1)})|\nabla\varphi|_h(y)\,.
\end{aligned}$$

Ce qui démontre le lemme 3.12.

De la même façon, on démontre à partir du corollaire 3.6", la

Proposition 3.13.— *([I3] proposition 3.11). Il existe $0 < \alpha < 1$, tel que pout tout $p \in \mathbf{N}$, il existe $C_p > 0$ tel que pour tout $j \in \{1, \cdots, N\}$, $J \in \mathcal{I}_j$ et toutes phases φ et $\tilde{\varphi}$, définies sur un ouvert $\mathcal{U}$, vérifiant (P) sur Γ_j, on a*

$$(3.56)\qquad |\nabla\varphi_J - \nabla\widetilde{\varphi}_J|_m\,(\mathcal{U}_J(\varphi)\cap\mathcal{U}_J(\tilde{\varphi})) \leq C_m\,\alpha^{|J|-1}|\nabla\varphi - \nabla\widetilde{\varphi}|_m(\mathcal{U}).$$

Nous pouvons maintenant démontrer la

Proposition 3.14.— *([I3] proposition 3.12). Pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe $C_p > 0$, tel que si φ et $\tilde{\varphi}$ sont deux phases définies sur un ouvert $\mathcal{U}$, vérifiant (P) sur Γ_j, alors pour tout $\ell < |J|$ et tout $x \in \mathcal{U}_J(\varphi)\cap\mathcal{U}_J(\widetilde{\varphi})$, on a*

$$(3.57)\qquad |X^{-\ell}(\cdot,\nabla\varphi_J) - X^{-\ell}(\cdot,\nabla\widetilde{\varphi}_J)|_p(x) \leq C_p|\nabla\varphi - \nabla\tilde{\varphi}|_p(\mathcal{U})\alpha^{|J|-\ell}.$$

Preuve :
L'application $(x,\xi) \mapsto X^{-1}(x,\xi) \in \Gamma$ est C^∞ sur l'ensemble des (x,ξ) tels que il existe $j \in \{1,\cdots,N\}$ $y \in \Gamma_j$ et $\tau \geq 0$ tels que $x = y+\tau\xi$; $-\xi.n(y) \geq \delta_1$.
Comme par construction de φ_J, le point $(x,\nabla\varphi_J)$ vérifie automatiquement cette hypothèse (d'après le lemme 2.2), on en déduit d'après le lemme 3.12

$$\begin{aligned}
|X^{-1}(x,\nabla\varphi_J) - X^{-1}(x,\nabla\widetilde{\varphi}_I)|_p &\leq C_p|\nabla\varphi_I - \nabla\widetilde{\varphi}_I|_p(x),\\
&\leq C_p|\nabla\varphi - \nabla\widetilde{\varphi}|_p(\mathcal{U})\alpha^{|J|},
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
&|X^{-2}(x,\nabla\varphi_J) - X^{-2}(x,\nabla\widetilde{\varphi}_J)|_p\\
&= |X^{-1}(X^{-1}(x,\nabla\varphi_J),\nabla\varphi_{(j,j_1,\ldots,j_{n-1})})\\
&\qquad\qquad -X^{-1}(X^{-1}(x,\nabla\widetilde{\varphi}_J),\nabla\widetilde{\varphi}_{(j,j_1,\ldots,j_{n-1})})|_p,\\
&\leq C_p|X^{-1}(x,\nabla\varphi_J) - X^{-1}(x,\nabla\widetilde{\varphi}_J)|_p
\end{aligned}$$

$$+C_p|\nabla\varphi_{(j,\ldots,j_n-1)} - \nabla\widetilde{\varphi}_{(j,\ldots,j_{n-1})}|_p(\mathcal{U}_{j_1,\cdots,j_{n-1}}(\varphi)\cap\mathcal{U}_{j_1,\cdots,j_{n-1}}(\widetilde{\varphi})),$$
$$\leq C_p|\nabla\varphi-\nabla\widetilde{\varphi}|_p(\mathcal{U})\alpha^{|J|-1}(1+\alpha).$$

Par une récurrence immédiate, on a :

$$\begin{aligned}|X^{-\ell}(x,\nabla\varphi_J) - X^{-\ell}(x,\nabla\widetilde{\varphi}_J)|_p\,(\mathcal{U}_J(\varphi)\cap\mathcal{U}_J(\widetilde{\varphi}))&\\ \leq C_p|\nabla\varphi-\nabla\widetilde{\varphi}|_p(\mathcal{U})\alpha^{|J|-\ell}(1+\alpha+\ldots+\alpha^\ell),&\\ \leq C'_p|\nabla\varphi-\nabla\widetilde{\varphi}|_p(\mathcal{U})\alpha^{|J|-\ell}.&\end{aligned}$$

Remarque 3.14'.— *Comme les fonctions phases φ et $\widetilde{\varphi}$ vérifient (P) sur Γ_j, on peut dans les propositions 3.13 et 3.14 ne pas supposer qu'elles sont définies sur le même ouvert $\mathcal{U}$ et remplacer dans 3.56 et 3.57, $\mathcal{U}$ par un voisinage de θ_{j_2}, quitte à perdre une puissance de α.*

3.4 Comportement asymptotique des phases.

Nous allons maintenant nous intéresser au comportement asymptotique des fonctions phases le long des trajectoires captées primitives :

Définition 3.15.— *Soient $j\in\{1,\cdots,N\}$ et $I\in\mathcal{I}_j$; $I=(i_1,\cdots,i_m)$; $i_m\neq i_1=j$.*
On notera pour $0\leq\ell<|I|=m$,

$$rI+\ell = (\overbrace{i_1,\cdots,i_m,\cdots,i_1,\cdots,i_m}^{\text{r termes}},i_1,\cdots,i_\ell).$$

On dira qu'un rayon $J=(j_1,\cdots,j_n)\in\mathcal{I}$ est primitif si $j_n\neq j_1$ et si pour tout $I\in\mathcal{I}$ et tout $r\geq 2$, J n'est pas de la forme rI.

Théorème 3.16.— *([I3] théorème 3.13) Soit $J=(j_1=j,\cdots,j_n)\in\mathcal{I}_j$ tel que $j_n\neq j$; alors il existe une unique trajectoire périodique se réfléchissant sur Γ selon les lois de l'optique géométrique $\gamma=\bigcup_{\ell=1}^{n}[x_\ell,x_{\ell+1}]$, avec $x_\ell\in\Gamma_{j_\ell}$ et $x_{n+1}=x_1$.*

Preuve :

Existence : on considère l'application

$$(x_0, \dots, x_n) \in \Gamma_j \times \cdots \times \Gamma_{j_n} \to \sum_{\ell=1}^{m} \|x_{\ell+1} - x_\ell\|.$$

Cette application est continue sur un compact, donc atteint son infimum; il est alors facile de voir que le rayon γ correspondant aux points du bord ainsi obtenu est nécessairement un rayon se réfléchissant selon les lois de l'optique géométrique.

Unicité : soient $\gamma = \bigcup_{\ell=1}^{n} [x_\ell, x_{\ell+1}]$ et $\tilde{\gamma} = \bigcup_{\ell=1}^{n} [\widetilde{x_\ell}, \widetilde{x_{\ell+1}}]$ deux trajectoires correspondant au même rayon J.

Soients $\xi = \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|}$, $\widetilde{\xi} = \frac{\widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_1}{|\widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_1|}$.

On commence par construire φ et $\widetilde{\varphi}$ deux phases définies sur des ouverts $\mathcal{U}$ et $\widetilde{\mathcal{U}}$ vérifiant (P) sur Γ_j telles que

$$\nabla\varphi(x_1) = \xi \quad , \quad \nabla\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}_1) = \widetilde{\xi}.$$

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule de centre x_n et de rayon ε soit incluse dans $\mathbf{R}^3 \setminus \bigcup_{j \neq j_n} \theta_j$ et ε ne dépend que de la géométrie de Ω. On en déduit que tout rayon issu d'un point de cette boule dirigé selon la normale extérieure à la boule qui rencontre l'obstacle θ_{j_1} rencontre aussi l'obstacle θ_{j_n} (au point x_n).

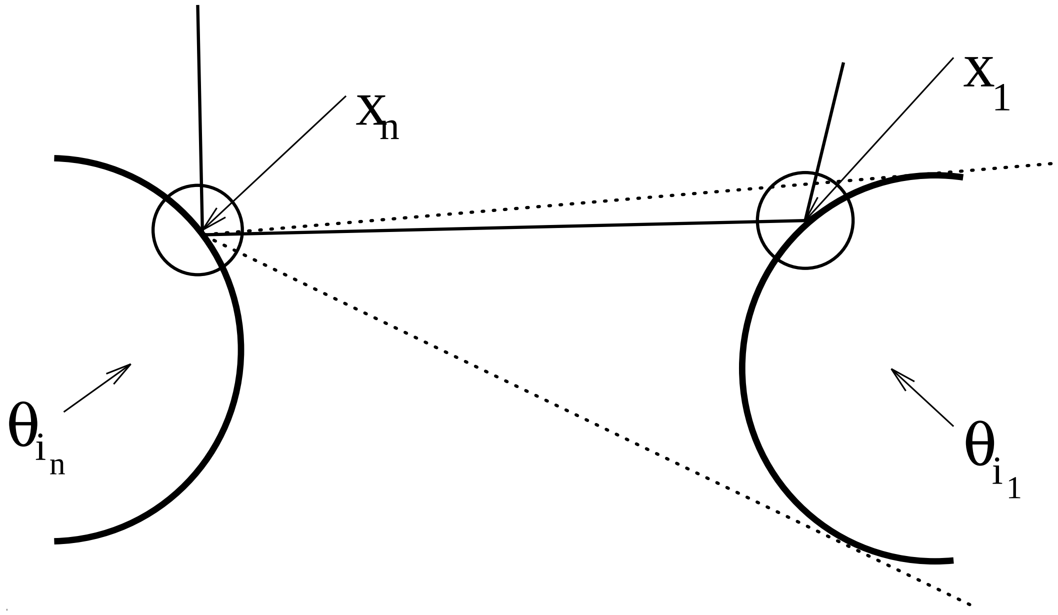

figure 7

Si on définit $\varphi_0(x) = r$ si $x = z + rn(z)$, on voit facilement que la procédure du lemme 3.2 permet de construire une phase $\varphi = \varphi_{0,i_1}$ qui répond à la question. (On demande que les rayons rencontrant θ_{i_1} soient issus de θ_{i_n} pour pouvoir vérifier la partie ii) de la propriété (P)).

On peut faire de même pour $\widetilde{x}_1$ et $\widetilde{\xi}$.

De plus, pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe des constantes C_p telles que

$$|\varphi|_p(\mathcal{U}) \leq C_p,$$
$$|\widetilde{\varphi}|_p(\widetilde{\mathcal{U}}) \leq C_p.$$

On a donc pour tout $r \in \mathbf{N}$ et tout $s \in \mathbf{N}$ tel que $s \leq r$,

$$X^{-sn}(x_2, \nabla\varphi_{rJ}) = x_2,$$
$$X^{-sn}(\widetilde{x}_2, \nabla\widetilde{\varphi}_{rJ}) = \widetilde{x}_2,$$

donc

$$\begin{aligned} |x_2 - \widetilde{x}_2| &\leq |X^{-sn}(x_2, \nabla\varphi_{rJ}) - X^{-sn}(\widetilde{x}_2, \nabla\varphi_{rJ})| \\ &+ |X^{-sn}(\widetilde{x}_2, \nabla\varphi_{rJ}) - X^{-sn}(\widetilde{x}_2, \nabla\widetilde{\varphi}_{rJ}), \\ &= I + II. \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.5

$I = \leq C\,\alpha^{sn}$,

et d'après la proposition 3.14 et la remarque 3.14', comme $\theta_{i_2} \subset \mathcal{U}_{rJ}(\varphi) \cap \mathcal{U}_{rJ}(\widetilde{\varphi})$

$$II \leq C\,\alpha^{n(r-s)}.$$

Faisons tendre r puis s vers l'infini, on obtient $x_2 = \widetilde{x}_2$.
De même on a $x_p = \widetilde{x}_p$, donc $\gamma = \widetilde{\gamma}$.

Lemme 3.17.— *([I3] lemme 5.2). Soient* $I = (j = i_1, i_2, \cdots, i_n) \in \mathcal{I}$ *un rayon primitif et* $\gamma = \bigcup_{\ell}[x_\ell, x_{\ell,+1}]$ *la trajectoire captive associée à* I.

Pour tout $\ell = 1, \ldots, n$, *il existe* $\varphi^\infty_{I,\ell}$ *une phase définie sur un ouvert* $\mathcal{U}^\infty_{I,l}$ *telle que :*

i) $\varphi^\infty_{I,\ell}$ *vérifie (P) sur* Γ_{i_ℓ},

ii) $\varphi^\infty_{I,\ell}(x_\ell) = 0$,

iii) $\Phi^{i_\ell+1}_{i_\ell}\varphi^\infty_{I,\ell} = \varphi^\infty_{I,\ell+1} + d_{(\gamma)i_\ell}$,

avec $d_{(\gamma)i_\ell} = |x_{\ell+1} - x_\ell|$ *et la convention* $\varphi^\infty_{I,n+1} = \varphi^\infty_{I,1}$.

Preuve :
Soit ψ une phase construite comme précédemment vérifiant (P) sur Γ_j telle que :

$$\psi(x_1) = 0\ ,\ \nabla\psi(x_1) = \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|}.$$

Soit $\psi_{rI+\ell} = \Phi_{(rI+\ell)}\psi$ où $\Phi_{rI+\ell}$ est associée à la construction du lemme 3.2 avec une constante $\delta'_1 > 0$ strictement plus petite que la constante δ_1 et $\psi_{rI+\ell}$ est définie sur l'ouvert $\mathcal{U}'_{rI+\ell}(\psi)$ associé à δ'_1 et ψ.

Clairement, pour tout $r \geq 0$ et tout ℓ tel que $1 \leq \ell < n$, on a

$$\nabla\psi_{rI+\ell}(x_\ell) = \frac{x_{\ell+1} - x_\ell}{|x_{\ell+1} - x_\ell|},$$
$$\psi_{rI,\ell}(x_\ell) = rd_\gamma + d_{(\gamma),0} + \cdots + d_{(\gamma),\ell-1}.$$

D'après le lemme 3.13 et la remarque 3.14', on en déduit :

$$|\nabla\psi_{rI+\ell} - \nabla\psi_{(r+1)I+\ell}|_p(\mathcal{U}'_{rI+\ell} \cap \mathcal{U}'_{(r+1)I+\ell}) \leq C_p\,\alpha^{rn+\ell}.$$

Or les ouverts $\mathcal{U}'_{rI+\ell}(\psi)$ contiennent pour tout $r \geq 0$ un voisinage de $\bigcup_{i \neq i_l} \theta_i$, on en déduit donc qu'il existe $M > 0$ et des ouverts $\mathcal{U}^\infty_{I,\ell}$ tels que pour tous r et ℓ, si $rn + \ell > M$ alors

$$\mathcal{U}_{rI+\ell}(\psi) \subset \mathcal{U}^\infty_{I.\ell} \subset \mathcal{U}'_{rI+\ell}(\psi), \tag{3.58}$$

où les ouverts $\mathcal{U}_{rI+\ell}$ sont associés à la construction du lemme 3.2 avec la constante δ_1.

On en déduit qu'il existe une fonction $\eta_{I,\ell}$ définie sur l'ouvert $\mathcal{U}^\infty_{I,\ell}$, C^∞ jusqu'au bord de l'ouvert $\mathcal{U}^\infty_{I,\ell}$ telle que

$$|\nabla\psi_{rI+\ell} - \eta_{I,\ell}|_p(\mathcal{U}^\infty_{I,\ell}) \leq C_p \alpha^{rn+\ell}$$

et

$$\psi_{rI+\ell} - [rd_\gamma + d_{(\gamma),i_0} + \cdots + d_{(\gamma),i\ell-1}]$$

converge quand r tend vers l'infini vers une fonction $\varphi^\infty_{rI,\ell}$ qui vérifie :

$$|\varphi^\infty_{I,\ell} - \big[\psi_{rI,\ell} - \big[rd_\gamma + d_{(\gamma),i_0} + \cdots\big]\big]\,|_p(\mathcal{U}^\infty_{I,i\ell}) \leq C_p\,\alpha^{rn+\ell}. \tag{3.59}$$

La phase $\varphi^\infty_{I,\ell}$ vérifie clairement (P) sur Γ_{i_ℓ} et $\varphi^\infty_{I,\ell}(x_\ell) = 0$.

D'après la proposition 3.13,

$$|\Phi^{i\ell+1}_{i\ell}\left(\varphi^\infty_{I,\ell} - \big[rd_\gamma + d_{(\gamma),i_0} + \cdots + d_{(\gamma),i\ell-1}\big]\right) - \Phi^{i\ell+1}_{i\ell}(\psi_{rI,\ell})|_p \\ \leq C\,\alpha^{rn+\ell+1},$$

et on en déduit donc la partie iii) du lemme 3.17.

Remarque 3.17'.— . *On démontre de même qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout rayon primitif $I \in \mathcal{I}$ et toute phase φ vérifiant (P) sur Γ_j, pour tout $r \geq 1$ et tout $0 \leq \ell < |I|$ si $r|I| + \ell \geq M$, on peut définir $\varphi_{rI+\ell}$ sur $\mathcal{U}^\infty_{I,\ell}$ et on a $\mathcal{U}_{rI+\ell}(\varphi) \subset \mathcal{U}^\infty_{I,\ell}$ (il suffit pour cela de définir $\varphi_{rI+\ell}$ selon la méthode du lemme 3.2 avec une constante δ'_1 telle que $0 < \delta'_1 < \delta_1$, si δ_1 est la constante qui intervient au lemme 3.2).*

D'après la proposition 3.13 appliquée à φ_J et $\psi_{rI+\ell=J}$ et la remarque 3.17', on a le

Lemme 3.18.— *([I3] lemme 5.3) Il existe $M > 0$ et $0 < \alpha < 1$, tels que pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe $C_p > 0$, tel que si φ est une phase définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ vérifiant (P) sur Γ_j, pour tous $I \in I_j$, $r \in \mathbf{N}$ et $\ell < |I|$, si $r|I| + \ell \geq M$ alors*

$$|\nabla\varphi_{rI+\ell} - \nabla\varphi^\infty_{I,\ell}|_p(\mathcal{U}^\infty_{I,\ell}) \leq C_p(1 + |\nabla\varphi|_p(\mathcal{U}))\,\alpha^{nr+\ell}.$$

Nous fixons maintenant et jusqu'à la fin de cette partie une fonction φ définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ et vérifiant (P) sur Γ_j. Toutes nos constantes ne dépendront, sauf mention du contraire, que de la géométrie de Ω et des normes $|\nabla\varphi|_p(\mathcal{U})$.

Lemme 3.19.— *([I3] lemme 5.4). Il existe $0 < \alpha < 1$ et une constante $C > 0$ tels que pour tout rayon primitif $I \in \mathcal{I}_j$, il existe un point $x_I^\infty \in \Gamma_j$ tel que pour tout $0 \leq \ell < |I|$ on a*

$$|X^{r|I|+\ell}(x_I^\infty, \nabla\varphi) - x_\ell| \leq C\,\alpha^{rn+\ell}. \tag{3.60}$$

Preuve :

Posons $n = |I|$. Soit $x_I^{rn+\ell} = X^{-rn-\ell}(x_\ell, \nabla\varphi_{rI+\ell})$.
Alors
$$x_I^{(r+r')n+\ell} = X^{-rn-\ell}\left(X^{-r'n}(x_\ell, \nabla\varphi_{(r+r)I+\ell}), \nabla\varphi_{rI}\right)$$

et on en déduit donc d'après le lemme 3.6 que :

$$|x_I^{(r+r')n+\ell} - x_I^{rn+\ell}| \leq C\,\alpha^{nr+\ell}, \tag{3.61}$$

donc $\lim\limits_{r\to\infty} x_I^{rn+\ell}$ existe.

