Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinage du réel

N. Burq,
Centre de Mathématiques,
URA 169 du CNRS,
Ecole Polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex, FRANCE.

Résumé

On étudie la décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur. On prouve que pour des données assez régulières, l'énergie décroit au moins comme l'inverse du logarithme du temps. On obtient ce résultat comme conséquence de l'existence d'un voisinage de l'axe réel exponentiellement petit ne contenant pas de résonance pour le problème de Dirichlet.

Abstract

We study the decay of the local energy for the wave equation in an exterior domain. We prove that for regular data, the energy decays at least as fast as the inverse of the logarithm of the time. We obtain this result as a consequence of the existence of an exponentialy small neighbourhood of the real axis containing no scattering pole

On se propose dans cet article d'estimer le taux de décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes. Plus précisément on considère $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ un obstacle compact de $\mathbb{R}^d$ à frontière de classe C^∞ et de complémentaire dans $\mathbb{R}^d$ connexe, et $A = (a^{i,j}) \in C_0^\infty\left(\overline{\Theta^c}\right)^{d^2}$, une matrice à coefficients réels, uniformément définie positive, égale à l'identité en dehors d'un compact. On note $\Delta = \sum_{i,j} \partial_i a^{i,j} \partial_j$ le "Laplacien" associé à cette matrice. Soit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -i\mathrm{Id} \\ -i\Delta & 0 \end{pmatrix}$$

défini sur l'espace de Hilbert $H = \widetilde{H_0^1}(\Theta^c) \times L^2(\Theta^c)$, où $\widetilde{H_0^1}(\Theta^c)$ est le complété Hilbertien de $C_0^\infty(\Theta^c)$ pour la norme $\|u\|_1^2 = \int_{\Theta^c} |\nabla u|^2$ (on note $\nabla u = \sum_j \left(A^{1/2}\right)_{i,j} \partial_j u$), avec pour domaine $D(B) = \{(u_0, u_1) \in H;\ \Delta u_0 \in L^2,\ u_1 \in \widetilde{H_0^1}(\Theta^c)\}$.

Pour $U_0 \in H$, on note $U(t,x) = e^{itB}U_0$, la solution du système (avec $\Omega = \overline{\Theta}^c$)

$$\begin{cases} (\partial_t - iB)\, U = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_t \qquad U \in H \\ U\,|_{t=0} = U_0 \in H \end{cases} \tag{0.1}$$

donnée par exemple par le théorème de Hille Yosida et pour $R_1, R_2 > 0$, U_0 à support dans $B(0, R_1)$, on définit son énergie locale à l'instant t par

$$E_{\text{loc}}(U,t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega \cap B(0,R_2)} |\nabla u_0|^2(t) + |u_1|^2(t)\,.$$

Elle est bornée par l'énergie initiale.

Depuis les travaux de P. D. Lax et R. S. Phillips [LP67] (voir aussi [LP89]), on sait que pour toutes données initiales (U_0) à support compact, l'énergie locale de la solution de l'équation des ondes associée à ces données $(e^{itB}U_0)$ tend vers 0 quand le temps tend vers l'infini. Les résultats de R. Melrose et J. Sjöstrand [MS78] (voir aussi les travaux de C. S. Morawetz [Mor61, Mor75]) impliquent (dans le cas où $A = \text{Id}$) que, si l'obstacle est non captif, cette convergence à lieu exponentiellement vite, en dimension impaire d'espace et polynomialement en dimensions paires, par rapport à l'énergie initiale. Dans le cas où l'obstacle est captif, on sait (voir J. Ralston [Ral69]) qu'il n'existe pas de taux uniforme de décroissance par rapport à l'énergie initiale. Néanmoins, un argument simple de compacité (voir H. Walker [Wal77]) montre que pour des données initiales à support dans $B(0, R_1)$ il existe toujours un taux uniforme de décroissance de l'énergie locale par rapport à toute norme sobolev plus forte que l'énergie initiale (l'énergie étant la norme H^1, par rapport à toute norme $H^s, s > 1$). Le seul résultat précis dans cette direction que nous connaissons est celui où l'obstacle est constitué de deux convexes stricts ou d'un nombre fini de convexes stricts "assez" éloignés les uns des autres. Dans ce cas, M. Ikawa [Ika82a, Ika82b] montre que le taux est exponentiel par rapport à des normes Sobolev assez grandes. Le premier résultat que nous obtenons dans cet article est que le taux est toujours au moins logarithmique.

Théorème 1.— *Pour tout $R_1, R_2 > 0$ et tout $k > 0$ il existe $C > 0$ tel que pour toutes données initiales $(u_0, u_1) \in D\left(B^k\right)$ à supports dans $\left(B(0,R_1) \cap \overline{\Theta^c}\right)$, si on note $U = e^{itB}(u_0, u_1)$, on a*

$$E_{loc}(U(t))^{1/2} = \left(\int_{B(0,R_2)\cap\Theta^c} |\nabla U_0|^2(t) + |U_1|^2(t)\right)^{1/2} \leq \tfrac{C}{\log(2+t)^k} \|\,(u_0,u_1)\,\|_{D\left(B^k\right)}.$$

Nous allons obtenir ce résultat comme conséquence d'un autre résultat sur l'existence d'une région de la forme $\{\lambda \in \mathbb{C};\ \text{Im}\lambda < Ce^{-\varepsilon|\lambda|}\}$, ne contenant aucun pôle de diffusion (scattering).

On définit la résolvante sortante pour le Laplacien avec conditions de Dirichlet dans Θ^c par la relation

$$R(\xi)\, f = \int_0^{+\infty} e^{-it\xi} v(t)\, f d\xi, \tag{0.2}$$

où $v(t)$ est le propagateur des ondes, c'est à dire $v(t)(f)$ est égale à la première composante de $\left(e^{itB}\left(\begin{smallmatrix}0\\f\end{smallmatrix}\right)\right)$. Nous donnerons au paragraphe 2 une définition équivalente de la condition "sortante".

On vérifie facilement que $R(\xi)$ vérifie le système

$$\left\{\begin{array}{rl}(\Delta+\lambda^2)R(\xi)f & = f\\ R(\xi)f\mid_{\partial\Theta} & = 0.\end{array}\right. \tag{0.3}$$

Il est classique que cet opérateur, analytique dans $\mathrm{Im}\xi<0$ possède un prolongement méromorphe comme opérateur de $L^2_{\mathrm{comp}}(\Theta^c)$ dans $H^1_{0,\mathrm{loc}}(\Theta^c)$ dans $\mathbb{C}$ si d est impair et dans le revêtement simplement connexe de $\mathbb{C}^*$ si d est pair et que ses pôles coïncident avec ceux de l'opérateur $\chi_1 R(\lambda)\chi_2$ si les fonctions $\chi_i\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ sont égales à 1 au voisinage de Θ et du support de $Id-A$. Si l'obstacle est non captif, il est connu, depuis les travaux de R. Melrose et J. Sjöstrand [MS78] que la résolvante ne possède qu'un nombre fini de pôles sous toute courbe $\mathrm{Im}\lambda\leq C\log(|\mathrm{Re}\lambda|)$ (C arbitraire). Si $A=Id$ et Θ est la réunion de deux convexes stricts, alors M. Ikawa [Ika82a, Ika82b, Ika88] et C. Gérard [Gér88] ont montré qu'il existe $C>0$ tel qu'il n'y a qu'un nombre fini de pôles dans une région de la forme $\mathrm{Im}\lambda<C$. Enfin, M. Ikawa [Ika85] a montré que dans le cas de deux obstacles convexes (non stricts), il peut exister une suite de pôles convergeant vers l'axe réel et un exemple explicite de Ralston [Ral71] montre (dans un cas où $A\neq Id$ et Θ est une boule de $\mathbb{R}^2$) que cette convergence peut avoir lieu exponentiellement vite, c'est à dire qu'il exhibe un exemple où on a une suite de pôles vérifiant $0<\mathrm{Im}\lambda_n\leq e^{-C\mathrm{Re}|\lambda_n|}$, $\mathrm{Re}\lambda_n\to+\infty$ avec $C>0$. Le deuxième résultat que nous démontrons dans cet article est que cette dernière situation est la pire qui puisse arriver.

Théorème 2.— *Il existe $c_1,c_2,\varepsilon_0>0$ tels que la résolvante sortante ne possède pas de pôles dans la région*

$$\{\lambda\in\mathbb{C}\ ;\ Im\lambda<\varepsilon_0 e^{-c_2|Re\lambda|}\}\cap\{|\lambda|>c_1\}. \tag{0.4}$$

Plus précisément, il existe χ_1 et χ_2, comme précédemment et $C,c_3>0$ tels que dans la région précédente, la résolvante tronquée vérifie

$$\|\chi_1 R(\lambda)\chi_2\|_{\mathcal{L}\left(L^2;H^1_0\right)}\leq Ce^{+c_3|Re\lambda|}. \tag{0.5}$$

Remarque 0.1.— *La démonstration montrera en fait qu'on peut choisir les supports de χ_1 et χ_2 arbitrairement grands, quitte à augmenter la constante C*

Remarque 0.2.— *L'exemple de Ralston montre que le théorème 2 est optimal. Il est certainement aussi possible, dans le cas où il existe une trajectoire captive de type elliptique, en construisant des quasi-modes localisés le long de cette trajectoire, de montrer que ce résultat est aussi optimal même si on impose $A=Id$. Par ailleurs, comme les pôles de diffusion sont (en dimension impaire) les valeurs propres du générateur infinitésimal de Lax et Philipps, qui donnent une borne supérieure sur le taux de décroissance, l'exemple de Ralston montre que le théorème 1 est aussi optimal.*

REMARQUE 0.3.— *Pour des raisons de clarté et de simplicité de l'exposition nous avons limité notre approche à un cas modèle. La méthode présentée dans cet article permettrait d'obtenir le même type de résultat dans le cas d'un Laplacien associé à une métrique Riemanienne égale à la métrique Euclidienne en dehors d'un compact. On pourrait également s'intéresser au cas d'un potentiel à support compact (s'il ne produit pas de spectre négatif dans le cas du théorème 1). Plus généralement la méthode présentée permettrait d'aborder l'étude d'un opérateur d'ordre 2 autoadjoint positif égal à* $-\Delta$ *en dehors d'un compact et le cas de conditions au bord différentes (Neuman en particulier, voir [LR95b]).*

Pour démontrer le théorème 2, nous reprenons une idée de G. Lebeau et L. Robbiano (voir [LR95b]), consistant à utiliser les inégalités de Carleman pour démontrer un résultat sur le spectre du Laplacien dans un ouvert borné avec conditions absorbantes sur une partie (non vide) du bord. Intuitivement, notre situation est assez proche de la leur, puisqu'elle revient en quelque sorte à imposer des conditions parfaitement absorbantes sur une sphère à l'infini.

L'idée de notre démonstration est d'utiliser la méthode de Lebeau et Robbiano pour obtenir des estimations sur les solutions de l'équation de Helmholtz, $\Delta u + \lambda^2 u = f$ avec f à support compact dans une zone bornée (une boule qui contient l'obstacle et la perturbation du Laplacien) où on a à priori peu d'information. Le coût à payer pour l'obtention de ces estimations est qu'on doit utiliser des fonctions phases vérifiant les hypothèses d'hypoellipticité de Hörmander et qui croissent donc très vite quand on s'éloigne du bord de l'obstacle. On montre ensuite, que, quitte à agrandir la boule, on peut stabiliser le comportement de ces fonctions, puis on utilise le caractère sortant de la solution u pour conclure.

Le fait que le théorème 2 implique le théorème 1 est essentiellement démontré par G. Lebeau dans [Leb96]. Néanmoins, nous améliorons légèrement son résultat en le rendant optimal.

Le plan de l'article est le suivant : dans une première partie nous rappelons des résultats de G. Lebeau et L. Robbiano sur les inégalités de Carleman sur des domaines à bords, dans la deuxième partie nous démontrons des résultats sur le comportement asymptotique des fonctions de Hankel, dans une troisième partie nous construisons des phases de Carleman et nous démontrons le théorème 2. Enfin dans une quatrième partie nous démontrons un résultat abstrait (le théorème 3) qui permet de montrer que le théorème 1 implique le théorème 2. Dans un appendice, nous construisons des fonctions de Morse adaptées à notre problème et nous rassemblons quelques résultats certainement déjà connus concernant l'absence de résonance sur le réel et le comportement de la résolvante au voisinage de 0.

Nous tenons à remercier C. Bardos, F. Laudenbach, C. Margerin, L. Robbiano et tout particulièrement G. Lebeau pour les nombreuses discussions que nous avons eues sur cet article

1 Inégalités de Carleman

Nous rappelons dans cette partie des inégalités de Carleman démontrées pour l'opérateur de Helmholtz avec conditions de Dirichlet. Ces résultats sont essentiellement contenus dans un article de G. Lebeau et L. Robbiano [LR95a] quoique démontrés par ces auteurs pour l'opérateur de Laplace.

Soient Ω un ouvert borné, de classe C^∞ et $P = -h^2\Delta - 1$, l'opérateur de Helmholtz, de symbole principal semi-classique $p(x,\xi) = {}^t\xi A(x)\xi - 1$ défini pour $h \in]0, h_0]$. Pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, on définit l'opérateur $P_\varphi = e^{\varphi/h} P e^{-\varphi/h}$ de symbole principal $p_\varphi = p(x, \xi + i\varphi'_x)$.

On supposera par la suite que la fonction φ vérifie les hypothèses d'hypoellipticité de Hörmander :

$$\exists c > 0; \forall x \in \overline{\Omega}\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ p_\varphi(x,\xi) = 0 \Rightarrow \{\mathrm{Re} p_\varphi, \mathrm{Im} p_\varphi\} \geq c \tag{1.1}$$

où on a noté $\{f, g\} = \sum_i \partial_{\xi_i} f \partial_{x_i} g - \partial_{x_i} f \partial_{\xi_i} g$ le crochet de Poisson de deux fonctions f et g,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} \mid_{\partial\Omega} \neq 0 \text{ et } \nabla\varphi \neq 0 \text{ dans } \overline{\Omega}. \tag{1.2}$$

Proposition 1.1.— *Soit φ vérifiant les relations (1.2) et (1.1). Il existe $C > 0$, $h_1 > 0$, tels que pour tout $0 < h < h_1$ et tout $g \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ on a*

$$\int_\Omega |P_\varphi(g)|^2 + h \int_{\partial\Omega} (|g \mid_{\partial\Omega}|^2 + |h\partial_{x'} g \mid_{\partial\Omega}|^2 + |h\partial_n g \mid_{\partial\Omega}|^2) \geq Ch \int_\Omega (|g|^2 + |h\nabla g|^2) \tag{1.3}$$

(x' désigne la variable tangentielle au bord et $\frac{\partial}{\partial n}$ la normale extérieure au bord)

Proposition 1.2.— *Soient φ vérifiant les relations (1.2) et (1.1), et $\Gamma \subset \partial\Omega$ une réunion de composantes connexes du bord de Ω. Si on suppose que $\frac{\partial\varphi}{\partial n} < 0$ sur Γ alors il existe $c > 0$, $h_1 > 0$, tels que pour tout $0 < h < h_1$ et tout $g \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ vérifiant $g \mid_\Gamma = 0$, on a*

$$\begin{aligned}\int_\Omega |P_\varphi(g)|^2 + h \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma} (|g \mid_{\partial\Omega}|^2 + |h\partial_{x'} g \mid_{\partial\Omega}|^2 + |h\partial_n g \mid_{\partial\Omega}|^2) \\ \geq Ch \int_\Omega (|g|^2 + |h\nabla g|^2).\end{aligned} \tag{1.4}$$

Les analogues de ces deux propositions sont démontrés par G. Lebeau et L. Robbiano, dans le cas où $P = -h^2\Delta$ dans [LR95a] (propositions 3.1 et 3.2). La démonstration dans notre cas ($P = -h^2\Delta - 1$) est la même, mot pour mot. Nous allons, pour être complets en donner les grandes lignes.

Il est classique que les estimations du type (1.3) et (1.4) démontrées localement se recollent et que ces estimations sont vérifiées à l'intérieur. On peut donc supposer pour la démonstration que la fonction g est à support dans un petit voisinage du bord. Il est également clair que les hypothèses et les conclusions sont invariantes par changement de coordonnées. On peut donc aussi supposer, si on choisit un système de coordonnées géodésiques pour le Laplacien que l'ouvert Ω est de la forme $\Omega = \{(x', x_d) \in \mathbb{R}^d;\ x_d > 0\}$, que g appartient à $C_0^\infty(K)$, l'ensemble des fonctions C^∞ jusqu'au bord de $\mathbb{R}^d_+$, supportées par $K = \{x \in \mathbb{R}^d; |x| \leq D\}$ et que l'opérateur P est, modulo un opérateur d'ordre inférieur, de la forme $P = -h^2\partial^2_{x_d} + h^2 R(x_d, x', \frac{\partial_{x'}}{i}) - 1$ où R est un opérateur différentiel d'ordre 2 (tangentiel). Nous rappelons comment G. Lebeau et L. Robbiano procèdent pour démontrer les estimations (1.3) et (1.4) dans ce cadre. Nous renvoyons le lecteur à l'article [LR95a], paragraphe 3, pages 347 à 351 pour les détails techniques.

On notera S^j l'espace des symboles tangentiels $a(x, \xi', h)$ de classe C^∞ en x au voisinage de K et $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$, vérifiant, pour $0 < h < h_0$

$$\forall \alpha, \beta,\ \exists C\ \forall x, \xi', h,\ |\partial_x^\alpha \partial_{\xi'}^\beta a| \leq (1 + |\xi'|)^{j-|\beta|} \tag{1.5}$$

et on notera $S^j_{\mathrm{cl}} \subset S^j$ le sous espace des symboles qui possèdent des développements classiques :

$$\exists a_n \in S^{j-n},\ n \in \mathbb{N}; a - \textstyle\sum_{n=0}^{N-1} h^n a_n \in S^{j-N}.$$

On notera $\mathcal{E}^j$ l'espace des opérateurs pseudodifférentiels tangentiels, $A = Op(a)$; $a \in S^j_{cl}$ définis par

$$Op(a)\, u(x_d, x') = (2\pi h)^{1-d} \textstyle\int e^{i(x'-y')\xi'/h} a(x_d, x', \xi', h)\, u(x_d, y')\, dy' d\xi'.$$

On notera aussi $\sigma(a) = a_0$ le symbole principal de A et $\mathcal{D}^j \subset \mathcal{E}$ le sous espace des opérateurs différentiels, polynomiaux en h.

On pose $\widetilde{Q}_1 = \frac{P_\varphi - P_\varphi^*}{2i} = \mathrm{Im} P_\varphi$ et $\widetilde{Q}_2 = \frac{P_\varphi + P_\varphi^*}{2} = \mathrm{Re} P_\varphi$, de symboles principaux $q_1 = \mathrm{Im} p_\varphi$ et $q_2 = \mathrm{Re} p_\varphi$. On note, pour $f, g \in C_0^\infty(K)$

$$(f, g) = \textstyle\int_{\mathbb{R}^d_+} f\overline{g} dx, \qquad (f, g)_0 = \textstyle\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f\,|_{x_d=0}\ \overline{g}\,|_{x_d=0}\, dx'$$

et $\|f\|$, $\|f\|_0$ les normes associées.