Soit $x_{I,\ell}^\infty$ cette limite,
alors
$$|x_I^{rn+\ell} - x_{I,\ell}^\infty| \leq C\,\alpha^{nr+\ell},$$
or
(3.62)
$$\begin{aligned}&|x_I^{rn+\ell} - x_I^{rn+\ell+1}|\\ &\quad = |X^{-(rn+\ell)}(x_\ell, \nabla\varphi_{rI+\ell}) - X^{(-rn+\ell)}(X^{-1}(x_{\ell+1}, \nabla\varphi_{rI+\ell+1}), \nabla\varphi_{rI+\ell})|\\ &\quad \leq C\,\alpha^{nr+\ell},\end{aligned}$$

on en déduit $x_{I,\ell+1}^\infty = x_{I,\ell}^\infty \stackrel{\text{def}}{=} x_I^\infty$.

De plus, comme $x_\ell = X^{-r'n}(x_\ell, \nabla\varphi_{I,\ell}^\infty)$, on a

$$|X^{-r'n}(x_\ell, \nabla\varphi_{(r+r')I+\ell}) - x_\ell| \leq C\,\alpha^{nr+\ell},$$

d'après la proposition 3.14, et en remarquant que

$$\Phi_{(r+r')I+\ell}(\varphi_{I,1}^\infty) = \varphi_{I,l}^\infty + (r+r')d_\gamma + d_{\gamma,i_1} + \cdots + d_{\gamma,i_\ell}.$$

De plus
$$X^{-r'n}(x_\ell, \nabla\varphi_{(r+r')I+\ell}) = X^{rn+\ell}(x_I^{(r+r')n+\ell}, \nabla\varphi),$$

donc

$$|X^{rn+\ell}(x_I^{(r+r')n+\ell}, \nabla\varphi) - x_\ell| \leq C\,\alpha^{nr+\ell}$$

et si on fait tendre r' vers ∞, on obtient le lemme 3.19.

Intuitivement, on a la situation suivante: l'application de billard définie dans $T\Gamma_{i_1}$ au voisinage du point x_1 et de la direction $\frac{x_2-x_1}{|x_2-x_1|}$ a un point fixe de type hyperbolique correspondant à la trajectoire périodique γ. On a donc une sous-variété stable rentrante et une sous-variété stable sortante toutes deux de dimension 2. Le point $(x_I^\infty, \nabla\varphi)$ est l'intersection de la sous-variété stable rentrante avec la sous-variété de dimension 2 définie par $\{(x, \nabla\varphi(x))\}$.

Proposition 3.20.— *([I3] proposition 5.5). Il existe $M > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbf{N}$ il existe $C_p > 0$ tel que si la phase φ vérifie (P) sur Γ_j, pour tout rayon primitif $I \in \mathcal{I}$, et tout $J = rI + \ell$, $r \geq 1$ et $0 \leq \ell < |I|$ tels que $r|I| + \ell \geq M$, on a*

i) pour tout $s \leq |J|/2$, $|X^{-s}(.\,, \nabla\varphi_J) - X^{-s}(.\,, \nabla\varphi_{I,\ell}^\infty)|_p(\mathcal{U}_J(\varphi)) \leq C_p\,\alpha^{|J|/2}$,

ii) pour tout $s \leq |J|$,

$$|X^{-(|J|-s-1)}(.\,, \nabla\varphi_J) - X^s(x_I^\infty, \nabla\varphi)|_p(\mathcal{U}_J(\varphi)) \leq C_p\,\alpha^{|J|-s-1}.$$

Preuve :
En utilisant le lemme 3.18 et la remarque 3.17', on démontre i) comme la proposition 3.14.

Démontrons ii) :

$$\begin{aligned}
&|X^{-(|J|-s-1)}(x, \nabla\varphi_J) - X_s(x_I^\infty, \nabla\varphi)| \\
&= |X^{-(|J|-s-1)}(x, \nabla\varphi_J) - X^{-(|J|-s-1)}\left(X^{|J|}(x_I^\infty, \nabla\varphi), \nabla\varphi_J\right)| \\
&=\leq C_p\,\alpha^{|J|-s-1}
\end{aligned}$$

d'après le lemme 3.6.

Nous allons maintenant démontrer que pour tout $p \geq 1$, il existe $C_p > 0$, tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$(3.64) \qquad |X^{-(|J|-s-1)}(.\,, \nabla\varphi_J)|_p(\mathcal{U}_J(\varphi) \leq C_p\,\alpha^n.$$

D'après ce qui précède et le lemme 3.19, on remarque d'abord que si ℓ' désigne l'indice de la partie du bord de $\bigcup_i \theta_i$ où se trouve le point $X^n(x, \nabla\varphi_J)$, on a

$$|X^{-(|J|-s-1)}(x, \nabla\varphi_J) - x_{\ell'}| \leq C\,\alpha^s \tag{3.65}$$

Ainsi, sauf pour un nombre fini (indépendant de J) d'entiers s, les points $X^{-(|J|-s-1)}(x, \nabla\varphi_J)$ sont très proches de la trajectoire captive $\gamma = \bigcup[x_\ell, x_{\ell+1}]$.

Il nous faut donc étudier $X^{-1}(.\,, \nabla\varphi_{rI+\ell})\,|_{\Gamma_{\ell+1}}$ au voisinage de γ.

En fait, nous allons étudier l'application

$$x \in \mathcal{C}\varphi_{rI+\ell}(x_{\ell+1}) \overset{\psi_{rI+\ell}}{\mapsto} y \in \mathcal{C}\varphi_{rI+\ell-1}(x_\ell)$$

définie par la relation

$$X^{-1}(y, \nabla\varphi_{rI+\ell-1}) = X^{-2}(x, \nabla\varphi_{rI+\ell})$$

On décompose $\psi_{rI+\ell}$ en $\psi_2 \circ \psi_1$ avec

$$\begin{aligned}\psi_1^{-1}\ &: \mathcal{C}\varphi_{rI+\ell}(x_\ell) \to \mathcal{C}\varphi_{rI+\ell}(x_{\ell+1})\\ &\qquad\qquad y \mapsto y + d_{\gamma,\ell}\nabla\varphi_{rI+\ell-1}(y)\end{aligned}$$

On a donc :

$$d\psi_1^{-1}(x_\ell) = Id + d_{\gamma,\ell}\,\mathrm{Hess}\,\varphi_{rI+\ell-1}(y)\,.$$

Or, on a vu plus haut que le Hessien de $\varphi_{rI+\ell-1}$ appliqué à l'espace tangent en x_ℓ à $\mathcal{C}\varphi$ était symétrique défini positif, de valeurs propres K_1 et K_2 (supérieures à $\kappa > 0$) les courbures principales de $\mathcal{C}\varphi$. On en déduit

$$\|d\psi_1\,|_{T\mathcal{C}\varphi_{rI+\ell(x_\ell)}}\| \leq \frac{1}{1 + d_{\min}\kappa} = \alpha < 1\,. \tag{3.66}$$

Étudions maintenant ψ_2 :

nous reprenons les notations de la démonstration du lemme 3.2. Avec ces notations ψ_2^{-1} est donné par : $\psi_2^{-1}(y(\eta(\sigma))) = \tau(\sigma)$ avec $\tau(\sigma)$ défini par (3.3) ;

donc

$$(\partial_{\sigma_1}\tau, \partial_{\sigma_1}\tau)\,|_{\sigma=0} = \begin{pmatrix} -\cos\theta_0\cos v & \sin\theta_0\cos v\\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0\\ -\cos\theta_0\sin v & \sin\theta_0\sin v\end{pmatrix}.$$

Comme $\partial_{s_i}\tau \cdot \partial_{\sigma_j}\tau = \delta_{ij}$, on en déduit que pour tout $X \in T\mathcal{C}\varphi_{rI+\ell-1}(x_\ell)$ tel que $\|X\| = 1$, on a

$$\|X(\psi_2^{-1})\| = 1, \tag{3.66'}$$

donc pour tout $Y \in T\mathcal{C}\varphi_{rI+\ell+1}(x_\ell)$ tel que $\|Y\| = 1$, on a

$$\|Y(\psi_2)\| = 1,$$

donc pour tout $Z \in T\mathcal{C}\varphi_{rI+\ell}(x_{\ell+1})$ tel que $\|Z\| = 1$, on a

$$\|Z(\psi_2 \circ \psi_1)\| \leq \alpha\,. \tag{3.67}$$

On en déduit que quitte à prendre α un peu plus grand, (3.67) reste vraie dans un voisinage (de taille indépendante de I, φ, r et ℓ) de $x_{\ell+1}$. Or, si on note : ϕ l'application qui à $x \in \mathcal{U}_J$ associe l'unique $y \in \mathcal{C}\varphi_J(x_{\ell+1})$ tel que $X^{-1}(x, \nabla\varphi_J) = X^{-1}(y, \nabla\varphi_J)$, on a alors

$$|\phi|_m(\mathcal{U}_J(\varphi)) \leq C_m \tag{3.68}$$

et

$$X^{-n}(\cdot\,, \nabla\varphi_J) = \psi_{(j_1,\cdots,j_{m-n})} \circ \cdots \circ \psi_J \circ \varphi(\cdot, \nabla\varphi_J). \tag{3.69}$$

Utilisant (3.67), on déduit (3.64) pour $p = 1$ et comme $\|\psi_\ell\|_m \leq C_m$, on déduit (3.64) pour tout p.

Lemme 3.21.— *([I3] proposition 5.6). Il existe $M > 0$ tel que pour tout rayon primitif $I \in I_j$, il existe une constante $d_{\varphi,I}$ telle que pour tout $J \in I_j$ $J = rI + \ell$; $r \geq 1$; $0 \leq \ell < |I|$ tel que $|J| \geq M$, on a*

$$\left|\varphi_J - \left(\varphi^\infty_{I,\ell} + r d_\gamma + d_{\gamma i_1} + \cdots + d_{\gamma i_\ell} + d_{\varphi,I}\right)\right|_p (\mathcal{U}^\infty_{I,\ell}) \leq C_p \alpha^{|J|} \tag{3.70}$$

et l'ensemble $\{d_{\varphi,I}\}_{I\mathrm{primitif}}$ est borné par une constante ne dépendant que de la géométrie de Ω et de $|\varphi|_0(\Omega \cap \mathcal{U})$.

Preuve :
D'après le théorème 3.18, en tout point $x \in \mathcal{U}^\infty_{I,\ell}$ on a

$$|\nabla\varphi_J(x) - \nabla\varphi^\infty_{I,\ell}(x)| \leq C\,\alpha^{nr+\ell} \quad \text{si} \quad J = rI + \ell\,.$$

Intégrons cette inégalité de x_ℓ à $x_{\ell+1}$; on obtient

$$|\varphi_J(x_{\ell+1}) - \varphi_J(x_\ell) - \varphi^\infty_{I,\ell}(x_{\ell+1}) - \varphi^\infty_{I,\ell}(x_\ell)| \leq C\,\alpha^{nr+\ell},$$

or $\varphi_J(x_\ell) = \varphi_{rI+\ell}(x_\ell) = \varphi_{rI+\ell-1}(x_\ell)$ et $\varphi^\infty_{I,\ell}(x_{\ell+1}) - \varphi^\infty_{I,\ell}(x_\ell) = d_{\gamma,i_\ell}$.

Posons

$$\widetilde{d}_{\varphi,I} = \sum_{r'=0}^{\infty} \sum_{\ell'=1}^{n-1} \varphi_{r'I+\ell'}(x_{\ell'}) - \varphi_{rI+\ell'-1}(x_{\ell'-1}) - d_{\gamma,i_{\ell'}}$$

alors

$$\begin{aligned}\Bigg| \widetilde{d}_{\varphi,I} - \sum_{r'=0}^{r-1} \sum_{\ell'=1}^{|I|-1} \varphi_{r'I+\ell'}(x_{\ell'}) - \varphi_{r'I+\ell'-1}(x_{\ell'-1}) - d_{\gamma,i'_\ell} \\ - \sum_{\ell'=1}^{\ell-1} \varphi_{rI+\ell'}(x_{\ell'}) - \varphi_{rI+\ell'-1}(x_{\ell'-1}) - d_{\gamma,i'_\ell} \Bigg| \leq C\,\alpha^{rn+\ell}\end{aligned}$$

c'est à dire

$$|\varphi_J(x_\ell) - \varphi(x_0) - \widetilde{d}_{\varphi,I} - rd_\gamma - d_{\gamma,i_1} - \cdots - d_{\gamma,i\ell}| \leq C\,\alpha^{rn+\ell}\,.$$

Posons $d_{\varphi,I} = \widetilde{d}_{\varphi,I} + \varphi(x_0)$ et intégrons de nouveau l'inégalité $|\nabla\varphi_J - \nabla\varphi^\infty_{I,\ell}|_m \leq C\,\alpha^{nr+\ell}$ entre x et x_ℓ, on obtient alors le lemme 3.21.

3.5 Comportement asymptotique des courbures Gaussiennes.

Nous allons maintenant nous intéresser au comportement asymptotique des courbures gaussiennes des surfaces $\mathcal{C}\varphi_J$ (on rappelle que la courbure gaussienne d'une surface est le produit des courbures principales).

Soit

(3.71)

$$\Lambda\varphi_J(x) = \left[\frac{G\varphi_J\,(x)}{G\varphi_J\,(X^{-1}\,(x, \nabla\varphi_J))}\right]^{1/2} \times \cdots \left[\frac{G_\varphi\,\left(X^{-|J|}\,(x, \nabla\varphi_J)\right)}{G_\varphi\,\left(X^{-|J|-1}\,(x, \nabla\varphi_J)\right)}\right]^{1/2}$$

où $G\varphi(x)$ est la courbure Gaussienne de $\mathcal{C}\varphi$ en x.

La fonction $\Lambda\varphi_J$ est définie sur $\mathcal{U}_J(\varphi)$.

Nous allons donner une expression asymptotique pour $\Lambda\varphi_J(x)$.

Soit pour $x \in \Gamma_{i_{\ell+1}}$ $\lambda\varphi_{I,\ell}(x) = [\frac{G\varphi_{I,\ell}(x)}{G\varphi_{I,\ell}(X^{-1}(x,\nabla\varphi_{I,\ell}))}]^{1/2}$.

Posons $\lambda_{I,\ell} = \lambda\varphi_{I,\ell}(x_{\ell+1})$.

Lemme 3.22.— *Soit $I \in \mathcal{I}$ un rayon primitif et soit γ la trajectoire captive qui lui est associée. On rappelle qu'on a noté λ_γ le produit des deux valeurs propres plus petites que 1 de l'application de Poincaré associée à la trajectoire γ. On a alors*

$$\prod_{\ell=1}^{n} \lambda_{I,\ell} = \lambda_\gamma \,. \tag{3.72}$$

Preuve : D'après [I3], ce lemme est démontré dans [BGR] section 2, nous en donnons ici une autre preuve.
Nous utilisons les résultats de la démonstration de la proposition 3.20.

Considérons l'application $x \in \mathcal{C}^\infty_{\varphi_{I,\ell}}(x_\ell) \overset{\psi}{\mapsto} y \in \mathcal{C}^\infty_{\varphi_{I,\ell+1}}(x_{\ell+1})$

définie par la relation $X^{-2}(y, \nabla\varphi^\infty_{I,\ell+1}) = X^{-1}(x, \nabla\varphi^\infty_{I,\ell})$.

On sait que $\psi = \psi_2 \circ \psi_1$ avec $d\psi_2(x_{\ell+1})$ isométrique, et

$$\begin{aligned} \det{(d\psi_1)(x_\ell)} &= \det(\mathrm{Id} + d\,\mathrm{Hess}\,\varphi\,|_{T\mathcal{C}^\infty_{\varphi_{I,\ell}}(x_\ell)}), \\ &= (1 + dK_1)(1 + dK_2), \\ &= \left(\Lambda\varphi^\infty_{I,\ell}(x_{\ell+1})\right)^{-2}. \end{aligned} \tag{3.73}$$

On en déduit donc que le déterminant de la différentielle P de l'application de billard : $\mathcal{C}^\infty_{\varphi_{I,i_1}} \to \mathcal{C}^\infty_{\varphi_{I,i_1}}$ en x_1 obtenue en partant de x dans la direction $\nabla\varphi^\infty_{I,\ell}(x)$ est $\left(\prod\limits_{\ell=1}^{n} \lambda_{I,\ell}\right)^{-2}$.

D'autre part, il est clair que $\{X, \mathrm{Hess}\,(\varphi_{I,1})_{(x_1)}(X)\}$ est la sous-variété stable sortante de l'application de Poincaré (d'après le lemme 3.3 appliqué à $\varphi^\infty_{I,\ell}$), d'où le lemme 3.22.

Proposition 3.23.— *([I3] proposition 5.7). Pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe des constantes C_p telles que pour tout rayon primitif $I \in I_j$, pour tout $r \in \mathbf{N}^*$ et tout $0 \leq \ell < |I|$, il existe*

i) - des fonctions $a_{I,\ell}$ définies sur l'ouvert $\mathcal{U}^\infty_{I,\ell}$ de classe C^∞ jusqu'au bord, telles que $|a_{I,\ell}|_p \leq C_p$ avec C_p indépendant de I et ℓ,

ii) - une constante b_I bornée indépendamment de I,

telles que si $J = rI + \ell$ et si γ est la trajectoire périodique associée à I, en posant $\lambda_I = \lambda_\gamma$, $\lambda_I^J = \lambda_\gamma^r \lambda_{I,i_1} \ldots \lambda_{I,i\ell}$, on a :

$$|\Lambda_{\varphi_J}(\,\cdot\,) - \lambda_I^J a_{I,\ell}(\,\cdot\,) b_I|_p(\mathcal{U}^\infty_{I,\ell}) \leq C_p \lambda_I^J \alpha^{|J|}. \tag{3.74}$$

Preuve :

Soit

$$a_{r|I|+\ell}(x) = \frac{\lambda\varphi^\infty_{I,\ell}(x)}{\lambda_{I,\ell}} \times \cdots \times \frac{\lambda\varphi^\infty_{I,1}(X^{-(r|I|+\ell)}(x, \nabla\varphi^\infty_{I,1}))}{\lambda_{I,1}}. \tag{3.75}$$

On sait d'après le lemme 3.12 que $|\nabla\varphi^\infty_{I,\ell}|_p(\mathcal{U}^\infty_{I,\ell}) \leq C_p$ avec C_p indépendant de I et de ℓ.

De plus, on a le

Lemme 3.24.— *Il existe $M > 0$ tel pour tout rayon primitif $I \in \mathcal{I}$, tout $r \in \mathbf{N}^*$et tout $0 \leq \ell < |I|$, si $r|I| + \ell > M$ on a pour tout $x \in \mathcal{U}^\infty_{I,\ell}$*

$$|X^{-(r|I|+\ell)}(x, \nabla\varphi^\infty_{I,\ell}) - x_{I,\ell}| \leq C_p \alpha^{r|I|+\ell}.$$

Preuve :

On applique la proposition 3.20 ii) à $J = r'I + \ell$, avec r' choisi tel que $r|I| + \ell \leq (r'|I| + \ell)/2$ et on constate que pour $\varphi = \varphi^\infty_{I,i_1}$, on a $x^\infty_I = x_1$ et de plus que si $r|I| + \ell$ est assez grand, on a d'après la remarque 3.17' $\mathcal{U}^\infty_{I,\ell} \subset \mathcal{U}_{rI+\ell}(\varphi^\infty_{I,\ell})$.

On revient à la preuve de la proposition 3.23.

D'après le lemme 3.24, pour tout $x \in \mathcal{U}^\infty_{I,\ell}$ et pour tout $0 \leq \ell' < |I|$, on a

$$\lambda\varphi^\infty_{I,\ell'}(X^{-(rn+\ell-\ell')}(x, \nabla\varphi_{I,\ell}))/\lambda_{I,\ell-\ell'} = 1 + \gamma_{rn+\ell-\ell'}(x)$$

avec $|\gamma_{rn+\ell-\ell'}|_p \leq C_p\,\alpha^{rn+\ell-\ell'}$ et la convention $\lambda_{I,-s} = \lambda_{I,|I|-s}$.

La suite $a_{r|I|+\ell}$ converge donc quand r tend vers ∞ ; sa limite $a_{I,\ell}$ vérifie i).

On sait d'après le théorème 3.18 que $|\nabla\varphi_J - \nabla\varphi^\infty_{I,\ell}|_p(\mathcal{U}^\infty_{I,\ell}) \leq C_p\,\alpha^{|J|}$.

Soit pour tout $x \in \mathcal{U}_J(\varphi)$

$$\lambda\varphi_J(x) = [\frac{G\varphi_J(x)}{G\varphi_J(X^{-1}(x, \nabla\varphi_J))}]^{1/2}.$$

Considérons

$$b_{r|I|+\ell} = \frac{\lambda\varphi_{rI+\ell}(X^{r|I|+\ell}(x^\infty_I, \nabla\varphi))}{\lambda_{I,\ell}} \times \cdots \times \frac{\lambda\varphi(x^\infty_I)}{\lambda_{I,1}}.$$

On sait que $|X^{r|I|+\ell}(x_I^\infty, \nabla\varphi) - x_\ell| \leq C\,\alpha^{r|I|+\ell}$, donc comme précédemment, on en déduit que $\lim_{r|I|+\ell\to\infty} b_{r|I|+\ell}$ existe et que la limite b_I vérifie $|b_I - b_{r|I|+\ell}| \leq C\,\alpha^{r|I|+\ell}$.

Nous allons décomposer en deux parties l'expression définissant $\dfrac{\Lambda\varphi_J}{\lambda_I^J}$.

Posons

$$I = \frac{\lambda_{r|I|+\ell}(\,\cdot\,)}{\lambda_{I,\ell}} \times \cdots \times \frac{\alpha_{[|J|/2]}(\,\cdot\,)}{\lambda_{I,\ell'}}, \tag{3.76}$$

avec

$$[|J|/2] = r'|I| + \ell'$$

et

$$\lambda_{s|I|+p}(\,\cdot\,) = \frac{G\varphi_{sI+p}\left(X^{-[(r-s)|I|+(\ell-p)]}(\,\cdot\,,\nabla\varphi_J)\right)}{G\varphi_{sI+p}\left(X^{-[(r-s)|I|+(\ell-p)]-1}(\,\cdot\,,\nabla\varphi_J)\right)} \tag{3.77}$$

$$II = \frac{\lambda_{[|J|/2]-1}(\,\cdot\,)}{\lambda_{I,\ell'-1}} \times \cdots \times \frac{\lambda_1(\,\cdot\,)}{\lambda_{I,1}}.$$

Étudions I :
d'après le lemme 3.18 si $s|I| + p \geq |J|/2$ on a

$$|\nabla\varphi_{sI+p} - \nabla\varphi_{I,p}^\infty|_p \leq C_p\,\alpha^{|J|/2}$$

donc, si $r'|I| + \ell' = [|J|/2]$

$$\left| I - \frac{\lambda\varphi_{I,\ell}^\infty(x)}{\lambda_{I,\ell}} \times \cdots \times \frac{\lambda\varphi_{I,\ell'}^\infty(X^{-[(r-r')|I|+\ell-\ell']}(\,x\,,\nabla\varphi_{I,\ell^\infty}))}{\lambda_{I,\ell'}} \right|_p \leq C_p |J|^p \alpha^{|J|/2} \tag{3.78}$$

Or

$$\left| a_{I,\ell}(\,\cdot\,) - \frac{\lambda\varphi_{I,\ell}^\infty(\,\cdot\,)}{\lambda_{I,\ell}} \times \cdots \times \frac{\lambda\varphi_{I,\ell}^\infty\left(X^{-[(r-r')|I|+\ell-\ell']}(\,\cdot\,,\nabla\varphi_{I,\ell}^\infty)\right)}{\lambda_{I,\ell'}} \right|_p \leq C_p \alpha^{(r-r')|I|+\ell-\ell'},$$

on en déduit
$$|I - a(x)|_p \le C_p |J|^p \alpha^{|J|/2}.$$

Étudions II :
nous allons utiliser la relation :
$$|X^{-(|J|-s-1)}(\,\cdot\,, \nabla\varphi_J) - X^s(x_I^\infty, \nabla\varphi)|_p \le C_p\, \alpha^{|J|/2}.$$

On a
$$II = \frac{\lambda\varphi_{r'I+\ell'-1}(X^{-[(r-r')n+\ell-\ell'+1]}(\,\cdot\,, \nabla\varphi_J))}{\lambda_{I,\ell'-1}} \times \cdots \times \frac{\lambda\varphi(X^{-|J|}(\,\cdot\,, \nabla\varphi_J))}{\lambda_{I,1}},$$

donc
(3.79)
$$\left| II - \frac{\lambda\varphi_{r'I+\ell'-1}(X^{r'n+\ell})(x_I^\infty, \nabla\varphi)}{\lambda_{I,\ell'-1}} \times \ldots \times \frac{\lambda\varphi(x_I^\infty, \nabla\varphi)}{\lambda_{I,1}} \right|_p \le C_p |J|^p \alpha^{|J|/2},$$

donc
$$|II - b_I|_p \le C_p |J|^p \alpha^{|J|/2}\,.$$

Quitte à remplacer α par α' avec $0 < \alpha < \alpha' < 1$, nous avons donc démontré la proposition 3.23.

4. Construction asymptotique le long d'une trajectoire captive.

Nous allons dans ce paragraphe construire une solution approchée du problème (1.2), obtenue par "rebonds" successifs sur les obstacles θ_i.

On se donne une donnée initiale de la forme

$$u_0(x) = e^{-ix.\xi/h} q(x, -\xi) \tag{4.1}$$

où $q \in C_0^\infty(T^*\mathbf{R}^3)$ est la troncature construite au paragraphe 2.

Dans ce paragraphe on considérera la variable $\xi \in \mathbf{R}^3$; $|\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$ comme un paramètre, on notera R l'opérateur associé par la procédure de l'appendice A à la troncature r construite au paragraphe 2. On notera δ_0 une constante strictement positive plus petite que les constantes δ de la remarque 2.5' et des lemmes 2.7 et 2.8.

Par abus de notation, dans les paragraphes 4, 5 et 6, on notera encore $X_{-t}(x, |\xi|\nabla\varphi_J)$ l'application définie sur $\mathcal{U}_J(\varphi)$ qui coïncide avec l'application $X_{-t}(x, |\xi|\nabla\varphi_J)$ définie au paragraphe 2 tant que

$$t \leq \frac{\varphi_J(x) - \varphi(X^{-|J|}(x, \nabla\varphi_J))}{|\xi|}$$

et qui vaut

$$X^{-|J|}(x, \nabla\varphi_J) - \left(t - \frac{\varphi_J(x) - \varphi(X^{-|J|}(x, \nabla\varphi_J))}{|\xi|}\right)$$

sinon, (ce qui revient à oublier les obstacles pour les temps négatifs) et on fera de même pour l'application $\Xi_{-t}(x, |\xi|\nabla\varphi_J)$.

Lemme 4.1.— *Soit $\varphi_0(x)$ une phase définie au voisinage de la réunion des supports de u_0 et u_1. Il existe un opérateur différentiel L_1 d'ordre 2 et* *une constante $C > 0$, tels que si u_0 et u_1 sont dans $C^\infty(\overline{\Omega})$ et sont bornées ainsi que toutes leurs dérivées, alors on a*

(4.2)

$$\Big| R(e^{-i(\varphi_0(x)|\xi|-t\xi^2)/h}(u_0+hu_1)) - r(x,-\nabla\varphi_0|\xi|)e^{-i(\varphi_0(x)|\xi|-t\xi^2)/h}(u_0+hu_1)$$

$$-hL_1(r(x,\eta)u_0(y,t,\xi))\ \Big|_{\substack{y=x\\ \eta=-\nabla\varphi_0(x)|\xi|}}\ \Big|$$

$$\leq Ch^2\sum_{|\alpha|\leq 10}|D^\alpha u_0|+|D^\alpha u_1|$$

et de plus les coefficients de L_1 sont des fonctions C^∞ dont toute semi-norme d'ordre β au point x est contrôlée par les semi-normes d'ordre inférieur à $|\beta|$ de φ_0 et de ses dérivées jusqu'à l'ordre 4 au point x. La constante C est bornée par les semi-normes jusqu'à l'ordre 16 de φ_0.

Preuve :
Suivant la définition de R donnée à l'appendice A, on peut décomposer

$$R=\sum_{j\in J}\varphi_j A_j.$$

Nous allons étudier le cas où le support de la troncature φ_j rencontre le bord d'un obstacle, le cas intérieur se traitant de manière analogue.

$$A_j\left(e^{-i(\varphi_0(x)|\xi|)/h}(u_0+hu_1)\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi h}\right)^2\int e^{i\left((k(x)'-y')\cdot\eta'-\varphi_0(k^{-1}(y',k(x)_n))|\xi|+t|\xi|^2\right)}$$

$$R_j(k(x),\eta')\varphi'(k^{-1}(y',k(x)_n))u(k^{-1}(y',k(x)_n))dy'd\eta'.$$

On applique le théorème de la phase stationnaire à la phase

$$f(y',\eta')=(k(x)'-y')\cdot\eta'-\varphi_0(k^{-1}(y',k(x)_n))|\xi|.$$

Le point critique est

$$y'=k(x)'$$
$$\eta'=-|\xi|d\varphi_0\circ d_{y'}k^{-1}(k(x)',k(x)_n)=-|\xi|[{}^t dk^{-1}(\nabla\varphi_0(x))]';$$

en ce point on a

$$f = -\varphi_0(x)|\xi|,$$

$$f''_{y',\eta'} = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{Id} \\ -\operatorname{Id} & (\operatorname{Hess}_{y'}(\varphi_0 \circ k^{-1}(y', k(x)_n)|\xi|)_{y'=k(x)'}) \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de la phase stationnaire ([Hö] tome 1 th 7.7.5 et 7.7.6), on a

$$\Big| A_j \left(e^{-i(\varphi_0(x)|\xi|)/h}(u_0 + hu_1) \right)$$
$$-e^{-i(\varphi_0(x)|\xi|)/h}$$
$$\left(\varphi'_j(x) R_j \left(k(x), -{}^t dk^{-1}(\nabla\varphi_0(x)|\xi|)'\right)(u_0 + hu_1) + hL_{1,\varphi_0}u_0\right) \Big|$$
$$\leq Ch^2 \sum_{|\alpha|\leq 10} |D^\alpha u_0| + |D^\alpha u_1|$$

où C est une constante bornée quand φ_0 reste bornée dans C^{16} et si on note

$$(y_0, \eta_0) = (k(x)', -|\xi|({}^t dk \nabla\varphi_0(x))')$$

et

$$g_{y_0,\eta_0}(y', \eta')$$
$$= f(y', \eta') - f(y_0, \eta_0) - \frac{< f''_{(y_0,\eta_0)}(y' - y_0, \eta' - \eta_0), (y' - y_0, \eta' - \eta_0) >}{2},$$

on a

$$L_{1,\varphi_0}u = \sum_{\mu=0}^{2} \frac{i^{-1}2^{-\mu-1}}{\mu!(\mu+1)!} < f''(y_0, \eta_0)^{-1} D_{y',\eta'}, D_{y',\eta'} >^{\mu+1}$$
$$\left(g^\mu_{y_0,\eta_0} \left(\varphi'(k^{-1}(y', k(x)_n)\right) R_j(x, \eta') \varphi'\left(k^{-1}(y', k(x)_n)\right)\right.$$
$$\left. u\left(k^{-1}(y', k(x)_n)\right)\right)\Big) \Big|_{\substack{y'=y_0 \\ \eta'=\eta_0}}.$$

Ceci prouve le lemme car comme la fonction g^μ s'annule à l'ordre 2μ au point (y_0, η_0), l'opérateur L_1 est bien d'ordre 2.

4.1 Construction dans l'espace libre.

Nous allons construire une solution approchée de notre système (1.2) dans l'espace libre associée à notre donnée initiale (4.1). On cherche donc à résoudre le système :

$$
(4.3) \qquad \begin{aligned}
(ih\partial_t - h^2\Delta)u &= 0 \quad sur \quad (\mathbf{R}_t \setminus \mathbf{N}T_0) \times \Omega,\\
u\,|_{\partial\Omega} &= 0,\\
u\,|_{nT_0^+} &= v\,|_{nT_0^-},\\
u\,|_{t=0} &= e^{-i(x\cdot\xi - t\xi^2)}q(x,-\xi).
\end{aligned}
$$

$(4.3)'$

$$
\begin{aligned}
(ih\partial_t - h^2\Delta)v &= ih\psi'(t-nT_0)R(u(x,\xi,t)) \quad sur \quad]nT_0,(n+1)T_0[\times\Omega,\\
v\,|_{\partial\Omega} &= 0,\\
v\,|_{nT_0^+} &= 0,\\
v\,|_{t\leq 0} &= 0.
\end{aligned}
$$

On commence par résoudre (4.3) et (4.3)' pour $\Omega = \mathbf{R}^3$; pour cela, on cherche u et v sous la forme

$$
(4.4) \qquad \begin{aligned}
u &= (u_0 + hu_1)\, e^{-i(x.\xi - t\xi^2)/h},\\
v &= (v_0 + hv_1)\, e^{-i(x.\xi - t\xi^2)/h}.
\end{aligned}
$$

On ne cherche un développement asymptotique que jusqu'à l'ordre 2 car on veut seulement résoudre de manière approchée le système (4.3), (4.3)'. On verra au paragraphe 6 qu'il suffit en effet de gagner un facteur h^2 pour pouvoir conclure. On verra également que, contrairement à ce qu'on pourrait penser, on a réellement besoin des termes u_1 et v_1, c'est-à-dire que le gain d'un facteur h ne suffit pas.

On obtient alors les équations de transport $(n = 0, 1)$:
$(4.4)'$

$$
\begin{aligned}
i(\partial_t u_n + 2\xi.\nabla u_n) &= \Delta u_{n-1} \quad sur \quad]mT_0, (m+1)T_0[\times \mathbf{R}^3,\\
u_n\ |_{t=0} &= \delta_{n,0}\, q(x, -\xi),\\
u_n\ |_{t=mT_0^+} &= v_n\ |_{mT_0^-},\\
i(\partial_t v_n + 2\xi.\nabla v_n) &= \Delta v_{n-1} \quad sur \quad]mT_0, (m+1)T_0[\times \mathbf{R}^3\\
&\quad + i\psi'(t - mT_0)[r(x,\xi)u_n(x,\xi,t) + L_n(ru_{n-1})],\\
v_n\ |_{mT_0^+} &= 0,
\end{aligned}
$$

avec la convention $u_{-1} = v_{-1} \equiv 0$ et où $L_0 = 0$ et L_1 est l'opérateur différentiel d'ordre 2 donné par le lemme 4.1 appliqué à $\varphi_0(x,\xi) = \frac{x\cdot\xi}{|\xi|}$.

Lemme 4.2 .— *Les fonctions définies par récurrence sur m pour tout $t \in]mT_0, (m+1)T_0[$ par*

(4.5)

$$
\begin{aligned}
&u_0(x,t,\xi) =\\
&\qquad q(x - 2t\xi, -\xi) \prod_{i=1}^{m} \int_0^{T_0} \psi'(s) r(x + 2(s - (t - mT_0) - iT_0)\xi, \xi) ds,\\
&u_1(x,t,\xi) = v_1(x - 2(t - mT_0)\xi, mT_0^-, \xi)\\
&\qquad\qquad -i \int_{mT_0}^{t} \Delta u_0(x - 2(t-s)\xi, s, \xi) ds,
\end{aligned}
$$

$(4.5)'$

$$
\begin{aligned}
v_0(x,t,\xi) &= \int_{mT_0}^{t} \psi'(s - mT_0) r(x + 2(s-t)\xi, -\xi) u_0(x + 2(s-t)\xi, s, \xi) ds,\\
v_1(x,t,\xi) &= -i \int_{mT_0}^{t} \Delta v_0(x + 2(s-t)\xi, s, \xi) ds\\
&+ \int_{mT_0}^{t} \psi'(s - mT_0) \Big[r(x + 2(s-t)\xi, -\xi) u_1(x + 2(s-t)\xi, s, \xi)\\
&\qquad + L_1 (ru_0)(x + 2(s-t)\xi, s, \xi) \Big] ds,
\end{aligned}
$$

sont solutions de (4.4)'.

On a de plus
(4.6)

$$v_0(x, mT_0^-, \xi) = q(x - 2(mT_0^-)\xi, -\xi) \prod_{i=1}^{m} \int_0^{T_0} \psi'(s) r(x + 2(s - iT_0)\xi, -\xi) ds.$$

La preuve par récurrence sur m est immédiate.

Lemme 4.3.— *Soient $t_0 \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}T_0$ et $(x_0, \xi_0) \in T^*\mathbf{R}^3$. Si le point $X(t) = (x_0 + 2(t - t_0)\xi, -\xi)$ sur la droite issue de (x, ξ) parcourue à vitesse $2|\xi|$ est resté dans le passé dans l'intérieur de l'ensemble $\{(x, \xi)\ ;\ r(x, \xi) = 0\}$ pendant un intervalle de temps de longueur supérieure à $2T_0$ entre les instants $t = 0$ et t_0 alors*

$$u_0(x, t, \xi) = u_1(x, t, \xi_0) = v_0(x, t, \xi_0) = v_1(x, t, \xi_0) = 0$$

au voisinage de (x_0, t_0).

Preuve :

Il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $(n+1)T_0 \leq t_0$ et tel que le segment $[x-(t-nT_0)\xi, x-(t-(n+1)T_0)\xi] \times \{\xi\}$ soit dans l'intérieur de l'ensemble $\{(x, \xi)\ ;\ r(x, -\xi) = 0\}$. D'après la relation (4.5), on a $u_0(y, s, \xi) \equiv 0$ au voisinage de $\{(z, \rho)\ ;\ z = x - (t - \rho)\xi;\ \rho \in [nT_0, +\infty[\}$.