On a

$$\begin{aligned} \|P_\varphi f\|^2 &= \|\widetilde{Q}_2 f\|^2 + \|\widetilde{Q}_1 f\|^2 + i\left(\widetilde{Q}_1 f, \widetilde{Q}_2 f\right) - i\left(\widetilde{Q}_2 f, \widetilde{Q}_1 f\right) \\ &= \|\widetilde{Q}_2 f\|^2 + \|\widetilde{Q}_1 f\|^2 + i\left(\left[\widetilde{Q}_2, \widetilde{Q}_1\right] f, f\right) + h\beta(f), \end{aligned} \tag{1.6}$$

avec (si $D_x = \frac{h\partial_x}{i}$)

$$\begin{aligned} \beta(f) &= \left(\widetilde{Q}_1 f, D_{x_d} f\right)_0 + \left(\left(D_{x_d}\widetilde{Q}_1 - 2\varphi'_{x_d}\widetilde{Q}_2 f\right), f\right)_0 \\ &= \left(2\varphi'_{x_d} D_{x_d} f, D_{x_d} f\right)_0 + \left(A_1 f, D_{x_d} f\right)_0 + \left(A_1' D_{x_d} f, f\right)_0 + \left(A_2 f, f\right)_0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

où les opérateurs A_i appartiennent à l'espace $\mathcal{D}^i$.

Le symbole principal de l'opérateur $i\left[\widetilde{Q}_2,\widetilde{Q}_1\right]$ est $h\{\mathrm{Re}p_\varphi,\mathrm{Im}p_\varphi\}$ et l'inégalité de Gårding permet de déduire de (1.6) (voir [LR95b], paragraphe 3, lemme 2) que

$$\|P_\varphi f\|^2-\mathrm{Re}h\beta\,(f)\geq ch\,(\|f\|^2+\|h\nabla f\|^2)+h^2\mathrm{Re}\,(D_{x_d}f+G_1f,G_0f)_0\,,$$

où $G_0\in\mathcal{E}^0$ et $G_1\in\mathcal{D}^1$, ce qui montre les propositions 1.1 et 1.2 si on remarque que sous les hypothèses de cette dernière proposition, si $\Gamma=\{x_d=0\}$, le seul terme non nul dans (1.7) est $\left(2\varphi'_{x_d}D_{x_d}f,D_{x_d}f\right)_0\geq 0$ et que $G_0f\mid_{x_d=0}=0$.

REMARQUE 1.3.— *Si la fonction g est supportée à l'extérieur d'un voisinage (fixe) d'une partie du bord de Ω, Γ_0, alors il est clair que la proposition 1.2 reste vraie même si on ne suppose plus $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\neq 0$ sur Γ_0, puisque la démonstration est locale et qu'il n'y a rien à démontrer au voisinage de Γ_0.*

2 Asymptotique des fonctions de Hankel

On étudie, dans cette partie les solutions sortantes de l'équation $(\Delta+\lambda^2)\,u=0$ (Δ désigne ici le Laplacien standard), à l'extérieur d'une boule $B\,(0,R_1)$. Rappelons d'abord la définition de telles solutions : on se place dans le système de coordonnées polaires où on note σ la variable sur la sphère S^{d-1} et on décompose toute solution de l'équation $(\Delta+\lambda^2)\,u=0$ à l'extérieur d'une boule de rayon $R>0$ en harmoniques sphériques, c'est à dire sous la forme

$$u=\textstyle\sum_\nu u_\nu(r)g_\nu(\sigma), \tag{2.1}$$

où (g_ν,ν) désigne la base orthonormale de $L^2\left(S^{d-1}\right)$ formée des fonctions propres pour l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère associées aux valeurs propres ν^2. Les fonction u_ν sont alors solutions de l'équation

$$\left[\lambda^{-2}\left(\partial_r^2+\tfrac{d-1}{r}\partial_r\right)+\left(1-\tfrac{\nu^2}{\lambda^2r^2}\right)\right]u_\nu\,(r)=0 \text{ pour } r>R_1 \tag{2.2}$$

soit

$$u_\nu\,(r)=C_\nu r^{1-\frac{d}{2}}h_\mu\,(\lambda r)+C'_\nu r^{1-\frac{d}{2}}H_\mu\,(\lambda r)\,,\ \text{avec } \mu=\sqrt{\nu^2+\left(\tfrac{d}{2}-1\right)^2}, \tag{2.3}$$

où on a noté h_μ la fonction de Hankel d'ordre μ

$$h_\mu\,(r)=\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty-i\pi}e^{r\sinh t-\mu t}dt \tag{2.4}$$

et

$$H_\mu\,(r)=\overline{h_\mu\,(\overline{r})}. \tag{2.5}$$

DÉFINITION 2.1. *On dit que la fonction u, solution de l'équation $(\Delta+\lambda^2)\,u=0$ à l'extérieur d'une boule de rayon $R>0$ est sortante si et seulement si dans la décomposition précédente on a $C'_\nu=0$ pour tout ν.*

Il est clair que cette définition ne dépend pas du choix de R (la condition sortante est une condition sur le comportement à l'infini des solutions de l'équation de Helmoltz). On vérifie aussi facilement que pour $r \to +\infty$ $h_\mu(r) \sim Cr^{-1/2}e^{-ir}$ de telle sorte que pour $u \in H^1_{\text{loc}}$ la condition sortante implique d'une part pour $Im\lambda < 0$ que la fonction u est exponentiellement décroissante et d'autre part pour λ réel

$$|u(r,\sigma)| \leq \frac{C}{r^{\frac{d-1}{2}}}, \qquad |\partial_r u + i\lambda u|(r,\sigma)| \leq \frac{C}{r^{\frac{d+1}{2}}}$$

(ces relations sont les conditions de radiation de Sommerfeld à l'infini).

On rappelle enfin, pour faire un lien entre résolvante sortante et solutions sortantes de l'équation de Helmoltz, que pour $g \in L^2_{\text{comp}}$ et tout λ qui n'est pas un pôle, la fonction $R(\lambda)g$ est l'unique solution sortante du système (0.3).

Nous allons démontrer le résultat suivant:

Proposition 2.2.— *Pour tous $R_2 > R_1 > 0$, il existe $C, C', \eta, \lambda_0 > 0$ tels que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}; |Im\lambda| \leq 1,\ |\lambda| \geq \lambda_0$ et toute solution sortante de l'équation $(\Delta + \lambda^2)\, u = 0$ à l'extérieur de la boule $B\,(0, R_1)$ on a*

$$\text{(2.6)} \quad \int_{r=R_2} -Im\,(\partial_r u \overline{u})\, d\sigma$$
$$\geq |\lambda| C \int_{r=R_2} |u|^2 + |\lambda^{-1}\nabla u|^2 d\sigma - C' e^{-\eta|\lambda|} \int_{r=R_1} |u|^2 + |\lambda^{-1}\nabla u|^2 d\sigma.$$

Remarque 2.3.— *Ce résultat montre que la condition à l'infini "sortante" se traduit à distance finie par une condition de type absorbant sur le cercle de rayon R_2, modulo un terme d'erreur donné par l'intégrale sur le cercle de rayon R_1. L'hypothèse sortante intervient donc de manière essentielle dans la démonstration de ce résultat.*

L'idée de cette démonstration est d'établir que l'inégalité (2.6) est vraie dans la zone hyperbolique du cercle $C\,(0, R_2)$, sans le terme correctif donné par l'intégrale sur le cercle $C\,(0, R_1)$ et de montrer en majorant l'effet tunnel entre $C\,(0, R_1)$ et une géodésique de la zone glancing du cercle $C\,(0, R_2)$ (donc tangente à ce cercle, donc qui ne rencontre pas le cercle $C\,(0, R_1)$), que la contribution de la zone glancing peut etre absorbée dans le terme correctif. Enfin, il ne reste plus qu'à montrer qu'il en est de même de la contribution de la zone elliptique. En fait la démonstration est simplifiée par la possibilité de se ramener à des calculs effectifs sur le comportement asymptotique des fonctions de Hankel, ce que nous ferons. Ces calculs effectifs sont standard et connus dans la littérature sous le nom d'estimations de Debye (voir par exemple [Wat44]). Néanmoins, pour être complets, nous en donnerons une démonstration, d'autant plus que nous n'utilisons qu'une version faible, plus facile à démontrer.

Dans toute la suite, on considérera $\mathrm{Re}\,(\lambda)$ comme un grand paramètre (dans une optique d'utilisation du théorème de la phase stationnaire) et $\mathrm{Im}\,(\lambda)$ comme un paramètre variant dans un compact. On va, par exemple démontrer la proposition 2.2, pour $\mathrm{Re}\lambda > 0$.

Le symbole principal de l'opérateur de (2.2) est $-\mathrm{Re}\,(\lambda)^{-2}\,\rho^2 + 1 - \frac{\nu^2}{\mathrm{Re}\lambda^2 r^2}$ (on néglige $\mathrm{Im}\lambda$). La zone hyperbolique de l'équation (2.2) est donnée par $1 - \frac{\nu^2}{\mathrm{Re}\lambda^2 r^2} > 0$, la zone Glancing par $1 - \frac{\nu^2}{\mathrm{Re}\lambda^2 r^2} = 0$ et la zone elliptique par $1 - \frac{\nu^2}{\mathrm{Re}\lambda^2 r^2} < 0$.