On en déduit que $v_0 \equiv 0$ au voisinage l'ensemble $\{(z, \rho)\ ;\ z = x-(t-\rho)\xi;\ \rho \in [nT_0, +\infty[\}$, puis que v_1 est identiquement nulle au voisinage de l'ensemble $\{(z, \rho)\ ;\ z = x-(t-\rho)\xi;\ \rho \in [nT_0, (n+1)T_0]\}$ puis que u_1 est identiquement nulle au voisinage de l'ensemble $\{(z, \rho)\ ;\ z = x - (t - \rho)\xi;\ \rho \in [(n + 1)T_0, (n + 2)T_0]\}$. Finalement, par une récurrence immédiate, u_1 et v_1 sont identiquement nulles au voisinage de l'ensemble $\{(z, \rho)\ ;\ z = x-(t-\rho)\xi;\ \rho \in [(n + 1)T_0, +\infty[\}$.

On démontre de la même manière le

Lemme 4.3'.— *Si le point $(x_0 - 2t_0\xi, -\xi)$ n'appartient pas au support de la fonction q, alors u_0, v_0, u_1 et v_1 sont identiquement nulles au voisinage de (x_0, t_0).*

Comme $\pi_x\,(\text{support}(r)) + B(0, 4T_0\alpha^{-1}) \subset \widehat{\Omega}$ (d'après la définition de la fonction $\overline{q}$ au paragraphe 2 et le choix $T_0 < \frac{\varepsilon_4}{4}\alpha$), on en déduit le

Corollaire 4.3".— *Pour tout ξ tel que $|\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$, $n = 0;\ 1$ et tout $t \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}T_0$ on a*

$$\text{support } u_n(\cdot, t, \xi) \subset \widehat{\Omega},$$

$$\text{support } v_n(\cdot, t, \xi) \subset \widehat{\Omega}.$$

Corollaire 4.4.— *Pour $n = 0; 1$, on a*

$$\begin{aligned} &\text{support}\, v_n \subset \left\{ (x,t)\,;\, 0 \le t \le \frac{\operatorname{diam} \widehat{\Omega}}{2|\xi|} \right\}, \\ (4.7) \qquad &\text{support}\, u_n \subset \left\{ (x,t)\,;\, 0 \le t \le \frac{\operatorname{diam} \widehat{\Omega}}{2|\xi|} \right\}. \end{aligned}$$

Lemme 4.5.— *Pour tout $p \in \mathbf{N}$ il existe $C_p > 0$ tel que pour $n = 0; 1$, on a pour tout $t \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}T_0$, et tout ξ tel que $|\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$,*

$$|u_n(.,.,\xi)|_p(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}_t^+ \setminus \mathbf{N}T_0) \le C_p(1+t)^{2n+1},$$
$$|v_n(.,.,\xi)|_p(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}_t^+ \setminus \mathbf{N}T_0) \le C_p(1+t)^{2n+1}.$$

Preuve

Pour u_0 et v_0, la preuve par récurrence sur m pour $t \in]mT_0, (m+1)T_0[$ est immédiate et pour u_1 et v_1 il suffit de remarquer que les semi-normes des phases $\varphi(x,\xi) = \frac{x\cdot\xi}{|\xi|}$, $|\varphi(\cdot,\xi)|_p$ sont uniformément bornées sur $\widehat{\Omega}$ pour $|\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$. Les coefficients des opérateurs $L_{1,\varphi}$ sont donc uniformément bornés ce qui permet de conclure par récurrence en utilisant ce qui précède.

4.2 Rebond d'une solution.

Nous allons maintenant faire "rebondir" ces solutions approchées sur les bords Γ_j des obstacles θ_j.

Soit $J = (j_1, \ldots, j_l) \in I$.

On notera $J' = (j_1, -, j_{l-1})$ avec la convention $(j_1)' = \emptyset$.

On notera $u_n^{\emptyset}$ et $v_n^{\emptyset}$ les fonctions u_n et v_n définies au lemme 4.2.

Lemme 4.6.— *Pour tout $\xi \in \mathbf{R}^3$ tel que $|\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$ et tout $j \in \{1, \cdots, N\}$ il existe une phase $\varphi_j(x, \xi)$ (ξ est un paramètre) définie sur un ouvert $\mathcal{U}$, de classe C^∞ jusqu'au bord sur $\mathcal{U}$, telle que*

i) sur $\bigcup_{t \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}T_0} \left(\text{support}(u_0^{\emptyset}) \cup \text{support}(u_1^{\emptyset}) \cup \text{support}(v_0^{\emptyset}) \cup \text{support}(v_1^{\emptyset})\right) \cap \Gamma_j$*, on a*

$$\varphi_j(x, \xi) = \frac{x \cdot \xi}{|\xi|},$$

ii) la phase φ_j vérifie (P) sur Γ_j.

Preuve :

Tout d'abord si u_0, u_1, v_0 et v_1 sont identiquement nulles sur Γ_j pour tout temps t alors le lemme 4.6 est évident. Il suffit en effet de prendre par exemple la phase φ_j définie sur θ_j^c de la manière suivante :

si $y = x + dn(x)$; $y \in \mathbf{R}^3 \setminus \theta_j$ et $x \in \Gamma_j$, on pose $\varphi_j(t) = d$.

On peut donc supposer que u_0, u_1, v_0 et v_1 ne sont pas toutes identiquement nulles sur Γ_j.

On notera δ_1 une constante telle que $\delta_1 < \delta/2$ où δ est la constante du lemme 2.7 et on supposera de plus que δ_1 est plus petite que la constante δ_1 du lemme 3.2.

La construction du lemme 3.2 permet de définir la fonction φ_j sur l'ensemble $\mathcal{U}_j(\varphi) = \{L^1(x, \xi) \ ; \ x \in \Gamma_j \ ; \ n(x) \cdot \xi \leq -\delta_1\}$. Il faut donc vérifier que $u_i^{\emptyset}(\cdot, \xi) = v_i^{\emptyset}(\cdot, \xi) \equiv 0$ sur $\{x \in \Gamma_j \ ; \ n(x) \cdot \xi \geq -2\delta_1\}$, ce qui en utilisant le lemme 2.7 est une conséquence des lemmes 4.3 et 4.3'. En effet, si $n(x_0) \cdot \xi \geq -2\delta_1$, d'après le lemme 2.7, le point $(x(t) = x_0 + 2(t - t_0)\xi, -\xi)$ est resté entre $-\infty$ et t_0 dans le complémentaire du support de r pendant un intervalle de temps de longueur supérieure à $2T_0$, $[t_1, t_1 + 2T_0]$. Or on sait qu'entre les instants t_1 et t_0 le point $x(t)$ est resté dans le complémentaire du support de q. On conclut donc en appliquant soit le lemme 4.3 soit le lemme 4.3'.

Il suffit finalement de montrer que φ_j vérifie (P) sur Γ_j. Le seul point qui ne soit pas une conséquence directe de la construction de φ_j est le point ii) de la définition 3.1.

On montre ii) en utilisant la remarque 2.5'. En effet si u_0, u_1, v_0 ou v_1 ne sont pas identiquement nulles sur Γ_j alors il existe $z \in \Gamma_j$ et $\tau > 0$ tels que $(x - \tau\xi, -\xi) \in \mathrm{support}(q)$, on en déduit que le point ii) de la définition 3.1 est vérifié d'après la remarque 2.5'.

On peut maintenant réitérer la construction du paragraphe 3 et définir des phases φ_J sur des ouverts qu'on notera encore $\mathcal{U}_J(\varphi)$ où $\varphi(x,\xi) = \frac{x\cdot\xi}{|\xi|}$

On cherche maintenant à résoudre le système :
(4.8)

$$\begin{aligned}
(ih\partial_t - h^2\Delta)u^J &= 0, \quad \text{dans} \quad \theta^c_{j_m} \times (\mathbf{R}_t \setminus \mathbf{N}T_0),\\
u^J\mid_{mT_0^+} &= v^J\mid_{mT_0^-},\\
u^J\mid_{\Gamma_{j_l}} &= u^{J'}\mid_{\Gamma_{j_l}},\\
u^J\mid_{t=0} &= 0,\\
(ih\partial_t - h^2\Delta)v^J &= ih\psi'(t - mT_0)(\mathrm{Op}\, r)(u^J), \text{ dans}\, \theta^c_{j_m} \times]mT_0, (m+1)T_0[,\\
v^J\mid_{\Gamma_{j_l}} &= v^{J'}\mid_{\Gamma_{j_l}},\\
v^J\mid_{mT_0^+} &= 0.
\end{aligned}$$

On va donc comme précédemment chercher u^J et v^J sous la forme

$$\begin{aligned}
u^J &= e^{-i(\varphi_J(x,\xi)|\xi| - t\xi^2)}(u_0^J + hu_1^J)\\
v^J &= e^{-i(\varphi_J(x,\xi)|\xi| - t\xi^2)}(v_0^J + hv_1^J).
\end{aligned}$$

On notera
$J(x,t,\xi) = (j_1, \ldots, j_n)$ si $X_{-2t}(x, |\xi|\nabla\varphi_J(x)) \in L_{j_n}(X^{-|J|}(x|\xi|\nabla\varphi_J)\nabla\varphi_{j_1})$, c'est à dire si le point $X_{-2t}(x, |\xi|\nabla\varphi_J)$ se trouve entre les obstacles θ_{j_n} et $\theta_{j_{n+1}}$,
et $J(x,t,\xi) = \emptyset$ si $X_{-2t}(x, |\xi|\nabla\varphi_J(x)) \in L_{-1}(X^{-|J|}(x, \nabla\varphi_J)\nabla\varphi_{j_1})$.

On note $q(x,\xi,I)$ la fonction égale à $q(x,-\xi)$ si $I = \emptyset$, 0 sinon .

Lemme 4.7.— *Les fonctions définies si $t \in]mT_0, (m+1)T_0[$, par* *lorsque* $x \in \mathcal{U}_J(\varphi)$,

(4.9)

$$u_0^J(x,t,\xi) \\
= \Lambda\varphi_J(x) q\big(X_{-2t}(x,|\xi|\nabla\varphi_J), \Xi_{-2t}(x,|\xi|\nabla\varphi_J), J(x,t,\xi)\big) \\
\prod_{i=0}^{m-1} \int_0^{T_0} \psi'(s) r\big(X_{-2(t-s-iT_0)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J), -\Xi_{-2(t-s-iT_0)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J)\big) ds,$$

(4.10)

$$v_0^J(x,t,\xi) \\
= \int_{mT_0}^{t} \psi'(s-mT_0) g_{\varphi_J}(x,t-s,\xi) \\
\times r\left(X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J), -\Xi_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J)\right) \\
\times u_0^{J(x,t-s,\xi)}\big(X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J), s, \xi\big)\, ds,$$

où on note

$$g_{\varphi_J}(x,s,\xi) = \left(\frac{G\varphi_J(x)}{G\varphi_J(X^{-1}(x,\nabla\varphi_J))}\right)^{1/2} \times \cdots \\
\cdots \times \left(\frac{G\varphi_{J_{m-n}}(x)(X^{-n}(x,\nabla\varphi_J))}{G\varphi_{J(x,s,\xi)}(X_{-2s}(x,|\xi|\nabla\varphi_J))}\right)^{1/2}$$

avec $J = (j_1, j_2, \cdots, j_l)$ *et* $J_p = (j_1, \cdots, j_p)$ *et* $J_{m-n} = J(x,s,\xi)$.

et lorsque $x \notin \mathcal{U}_J(\varphi)$,

$$u_0^J(x,t,\xi) \equiv 0,$$
$$v_0^J(x,t,\xi) \equiv 0,$$

sont de classe C^∞ *sur* $\mathbf{R}^3 \setminus \theta_{j_l}$ *et vérifient*

i) $\bigcup_{n=0}^{1} \bigcup_{|\xi|\in[\alpha,\alpha^{-1}]} \mathrm{support}(u_n^{J'}(\cdot,\xi)\,|_{\Gamma_{j_l}}) \cup \mathrm{support}(v_n^{J'}(\cdot,\xi)\,|_{\Gamma_{j_l}}) \subset \{\varphi^J = \varphi^{J'}\}$

ii) *Pour tout* $m \in \mathbf{N}$ *et tout* $(x,t) \in \theta_{j_l}^c \times]mT_0, (m+1)T_0[$, *on a*

$$
\begin{aligned}
(\partial_t + 2|\xi|\nabla\varphi_J\nabla + |\xi|\Delta\varphi_J)u_0^J &= 0,\\
u_0^J\,|_{\Gamma_{j_l}} &= u_0^{J'}\,|_{\Gamma_{j_l}},\\
u_0^J\,|_{mT_0^+} &= v_0^J\,|_{mT_0^-},\\
u_0^J\,|_{t\leq 0} &= 0,\\
\text{support } u_0^J &\subset \mathcal{U}_J(\varphi).
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

iii) *Pour tout* $m \in \mathbf{N}$ *et tout* $(x,t) \in \theta_{j_l}^c \times]mT_0, (m+1)T_0[$ *on a*

$(4.11)'$

$$
\begin{aligned}
(\partial_t + 2|\xi|\nabla\varphi_J\nabla + |\xi|\Delta\varphi_J)v_0^J &= \psi'(t-mT_0)[r(x, -|\xi|\nabla\varphi_J)u_0^J(x,\xi)],\\
v_0^J\,|_{\Gamma_{j_l}} &= v_0^{J'}\,|_{\Gamma_{j_l}},\\
v_0^J\,|_{t\leq 0} &= 0,\\
v_0^J\,|_{t=mT_0^+} &= 0,\\
\text{support } v_0^J &\subset \mathcal{U}_J(\varphi).
\end{aligned}
$$

Preuve :
Ces fonctions sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^3 \setminus \theta_{j_l}$ en tout point $t \notin \mathbf{N}T_0$.
En effet si la fonction $J(x,t,\xi)$ n'est pas localement constante au voisinage de (x_0,t_0) alors $X_{-2t_0}(x_0, |\xi|\nabla\varphi_J) \in \Gamma$ et donc

$$q(X_{-2t}(x, |\xi|\nabla\varphi_J), \Xi_{-2t}(x, |\xi|\nabla\varphi_J))$$

est nulle au voisinage de (x_0,t_0).
Sur $\mathcal{U}_J(\varphi)$ la régularité de u_0^J est donc une conséquence de la remarque 2.5.

Si $J(x,t-mT_0,\xi)=J$ la régularité de v_0^J se déduit facilement de la régularité de u_0^J et sinon on a

$$v_0^J(x,t,\xi)=\left[\frac{G\varphi_J(x)}{G\varphi_J(X^{-1}(x,\nabla\varphi_J))}\right]^{1/2}$$
$$\times\left[v_0^{J'}\left(X^{-1}(x,\nabla\varphi_J),t-\frac{\varphi_J(x)-\varphi_J\left(X^{-1}(x,\nabla\varphi_J)\right)}{2|\xi|},\xi\right)\right.$$
$$+\int_{t-\frac{\varphi_J(x)-\varphi_J(X^{-1}(x,\nabla\varphi_J))}{2|\xi|}}^{t} r\left(X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J),-\Xi_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J)\right)$$
$$\left.g_{\varphi_J}(x,t-s,\xi)\psi'(s-mT_0)u_0^J\left(X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J),s,\xi\right)ds\right],$$

ce qui permet de conclure par récurrence sur $|J|$.

Il suffit maintenant de vérifier que les fonctions u_0^J et v_0^J sont identiquement nulles au voisinage du bord de $\mathcal{U}_J(\varphi)$ dans $\mathbf{R}^3\setminus\theta_{j_m}$.
Si $x\in\Gamma_{j_m}$ et si $-\delta_0\le n(x)\cdot\nabla\varphi_{J'}<-\delta_1$ (δ_1 est définie au lemme 4.6) alors le rayon issu de $(x,\nabla\varphi_J(x))$ parcouru à vitesse $2|\xi|$ est resté dans le complémentaire du support de r dans le passé pendant un intervalle de temps de longueur supérieure à $2T_0$ d'après la construction de la troncature r. On en déduit que $u_0^{J'}$ et $v_0^{J'}$ sont identiquement nulles au voisinage de x. On démontre ensuite comme le lemme 4.3' que u_0^J et v_0^J sont identiquement nulles sur $L^1(x,\nabla\varphi_J(x))$.

Pour démontrer le point i), il suffit de montrer que les supports de $u_0^{J'}$ et de $v_0^{J'}$ sont inclus dans $\Gamma_{j_l}(\varphi)$, ce qui ce montre de la même façon.

Pour démontrer les points ii) et iii), nous allons utiliser le lemme suivant

Lemme 4.8.—
(4.12)
$$\exp\left(-|\xi|\int_{\tau_0}^{\tau}|\xi|\Delta\varphi_J(x+2s|\xi|\nabla\varphi_J(x))ds\right)=\left[\frac{G\varphi_J(x+2\tau|\xi|\nabla\varphi_J)}{G\varphi_J(x+2\tau_0|\xi|\nabla\varphi_J)}\right]^{1/2}$$

Preuve :
Si K_1 et K_2 sont les courbures principales en x de $\mathcal{C}\varphi_J$, alors les courbures principales en $x+\ell\nabla\varphi_J(x)$ de $\mathcal{C}\varphi_J(x+\ell\nabla\varphi_J)$ sont $\frac{K_1}{1+\ell K_1}$ et $\frac{K_2}{1+\ell K_2}$. Ce sont les deux valeurs propres du Hessien de φ_J appliqué à l'espace tangent

en $(x+\ell\nabla\varphi)$ à la surface $\mathcal{C}\varphi_J(x+\ell\nabla\varphi_J)\ \ T\mathcal{C}\varphi_J(x+\ell\nabla\varphi_J)$. Or la troisième valeur propre du Hessien de φ_J (considéré comme endomorphisme de $\mathbf{R}^3$) est 0, donc $\Delta\varphi_J(x+\ell\nabla\varphi_J) = \frac{K_1}{1+\ell K_1} + \frac{K_2}{1+\ell K_2}$
d'où le lemme 4.8.
Nous pouvons revenir à la démonstration du lemme 4.7.

$$
\begin{aligned}
&v_0^J(x,(m+1)T_0^-,\xi) \\
&= \int_{mT_0}^{(m+1)T_0} ds\ \psi'(s-mT_0) g_{\varphi_J}(x, m+1T_0-s, \nabla\varphi_J) \\
&\quad \times r\left(X_{2(s-(m+1)T_0)}\left(x,|\xi|\nabla\varphi_J\right), -\Xi_{2(s-(m+1)T_0)}\left(x,|\xi|\nabla\varphi_J\right)\right) \\
&\quad \times \Lambda\varphi_{J(x,(m+1)T_0-s,\xi)}\left(X_{-2((m+1)T_0-s)}\left(x,\nabla\varphi_J\right)\right) \\
&\quad \times q\Bigg(X_{-2s}\left[X_{-2((m+1)T_0-s)}\left(x,|\xi|\nabla\varphi_J\right), \left(\Xi_{-2((m+1)T_0-s)}\left(x,|\xi|\nabla\varphi_J\right)\right)\right], \\
&\qquad\qquad \Xi_{-2s}\left[X_{-2((m+1)T_0-s)}\left(x,|\xi|\nabla\varphi_J\right), \left(\Xi_{-2((m+1)T_0-s)}\left(x,|\xi|\nabla\varphi_J\right)\right)\right], \\
&\qquad\qquad\qquad J(x,(m+1)T_0,\xi)\Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \prod_{i=0}^{m-1} \int_0^{T_0} d\theta\ \psi'(\theta) \\
&r\Bigg(X_{-2(s-\theta-iT_0)}\left[\left(X_{-2((m+1)T_0-s)}\left(x,|\xi|\nabla\varphi_J\right)\right),\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left(\Xi_{-2((m+1)T_0-s)}\left(x,|\xi|\nabla\varphi_J\right)\right)\right], \\
&-\Xi_{-2(s-\theta-iT_0)}\left[\left(X_{-2((m+1)T_0-s)}\left(x,|\xi|\nabla\varphi_J\right)\right),\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left(\Xi_{-2((m+1)T_0-s)}\left(x,|\xi|\nabla\varphi_J\right)\right)\right]\Bigg).
\end{aligned}
$$

Or :

$$
\begin{aligned}
&X_{-2(s-\theta-iT_0)}\left[\left(X_{-2((m+1)T_0-s)}\left(x,|\xi|\nabla\varphi_J\right)\right),\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left(\Xi_{-2((m+1)T_0-s)}\left(x,|\xi|\nabla\varphi_J\right)\right)\right] \\
&= X_{-2((m+1)T_0-\theta-iT_0)}(x,\nabla\varphi_J),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Xi_{-2(s-\theta-iT_0)}\left[\left(X_{-2((m+1)T_0-s)}\left(x,|\xi|\nabla\varphi_J\right)\right), \left(\Xi_{-2((m+1)T_0-s)}\left(x,|\xi|\nabla\varphi_J\right)\right)\right] \\
&\qquad = \Xi_{-2((m+1)T_0-\theta-iT_0)}(x,\nabla\varphi_J)
\end{aligned}
$$

et

$$g_{\varphi_J}(x,(m+1)T_0-s,\xi)\Lambda\varphi_{J(x,(m+1)T_0-s,\xi)}(X_{-2((m+1)T_0-s)}(x,\nabla\varphi_J))$$

$$=\Lambda\varphi_J(x).$$

Donc $v_0^J(x,(m+1)T_0^-)=u_0^J(x,(m+1)T_0^+)$.