Lemme 2.4 **(estimation hyperbolique)**.— *Pour tout $a<1$, il existe $C,\lambda_0>0$ tels que pour tout $|\lambda|>\lambda_0$ et tout $\nu^2<(Re\lambda)^2\,a^2R_2^2$, $|Im\lambda|\leq 1$*

$$\left|Im\left(\partial_r u_\nu\left(R_2\right)\overline{u_\nu\left(R_2\right)}\right)+\lambda\sqrt{1-\tfrac{\nu^2}{\lambda^2R_2^2}}\left|u_\nu\left(R_2\right)\right|^2\right|\leq C(Re\lambda)^{1/2}|u_\nu(R_2)|^2.$$

Compte tenu de (2.3), il suffit de montrer sous les hypothèses $\mu^2<(\mathrm{Re}\lambda)^2\,a^2r^2$ et $Re\lambda>\lambda_0$, $|\mathrm{Im}\lambda|\leq 1$,

$$\left|\mathrm{Im}\left(\frac{h'_\mu(\lambda r)}{h_\mu(\lambda r)}\right)+\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\lambda^2r^2}}\right|\leq C|\lambda|^{-1/2},\tag{2.7}$$

$$\left|\mathrm{Re}\left(\frac{h'_\mu(\lambda r)}{h_\mu(\lambda r)}\right)\right|\leq C|\lambda|^{-1/2}.\tag{2.8}$$

On a

$$h_\mu\left(\lambda r\right)=\int_{-\infty}^0 e^{\lambda r\sinh t-\mu t}dt+\int_0^{+\infty}e^{i\mu\pi-\lambda r\sinh t-\mu t}-i\int_0^\pi e^{-i(\lambda r\sin\theta-\mu\theta)}d\theta.\tag{2.9}$$

Sous les hypothèses du lemme, les deux premières intégrales sont majorées (uniformément) par $C|\mathrm{Re}\lambda|^{-1}$ puisqu'elles n'ont (uniformément) pas de point critique et qu'on peut donc intégrer par parties.
Pour étudier la dernière, on écrit, si $\theta_0=\arccos\left(\frac{\mu}{\mathrm{Re}\lambda r}\right)$, $\theta_0\in\left[\alpha,\pi-\alpha\right],\alpha>0$, $\sin\theta=\sin\theta_0+(\theta-\theta_0)\cos\left(\theta_0\right)+\left(\theta-\theta_0\right)^2 g_{\theta_0}\left(\theta\right)$, avec des bornes C^∞ sur g_{θ_0} uniformes par rapport à $\theta_0\in[\alpha,\pi-\alpha]$, ce qui permet d'obtenir par le théorème de la phase stationnaire (par rapport à $\mathrm{Re}\lambda$),

$$\left|h_\mu\left(\lambda r\right)+ie^{-i\mathrm{Re}\lambda r\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\mathrm{Re}(\lambda)^2r^2}}+i\mu\theta_0+\mathrm{Im}\lambda r\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\mathrm{Re}(\lambda)^2r^2}}}\times\sqrt{\frac{1}{\mathrm{Re}\lambda r}}\sqrt{\frac{2i\pi}{-\sin\theta_0}}\right|\leq C|\mathrm{Re}\lambda|^{-1}.$$

De la même façon, on obtient

$$\left|h'_\mu\left(\lambda r\right)+\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\mathrm{Re}(\lambda)^2r^2}}e^{-i\lambda r\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\mathrm{Re}(\lambda)^2r^2}}+i\mu\theta_0}\times\sqrt{\frac{1}{\mathrm{Re}\lambda r}}\sqrt{\frac{2i\pi}{-\sin\theta_0}}\right|\leq C|\mathrm{Re}\lambda|^{-1}.$$

On en déduit les relations (2.7) et (2.8) et donc le lemme 2.4.
Lemme 2.5 **(estimation elliptique)**.— *Pour tout $a<1$, tout $0<R_1<R_2$, il existe $C,\eta,\lambda_0>0$ tels que pour tout $|\lambda|>\lambda_0$ et tout $\nu^2>(Re\lambda)^2\,a^{-2}R_1^2$, $|Im\lambda|\leq 1$*

$$\begin{aligned}|u_\nu\left(R_2\right)|&\leq Ce^{-\eta\nu}|u_\nu(R_1)|\\|u'_\nu\left(R_2\right)|&\leq Ce^{-\eta\nu}|u_\nu(R_1)|.\end{aligned}$$

Compte tenu de (2.3), il suffit de montrer sous les hypothèses $\mu^2 > (\mathrm{Re}\lambda)^2 a^{-2} R_1^2$ et $|\lambda| \geq \lambda_0$, $|\mathrm{Im}\lambda| \leq 1$

$$
\begin{aligned}
|h_\mu(\lambda R_2)| &\leq C e^{-\eta\mu} |h_\mu(\lambda R_1)| \\
\left|h'_\mu(\lambda R_2)\right| &\leq C e^{-\eta\mu} |h_\mu(\lambda R_1)|.
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

On a

$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-\lambda r \sinh t - \mu t}\right| + \left|\int_0^{\pi} e^{-i(\lambda r \sin\theta - \mu\theta)} d\theta\right| \leq C. \tag{2.11}$$

Pour $\mu^2 \leq \mathrm{Re}\lambda^2 r^2 a^{-2}$, on a

$$\left|\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda r \sinh t - \mu t} dt\right| \leq C. \tag{2.12}$$

Enfin, une étude locale de la fonction $e^{\lambda r \sinh t - \mu t}$ au voisinage de t_0, le point critique négatif de la phase donné par l'équation $\cosh(t_0) = \frac{\mu}{\mathrm{Re}\lambda r}$ ($t_0 = -\mathrm{Argch}\left(\frac{\mu}{\mathrm{Re}\lambda r}\right)$), montre que pour $\mu^2 > (\mathrm{Re}\lambda)^2 r^2 a^{-2}$, on a

$$\left|\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda r \sinh t - \mu t}\right| \geq \frac{C}{\mu} e^{\mathrm{Re}\lambda r \sinh t_0 - \mu t_0} \tag{2.13}$$

et, pour $\mu^2 \geq (\mathrm{Re}\lambda)^2 r^2$

$$\left|\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda r \sinh t - \mu t}\right| \leq C e^{\mathrm{Re}\lambda r \sinh t_0 - \mu t_0} \tag{2.14}$$

D'après (2.11) et (2.13) au point R_1, on a avec $t_1 = -\mathrm{Argch}\left(\frac{\mu}{\mathrm{Re}\lambda R_1}\right)$

$$|h_\mu(\lambda R_1)| \geq \frac{C}{\mu} e^{\mu(\tanh t_1 - t_1)} - C \tag{2.15}$$

et d'après (2.11) et (2.14) ou (2.12) au point R_2, on obtient

$$|h_\mu(\lambda R_2)| \leq \begin{cases} C e^{\mu(\tanh t_2 - t_2)}, \text{ si } (\mathrm{Re}\lambda)^2 R_2^2 \leq \mu^2 \text{ et } t_2 = -\mathrm{Argch}\left(\frac{\mu}{\mathrm{Re}\lambda R_2}\right) \\ C \text{ sinon.} \end{cases} \tag{2.16}$$

De (2.15) et (2.16) on déduit la première inégalité de (2.10), la seconde se démontre de la même manière.

Pour démontrer la proposition 2.2, on choisit $a = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$ (ce qui implique que si $\mu^2 > \mathrm{Re}(\lambda)^2 R_2^2 a^2$, alors on a aussi $\mu^2 > \mathrm{Re}(\lambda)^2 R_1^2 a^{-2}$). D'après le lemme 2.4

$$-\mathrm{Im} \sum_{\nu^2 \leq \mathrm{Re}(\lambda)^2 a^2 R_2^2} \partial_r u_\nu(R_2) \overline{u_\nu}(R_2) \geq C|\lambda| \sum_{\nu^2 \leq \mathrm{Re}(\lambda)^2 a^2 R_2^2} |u_\nu(R_2)|^2$$

et d'après le lemme 2.5, pour $\nu^2 > \mathrm{Re}\,(\lambda)^2\, a^2 R_2^2$,

$$|u_\nu\,(R_2)|^2\left(1+\nu^2\right)+\left|\lambda^{-1}\partial_r u_\nu\,(R_2)\right|^2 \leq C\left(1+\nu^2\right)e^{-2\eta\nu}\,|u_\nu\,(R_1)|^2\,, \tag{2.17}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\int_{r=R_2} -\mathrm{Im}\,(\partial_r u\overline{u})\, d\sigma &= \textstyle\sum_\nu -\mathrm{Im}\partial_r u_\nu\,(R_2)\,\overline{u_\nu}\,(R_2)\\ &\geq C|\lambda|\textstyle\sum_{\nu^2\leq \mathrm{Re}(\lambda)^2a^2R_2^2}|u_\nu|^2\,(R_2)\\ &\qquad -|\lambda|\textstyle\sum_{\nu^2> \mathrm{Re}(\lambda)^2a^2R_2^2}|u_\nu\,(R_2)\,|^2+|\lambda^{-1}\partial_r u_\nu\,(R_2)\,|^2\\ &\geq C|\lambda|\textstyle\sum_\nu\left(1+\frac{\nu^2}{|\lambda^2|}\right)|u_\nu\,(R_2)|^2\\ &\qquad -C'|\lambda|\textstyle\sum_{\nu^2> \mathrm{Re}(\lambda)^2a^2R_2^2}\left(1+\frac{\nu^2}{|\lambda|^2}\right)|u_\nu\,(R_2)\,|^2+|\lambda^{-1}\partial_r u_\nu\,(R_2)\,|^2\end{aligned}$$

et d'après la formule de Weyl et (2.17),

$$\int_{r=R_2} -\mathrm{Im}\,(\partial_r u\overline{u})\, d\sigma \geq C|\lambda|\int_{r=R_2}|u|^2+|\lambda^{-1}\nabla_\sigma u|^2 - C'e^{-2\varepsilon\mathrm{Re}\lambda}\int_{r=R_1}|u|^2+|\lambda^{-1}\nabla_{\sigma,r}u|^2.$$

De la même façon, on démontre

$$\int_{r=R_2} -\mathrm{Im}\,(\partial_r u\overline{u})\, d\sigma \geq C|\lambda|\int_{r=R_2}|\lambda^{-1}\partial_r u|^2 - C'e^{-2\varepsilon\mathrm{Re}\lambda}\int_{r=R_1}|u|^2+|\lambda^{-1}\nabla_{\sigma,r}u|^2,$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 2.2

3 Démonstration du théorème 2

3.1 Construction de phases

L'objet de ce paragraphe est de construire deux phases φ_1 et φ_2 vérifiant les conditions d'hypoellipticité de Hörmander sauf sur un nombre fini de boules, telles que d'une part, là où l'une ne vérifie pas ces hypothèses, l'autre les vérifie et lui est strictement supérieure et d'autre part, loin de l'obstacle (à l'extérieur d'une boule $B\,(0,R_1)$), les fonctions φ_1 et φ_2 coïncident, sont radiales et vérifient $\varphi'\,(r)=\kappa$, $\kappa>0$ arbitrairement petit. Le point qui sera crucial par la suite est que la constante R_1 est indépendante du choix de $\kappa>0$.