On a $u_0^J\ |_{\Gamma_{j_l}}=u_0^{J'}\ |_{\Gamma_{j_l}}$ car d'après le lemme 2.7, on a $u_0=u_1\equiv 0$ sur $\Gamma_{j_l}\setminus\Gamma_{j_l}(\varphi_{J'})$, $\Lambda\varphi_J\ |_{\Gamma_{j_l}}=\Lambda\varphi_{J'}\ |_{\Gamma_{j_l}}$ et q tangentiel près du bord (car nul), ainsi que r.

De même pour $v_0^J\ |_{\Gamma_{j_l}}=v_0^{J'}\ |_{\Gamma_{j_l}}$.

Il reste à vérifier que u_0^J et v_0^J vérifient les équations de transport.

En effet, soient $x_0\in\theta_{j_l}^c$ et $t_0\notin\mathbf{N}T_0$.

On se place sur un voisinage connexe ω_0 de (x_0) dans $\mathcal{C}_{\varphi_J}(x_0)$ tel que

$$(y,t)\in\omega_0\times]-\varepsilon,\varepsilon[\mapsto y+(t-t_0)\nabla\varphi_J(y)$$

soit un système de coordonnées dans un voisinage ω de x_0 dans $\theta_{j_m}^c$.

Alors pour tout $x\in\omega_x$tel que $x=x_0+\theta\nabla\varphi(x_0)$, on a

(4.13)

$$u_0^J(x,t,\xi)$$
$$=\left(\frac{G\varphi_J(x)}{G\varphi_J(x_0)}\right)^{1/2}\Lambda\varphi_J(x_0)q(X_{-2t}(x,|\xi|\nabla\varphi_J),\Xi_{-2t}(x,|\xi|\nabla\varphi_J),J(x,t,\xi))$$
$$\prod_{i=0}^{m-1}\int_0^{T_0}ds\psi'(s)r\big(X_{-2(t-s-iT_0)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J),\Xi_{-(t-s-iT_0)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J)\big),$$
$$=\left(\frac{G\varphi_J(x)}{G\varphi_J(x_0)}\right)^{1/2}u_0^J(x_0,t-t_0,\xi),$$

car au voisinage de (x_0,t_0) on a $J(x,t,\xi)=J(x_0,t_0,\xi)$. Donc d'après le lemme 4.8, u_0^J vérifie

$$(\partial_t+2|\xi|\nabla\varphi_J\nabla+\Delta\varphi_J)u_0^J=0\quad\text{sur}\quad\omega.$$

De même v_0^J vérifie pour tout $t\in]mT_0;(m+1)T_0[$ et tout $x\in\theta_{j_l}^c$

$$(\partial_t+2|\xi|\nabla\varphi_J\nabla+\Delta\varphi_J)v_0^J=\psi'(t-mT_0)r(x,-|\xi|\nabla\varphi_J)u_0^J.$$

Lemme 4.9.— *Les fonctions définies par récurrence sur m pour $t \in]mT_0,(m+1)T_0[$ et $x \in \mathcal{U}_J(\varphi)$ par*

(4.14)

$$\begin{aligned}
&v_1^J(x,t,\xi)\\
&= \int_{mT_0}^t -idsg_{\varphi_J}(x,t-s,\xi)\Delta v_0^{J(x,\xi,t-s)}\left(X_{-2(t-s)}\left(x,|\xi|\nabla\varphi_J\right),t-s,\xi\right)\\
&+ \int_{mT_0}^t ds\psi'(s-mT_0)g_{\varphi_J}(x,t-s,\xi)\\
&\quad\times\Big[\Big(r\left(X_{-2(t-s)}\left(x,|\xi|\nabla\varphi_J\right),-\Xi_{-2(t-s)}\left(x,|\xi|\nabla\varphi_J\right)\right)\Big)\\
&\qquad\qquad u_1^J(X_{-2(t-s)}\left(x,|\xi|\nabla\varphi_J),s,\xi\right)\\
&\quad +L_1^{J(x,\xi,t-s)}\Big(r\left(X_{-2(t-s)}\left(x,|\xi|\nabla\varphi_J\right),\eta\right)\\
&\qquad\qquad u_0^{J(y,\xi,t-s)}\left(y,s,\xi\right)\Big)\,|_{\substack{y=X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J)\\ \eta=-|\xi|\nabla\varphi_{J(x,\xi,t-s)}}}\Big]
\end{aligned}$$

(4.15)

$$\begin{aligned}
&u_1^J(x,t,\xi)\\
&\qquad= v_1^{J(x,t-mT_0,\xi)}(X_{-2(t-nT_0)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J),nT_0,\xi)g_{\varphi_J}(x,t-mT_0,\xi)\\
&\qquad\quad -i\int_{mT_0}^t g_{\varphi_J}(x,t-s,\xi)\Delta u_0^{J(x,\xi,t-s)}(X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J),s,\xi)
\end{aligned}$$

et par
$u_1^J(x,t,\xi)\equiv 0$ *si* $x\notin\mathcal{U}_J(\varphi)$
$v_1^J(x,t,\xi)\equiv 0$ *si* $x\notin\mathcal{U}_J(\varphi)$

sont de classe C^∞ *sur* $\widehat{\Omega}\setminus\theta_{j_l}$ *et vérifient*

i) $\bigcup\limits_{n=0}^{1}\bigcup\limits_{|\xi|\in[\alpha,\alpha^{-1}]}$ support $(u_1^{J'}(\,\cdot,\,\xi)\,|_{\Gamma_{j_l}})\cup$support $(v_1^{J'}(\,\cdot,\,\xi)\,|_{\Gamma_{j_l}})\subset\{\varphi^J=\varphi^{J'}\}$

ii) pour tout $m \in \mathbf{N}$,

$$
(4.16) \qquad \begin{aligned}
&\textit{sur} \quad \theta^c_{j_l} \times]mT_0, (m+1)T_0[,\\
(\partial_t + 2|\xi|\nabla\varphi_J\nabla + |\xi|\Delta\varphi_J)u_1^J &= -i\Delta u_0^J,\\
u_1^J\ |_{\Gamma_{j_l}} &= u_1^{J'}\ |_{\Gamma_{j_l}},\\
u_1^J\ |_{mT_0^+} &= v_1^J\ |_{mT_0^-},\\
u_1^J\ |_{t\leq 0} &= 0,\\
\mathrm{support}\, u_1^J &\subset \mathcal{U}^J(\nabla\varphi_J),
\end{aligned}
$$

iii) pour tout $n \in \mathbf{N}$, *sur* $\theta^c_{j_l} \times]mT_0, (m+1)T_0[$,

$(4.16)'$

$$
(\partial_t + 2|\xi|\nabla\varphi_J\nabla + |\xi|\Delta\varphi_J)v_1^J = (-i\Delta v_0^J) + \psi'(t - mT_0)
$$

$$
\left[r\left(x, |\xi|\nabla\varphi_J\right) u_1^J\left(x,\xi\right) + L_1^J\left(r\left(x,\eta\right) u_0^J\left(y,\xi\right)\right) \Big|_{\substack{y=x\\ \eta=-|\xi|\nabla\varphi_J(x,\xi)}} \right],
$$

$$
\begin{aligned}
v_1^J\ |_{\Gamma_{j_l}} &= v_1^{J'}\ |_{\Gamma_{j_l}},\\
v_1^J\ |_{t\leq 0} &= 0,\\
\mathrm{support}\ v_1^J &\subset \mathcal{U}^J(\nabla\varphi_J).
\end{aligned}
$$

où on a noté L_1^J *l'opérateur différentiel d'ordre 2 donné par le lemme 4.1 appliqué à* u_0^J, u_1^J *et la phase* $\varphi_J(x,\xi)$.

Preuve :
La preuve est identique à celle du lemme 4.9.

Lemme 4.10.— *On a*

$$
(4.17) \qquad \mathrm{support}\, u_0^J \subset \widehat{\Omega} \times \mathbf{R} \cap \{(x,t)\ ;\ J(x,t,\xi) = \emptyset\},
$$

$$
\mathrm{support}\, v_0^J \subset \widehat{\Omega} \times \mathbf{R} \cap \{(x,t)\ ;\ J(x,t,\xi) = \emptyset\}.
$$

Preuve :
On démontre comme au lemme 4.3 que u_0^J et v_0^J sont nulles au voisinage du complémentaire de $\widehat{\Omega}$. On démontre comme au lemme 4.3' par récurrence sur $|J|$ que si $J(x,t,\xi) \neq \emptyset$, alors u_0^J et v_0^J sont nulles au voisinage de (x,t).

Lemme 4.11.— *On a les mêmes inclusions qu'au lemme 4.10 pour les fonctions* u_1^J *et* v_1^J.

Preuve :

Soit $(x,t) \in \mathcal{U}_J(\varphi)\times]mT_0,(m+1T_0)[$, on a alors deux cas possibles :

i) soit $J(x,(t-mT_0),\xi) = J$,

ii) soit $J(x,(t-mT_0),\xi) \neq J$.

Dans le premier cas, on a, si $u_1^J(x,t,\xi) \neq 0$, deux possibilités :

i,1) soit $v_1^J(X_{-2(t-mT_0)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J), t-mT_0,\xi) \neq 0$,

i,2) soit il existe $s \in [mT_0,t]$ tel que $\Delta u_0^J(X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J), t-s,\xi) \neq 0$

et si $v_1^J(x,t,\xi) \neq 0$ on a alors trois possibilités :

i,3) soit il existe $s \in [mT_0,t]$ tel que $\Delta v_0^J(X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J), t-s,\xi) \neq 0$,

i,4) soit il existe $s \in [mT_0,t]$ tel que $u_1^J(x,t-s,\xi) \neq 0$,

i,5) soit

$$L_1^{J(x,\xi,t-s)}(r(X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J),\eta))u_0^J(y,\xi,t-s)\;|_{\substack{y=X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J)\\ \eta=-|\xi\nabla\varphi_{J(x,t-s,\xi)}}} \neq 0.$$

Dans le deuxième cas, si $u_1^J(x,t,\xi) \neq 0$ ou si $v_1^J(x,t,\xi) \neq 0$, on a

ii,1) soit

$$u_1^J\left(X^{-1}(x,\nabla\varphi_J), t - \left(\frac{\varphi_J(x)-\varphi_J(X^{-1}(x,\nabla\varphi_J))}{2|\xi|}\right)\right) \neq 0,$$

ii,2) soit

$$v_1^J\left(X^{-1}(x,\nabla\varphi_J), t - \left(\frac{\varphi_J(x)-\varphi_J(X^{-1}(x),\nabla\varphi_J)}{2|\xi|}\right)\right) \neq 0,$$

ii,3) soit il existe $s \in \left[t - \frac{\varphi_J(x)-\varphi_J(X^{-1}(x,\nabla\varphi_J))}{2|\xi|}, t\right]$ tel que

$$u_1^J\left(X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J), t-s\right) \neq 0,$$

ii,4) soit il existe $s \in \left[t - \frac{\varphi_J(x)-\varphi_J(X^{-1}(x,\nabla\varphi_J))}{2|\xi|}, t\right]$ tel que

$$L_J^1(r(X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J),\eta))u_0^J(y,\xi,t-s)\;|_{\substack{y\,=\,X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J)\\ \eta\,=\,-|\xi|\nabla\varphi_J}} \neq 0.$$

En appliquant alternativement ces deux cas et le lemme 4.10, on obtient le lemme 4.11.
On en déduit le

Lemme 4.12.— *Soit* $d = \min(\mathrm{dist}(\theta_i, \theta_j))$.*Alors pour tout* $p \in \mathbf{N}$, *tous* $X_1, \ldots, X_p \in S^2$ *et* $n = 0\ ;1$, *on a*

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{supp}u_n^J \subset \left\{ t \in \left[\frac{\alpha d}{2}(|J|-1)\ ;\ \frac{\mathrm{diam}\widetilde{\Omega}}{2\alpha}(|J|+1) \right] \right\}, \\
(4.21)\qquad &\mathrm{supp}v_n^J \subset \left\{ t \in \left[\frac{\alpha d}{2}(|J|-1)\ ;\ \frac{\mathrm{diam}\widetilde{\Omega}}{2\alpha}(|J|+1) \right] \right\}.
\end{aligned}
$$

5. Décroissance des solutions le long d'une trajectoire captive.

Nous allons étudier dans cette partie la décroissance des fonctions u_i^J et v_i^J construites précédemment et de leurs dérivées.

Dans ce paragraphe, nous fixerons $\xi \in \mathbf{R}^3$ tel que $|\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$ et $J \in \mathcal{I}$. On notera $\varphi(x) = \frac{x \cdot \xi}{|\xi|}$.
Toutes les constantes introduites seront indépendantes de ξ et de J.

5.1 Régularité des transformations géométriques.

Proposition 5.1.— *L'application ψ définie sur $\mathcal{U}_J(\varphi)$,*

$$\psi \ : \ x \mapsto \frac{G_{\varphi_J}(x)}{G_{\varphi_J}(X^{-1}(x, \nabla\varphi_J))},$$

vérifie l'estimation suivante:
Pour tout $m \in \mathbf{N}$, il existe $C_m > 0$ tel que

$$|\Psi|_m(\mathcal{U}_J(\varphi) \cap \widehat{\Omega}) \leq C_m.$$

Preuve :

$$\Psi(x) = \frac{1}{(1 + \ell K_1(x))(1 + \ell K_2(x))} = \frac{1}{1 + \ell H(x) + \ell^2 G(x)}$$

où $\ell = |x - X^{-1}(x, \nabla\varphi_J)|$ et où H (respectivement G) est la courbure moyenne (respectivement de Gauss) de la surface $\mathcal{C}_{\varphi_J}$ en $X^{-1}(x, \nabla\varphi_J)$ c'est à dire la trace (respectivement le déterminant) de la seconde forme fondamentale de la surface. Or cette seconde forme fondamentale vaut

$$L(u, v) = \frac{1}{|\nabla\varphi_J|} Hess(\varphi_j)_{X^{-1}(x, \nabla\varphi_J)}(u, v)$$

Comme d'autre part $\ell = \varphi_J(x) - \varphi_J(X^{-1}(x, \nabla\varphi_J))$, la proposition 5.1 se déduit du lemme 3.12 et du lemme suivant:

Lemme 5.2.— *Pour tout $\delta_1 > 0$ et tout $p \in \mathbf{N}$, il existe $C_p > 0$ tel que pour tout $x \in \{x; n(X^{-1}(x, \nabla\varphi_J)).\Xi^{-1}(x, \nabla\varphi_J) \geq \delta_1\} \cap \widehat{\Omega}$, on a*

$$|X^{-1}(., \nabla\varphi_J)|_m(x) \leq C|\nabla\varphi_J|_m \leq C_m. \tag{5.1}$$

Preuve :

Soient $x_0 = X^{-1}(x, \nabla\varphi_J)$ et $t_0 = \frac{\varphi_J(x) - \varphi_J(X^{-1}(x, \nabla\varphi_J))}{2|\xi|}$.

On considère l'application définie au voisinage de (x_0, t_0) dans $\Gamma \times \mathbf{R}$ par

$$g \ : \ (y, t) \mapsto y + t\nabla\varphi_J(y).$$

Soient Y_1 et Y_2 une base orthonormale de l'espace tangent en x_0 à Γ_{j_m} telle que $(Y_1, Y_2, n(x_0))$ soit une base orthonormale directe de $\mathbf{R}^3$. Alors la différentielle de g en (x_0, t_0) s'écrit dans cette base (la base d'arrivée est la base canonique de $\mathbf{R}^3$)

$$\left(Y_1 + t_0 Hess(\varphi_J)(Y_1) \quad , \quad Y_2 + t_0 Hess(\varphi_J)(Y_2) \quad , \quad \nabla\varphi_J(x_0)\right).$$

Si on décompose Y_1 et Y_2 sur la base orthonormale de $\mathbf{R}^3$ formée des directions principales de $\mathcal{C}\varphi_J(x_0)$ et de $\nabla\varphi_J(x_0)$, on obtient aisément que le déterminant de cette différentielle vaut $(1 + t_0(k_1 + k_2) + t_0^2 k_1 k_2) n(x_0) \cdot \nabla\varphi_J(x_0)$ si k_1 et k_2 sont les courbures principales de la surface $\mathcal{C}\varphi_J(x_0)$, ce qui termine la démonstration du lemme 5.2 car $\widehat{\Omega}$ est borné.

Lemme 5.3.— *Il existe $M > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbf{N}$ il existe $C_p > 0$ tel que si $|J| \geq M$ alors pour tout $i \in \mathbf{N}$, l'application*

$$\rho \ : \ (x, t) \in \mathcal{U}_J \times]iT_0, \infty[\mapsto (X_{-(t-iT_0)}(x, |\xi|\nabla\varphi_J), \Xi_{-(t-iT_0)}(x, |\xi|\nabla\varphi_J))$$

vérifie les estimations suivantes au voisinage de tout point $(x_0, t_0) \in \mathcal{U}_J(\varphi) \times \mathbf{R}_t^+$ tel que $X_{-(t_0-iT_0)}(x_0, |\xi|\nabla\varphi_J) \notin \Gamma$ et $x_0 \in \widehat{\Omega}$

$$|\rho(\cdot, t)|_p(x) \leq C_p\,.$$

Preuve :

Nous utilisons le lemme 3.20 :

Si $(t_0 - iT_0) < \frac{\varphi_J(x_0) - \varphi(X^{-|J|}(x_0, \nabla\varphi_J))}{|\xi|}$ soit s l'indice tel que

$$X_{-(t_0-iT_0)}(x_0, |\xi|\nabla\varphi_J) \in L_s(X^{-|J|}(x_0, \nabla\varphi_J).$$

Alors au voisinage de (x_0, t_0)

$$\Xi_{-(t-iT_0)}(x, |\xi|\nabla\varphi_J) = |\xi|\nabla\varphi_{(j_1,\ldots,j_s)}(X_{-(t-iT_0)}(x, \nabla\varphi_J)).$$

L'estimation du second terme découle donc de celle du premier terme qui découle aisément de la partie *ii)* du lemme 3.20 car, avec les notations précédentes et si on note de plus

$$p = \frac{\varphi_J(x) - \varphi_{(j_1,\cdots,j_s)}(X^{-(|J|-s)}(x, \nabla\varphi_J))}{|\xi|},$$

$$X_{-(t-iT_0)}(x, |\xi|\nabla\varphi_J) = X_{t-p}(X^{-(|J|-s)}(x, \nabla\varphi_J), \nabla\varphi_{(j_1,\cdots,j_s)}).$$

Si $(t_0 - iT_0) > \varphi_J(x_0) - \varphi(X^{-|J|}(x_0, \nabla\varphi_J))$, alors au voisinage de (x_0, t_0)

$$X_{-(t-iT_0)}(x, |\xi\nabla\varphi_J)$$
$$= X^{-|J|}(x, \nabla\varphi_J) - \Big((t - iT_0) - \varphi_J(x) - \varphi(X^{-|J|}(x, \nabla\varphi_J))\Big)\,\xi.$$

Le résultat est alors encore une conséquence du lemme 3.20.