3.1.1 Construction sur un domaine borné

Soit $R>0$ tel que $\Theta\subset B\,(0,R)$ et $A=Id$ sur $B\,(0,R)^c$. On commence par construire les phases sur $B\,(0,R)$. Pour cela, on rappelle le résultat suivant démontré en appendice.

Proposition 3.1.— *Soit $R > 0$ tel que $\Theta \subset B(0,R)$. Il existe deux fonctions $\psi_{1,2} \in C^\infty\left(\overline{\Theta^c \cap B(0,R)}\right)$ vérifiant $\partial_n \psi_i \mid_{\partial\Theta} < 0$ (∂_n désigne la normale extérieure à Θ^c), n'ayant que des points critiques non dégénérés, telles que sur $C(0,R)$, le cercle de centre O et de rayon R, on a $\nabla\psi_i \cdot x > 0$ et aux points où $\nabla\psi_i = 0$ (qui sont en nombre fini), on a $\nabla\psi_{i+1} \neq 0$ et $\psi_{i+1} > \psi_i$ (par convention $\psi_3 = \psi_1$). Enfin, les fonctions ψ_i sont radiales et coïncident au voisinage de $C(0,R)$.*

Il existe donc un nombre fini de points $x_{i,j} \in \Theta^c; i = 1,2; j = 1,\cdots,N_i$, une constante $\varepsilon > 0$ tels que $B(x_{i,j}, 2\varepsilon) \subset \Theta^c \cap B(0,R)$, $B(x_{1,j}, 2\varepsilon) \cap B(x_{2,j}, 2\varepsilon) = \emptyset$ et sur $B(x_{i,j}, 2\varepsilon)$, on a $\psi_i < \psi_{i+1}$ ($\psi_3 = \psi_1$).

On notera $\Omega_i = \Theta^c \cap B(0,R) \cap (\cup_j B(x_{i,j}, \varepsilon))^c$. On cherche φ_i sous la forme $e^{\beta\psi_i}$, avec β grand. Pour vérifier que pour $\beta > 0$ assez grand, les fonctions φ_i vérifient la relation (1.1) sur Ω_i il suffit de vérifier que si Ω est borné et si $\psi \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ vérifie sur Ω, $|\nabla\psi| \geq c > 0$ alors, pour $\beta > 0$ assez grand, on a $\{\mathrm{Re}p_\varphi, \mathrm{Im}p_\varphi\} > c' > 0$ sur Ω.

On a $\varphi' = \beta e^{\beta\psi}\psi'$, $\varphi'' = e^{\beta\psi}\left(\beta^2\psi'\ {}^t\psi' + \beta\psi''\right)$ et si $p_\varphi = 0$ alors ${}^t\xi A\varphi' = 0$ et ${}^t\xi A\xi = {}^t\varphi A\varphi + 1$ donc $|\xi| \leq C\beta e^{\beta\psi}$

$$\begin{aligned}
\{\mathrm{Re}p_\varphi, \mathrm{Im}p_\varphi\} &= 4\ {}^t\xi A\varphi'' A\xi + 4\ {}^t\varphi' A\varphi'' A\varphi' + 4A'(\varphi', \varphi', A\varphi') \\
&\quad + 4A'(\varphi', \xi, A\xi) - 4A'(\xi, \xi, A\varphi') \\
&= 4e^{\beta\psi}\beta\ {}^t\xi A\psi'' A\xi + 4e^{3\beta\psi}\left(\beta^4\ {}^t(\psi' A\psi')^2 + \beta^3\ {}^t\psi' A\psi'' A\psi'\right) \\
&\quad + 4e^{3\beta\psi}\beta^3 A'(\psi', \psi', A\psi') + 4\beta e^{\beta\psi} A'(A\xi, \psi', \xi) - 4\beta e^{\beta\psi} A'(\xi, \xi, A\psi') \\
&= 4e^{3\beta\psi}\left(\beta^4\ ({}^t\psi' A\psi')^2 + \mathcal{O}(\beta^3)\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat, puisque $\psi' \neq 0$ et $A >> cId$, $c > 0$. On remarque aussi, puisque $\frac{\partial\psi}{\partial r} > 0$ sur $\{|x| = R\}$ qu'il en est de même de φ_i et que la construction impose aussi $\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} > 0$ sur $\{|x| = R\}$.

3.1.2 Stabilisation des phases à l'extérieur d'une boule

Il reste à prolonger ces phases sur $B(0,R)^c \cap B(0,R_1)$ (R_1 restant à fixer). Puisque les phases $\varphi_{1,2}$ coïncident et sont radiales pour $R - \alpha < |x| \leq R$ ($\alpha > 0$ assez petit), on cherche ce prolongement sous la forme d'une fonction radiale. On passe pour cela en coordonnées polaires, (r, ρ, θ, η) où θ est la variable angulaire sur S^{d-1}. Dans ce système, on a $p = \rho^2 + \frac{\eta^2}{r^2} - 1$ et $p_\varphi = \rho^2 - (\varphi')^2 + \frac{\eta^2}{r^2} - 1 + 2i\rho\varphi'$. On impose que $\varphi'(r) > 0$. On a donc $p_\varphi = 0 \Rightarrow \rho = 0$ et $\frac{\eta^2}{r^2} = 1 + \varphi'^2$ et sur l'ensemble $p_\varphi = 0$ on a

$$\begin{aligned}
\{\mathrm{Re}p_\varphi, \mathrm{Im}p_\varphi\} &= 4\varphi'\varphi''\varphi' + 4\frac{\eta^2}{r^3}\varphi' \\
&= 4\varphi'\left(\varphi''\varphi' + \frac{1+\varphi'^2}{r}\right).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

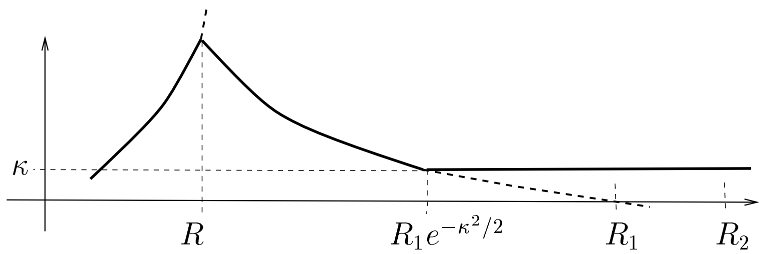
Or la solution, k de l'équation $k'k + \frac{1}{r} = 0$ vérifiant $k(R) = \varphi'(R)$ est

$$k = \sqrt{\left(\varphi'\left(R\right)\right)^2 - 2\log\left(\frac{r}{R}\right)}.$$

Soit $R_1 = Re^{\varphi'^2(R)/2}$. Nous insistons sur le fait que R_1 ne dépend que de la valeur des phases φ_i sur l'ensemble $r = R$ ce qui implique que R_1 ne dépend que de la matrice A et de la géométrie de l'obstacle Θ. Soit $\eta > 0$ vérifiant les conclusions de la proposition 2.2 (pour le choix de $R_2 = R_1 + 1$). Dans toute la suite, les constantes R_1, R_2 et η sont fixées .

Soit $0 < \kappa < \eta/2$. On définit la fonction $\widetilde{\varphi}'$ par

$$\widetilde{\varphi}'\left(r\right) = \begin{cases} \varphi'\left(r\right) & \text{si } R - \alpha < r < R \\ k(r) & \text{si } R \leq r < R_1 e^{-\kappa^2/2} \\ \kappa & \text{si } R_1 e^{-\kappa^2/2} \leq r < R_2. \end{cases} \tag{3.2}$$



Graphe de la fonction $\widetilde{\varphi}'$.

Soient $H \in C^\infty(\mathbb{R})$ égale à 0 pour $r < R - \alpha/2$ et égale à 1 pour $r > R - \alpha/3$, $0 \leq H \leq 1$, $H' \geq 0$ et $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, positive, d'intégrale égale à 1 et à support dans $]0,1[$. On note $h_\eta(r) = \frac{1}{\eta}h\left(\frac{r}{\eta}\right)$ et $\varphi'_\eta = (1 - H)\widetilde{\varphi}' + h_\eta * (H\widetilde{\varphi}')$. La fonction $\varphi'_\eta(r)$ converge uniformément vers $\widetilde{\varphi}'(r)$ quand η tend vers 0^+ et

$$\tfrac{d}{dr}\left(\varphi'_\eta\right)(r) = \left(-H'\right)\widetilde{\varphi}' + h_\eta * \left(H'\widetilde{\varphi}'\right) + \left(1 - H\right)\widetilde{\varphi}'' + h_\eta * \left(H\widetilde{\varphi}''\right)$$

or, pour $r > R$, on a $\widetilde{\varphi}'' \geq \frac{-1}{r\widetilde{\varphi}'}$ et pour $R - \alpha/3 \leq r \leq R$, la fonction φ ayant été construite de telle façon que $\varphi'' >> 1$, on a aussi $\widetilde{\varphi}'' \geq \frac{-1}{r\widetilde{\varphi}'}$. On en déduit, quitte à diminuer $\alpha > 0$

$$\tfrac{d}{dr}\left(\varphi'_\eta\right)(r) \geq \left(-H'\right)\widetilde{\varphi}' + h_\eta * \left(H'\widetilde{\varphi}'\right) + \left(1 - H\right)\tfrac{-1}{r\widetilde{\varphi}'} + h_\eta * \left(H \times \tfrac{-1}{r\widetilde{\varphi}'}\right).$$

Le terme de droite converge uniformément vers $\frac{-1}{r\widetilde{\varphi}'}$, donc il existe $c > 0$ tel que si on choisit $\eta > 0$ assez petit, on a $\varphi''_\eta\varphi'_\eta + \frac{1+\varphi'^2_\eta}{r} \geq c > 0$, pour $r \in [R - \alpha, R_2]$. Cette construction permet ainsi, si on prend $\eta > 0$ assez petit, de prolonger les phases φ_i à $\Theta^c \cap B(0, R_2)$, avec $R_2 = R_1 + 1$ et d'assurer que les phases ainsi prolongées vérifient les hypothèses d'hypoellipticité de Hörmander, sont radiales sur $B(0, R_2) \setminus B(0, R_1)$ et vérifient $\varphi'_i(r) = \kappa$; $R_1 \leq r \leq R_2$.

3.2 Démonstration du théorème 2

Soient f à support dans $\Omega \cap B(0, R_1)$ et u solution sortante de l'équation de Helmholtz, avec conditions de Dirichlet sur $\partial\Omega$. Soient χ_i, $i = 1;\ 2$, à support dans $\left(\cup_j B(x_{i,j}, \varepsilon)\right)^c$, égales à 1 dans $\left(\cup_j B(x_{i,j}, 2\varepsilon)\right)^c$. D'après la proposition 1.2 et la remarque 1.3 appliquées à la fonction $e^{\varphi_i/h}\chi_i u$ et à $\Omega_i = (\Omega \cap (\cup_j B(x_{i,j}, \varepsilon))^c) \cap B(0, R_2)$, on a, si on note $h = \left(\mathrm{Re}(\lambda^2)\right)^{-1/2}$ et $g_i = h^2\left([\Delta, \chi_i]u + \chi_i f - i\mathrm{Im}(\lambda^2)\chi_i u\right)$

$$(3.3)\quad \int_{\Omega_i} e^{\frac{2\varphi}{h}}|g_i|^2 + h\int_{r=R_2}\left(|u|^2 + |h\nabla_x u|^2\right)|_{r=R_2}\, e^{\frac{2\varphi(R_2)}{h}} \\ \geq Ch\int_{\Omega_i}\left(|\chi_i u|^2 + |h\nabla\chi_i u|^2\right)e^{\frac{2\varphi}{h}}.$$

On somme les deux inégalités obtenues pour $i = 1; 2$ et en utilisant que $\varphi_i > \varphi_{i+1}$ sur l'ensemble $\cup_j B(x_{i+1,j}, 2\varepsilon)$ (et donc sur le support de $\nabla\chi_{i+1}$), on obtient, pour $0 < h < h_0$, h_0 assez petit

$$(3.4)\quad \int_{\Omega\cap B(0,R_2)}\left(e^{2\varphi_1/h} + e^{2\varphi_2/h}\right)h^4\left(|f|^2 + |\mathrm{Im}(\lambda^2)\,u|^2\right) \\ + h\int_{r=R_2}\left(e^{2\varphi_1/h} + e^{2\varphi_2/h}\right)\left(|u|^2 + |h\nabla u|^2\right)|_{r=R_2} \\ \geq Ch\int_{\Omega\cap B(0,R_2)}\left(e^{2\varphi_1/h} + e^{2\varphi_2/h}\right)\left(|u|^2 + |h\nabla u|^2\right),$$

ce qui implique, d'après la proposition 2.2

$$(3.5)\quad \int_{\Omega\cap B(0,R_2)}\left(e^{2\varphi_1/h} + e^{2\varphi_2/h}\right)h^4\left(|f|^2 + |\mathrm{Im}(\lambda^2)\,u|^2\right) \\ + h^2\left(e^{2\varphi_1(R_2)/h} + e^{2\varphi_2(R_2)/h}\right)\left|\int_{r=R_2}\mathrm{Im}(\partial_r u\overline{u})\right| \\ \geq Ch\int_{\Omega\cap B(0,R_2)}\left(e^{2\varphi_1/h} + e^{2\varphi_2/h}\right)\left(|u|^2 + |h\nabla u|^2\right) \\ - \left(e^{(2\varphi_1(R_2)-\eta)/h} + e^{(2\varphi_2(R_2)-\eta)/h}\right)\int_{r=R_1}|u|^2 + |h\nabla u|^2.$$

Or, d'après les théorèmes de trace,

$$(3.6)\quad \int_{\Omega\cap B(0,R_2)}\left(|u|^2 + |h\nabla u|^2\right)\left(e^{2\varphi_1/h} + e^{2\varphi_2/h}\right) \\ \geq C\int_{\Omega\cap B(0,R_2)}\left|u\left(e^{\varphi_1/h} + e^{\varphi_2/h}\right)\right|^2 + \left|h\nabla\left(u\left(e^{\varphi_1/h} + e^{\varphi_2/h}\right)\right)\right|^2 \\ \geq Ch^2\int_{r=R_1}|u|^2\left(e^{2\varphi_1(R_1)/h} + e^{2\varphi_2(R_1)/h}\right).$$

Comme au voisinage de l'ensemble $\{|x| = R_1\}$, on a $\Delta u = -\lambda^2 u$, on a aussi

$$(3.7)\quad \int_{\Omega\cap B(0,R_2)}\left(|u|^2 + |h\nabla u|^2\right)\left(e^{2\varphi_1/h} + e^{2\varphi_2/h}\right) \\ \geq Ch^2\int_{r=R_1}|h\nabla u|^2\left(e^{2\varphi_1(R_1)/h} + e^{2\varphi_2(R_1)/h}\right)$$

donc, puisqu'on a choisi $\kappa < \eta/2$ (et donc $2\varphi(R_1) > 2\varphi(R_2) - \eta$), on obtient, d'après (3.5) et (3.6) et (3.7)

$$\begin{aligned}(3.8)\quad \int_{\Omega\cap B(0,R_2)} \left(e^{2\varphi_1/h} + e^{2\varphi_2/h}\right) h^4 \left(|f|^2 + |\mathrm{Im}\,(\lambda^2)\,|^2|u|^2\right) \\ + h^2\left(e^{2\varphi_1(R_2)/h} + e^{2\varphi_2(R_2)/h}\right)\left|\int_{r=R_2} \mathrm{Im}\,(\partial_r u\overline{u})\right| \\ \geq Ch\int_{\Omega\cap B(0,R_2)} \left(e^{2\varphi_1/h} + e^{2\varphi_2/h}\right)\left(|u|^2 + |h\nabla u|^2\right).\end{aligned}$$

Or

$$(3.9)\qquad \begin{aligned}\int_{\Omega\cap B(0,R_2)} f\overline{u} &= \int_{\Omega\cap B(0,R_2)} (\Delta + \lambda^2)\, u\overline{u} \\ &= \int_{r=R_2} \partial_r u\overline{u} + \int_{\Omega\cap B(0,R_2)} \lambda^2|u|^2 - |\nabla u|^2.\end{aligned}$$

En prenant la partie imaginaire de (3.9), on obtient

$$(3.10)\qquad \mathrm{Im}\int_{r=R_2} \partial_r u\overline{u} = \int_{\Omega\cap B(0,R_2)} \left(\mathrm{Im} f\overline{u} - \mathrm{Im}\,(\lambda^2)\,|u|^2\right).$$

On obtient finalement d'après (3.8) et (3.10),

$$(3.11)\qquad e^{C/h}\left[\int_{\Omega\cap B(0,R_2)} h^4|f|^2 + h^2|\mathrm{Im}\,(\lambda^2)\,u|^2 + h^2\,|f\overline{u}|\right] \geq Ch\int_{\Omega}\left(|u|^2 + |h\nabla u|^2\right).$$

Si $\mathrm{Im}\lambda < |\mathrm{Re}\lambda|^{-2}e^{-\frac{C}{4}|\mathrm{Re}\lambda|}$, on a aussi $e^{C/h}|\mathrm{Im}\,(\lambda^2)\,|^2 \leq 2$ ce qui permet d'absorber le terme en $|\mathrm{Im}\,(\lambda^2)\,u|^2$ par le terme de droite. En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz on obtient alors

$$\begin{aligned}(3.12)\quad e^{C/h}\left(\int_{\Omega\cap B(0,R_2)} h^4|f|^2 + \left(\int_{\Omega\cap B(0,R_2)} h^4\,|f|^2\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega\cap B(0,R_2)} |u|^2\right)^{1/2}\right) \\ \geq Ch\int_{\Omega\cap B(0,R_2)}\left(|u|^2 + |h\nabla u|^2\right).\end{aligned}$$

Le terme $\left(\int |u|^2\right)^{1/2}$ de gauche peut être absorbé par le terme quadratique, $\left(\int |u|^2\right)$ de droite, ce qui donne, si $\mathrm{Im}\lambda < |\mathrm{Re}\lambda|^{-2}e^{-\frac{C}{4}|\mathrm{Re}\lambda|}$

$$(3.13)\qquad e^{C'/h}\int_{\Omega\cap B(0,R_2)} |f|^2 \geq C\int_{\Omega\cap B(0,R_2)}\left(|u|^2 + |h\nabla u|^2\right).$$

Le théorème 2 est donc démontré.