Le cas $(t_0 - iT_0) = \varphi_J(x_0) - \varphi(X^{-|J|}(x_0, \nabla\varphi_J))$ est exclus par l'hypothèse $X_{-(t_0-iT_0)}(x_0, |\xi|\nabla\varphi_J) \notin \Gamma$.

Lemme 5.3'.— *Il existe $M > 0$, tel que pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe C_p tel que si $|J| \geq M$, alors pour tout $i \in \mathbf{N}$ et tout point $x \in \mathcal{U}_J(\varphi) \cap \widehat{\Omega}$, on a pour tout $t \in \mathbf{R}^+$*

$$|r \circ \rho(\cdot, t)|_p(x) \leq C_p$$

et

$$|q \circ \rho(\cdot, t)|_p(x) \leq C_p.$$

Preuve :

La preuve est identique à celle du lemme 5.3, si on utilise de plus la remarque 2.5.

5.2 Décroissance asymptotique des solutions.

Avec la relation (4.9) et les estimations de la propriété 3.23 et des lemmes 5.1, 5.2 et 5.3', comme $|r| \leq 1$ et $\int\limits_0^{T_0} |\psi'(s)|ds = 1$, on montre le

Lemme 5.4.— *Il existe $M > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbf{N}$ il existe $C_p > 0$ tel que si $|J| \geq M$ et si J s'écrit $J = rI + l$ avec $I \in \mathcal{I}$, $r \geq 1$ et $0 \leq \ell < |I|$, on a pour tout $t \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}T_0$*

$$|u_0^J(\cdot, t)|_p(\mathcal{U}_J(\varphi)) \leq C_p \lambda_I^J (1+t)^p. \tag{5.2}$$

On en déduit le

Lemme 5.5.— *Il existe $M > 0$, tel que pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe $C_p > 0$ tel que si J s'écrit $J = rI + l$, avec $I \in \mathcal{I}$, $r \geq 1$ et $0 \leq \ell < |I|$ et si $|J| \geq M$, on a pour tout $t \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}T_0$*

$$|v_0^J(\cdot, t)|_p(\mathcal{U}_J(\varphi)) \leq C_p \lambda_I^J (1+t)^p. \tag{5.3}$$

Nous allons maintenant estimer les termes u_1^J et v_1^J

Proposition 5.6.— *Il existe $M > 0$, tel que pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe $C_p > 0$ tel que pour tout $m \in \mathbf{N}$, si $|J| \geq M$ et si J s'écrit $J = rI + l$ avec $I \in \mathcal{I}$, $r \geq 1$ et $0 \leq \ell < |I|$, on a pour tout $x \in \mathcal{U}_J(\varphi)$ et tout $t \in]mT_0, (m+1)T_0[$*

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_1^J}{\Lambda \varphi_J}(\cdot, t) \right|_p (x) &\leq C_p (1+t)^{2+p}, \\ \left| \frac{v_1^J}{\Lambda \varphi_J}(\cdot, t) \right|_p (x) &\leq C_p (1+t)^{2+p}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} |u_1^J(\cdot, t)|_p(x) &\leq C_p \lambda_I^J (1+t)^{2+p}, \\ |v_1^J(\cdot, t)|_p(x) &\leq C_p \lambda_I^J (1+t)^{2+p}. \end{aligned} \tag{5.4'}$$

Preuve :

Distinguons les deux cas:

i) si $t - mT_0 \leq \frac{\varphi_J(x) - \varphi_J(X^{-1}(x, \nabla\varphi_J))}{2|\xi|}$, on a alors d'après (4.14) et (4.15)

(5.5)

$$v_1^J(x,t,\xi)$$

$$= \int_{mT_0}^{t} -ids g_{\varphi_J}(x,t-s,\xi)\Delta v_0^J(X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J),t-s,\xi)$$

$$+\int_{mT_0}^{t} ds\psi'(s-mT_0)g_{\varphi_J}(x,t-s,\xi)$$

$$\times\Big[\left(r\left(X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J),-\Xi_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J)\right)\right)$$

$$u_1^J(X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J),s,\xi)$$

$$+ L_1^J\left(r\left(X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J),\eta\right)\right)u_0^J(y)\mid_{\substack{y=X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J)\\ \eta=-|\xi|\nabla\varphi_J}}\Big]$$

$(5.5)'$

$$u_1^J(x,t,\xi)$$

$$= v_1^J(X_{-2(t-mT_0)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J),nT_0,\xi)g_{\varphi_J}$$

$$-i\int_{mT_0}^{t} g_{\varphi_J}(x,t-s,\xi)\Delta u_0^J(X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J),s,\xi)$$

ii) si $t-mT_0 > \frac{\varphi_J(x)-\varphi_J(X^{-1}(x,\nabla\varphi_J))}{2|\xi}$ on a

(5.6)

$$v_1^J(x,t,\xi)$$

$$= \frac{G_{\varphi_J}(x)}{G_{\varphi_J}(X^{-1}(x,\nabla\varphi_J(x)))}^{1/2}$$

$$\times v_1^{J'}(X^{-1}(x,t-\frac{\varphi_J(x)-\varphi_J(X^{-1}(x,\nabla\varphi_J))/}{2|\xi|},\xi))$$

$$+\int_{t-\frac{\varphi_J(x)-\varphi_J(X^{-1}(x,\nabla\varphi_J))}{2|\xi|}}^{t} -ids g_{\varphi_J}(x,t-s,\xi)$$

$$\Delta v_0^J(X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J),t-s,\xi)$$

$$+\int_{t-\frac{\varphi_J(x)-\varphi_J(X^{-1}(x,\nabla\varphi_J))}{2|\xi|}}^{t} ds\psi'(s-mT_0)g_{\varphi_J}(x,t-s,\xi)$$

$$\times\Big[\Big(r\left(X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J),-\Xi_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J)\right)\Big)$$

$$u_1^J(X_{-2(t-s)}(,|\xi|\nabla\varphi_J),s,\xi)$$

$$+L_1^J\left(r\left(X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J),\eta\right)\right)u_0^J(y,s,\xi)\mid_{\substack{y=X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J)\\ \eta=-|\xi|\nabla\varphi_J}}\Big]$$

(5.6′)
$u_1^J(x,t,\xi)$

$$= \frac{G_{\varphi_J}(x)}{G_{\varphi_J}(X^{-1}(x,\nabla\varphi_J(x)))}^{1/2}$$

$$u_1^J(X^{-1}(x,\nabla\varphi_J),t-\frac{\varphi_J(x)-\varphi_J(X^{-1}(x,\nabla\varphi_J))}{2|\xi},\xi)$$

$$-i\int_{t-\frac{\varphi_J(x)-\varphi_J(X^{-1}(x,\nabla\varphi_J))}{2|\xi}}^{t} g_{\varphi_J}\Delta u_0^J(X_{-2(t-s)}(x,|\xi|\nabla\varphi_J),s,\xi)$$

Pour estimer ces termes nous allons utiliser le lemme suivant

Lemme 5.7.— *Il existe $C>0$, tel que si $J=rI+\ell$ avec $I\in\mathcal{I}$, $r\geq 1$ et $0\leq\ell<|I|$, pour tout $x\in\mathcal{U}_J(\varphi)\cap\widehat{\Omega}$, on a*

$$|\Lambda\varphi_J(x)|\geq C\lambda_I^J.$$

Preuve :

D'après la partie $ii)$ de la proposition 3.23), il existe $M>0$ tel que si $|J|\geq M$, on a

$$|\Lambda\varphi_J(x)-a_{I,l}(x)\lambda_I^J b_I|\leq C\lambda_I^J\alpha^{|J|}.$$

Or la démonstration de l'existence des fonctions $a_{I,l}$ montre qu'il existe $C>0$ indépendant de I et ℓ tel que $a_{I,l}(x)\geq c$.

En effet, si $|J|=n$ on a

$$a_{I,l}(x)=\lim_{r\to\infty}\frac{\Lambda\varphi_{I,l}^{\infty}(x)}{\lambda_{I,i_l}}\times\ldots\times\frac{\Lambda\varphi_{I,l}^{\infty}(X^{-(rn)}(x,\nabla\varphi_{I,l}^{\infty}))}{\lambda_{I,i_l}},$$

avec

$$\frac{\Lambda\varphi_{I,l}^{\infty}(X^{-(r'n+l')}(x,\nabla\varphi_{I,l}^{\infty}))}{\lambda_{I,l'}}=(1+\gamma_{r'n+l'}(x))$$

et $|\gamma_{r'n+l'}| \leq C\alpha^{r'n+l'}$ avec C indépendant de J. Il reste maintenant à minorer indépendamment de J et de $x \in \mathcal{U}_J(\varphi)$

$$\frac{\Lambda\varphi^{\infty}_{I,l}(x)}{\lambda_{I,i_l}} \times \ldots \times \frac{\Lambda\varphi^{\infty}_{I,l}(X^{-(N_0)}(x, \nabla\varphi^{\infty}_{I,l'}))}{\lambda_{I,i'_l}},$$

où si $N_0 = rn + s$ $(0 \leq s < n)$ et si $l \geq s$, $l' = l - s$ et si $l < s$ $l' = n + l - s$. Le dénominateur se minore facilement par 1.

Étudions le numérateur: pour tout $x \in \Gamma_{i_{s+1}}$ si on note k_1 et k_2 les deux courbures principales de $\mathcal{C}_{\varphi^{\infty}_{I,s}}$ au point $X^{-1}(x, \nabla\varphi^{\infty}_{I,s})$ et d la distance de x à $X^{-1}(x, \nabla\varphi^{\infty}_{I,s})$ alors $\frac{\Lambda\varphi^{\infty}_{I,s}(x)}{\Lambda\varphi^{\infty}_{I,s}(X^{-1}(x,\nabla\varphi^{\infty}_{I,s}))} = \frac{1}{(1+dk_1)(1+dk_2)} \geq c > 0$ car les courbures principales k_1 et k_2 sont bornées indépendamment de I et s d'après la construction du lemme 3.2. On en déduit donc qu'il existe $c_0 > 0$ tel que

$$|a_{I,l}(x) \geq c_0 \prod_{n \geq N_0} (1 - \alpha^{n-N_0}) \geq c > 0.$$

Nous avons donc démontré le lemme 5.7 pour $|J| \geq M$. On conclut par un argument de compacité pour J quelconque car on a $\Lambda\varphi_J(x) > 0$ sur $\overline{(\mathcal{U}_J(\varphi) \cap \widehat{\Omega})}$ et de plus les rayons J tels que $|J| < M$ sont en nombre fini.

On montre de la même façon qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de I telle que $b_I > C$.

On déduit aisément de la proposition 3.23 ii), du lemme 5.7 et du lemme 5.4 le lemme suivant :

Lemme 5.8.— *Pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe $C_p > 0$, tel que pour tout $x \in \mathcal{U}_J(\varphi) \cap \widehat{\Omega}$ et tout $t \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}T_0$, on a*

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\Delta v_0^J}{\Lambda\varphi_J}(\cdot, t)\right|_p (x) \leq C_p(1+t)^{2+p}, \\ (5.5) \qquad &\left|\frac{L_1^J(ru_0^J)}{\Lambda\varphi_J}(\cdot, t)\right|_p (x) \leq C_p(1+t)^{2+p}. \end{aligned}$$

D'après les lemmes 5.4 et 5.7, on a

Lemme 5.9.— *Il existe $M > 0$, tel que si $|J| \geq M$ pour tout $p \in \mathbf{N}$, si J s'écrit $J = rI + l$ avec $I \in \mathcal{I}$, on a pour tout $x \in (\mathcal{U}_J(\varphi))$ et tout $t \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}T_0$,*

$$|u_0^J(\cdot, t)|_p(x) \leq C_p|\Lambda\varphi_J|(x)(1+t)^p,$$
$$|v_0^J(\cdot, t)|_p(x) \leq C_p|\Lambda\varphi_J|(x)(1+t)^p.$$

La proposition 5.6 se déduit maintenant des lemmes 5.7, 5.8 et 5.9 par une double récurrence sur $|J|$ et sur m pour $t \in]mT_0, (m+1)T_0[$.

6. Démonstration du Théorème 1.1.

Considérons les fonctions u et v définies de la manière suivante:
si $|\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$

$$
(6.1) \qquad
\begin{aligned}
u(x,t,\xi) &= \sum_{J \in \mathcal{I} \cup \{\emptyset\}} e^{-i(\varphi_J(x)|\xi| - t\xi^2)/h} (-1)^{|J|} \left(u_0^J + h u_1^J\right)(x,t,\xi),\\
v(x,t,\xi) &= \sum_{J \in \mathcal{I} \cup \{\emptyset\}} e^{-i(\varphi_J(x)|\xi| - t\xi^2)/h} (-1)^{|J|} \left(v_0^J + h v_1^J\right)(x,t,\xi).
\end{aligned}
$$

où les phases φ_J sont définies à partir de la phase $\varphi(x) = \frac{x \cdot \xi}{|\xi|}$
et $u \equiv 0$, $v \equiv 0$ si $|\xi| \notin [\alpha, \alpha^{-1}]$.

Ces sommes sont définies car localement finies d'après le lemme 4.12.

De plus u et v vérifient $u\,|_{\partial\Omega} = v\,|_{\partial\Omega} = 0$.

Définition 6.1.— *On notera, pour $u_0 \in L^2(\Omega)$*

$$
(6.2) \qquad
\begin{aligned}
Uu_0(x,t) &= -\left(\frac{1}{2\pi h}\right)^3 \int_{\substack{y \in \Omega \\ \xi \in \mathbf{R}^3}} u(x,t,\xi) e^{i(y.\xi)/h} u_0(y)\, dy d\xi,\\
Vu_0(x,t) &= -\left(\frac{1}{2\pi h}\right)^3 \int_{\substack{y \in \Omega \\ \xi \in \mathbf{R}^3}} v(x,t,\xi) e^{i(y.\xi)/h} u_0(y)\, dy d\xi.
\end{aligned}
$$

Théorème 6.2.— *Il existe $\mu > 0$ tel que les fonctions Uu_0 et Vu_0 vérifient les propriétés suivantes pour tout $m \in \mathbf{N}$, tout $t \in]mT_0, (m+1)T_0[$ et tout $x \in \Omega$:*

$$
(6.3) \qquad
\begin{aligned}
|(ih\partial_t - h^2\Delta) Uu_0(x)| &\leq C h^{\frac{3}{2}} e^{-\mu t} \|u_0\|_{L^2},\\
Uu_0|_{\partial\Omega} &= 0,\\
Uu_0|_{mT_0^+} &= Vu_0|_{mT_0^-},\\
Uu_0|_{t=0} &= Op(q) u_0,
\end{aligned}
$$

$$
(6.3)' \qquad \begin{aligned}
|(ih\partial_t - h^2\Delta)Vu_0(x) - ih\psi'(t-nT_0)R(U_0)| &\le Ch^{\frac{3}{2}}e^{-\mu t}\|u_0\|_{L^2}\,,\\
Vu_0|_{\partial\Omega} &= 0,\\
Vu_0|_{mT_0^+} &= 0,\\
Vu_0|_{t<0} &= 0.
\end{aligned}
$$

Preuve :

Les seuls points à démontrer sont les deux inégalités. Nous commençons par démontrer le lemme suivant

Lemme 6.3.— *Il existe $M>0$ tel que pour tout $p\in\mathbf{N}$ il existe $C_p>0$ tel que pour tout $x\in\Omega$, tout $\xi\in\mathbf{R}^3$ tel que $|\xi|\in[\alpha,\alpha^{-1}]$ tout $t\in\mathbf{R}^+\setminus\mathbf{N}T_0$, tout rayon primitif $I\in\mathcal{I}$ et tout $J=rI+\ell$ avec $r\ge 1$ et $0\le\ell<|I|$, tel que $|J|\ge M$, on a pour $n=0\ ;\ 1$*

$$
|u_n^J|_p(x)\le C_p\lambda_I^r(1+t)^{p+2}.
$$

Preuve :

On a

$$
(6.4) \qquad \lambda_{I,i_1}\times\ldots\times\lambda_{I,i_s}\le 1\,,
$$

le lemme 6.3 est donc une conséquence directe des lemmes 5.5 et 5.6.

Lemme 6.4.— *Il existe $\mu>0$ tel que pour tout $p\in\mathbf{N}$, il existe $C_p>0$ tel que pour $n=0;1$, tout $t\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{N}T_0$, tout $\xi\in\mathbf{R}^3$ et tout $x\in\Omega$, on a*

$$
\sum_{J\in\mathcal{I}}|u_n^J(\cdot,t)|_p(x,t)\le C_pe^{-\mu t}.
$$

Preuve : Comme u_n^J et v_n^J sont identiquement nulles en dehors de $\mathcal{U}_J(\varphi)$, on a

$$
(6.5) \qquad \begin{aligned}
\sum_{J\in\mathcal{I}\cup\{\emptyset\}}|u_n^J|_p &\le C_p \sum_{\substack{J=rI+s\in\mathcal{I}\\ u_m^{J(x,t,\xi)}\not\equiv\emptyset\ au\ voisinnage\ de\ x}} \lambda_I^r(1+t)^{2+p},\\
&\le C_p\sum_{I\,primitif}\ \sum_{\substack{r\ge 0\\ s=1,\ldots,|I|-1}}\lambda_i^{\rho(I)+r}\lambda_I^s(1+t)^{2+p},\\
&\le C_p\sum_{I\,primitif}\lambda_i^{\rho(I)}\left(\frac{1}{1-\lambda_I}\right)\sum\lambda_I^s(1+t)^{2+p},
\end{aligned}
$$

,

avec $\rho(I) = inf\{r \geq 1; \exists m = 0 \ ; \ 1 \ ; \ \exists J = rI + s; u_n^J(t,.) \not\equiv 0\}$ et la convention $\rho(I) = \infty$ si cet ensemble est vide.

En effet, tout rayon $J \in \mathcal{I}$ s'écrit $rI + s$ où $I \in \mathcal{I}$ est un rayon primitif: si $J = (j_1, \ldots, j_n)$ et si $j_n \neq j_1$ alors soit J est un rayon primitif soit il existe I et $r \geq 2$ tels que $J = rI$. Si $J = rI$ avec $I = (i_1, \cdots, i_m)$, alors on peut appliquer le même raisonnement à I car comme $J \in \mathcal{I}$, on a nécessairement $i_m \neq i_1$ (c'est l'hypothèse $j_p \neq j_{p+1}; \ \forall 1 \leq p < n$), on peut donc conclure par récurrence.