4 Décroissance de l'énergie locale

Nous allons dans ce paragraphe démontrer dans un cadre abstrait que le théorème 2 implique le théorème 1. Nous nous inspirerons pour cela largement des méthodes de [Leb96].

On considère un espace de Hilbert H, et B un opérateur non borné, fermé sur H, de domaine $D(B)$ dense dans H. On notera dans la suite $\|U\|$ la norme de $U \in H$ dans l'espace H. On suppose que $A = iB$ est maximal dissipatif, c'est à dire que pour tout $u \in D(A)$ on a $\mathrm{Re}\,(Au, u)_H \leq 0$ et $\mathrm{Id} - A$ est surjectif de $D(A)$ dans H.

On rappelle qu'alors pour tout λ de partie réelle strictement positive, $\lambda \mathrm{Id} - A$ est bijectif continu de $D(A)$ muni de sa norme naturelle, $\|u\|^2_{D(A)} = \|u\|^2 + \|Au\|^2$ dans H et

$$\| (\lambda \mathrm{Id} - A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(H)} \leq |\mathrm{Re}\lambda|^{-1}. \tag{4.1}$$

On rappelle aussi que le théorème de Hille Yosida permet de définir, pour $k \in \mathbb{N}$ et $s \geq 0$ l'opérateur $\frac{e^{sA}}{(1-A)^k} = \frac{e^{isB}}{(1-iB)^k}$. On note $R(\xi) = (\xi \mathrm{Id} - B)^{-1}$ la résolvante de B qui est donc définie et holomorphe par rapport à ξ pour $\mathrm{Im}\xi < 0$.

On considère $\chi_j, j = 1; 2$ deux opérateurs bornés sur H et on suppose qu'il existe $\varepsilon, a, D > 0$ tels que l'opérateur $\chi_1 R(\xi) \chi_2$ possède un prolongement analytique comme fonction à valeurs opérateur continu dans H dans la région située sous le contour Γ défini par

$$\begin{aligned}\Gamma &= \left[0, D + i\varepsilon e^{-aD}\right] \cup \left[0, -D + i\varepsilon e^{-aD}\right] \cup \{\xi = \rho + i\varepsilon e^{-a|\rho|}\ ; |\rho| \geq D\} \\ &= \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3.\end{aligned}$$

(on note $[A, B] = \{z \in \mathbb{C}; z = \theta A + (1-\theta)B;\ \theta \in [0,1]\}$). On suppose aussi que dans cette région il existe $C, A > 0$ tels que

$$\left\| \chi_1 R(\xi) \chi_2 \right\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C e^{A|\mathrm{Re}\xi|}. \tag{4.2}$$

On a alors le résultat suivant

Théorème 3.— *Sous les hypothèses précédentes, pour tout entier $k > 1$ il existe C_k tel que pour tout $t > 1$*

$$\left\| \chi_1 \frac{e^{itB}}{(1-iB)^k} \chi_2 \right\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{C_k}{\log(t)^k} \tag{4.3}$$

Avant de démontrer ce résultat, vérifions qu'il implique le théorème 1. On considère B l'opérateur

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -i\mathrm{Id} \\ -i\Delta & 0 \end{pmatrix}$$

défini sur l'espace de Hilbert $H = \widetilde{H^1_0}(\Theta^c) \times L^2(\Theta^c)$ (voir l'introduction) et χ_i deux opérateurs de multiplication par des fonctions C^∞, à supports compacts. D'après le théorème 2 et les résultats de l'appendice B, ces opérateurs vérifient les hypothèses du théorème 3. De plus, pour $\chi_3 \in C^\infty_0(\mathbb{R}^d)$, l'opérateur $[\chi_3, B]$ est borné sur H et si $\chi_3 \equiv 1$ sur le support de χ_2, on a aussi $[\chi_2, B] = \chi_3[\chi_2, B]\chi_3$. On en déduit que pour tout entier $k > 1$ il existe C_k tel que

$$\left\| \chi_1 e^{itB} \chi_2 \frac{1}{(1-iB)^k} \right\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{C_k}{\log(t)^k}, \tag{4.4}$$

soit

$$\left\|\chi_1 e^{itB}\chi_2\right\|_{\mathcal{L}(D(B^k);H)} \leq \frac{C_k}{\log(t)^k} \tag{4.5}$$

ce qui est le théorème 1 pour tout entier $k > 1$. Le cas général s'en déduit par interpolation, puisque l'espace interpolé complexe d'ordre s entre $D(B^0) = H$ et $D(B^k)$ est par définition $D(B^{ks})$ et, pour $\chi_1, \chi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t)$, l'opérateur $\chi_1 e^{itB}\chi_2$ est borné par C de $D(B^0)$ dans lui même et par $\frac{C}{(\log t)^k}$ de $D(B^k)$ dans $D(B^0)$ d'après ce que nous venons de démontrer; le théorème d'interpolation de Calderón et Lions (voir par exemple [RS75], volume II, théorème IX.20) implique que, pour $s \in [0,1]$, ce même opérateur est borné par $\frac{C}{(\log t)^{sk}}$ de $D(B^{sk})$ dans $D(B^0)$, d'où le théorème 1 pour tout réel $k > 0$.
REMARQUE 4.1.— *Le théorème 3 permet, en choisissant $\chi_1 = \chi_2 = Id$, d'améliorer (en les rendant optimales) les versions temporelles des résultats de G. Lebeau et L. Robbiano [Leb96, LR95b] sur la décroissance de l'énergie pour les équations d'ondes amorties dans un domaine borné, en utilisant simplement leurs résultats d'estimation de la résolvante.*

La suite de cette section est consacrée à la démonstration du théorème 3. On fixe donc l'entier $k > 1$. On notera, pour $U_0 \in H$, $V = e^{itB}\chi_2 U_0$. On rappelle que pour tout $s \geq 0$

$$\|V(s)\| \leq \|U_0\|. \tag{4.6}$$

On a pour $t > 0$ et $x \in H$ l'identité suivante:

$$e^{itB}\frac{1}{(1-iB)^k}x = \frac{1}{2i\pi}\int_{\xi=-\infty-i/2}^{+\infty-i/2} e^{it\xi}\frac{1}{(1-i\xi)^k}\frac{1}{\xi-B}d\xi x. \tag{4.7}$$

En effet, si on note I_k le terme de droite, l'intégrale qui le définit est absolument convergente et

$$(\partial_t - iB)I_k = \frac{1}{2\pi}\int_{\xi=-\infty-i/2}^{+\infty-i/2} e^{it\xi}\frac{1}{(1-i\xi)^k}x d\xi = 0 \tag{4.8}$$

$$I_k\mid_{t=0} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\xi=-\infty-i/2}^{+\infty-i/2}\frac{1}{(1-i\xi)^k}\frac{1}{\xi-B}x d\xi. \tag{4.9}$$

Compte tenu de l'holomorphie de $R(\xi)$, on peut déformer cette dernière intégrale sur le contour $\mathrm{Im}\xi = -C$. On obtient

$$I\mid_{t=0} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\xi=-\infty-iC}^{+\infty-iC}\frac{1}{(1-i\xi)^k}\frac{1}{\xi-B}d\xi x - \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{1}{(1-i\xi)^k}\frac{1}{\xi-B}d\xi x. \tag{4.10}$$

où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre le point $-i$ et de rayon $1/2$. Faisant tendre C vers l'infini, compte tenu de (4.1), on montre que la contribution du contour $\mathrm{Im}\xi = -C$ est nulle et on vérifie facilement par récurence sur k que celle de $\mathcal{C}$ est bien $\frac{1}{(1-iB)^k}x$.

L'idée de la démonstration du théorème 3 (due à G. Lebeau) consiste à couper dans (4.7) l'intégrale en deux parties, la première correspondant aux "basses" fréquences, $|\xi| \leq \log(t)$ pour laquelle on déforme dans le complexe en utilisant l'hypothèse de prolongement analytique de la résolvante et l'autre partie, correspondant aux "hautes" fréquences, $|\xi| \geq \log(t)$ pour laquelle on utilise simplement que $|\frac{1}{(1-i\xi)^k}| \leq \frac{1}{(\log t)^k}$. Pour faire ce découpage et néanmoins pouvoir encore utiliser des arguments de déformations de contours sur l'intégrale en ξ, on convole par une gaussienne et on fait le découpage sur la convolution. Par ailleurs, plutôt que de faire un tel découpage sur les données de Cauchy (U_0) ce qui introduirait une singularité de type $\delta_{t=0} \notin L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_t)$, il est préférable de transformer l'équation homogène en une équation inhomogène associée à des données de Cauchy nulles et faire le découpage sur le second membre. On considère donc $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}_t)$, égale à 0 pour $t < 1/3$ et à 1 pour $t > 2/3$ et $U = \frac{1}{(1-iB)^k}\psi V$, solution de

$$(\partial_t - iB)\, U = \psi'(t) \frac{1}{(1-iB)^k} V(t), \tag{4.11}$$

soit

$$U(t) = \int_0^t e^{i(t-s)B} \psi'(s) \frac{1}{(1-iB)^k} V(s)\, ds. \tag{4.12}$$

Soient $c_0 > 0$ et $c_1 > 0$ à choisir ultérieurement. On a

$$\begin{aligned} U(t) &= \textstyle\int_{s=0}^t ds \int_{\mathrm{Im}\xi=-1/2} d\xi \psi'(s) e^{i(t-s)\xi} \frac{1}{(1-i\xi)^k} \frac{1}{\xi - B} V(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{c_0}{\pi}} e^{-c_0\left(\lambda - \frac{\xi}{\sqrt{\log t}}\right)^2} d\lambda \\ &= \textstyle\int_s \int_\xi \int_{|\lambda| < c_1\sqrt{\log t}} + \int_s \int_\xi \int_{|\lambda| \geq c_1\sqrt{\log t}} \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

On remarquera que cette décomposition est très proche mais néanmoins légèrement différente de celle de G. Lebeau [Leb96].