Dans le cas où $j_n = j_1$, considérons le rayon $J' = (j_1, \ldots, j_{n-1})$; on peut alors appliquer le raisonnement précédent à J'. On conclut donc que $J = rI + s\,;\ s = 0; 1$ avec I.

Revenons maintenant à la preuve du lemme 6.4. On a

$$\sum_{J \in \mathcal{I}} |u_n^J|_p(x,t) \leq C_p \sum_{\substack{I\ primitif \\ \rho(I) \neq +\infty}} \lambda_I^{\rho(I)} (1+t)^{p+2} |I|. \tag{6.6}$$

Or d'après le lemme 4.12, si $u_n^J(x,t) \neq 0$ il existe des constantes $C, C' > 0$ telles que

$$\frac{t}{C|I|} - C' \leq \rho(I) \leq \frac{Ct}{|I|} + C'. \tag{6.7}$$

Donc si $\rho(I) \neq +\infty$ alors il existe $C > 0$ et $C' > 0$ tels que $d_\gamma \leq Ct + C'$. De plus, pour toute trajectoire périodique γ on a exactement $2\text{card}(\gamma)$ rayons périodiques qui lui correspondent (suivant le point de départ du parcours et le sens choisi) et si on note d_γ la longueur de la trajectoire γ,

$$\frac{d_\gamma}{\text{diam}(\widehat{\Omega})} \leq \text{card}(\gamma) = |I| \leq \frac{d_\gamma}{d_{min}}. \tag{6.8}$$

On déduit maintenant de (6.6),(6.7) et (6.8) qu'il existe $C', C'' > 0$, $t_0 > 0$ tels que pour tout $t \geq t_0$, on a

$$\sum_{J \in \mathcal{I}} |u_n^J|_p(x,t) \leq C'' \sum_{\gamma\ primitif} \lambda_\gamma^{\frac{C't}{d_\gamma}} (1+t)^{p+4}. \tag{6.9}$$

Par hypothèse (H2), on sait qu'il existe $\beta > 0$ tel que

$$\sum_{\gamma\ primitif} \lambda_\gamma e^{\beta d_\gamma} < \infty.$$

Posons $\lambda_\gamma = C_\gamma \frac{e^{-\beta d_\gamma}}{d_\gamma}$, on obtient alors

$$\sum_{J\in I} |u_n^J|_p \leq \sum_{\gamma\, primitif} C(1+t)^{p+4} e^{-C'tβ} C_\gamma^{\frac{C't}{d_{min}}}.$$

Or $\sum C_\gamma < \infty$ donc sauf un nombre fini d'entre eux, tous les termes C_γ sont strictement inférieurs à 1. Quitte à prendre β assez proche de 0 (mais strictement positif), on peut les supposer tous inférieurs à 1. On a donc $|C_\gamma^{\frac{C't}{d_{min}}}| \leq |C_\gamma|$ soit

$$\sum_{J\in \mathcal{I}} |u_n^J|_p(x,t) \leq C(1+t)^{p+4} e^{-C'\beta t}\ \forall t \geq t_0,$$

et pour $t \leq t_0$, il existe $C_p > 0$ tel que

$$\sum_{J\in I} |u_n^J|_p(x,t) \leq C_p,$$

car on a un nombre fini de termes tous bornés. Nous avons donc démontré le lemme 6.4 pour tout $\mu < \beta$.

Nous pouvons maintenant revenir à la démonstration du théorème 6.2.

Démontrons par exemple la deuxième inégalité.

Pour tout $m \in \mathbf{N}$ et tout $t \in]mT_0, (m+1)T_0[$, on a

$$\begin{aligned}
&\Big|(ih\partial_t - h^2\Delta)Vu_0 - ih\psi'(t-nT_0)R(Uu_0)\Big| \\
&\leq \Big|\frac{h^3}{(2\pi h)^3}\int_{|\xi|\in[\alpha h^{-1},\alpha^{-1}h^{-1}]} \sum_J \big|\Delta v_1^J(x,t,\xi)\big| h^3 |\widehat{u_0}(\xi)| d\xi\Big| \\
&\quad + Ce^{-\mu t}\frac{h^3}{(2\pi h)^3}\int_{|\xi|\in[\alpha h^{-1},\alpha^{-1}h^{-1}]} h^3 \big|\widehat{u_0}(\xi)\big| d\xi, \\
&\leq Ch^{\frac{3}{2}} e^{-\mu t}\|u_0\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré le théorème 6.2.

Lemme 6.5.— *Il existe $\sigma > 0$ et $A > 0$, tels que pour tout $(u_k) \in E_{k,\rho,\alpha}$, on a*

$$\|I_1^{Ak}\ |_{h=h_k} \circ Op(q)u_k\| \leq h_k^\sigma \|u_k\|.$$

Preuve :
D'après le théorème 6.2, il est clair comme Ω est borné que

$$\|I_1^N\ |_{h=h_k} \circ Op(q) - Uu_k|_{NT_0^+}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{1/2}NT_0\|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Or
(6.10)

$$\begin{aligned}\|Uu_{0,k}\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \left(\frac{1}{2\pi h}\right)^3 \int_{\xi\in\mathbf{R}^3} |\sum_{J\in\mathcal{I}\cup\{\emptyset\}} u_0^J + hu_1^J|d\xi \int_\Omega |u_{0,k}(y)|dy,\\ &\leq Ch^{-3}e^{-\mu t}\|u_{0,k}\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

donc

$$\exists A > 0\,;\ \|Uu_0|_{AkT_0^+}\|_{L^2(\Omega)} \leq h\|u_0\|_{L^2(\Omega)}$$

(il suffit de prendre $Ch^{-4}e^{-\mu AkT_0} \leq 1$).

Le lemme 6.5 est donc démontré.

Nous avons donc démontré l'estimation (1.5) pour $s = 0$, il est clair que nous pouvons faire varier s dans $[-\varepsilon, \varepsilon]$ ce qui revient juste à prendre la première troncature en $T_0 + s$ au lieu de T_0 et à décaler la fonction ψ de s ce qui ne modifie pas les estimations.

Appendice A. Calcul h-pseudo-différentiel.

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^3$ relativement compact dans $\mathbf{R}^3$. Nous allons énoncer dans cet appendice les bases de la théorie h-pseudo-différentielle sur Ω dont nous avons besoin pour notre travail.

Définition A.1.— *Pour $n \in \mathbf{N}$, $m, k \in \mathbf{R}$ on note $S^{m,k}(\mathbf{R}^n)$ l'espace des symboles $q(x, y, \xi, h) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ définis pour $h \in]0, h_0[$ (on considère h comme un paramètre), vérifiant*

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{N}^n,\ \exists C_{\alpha,\beta,\gamma},\ \forall (x, y, \xi, h),$$

$$(A.1) \qquad |\partial_\xi^\gamma \partial_x^\alpha \partial_y^\beta q(x, y, \xi, h)| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma} h^{-k} (1 + |\xi|)^{m-|\gamma|}.$$

Pour tout $q \in S^m$ on notera $Op(q)$ l'opérateur h-pseudo-différentiel associé au symbole q par la quantification

$$(A.2) \qquad Op(q)u(x) = (2\pi h)^{-n} \int e^{i(x-y).\xi/h} q(x, y, \xi, h) u(y) dy d\xi$$

On notera $Op(q) \in L^{m,k}(\mathbf{R}^n)$

Proposition A.2.— *Soient $a_j \in S^{m_j,k_j}$; on suppose que m_j et k_j décroissent vers $-\infty$. Alors il existe $a \in S^{m_0,k_0}$ tel que supp $(a) \subset \bigcup_j$ supp m_j et tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$,*

$$a - \sum_{j \leq i} a_j \in S^{m_i,k_i}.$$

On notera

$$a \sim \sum_j a_j.$$

On rappelle les propriétés suivantes (voir C.Gérard [G] ou D.Robert [R]).

Proposition A.3.— *Soit $a \in S^{m,k}(\mathbf{R}^n)$, alors il existe $\sigma_A(x,\xi,h)$ et $\tilde{\sigma}_A(y,\xi,h)$ dans $S^{m,k}(\mathbf{R}^n)$ tels que*

$$\begin{aligned} Op(a)u(x,h) &= \left(\frac{1}{2\pi h}\right)^3 \int e^{i(x-y)\cdot\xi/h}\sigma_A(x,\xi,h)u(y)dyd\xi, \\ &= \left(\frac{1}{2\pi h}\right)^3 \int e^{i(x-y)\cdot\xi/h}\tilde{\sigma}_A(y,\xi,h)u(y)dyd\xi. \end{aligned}$$

Si $A = Op(a)$, on appelle σ_A (resp. $\tilde{\sigma}_A$) le symbole à gauche (resp. à droite) de A.

On a

$$\begin{aligned} \sigma_A(x,\xi,h) &\sim \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!} h^{|\alpha|} D_y^\alpha \partial_\xi^\alpha a(x,y,\xi,h) \mid_{y=x}, \\ \tilde{\sigma}_A(y,\xi,h) &\sim \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!} h^{|\alpha|} (-D_x)^\alpha \partial_\xi^\alpha a(x,y,\xi,h) \mid_{x=y}. \end{aligned}$$

Proposition A.4.— *Soient $a_i \in L^{m_i,k_i}(\mathbf{R}^n)$ et $A_i = Op(a_i)$ pour $i = 1;2$. Alors $A_1^* \in L^{m_1,k_1}(\mathbf{R}^n)$, $A_1 \circ A_2 \in L^{m_1+m_2,k_1+k_2}(\mathbf{R}^n)$,*

$$\sigma_{A_1^*}(x,\xi,h) \sim \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!} h^{|\alpha|} \partial_\xi D_x^\alpha \overline{\sigma}_{A_1}(x,\xi,h), \tag{A.3}$$

$$\sigma_{A_1\circ A_2}(x,\xi,h) \sim \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!} h^{|\alpha|} \partial_\xi \sigma_{A_1} D_x^\alpha \sigma_{A_2}(x,\xi,h) \tag{A.4}$$

et chaque semi-norme de

$$\sigma_{A_1^*}(x,\xi,h) - \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{1}{\alpha!} h^{|\alpha|} \partial_\xi D_x^\alpha \overline{\sigma}_{A_1}(x,\xi,h)$$

dans S^{m_1-k,k_1-k}

(respectivement de

$$\sigma_{A_1\circ A_2}(x,\xi,h) - \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{1}{\alpha!} h^{|\alpha|} \partial_\xi \sigma_{A_1} D_x^\alpha \sigma_{A_2}(x,\xi,h)$$

dans S^{m_1-k,k_1-k})
est majorée par un nombre fini de semi-normes de a_1 (respectivement de a_1 et a_2).

Proposition A.5.— *(Continuité L^2) Soit $a \in S^{0,0}(\mathbf{R}^3)$.Il existe $C > 0$ tel que*

$$\|Op(a)\|_{L(L^2(\Omega),L^2(\Omega))} \leq C.$$

De plus la norme de $Op(a)$ ne dépend que d'un nombre fini de semi-normes de a.

Nous allons maintenant définir des opérateurs h-pseudo-différentiels sur un ouvert relativement compact de $\mathbf{R}^3$, Ω. Notre quantification est simplifiée car dans tout notre calcul, nous travaillons modulo $O(h)$ et nous ne nous intéressons donc qu'aux symboles principaux.

Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini de Ω par des ouverts de $\mathbf{R}^3$ et (φ_i) une partition de l'unité associée, telle que pour tout $i \in I$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$ et vérifiant de plus la propriété suivante:

$$\forall i,\ \exists k_i \in C^\infty(U_i; \mathbf{R}^3),$$

$$(A.5) \qquad U_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset \Rightarrow U_i = k_i^{-1}(\{x_n > 0\})$$

(on note pour $y \in \mathbf{R}^3$ $y = (y', y_n)$).

On dira qu'une fonction f est tangentielle près du bord de Ω si f s'écrit sous la forme

$$f(x,\xi) = \sum_{i\in I} f_i(k_i(x), ({}^t dk_i^{-1})_{k_i(x)}(\xi)),$$

avec pour tout $i \in I$, $f_i \in S^{0,0}(\mathbf{R}^3)$ et si $U_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, le symbole f_i est indépendant de la variable η_n.

Cette définition dépend évidemment du choix du recouvrement (U_i) et des fonctions k_i.

A toute fonction f tangentielle près du bord de Ω on peut associer un opérateur borné $Op(f) : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ de la manière suivante:

Soient $\varphi_j' \in C_0^\infty(U_j)$ des fonctions identiquement égales à 1 sur le support de φ_j.
On pose

$$(A.7) \quad A_j u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi h)^3} \int_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3} e^{i(x-x').\xi/h} f_j\left(k_j(x), \left({}^t dk_j^{-1}\right)_{k_j(x)}(\xi)\right)$$

$$\varphi_j'(x')u(x')dxd\xi,$$

si $U_j \cap \partial\Omega = \emptyset$ et

$$(A.8) \qquad A_j u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi h)^2} \int_{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} e^{i(k_j(x)'-y').\eta'/h} f_j(k_j(x),\eta')$$

$$\varphi_j'(k_j^{-1}(y',k_j(x)_n))u(k_j^{-1}(y',k_j(x)_n))dy'd\eta',$$

si $U_j \cap \partial\Omega \neq \emptyset$.

On définit maintenant $Op(f)$ par la relation suivante:

$$(A.9) \qquad Op(f)(u)(x) = \sum_i \varphi_i(x) A_i(u)(x).$$

Il est clair que l'opérateur $Op(f)$ est continu sur $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ et envoie $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Théoreme A.6.— *(Inégalité de Gårding). Soit $C_0 > 0$ et soit r un symbole réel d'ordre (0,0), nul pour $|\xi| \leq C_0$ et tel que $0 \leq r$. Il existe $C > 0$ tel que l'opérateur Op(r) associé au symbole r par la quantification (A.2) vérifie l'inégalité suivante :*

$$(A.10) \qquad \forall u \in L^2(\mathbf{R}^3),\ Re\left((Op(r)u,u)\right) \geq -Ch\|u\|_{L^2}^2$$

et la constante C ne dépend que de C_0 et d'un nombre fini de semi-normes du symbole r.

Preuve :

On considère la famille de symboles (classiques) d'ordre 0 (cf. [Hö] chap XVIII), indicée par le paramètre h

$$r_h(x,\eta) = r(x,h\eta).$$

C'est une famille bornée de $S^0_{1,0}$ (notation de L.Hörmander [Hö]) pour $h \in]0,1[$.

En effet,

$$\begin{aligned} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta r_h(x,\xi)| &= h^{|\alpha|} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (r)(x,h\xi)|, \\ &\leq C_{\alpha,\beta} h^{|\alpha|}(1+h|\xi|)^{-|\alpha|}, \\ &\leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

De plus $r_h \equiv 0$ sur l'ensemble $\{|h\xi| \leq C_0\}$.

On en déduit donc d'après le théorème 18.1.15 de [HÖ] que

$$Re(Op(r_h)u,u) \geq -Ch\|u\|^2_{L^2}.$$

Remarque A.7.— *Soit $m(x)$ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^3$, strictement positive et égale à 1 au voisinage de l'infini. Modifions la structure L^2 sur $\mathbf{R}^3$ en posant*

$$(u,v)_m = \int u(x)\overline{v}(x)m(x)dx \ , \quad \|u\|_{L^2_m} = (u,u)_m.$$

On a alors

$$(Op(r)u,u)_m = (Qv,v)$$

avec $v(x) = m^{1/2}(x)u(x)$ et

$$Q = Op(m^{1/2}(x)r(x,y,h)m^{-1/2}(y)) = Op(r) + O(h)$$

d'après la proposition A.3.
On en déduit que si r vérifie les hypothèses du théorème A.6, on a aussi

$$(Op(r)u,u)_m \geq -C'h\|u\|_{L^2_m}$$

avec C' ne dépendant que de C_0, de m et d'un nombre fini de semi-normes de r.

Corollaire A.8.— *(Inégalité de Gårding pour des opérateurs tangentiels près du bord). Soit $f(x,\xi) = \sum_{i\in I}\varphi_i(x)f_i\left(k_i(x),{}^t dk_i^{-1}(\xi)\right)$ une fonction tangentielle près du bord de Ω, nulle au voisinage du bord extérieur $\partial\widehat{\Omega}$ de Ω, associée au recouvrement (U_i,φ_i,k_i), telle que il existe $C>1$ tel que*

- $0 \leq f_j \leq 1$,
- *si supp $(\varphi_i)\cap\partial\Omega = \emptyset$, on a*

  $$(A.11) \qquad f_j(y,\eta) \equiv 0 \ \forall\eta, \ |\eta| \notin [C^{-1},C],$$

- *si supp $(\varphi_i)\cap\Gamma \neq \emptyset$, il existe $g_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ telle que $g_j(y)\leq 1$ et pour tout $(y,\eta')\in\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^2$, on a $f_j(y,\eta')\leq g_j(y)$ et pour tout (y,η') tel que $C^{-1}\geq|\eta'|$, on a $f_j(y,\eta')\equiv g_j(y)$.*

On suppose de plus que la partition de l'unité $\varphi_i(x)$ utilisée pour quantifier le symbole f s'écrit $\varphi_i(x) = \psi_i^2(x)$.

Alors il existe $C' > 0$ tel que

$$\|Op(f)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (1 + Ch) \tag{A.12}$$

et

$$\|(Id - Op(f))\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (1 + C'h). \tag{A.13}$$

Preuve :
Nous allons démontrer la première inégalité.

$$A^*Au(x) = \sum_{i,j} A_j^* \varphi_j \varphi_i A_i u(x),$$

donc d'après la proposition A.3

$$\| \left(A^*Au\left(x\right), u\right) - \sum_{i,j} \left(A_j^* A_i \psi_j \psi_i u, \psi_j \psi_i u\right) \| \leq Ch\|u\|^2.$$

Il suffit donc de montrer qu' il existe $C > 0$ tel que les opérateurs A_i sont de norme L^2 inférieure à $1 + Ch$.
D'après la remarque A.7, il suffit de vérifier cette assertion en transportant les opérateurs A_i par les difféomorphismes k_i

- Si supp $(\varphi_i) \cap \Gamma \neq \emptyset$, alors d'après la proposition A.4, comme les semi-normes dans $S^{0,0}(\mathbf{R}^2_{x',y',\eta'})$ de $f_i\left(x_n, x', \eta'\right) \varphi_i' \left(k_i^{-1}(y', x_n)\right)$ sont majorées uniformément par rapport à x_n par les semi-normes dans $S^{0,0}(\mathbf{R}^3)$ de $f_i\left(x, \eta'\right)^2 \varphi_i' \left(k_i^{-1}(y', x_n)\right)^2$, on a

$$\begin{aligned}&\Bigg| \left(g_i^2\left(\varphi_i'\right)^2 u - A_i^* A_i\left(u\right), u\right) \\ &\quad - \int_{x_n \in \mathbf{R}} \Bigg(Op(g_i\left(x_n, x'\right)^2 \left(\varphi_i'(x_n, x')\right)^2 \\ &\qquad - f_i\left(x_n, x', \eta'\right)^2 \varphi_i' \left(k_i^{-1}(x', x_n)\right)^2) u, u\left(x_n, x'\right)\Bigg)_{L^2(\mathbf{R}^2)} dx_n \Bigg|, \\ &\leq \int_{x_n} Ch\|u(x_n, \cdot)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2_{x'})} \leq Ch\|u\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)}.\end{aligned}$$

Comme $g_j(x_n, x')^2 (\varphi_i')^2 (x_n, x') - (f_i(x_n, x', \eta')\varphi_i'(x_n, x'))^2 \in S^{0,0}(\mathbf{R}^2_{x',\eta'})$ vérifie les hypothèses du théorème A.7 (en dimension 2) avec des constantes C_0 indépendantes de x_n, on en déduit qu'il existe $C > 0$ telle que

$$((Id - A_i^* A_i)u, u) \geq -Ch\|u\|^2,$$

donc

$$\|A_i u\|^2 \leq (1 + Ch)\|u\|^2.$$

- Si supp $(\varphi_i) \cap \Gamma = \emptyset$, prenons $\chi(\xi)$ tel que $\chi(\xi) \equiv 1$ $\forall C^{-1} \leq |\xi| \leq C$ et $\chi \equiv 0$ $\forall |\xi| \leq \frac{C^{-1}}{2}$ où C est la constante de (A.11).

Alors $\chi(\xi) - (f_i(x, \xi))^2$ vérifie les hypothèses du théorème A.5. On a donc

$$((\chi(hD) - A_i^* A_i)u, u) \geq -Ch\|u\|^2,$$

$$\|A_i u\|^2 \leq \|\chi(hD)u\|^2 \leq (1 + Ch)\|u\|^2,$$

ce qui conclut la démonstration de la première inégalité, la deuxième se démontre de la même façon.

Corollaire A.7.— *les troncatures r et q construites au paragraphe 2 vérifient les inégalités (A.12) et (A.13).*

Remarque A.8.— *Il est essentiel d'obtenir des majorations par des termes de la forme $(1 + Ch)$, des majorations par des constantes arbitraires, a-priori plus faciles à obtenir (puisqu'elles découlent de la continuité L^2 des opérateurs h-pseudo-différentiels) ne suffiraient pas. En effet, on applique les opérateurs de troncature $\frac{1}{\log h}$ fois et on veut contrôler uniformément par rapport à h la norme.*

Appendice B. Front d'onde oscillant et propagation.

Nous allons nous intéresser dans cet appendice à la propagation des singularités h^σ. La méthode développée est celle de G.Lebeau qui consiste à transformer le système étudié pour éliminer le paramètre h_k, ce qui introduit une nouvelle variable et permet d'appliquer directement les théorèmes de propagation des singularités de Melrose et Slöstrand [MS]. Pour une présentation plus générale de la propagation h-micro-locale, nous renvoyons le lecteur à Ivrii [I].

Nous commençons par quelques définitions et propriétés:

Soient $\rho > 1$ et $0 < \alpha < \rho^{-1}$.

Définition B.1.— *On notera $B_{\rho,\alpha}$ l'espace des suites $U = (u_k(x))_{k\in\mathbf{N}}$ vérifiant*

$$\forall k \in \mathbf{N},\ u_k \in E_{k,\rho\alpha},\ \|u_k\| \leq 1.$$

Définition B.2.— *On notera $\widetilde{B}$ l'espace des suites $U = (u_k(t,x))_{k\in\mathbf{N}}$ telles que pour tout k, la fonction $u_k \in C^1(\mathbf{R}_t, L^2(\Omega))$ est C^∞ jusqu'au bord de Ω et telles que*

$$\|\partial_x^\alpha u_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\alpha h_k^{-(|\alpha|+3/2)}$$

et

$$\|u_k\|_{L^2(\Omega)} \leq 1.$$

Propriété B.3.—

Si on identifie les données initiales u_k avec les solutions du système

$$(B.1)\qquad \begin{aligned} (ih_k\partial_t - h_k^2\Delta)u_k &= 0,\\ u_k|_{\partial\Omega} &= 0,\\ u_k|_{t=0} &= u_{k,0}. \end{aligned}$$

l'ensemble B est inclus dans l'ensemble $\widetilde{B}$ et pour toute suite U de B , pour tout opérateur Q h-pseudo-différentiel tangentiel près du bord de Ω, il existe une constante $\lambda > 0$ telle que la suite $(\lambda Q|_{h=h_k} u_k)$ est dans l'ensemble $\widetilde{B}$.

Preuve
On a

$$u_k = \sum_{\nu \in F_k} u_{\nu,k} e_\nu, \ \sum u_{\nu,k}^2 \leq 1,$$

de plus

$$\|\partial_x^\alpha e_\nu\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\alpha \lambda_\nu^{|\alpha|/2}$$

et

$$\|\partial_x^\alpha Q e_\nu\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\alpha,Q} \lambda_\nu^{|\alpha|/2}$$

et

$$\mathrm{card}(F_k) \leq C h_k^{-3}$$

(c'est une conséquence directe de la formule de Weyl).

Comme l'opérateur Q est borné $L^2 \to L^2$, la propriété B.3 est démontrée.

Définition B.4.— *Pour $\rho_0 \in \widetilde{T}^*(\mathbf{R}_t \times \Omega)$, pour toute constante $\sigma > 0$ et $U \in \widetilde{B}$, on dira que ρ_0 n'est pas dans le front d'onde jusqu'au bord d'ordre σ de U s'il existe un opérateur h-pseudo-différentiel (tangentiel près du bord de Ω si $\rho_0 \in T^*(\partial\Omega)$) de symbole $p(x, \xi, h)$ ($p(x, \xi', h)$ si $\rho_0 \in T^*(\partial\Omega)$), à support compact en (x, ξ), d'ordre 0, elliptique au point ρ_0 et une fonction $\Psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ égale à 1 près du point x_0 ($\rho_0 = (x_0, \xi_0)$) tels qu'il existe $C > 0$ tel que*

$$(B.2) \qquad \|Op(p)|_{h=h_k} \Psi u_k\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \Omega)} \leq C h_k^\sigma.$$

On écrira $\rho_0 \notin OF_b^\sigma(U)$.

On notera de plus $WF_b(U) = \overline{\cup_{\sigma \in \mathbf{N}} OF_b^\sigma(U)}$.

On notera $Z = \mathbf{R} \times \mathbf{R}_t \times \Omega$ et $z = (s, x) = (s, t, y)$.

On notera $\Sigma_b = \pi(\tau = \eta^2 \ ; \ \alpha^2 \leq \tau \leq \alpha^{-2})$ où π est la projection canonique de $T^*\overline{Z}$ sur $\widetilde{T}^*Z = T^*Z \cup T^*\partial Z$.
Pour $U \in \widetilde{B}$, on pose

$$(B.3) \qquad \Theta(U)(s, x) = \sum_k e^{i h_k^{-1} s} u_k(x).$$

C'est une distribution prolongeable à $\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_y^3$.

Pour $\rho \in \widetilde{T}^*X$ soit $\theta(s, \rho)$ le point de $\widetilde{T}^*Z$

$$\theta(s, \rho) = (s, \sigma = 1, \rho).$$

On peut définir $WF_b(u)$ dans $\widetilde{T}^*Z$ selon la procédure standard.

On a alors le lemme suivant dû à G.Lebeau [L] :

Lemme B.5.— *Pour tout s_0, on a pour tout $U \in B_{\rho,\alpha}$ et pour tout point $\rho_0 \in \widetilde{T}^*X$,*

$$\rho_0 \in WF_b(U) \Leftrightarrow \theta(s_0,\rho_0) \in WF_b(\Theta(U)). \tag{B.4}$$

On en déduit que si on note g le flot généralisé sur $\widetilde{T}^*X$, le front d'onde WF_b, d'une suite $U \in B_{\rho,\alpha}$ est invariant par g.

Nous allons maintenant nous intéresser à la propagation des singularités OF_b^σ.

Théorème B.6.— *Soit $U_0 = (u_{k,0})_k$ un élément de $B_{\rho,\alpha}$ et soit $U = (u_k)$ solution des équations*

$$\begin{aligned} (ih_k\partial_t - h_k^2\Delta)u_k &= 0,\\ u_k|_{\partial\Omega} &= 0,\\ u_k|_{t=0} &= u_{k,0}. \end{aligned} \tag{B.5}$$

Alors le front d'onde d'ordre σ, $OF_b^\sigma(U)$, est invariant par g.

Preuve:
D'après le lemme B.5 et [L], chapitre 3, on sait que

$$WF_b(U) \subset \Sigma_b = \pi(\{\tau = \eta^2; \alpha^2 \le \tau \le \alpha^{-2}\}), \tag{B.6}$$

où $\pi : T^*(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^3) \to \widetilde{T}^*(\mathbf{R}_t \times \Omega)$ est la projection naturelle.

Soit $\rho_0 \in \Sigma_b \cap \{t = 0\}$. Nous allons montrer que si il existe un point $\rho_1 = g(s_0,\rho_0)$ tel que ρ_1 n'appartienne pas au front d'onde d'ordre σ de U, alors ρ_0 n'appartient pas non plus au front d'onde d'ordre σ de U. Nous nous limitons au cas le plus compliqué :

$$x_0 \in \partial\Omega;\ x_1 \in \partial\Omega;\ (\rho_0 = (x_0,\xi_0);\ \rho_1 = (x_1,\xi_1)).$$

Dans les autres cas, il suffit d'adapter la démonstration.

Quitte à intercaler un troisième point sur le flot, nous pouvons supposer que $x_0 \neq x_1$.

Nous allons appliquer la méthode de G. Lebeau [L], lemme 3.3.

Par hypothèse, il existe un opérateur h-pseudo-différentiel $E(x,hD',h)$ tangentiel près du bord de Ω, à support près de ρ_1, d'ordre 0, tel que

$e(x,\xi',h) \equiv 1$ près de ρ_1. Il existe une fonction $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$, identiquement égale à 1 près de x_1, et une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\forall k,\ \|E\varphi_1 u_k\| \leq C_1 h_k^\sigma. \tag{B.7}$$

Posons

$$H = (ih_k\partial_t - h_k^2\Delta) = Op(\eta^2 - \tau) \tag{B.8}$$

et

$$v_k = HE\varphi_1 u_k = [H, E\varphi_1]u_k, \tag{B.9}$$

alors $h_k^{-1}[H,E] = T_0 + T_1 h_k \partial_{x_n}$ avec support $(T_i) \subset$ support (E) et $\rho_1 \notin$ support (T_i).

On écrit alors $T_i = T_i^+ + T_i^0 + T_i^-$

avec $T_i^\pm(x\xi',h) \equiv 0$ pour $\mp(t-t_1) \geq -\delta$ et $g(s,\rho_0) \cap \text{support}\,(T_i^0) = \emptyset$.

On pose aussi

$$\begin{aligned} v_k &= v_k^+ + v_k^0 + v_k^- + v_k^n, \\ v_k^{\pm 0} &= h_k T^{\pm 0}\varphi_1 u_k, \\ v_k^n &= E[H,\varphi_1]u_k. \end{aligned} \tag{B.10}$$

Soient $w_k^{\pm,0,n}$ les solutions de

$$\begin{aligned} Hw_k^{\pm,0,n} &= v_k^{\pm,0,n}, \\ w_k^{\pm,0,n}|_{\partial\Omega} &= 0, \\ \text{support}\,(w_k^\pm) &\subset \pm(t-t_1) \geq \delta, \\ \text{support}\,(w_k^{o,n}) &\subset \{t > 0\}. \end{aligned} \tag{B.11}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \sup_{t\in I} \|w_k^{\pm,0}(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|T^{\pm,0}\varphi_1 u_k\|_{L^2(\Omega)}, \\ &\leq C_I h_k^\sigma \end{aligned} \tag{B.12}$$

et

$$\sup_{t\in I} \|w_k^n(t)\|_{L^2(\Omega)} = O(h_k^\infty), \tag{B.13}$$

pour tout intervalle borné I de $\mathbf{R}$, car support $(T^{\pm,n}) \subset$ support (E).

Écrivons maintenant $w_k = w_k^+ + w_k^- + w_k^0 + w_k^n$. On a alors

$$(B.14) \qquad \begin{aligned} H(u_k - E\varphi_1 u_k + w_k) &= 0, \\ (u_k - E\varphi_1 u_k + w_k)_{\partial\Omega} &= 0, \\ (u_k - E\varphi_1 u_k + w_k)|_{t=0} &= (u_k + w_k^-)|_{t=0}, \end{aligned}$$

(si on a pris $\varphi_1 \equiv 0$ au voisinage de $t = 0$, ce qui est possible car $x_1 \neq x_0$).

Or si on prend λ assez petit (indépendant de k),

$$\|\lambda(u_k - E\varphi_1 u_k + w_k)\| \leq 1.$$

de plus si l'opérateur A est à support assez proche de $\{t = 0\}$, alors

$$(B.15) \qquad A\varphi_0(u_k - E\varphi_1 u_u + w_k) = A\varphi_0 u_k + A\varphi_0 w_k^-$$

donc d'après (B.11), il suffit de montrer que $\rho_0 \notin WF_b(u_k - E\varphi_1 u_u + w_k)$, donc d'après le lemme B.5 que $\rho_1 \notin WF_b(u_k - E\varphi_1 u_u + w_k)$.

Il suffit donc de construire un opérateur tangentiel P elliptique en ρ_1, tel que

$$\|P\varphi_1[u_k - E\varphi_1 u_k + w_k]\|_{L^2} = O(h_k^\infty).$$

Cette construction est faite par G.Lebeau [L], chapitre 3.

Nous nous intéressons maintenant à un résultat de propagation avec second membre.

Lemme B.7.— *Soit (u_k) comme dans le lemme B.6, soient A un opérateur h-pseudo-différentiel d'ordre 0, $\delta_0 > 0$ et $\Psi \in C^\infty(\mathbf{R}_t)$ telle que* support$(\Psi) \subset [\delta_0, 2\delta_0]$, *soit v_k solution de*

$$(B.16) \qquad \begin{aligned} (ih_k\partial_t - h_k^2\Delta)v_k &= ih_k\Psi(t)A(u_k)(t,x), \\ v_k|_{\partial\Omega} &= 0, \\ v_k|_{t<0} &= 0, \end{aligned}$$

Alors pour tout $\rho_0 \in \widetilde{T}^*(\mathbf{R}_t \times \Omega) \cap \Sigma_b \cap \{t = T_0\}$ $(T_0 > 0)$,

$$g(s,\rho_0) \cap OF_b^\sigma(U) \cap \{t \in [\delta_0, 2\delta_0]\} = \emptyset \Rightarrow \rho_0 \notin OF_b^\sigma(V).$$

Preuve: Pour tout $s \in [0, T_0]$, il existe un opérateur h-pseudo-différentiel elliptique au point $\rho^s = (s, \tau_s, x_s, \xi_s)$ intersection de la bicaractéristique issue de ρ_0 et de $\{t = s\}$ et $\varphi_s \in C_0^\infty$ égale à un au voisinage de (s, x_s) tel que

$$\|E\varphi_s u_k\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \Omega)} \leq Ch_k^\sigma. \tag{B.17}$$

Par compacité, on en déduit qu'il existe un opérateur h-pseudo-différentiel P, elliptique au voisinage de l'intersection de la bicaractéristique issue de ρ_0 avec l'intervalle $[0, T_0]$ et une fonction $\varphi \in C_0^\infty$ égale à un au voisinage de la projection sur Z de l'intersection de la bicaractéristique issue de ρ_0 avec l'intervalle $[0, T_0]$, tels que

$$\|P\varphi u_k\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \Omega)} \leq Ch_k^\sigma. \tag{B.18}$$

On écrit $v_k = v_k^1 + v_k^2$ avec v_k^1 et v_k^2 solutions de

$$\begin{aligned}
(ih_k\partial_t - h_k^2\Delta)v_k^1 &= ih_k\Psi(t)P\varphi A(u_k)(t,x),\\
v_k^1|_{\partial\Omega} &= 0,\\
v_k^1|_{t<0} &= 0,
\end{aligned} \tag{B.19}$$

et

$$\begin{aligned}
(ih_k\partial_t - h_k^2\Delta)v_k^2 &= ih_k\Psi(t)(1 - P\varphi)A(u_k)(t,x),\\
v_k^2|_{\partial\Omega} &= 0,\\
v_k^2|_{t<0} &= 0,
\end{aligned} \tag{B.20}$$

On a alors

$$\|v_k^1(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^t |\Psi(t)|\|P\varphi A u_k\|_{L^2(\Omega)}$$

On en déduit qu'au voisinage de $[0, T_0]$, $\|v_k^1\|_{L^2} \leq Ch_k^\sigma$.

Pour conclure il suffit maintenant de montrer que $\rho_0 \notin WF_b(v_k^2)$.

Or $\Theta(U)$ et $\Theta(V)$ vérifient

$$\begin{aligned}
\partial_t\partial_s\Theta(V) &= \Psi(t)(Id - P\varphi) \circ A(\partial_s\Theta(U)),\\
\Theta(V) \mid_{\partial\Omega} &= 0,\\
\Theta(V) \mid_{t\leq 0} &= 0.
\end{aligned}$$

Le théorème de propagation avec second membre de Melrose-Sjöstrand implique alors le résultat.

Remerciements

Ce travail a constitué une thèse de l'Université d'Orsay. Je remercie Gilles Lebeau qui m'a proposé ce sujet et a encadré cette thêse pour ses nombreux conseils.

BIBLIOGRAPHIE

[BGR] C. Bardos, J.C. Guillot, J. Ralston.
La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Application à la théorie de la diffusion. Comm. Partial. Diff. Eq. **7** (1982) 905-958.

[BLR] C.Bardos, G.Lebeau, J.Rauch
Contrôle et stabilisation dans les problèmes hyperboliques.
Appendice 2 du livre de J.L.Lions mentionné ci-dessous

[G] C. Gérard.
Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes.
Suppl. Bull. SMF **116** (1988).

[Ha] A.Haraux,
Séries lacunaires et contrôle semi-interne des vibrations d'une plaque rectangulaire.
Journal de Mathématiques pures et appliquées 68,457-465.

[Hö] L. Hörmander,
The analysis of linear partial differential operators, tomes 1 et 3.
Springer Verlag Band **257** (1983) et **274** (1984).

[J] S. Jaffard,
Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 307, série1, 752-762.

[I1] M. Ikawa, Decay of solutions of the wave equation in the exterior of two convex bodies.
Osaka J. of Math. **19** (1982) 459-509.

[I1] M. Ikawa,
On the poles of the scattering matrix for two convex obstacles.
J. Math. Kyoto Univ. **27** (1987) 69-102.

[I1] M. Ikawa,
Decay of solutions of the wave equation in the exterior of several convex bodies.
Ann. Inst. Fourier **38** , 2 (1988) 113-146.

[Iv] V. Ivrii,
Semiclassical microlocal analysis and precise spectral analysis.
Prepublications de l'Ecole Polytechnique

[Le] G.Lebeau,
Contrôle de l'équation de Schrödinger.
A paraître au J. Math. pures et appliquées.

[Li] J.L.Lions,
Contrôlabilité exacte. Perturbation et stabilisation des systèmes distribués.
R.M.A. Masson (1988).

[MS] R.B. Melrose, J. Sjöstrand,
Singularities of boundary value problems II.
Comm. Pure Applied Math. **35** (1982).

[R] D. Robert
Autour de l'approximation semi-classique.
Progress in mathematics **68** (1987).

[Z] E. Zuazua,
Contrôlabilité exacte en temps arbitrairement petit de quelques modèles de plaques
Appendice 1 du livre de J.L.Lions mentionné ci-dessus