4.1 Estimation de I_1

L'idée pour estimer I_1 est de déformer le contour d'intégration en ξ sur le contour Γ. Il faut pour cela vérifier que pour $s \in [0,1]$ l'opérateur $\chi_1 R(\xi) e^{isB} \chi_2$ est holomorphe par rapport à ξ dans le domaine situé sous le contour Γ et y vérifie (uniformément par rapport à s) une estimation du type (4.2). Or pour $\mathrm{Im}\xi < 0$ les deux familles d'opérateurs

$$e^{is\xi}\left(\chi_1 R(\xi)\chi_2 - i\int_0^s \chi_1 e^{i\sigma(B-\xi)}\chi_2 d\sigma\right) \qquad \text{et} \qquad \chi_1 R(\xi) e^{isB}\chi_2 \tag{4.13}$$

coïncident pour $s=0$, vérifient la même équation différentielle

$$\partial_s w = i\xi w - i\chi_1 e^{isB}\chi_2$$

donc par le lemme de Gronwall, ces deux familles coïncident pour $\mathrm{Im}\xi < 0$, la famille de gauche donne donc le prolongement analytique annoncé et on peut donc dans l'intégrale définissant I_1 déformer le contour en ξ sur le contour Γ.

D'après (4.6) et puisque l'opérateur $\chi_1 R(\xi) e^{isB}\chi_2$ est uniformément borné dans H par rapport à $\xi \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $s \in [0,1]$ pour tout $t \geq 2$ on a

$$\left\| \chi_1 \int_s \iint_{\substack{\xi\in\Gamma_1\cup\Gamma_2 \\ |\lambda|<c_1\sqrt{\log t}}} \right\| \leq C\|U_0\| \int_{z=0}^1 e^{-(t-1)\varepsilon_0 e^{-aD}z} dz \leq \frac{C\|U_0\|}{t-1}. \tag{4.14}$$

On a aussi, d'après (4.2), pour $t>1$,

$$\begin{aligned} &\left\| \chi_1 \int_s \int_{\xi\in\Gamma_3} \int_{|\lambda|<c_1\sqrt{\log t}} \right\| \\ &\qquad \leq C\sqrt{c_0} \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \int_{|\lambda|<c_1\sqrt{\log t}} e^{-(t-1)\varepsilon_0 e^{-a|\eta|} + A|\eta| - c_0(\lambda-\eta/\sqrt{\log t})^2} d\eta d\lambda \|U_0\|. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Soient $c_2>0$ tel que $c_2 a < 1$ et $\varphi = -(t-1)\varepsilon_0 e^{-a|\eta|} + A|\eta| - c_0(\lambda - \eta/\sqrt{\log t})^2$. Alors si $|\eta| \leq c_2 \log t$, on a aussi

$$\varphi \leq c_2 A \log t - (t-1)\varepsilon_0 t^{-c_2 a}. \tag{4.16}$$

On choisit $c_1 \in]0, c_2[$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que si $|\lambda| < c_1\sqrt{\log t}$ et si $|\eta| > c_2 \log t$ alors

$$(\lambda - \eta/\sqrt{\log t})^2 \geq \delta(\lambda^2 + (\eta/\sqrt{\log t})^2), \tag{4.17}$$

soit

$$\varphi \leq A|\eta| - c_0\delta(\lambda^2 + (\eta/\sqrt{\log t})^2). \tag{4.18}$$

On choisit $c_0 > \frac{A}{\delta c_2} + 1$. Pour un $\varepsilon > 0$ on a alors

$$\int_{|\eta|>c_2\log t} e^{A|\eta| - c_0\delta(\eta/\sqrt{\log t})^2} = \mathcal{O}\left(e^{-\varepsilon \log(t)}\right). \tag{4.19}$$

D'après (4.14), (4.15), (4.16) et (4.19) ,

$$\|\chi_1 I_1\| \leq C t^{-\varepsilon} \|U_0\|. \tag{4.20}$$

4.2 Estimation de I_2

Soit

$$(4.21) \qquad J(u) = \int_{s=0}^{1} \iint_{\substack{\mathrm{Im}\xi=-1/2 \\ |\lambda|\geq c_1\sqrt{\log t}}} \psi'(s)\, e^{i(u-s)\xi} \frac{1}{(1-i\xi)^k} \frac{1}{\xi - B} V(s) \sqrt{\frac{c_0}{\pi}} e^{-c_0\left(\lambda - \frac{\xi}{\sqrt{\log t}}\right)^2}.$$

Pour $t \geq 1$, on a $J(t) = I_2(t)$ et pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$(4.22) \quad (\partial_u - iB)J(u) = \int_{s=0}^{1} \iint_{\substack{\mathrm{Im}\xi=-1/2 \\ |\lambda|\geq c_1\sqrt{\log t}}} \psi'(s) \frac{ie^{i(u-s)\xi}}{(1-i\xi)^k} V(s) \sqrt{\frac{c_0}{\pi}} e^{-c_0\left(\lambda - \frac{\xi}{\sqrt{\log t}}\right)^2} = K(u),$$

ce qui implique

$$(4.23) \qquad J(t) = e^{itB} J(0) + \textstyle\int_0^t e^{i(t-s)B} K(s) ds.$$

On va, pour majorer $J(t)$ en norme dans H, utiliser que e^{isB} est pour $s \geq 0$ une contraction de H et majorer séparément $K(u)$ pour $u \geq 1$, $J(0)$ et $\int_0^1 \|K(u)\| du$. Puisque le second membre de (4.12) (l'analogue de $K(u)$) est nul pour $t > 1$ ainsi que la donnée de Cauchy ($U(0)$), on s'attend à ce que la contribution principale vienne du troisième terme.

Pour $u \in [1, t]$, on déforme dans (4.22) le contour en ξ sur le contour donné par $\mathrm{Im}\xi = \sqrt{\log t}$, ce qui donne, d'après (4.6) et puisque $k > 1$ et $\mathrm{supp}(\psi') \subset [1/3, 2/3]$

$$(4.24) \qquad \begin{aligned} \|K(u)\| &\leq \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u-2/3)\sqrt{\log t}} \frac{1}{(1+|\xi|)^k} d\xi \|U_0\| \\ &\leq C_k e^{-\sqrt{\log t}/3} \|U_0\|. \end{aligned}$$

On majore ensuite $J(0)$. On traite par exemple la contribution à (4.21) de la région $\lambda > c_1\sqrt{\log t}$. Pour cela on déforme, suivant [Leb96], l'intégrale en ξ sur le contour $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$, avec

$$\begin{aligned} \Gamma^+ &= \{z = 1 + \eta - i\sqrt{\log t};\ \eta > 0\} \\ \Gamma^- &= \{z = 1 + \eta - i/2;\ \eta \leq 0\} \cup [1 - i/2, 1 - i\sqrt{\log t}]. \end{aligned}$$

Pour $\xi \in \Gamma^-$, on a d'après (4.1), pour tout $s \in [0,1]$ et tout $\lambda \in \left[c_1\sqrt{\log t}, +\infty\right]$,

$$\left\| e^{-is\xi} \frac{V(s)}{(1-i\xi)^k} \frac{1}{\xi - B} \sqrt{\frac{c_0}{2\pi}} e^{-c_0\left(\lambda - \frac{\xi}{\sqrt{\log t}}\right)^2} \right\| \leq \frac{C}{(1+|\xi|)^k} e^{-\delta(\lambda^2 + \xi^2/\log t)} \|U_0\| \ (\delta > 0).$$

La contribution de Γ^- à $J(0)$ est donc majorée en norme par

$$(4.25) \qquad C\sqrt{\log t} \textstyle\int_{\lambda \geq c_1\sqrt{\log t}} e^{-\delta\lambda^2} \|U_0\| = \mathcal{O}\left(e^{-\varepsilon \log t}\right) \|U_0\|.$$

Pour $\xi \in \Gamma^+$ et $s \in [1/3, 2/3]$ on a

$$\left\| e^{-is\xi} \frac{V(s)}{(1-i\xi)^k} \frac{1}{\xi - B} \sqrt{\frac{c_0}{\pi}} e^{-c_0\left(\lambda - \frac{\xi}{\sqrt{\log t}}\right)^2} \right\| \leq C e^{-\sqrt{\log t}/3} \frac{1}{(1+|\eta|)^k} e^{-c_0\left(\lambda - \frac{\eta}{\sqrt{\log t}}\right)^2} \|U_0\|$$

donc, puisque $k > 1$, la contribution de Γ^+ à $J(0)$ est majorée en norme par

$$Ce^{-\sqrt{\log t}/3}\|U_0\|. \tag{4.26}$$

Les contributions à $J(0)$ de la région $\lambda < -c_1\sqrt{\log t}$ se majorent de la même façon.

Finalement, il reste à majorer

$$\int_0^1 \|K(u)\|du \leq \left(\int_0^1 \|K(u)\|^2 du\right)^{1/2}. \tag{4.27}$$

D'après la formule de Plancherel,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \|K(u)\|^2 du &= C\int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\frac{i}{(1-i\xi)^k}\widehat{V\psi'}(\xi)\int_{|\lambda|\geq c_1\sqrt{\log t}} e^{-c_0\left(\lambda-\frac{\xi}{\sqrt{\log t}}\right)^2} d\lambda\right\|^2 d\xi \\ &= C\int_{-\infty}^{+\infty} \|H(\xi)\|^2 d\xi\end{aligned} \tag{4.28}$$

avec, pour $|\xi| > \frac{c_1}{2}\log t$,

$$\begin{aligned}\|H(\xi)\| &= \left\| \int_{|\lambda|\geq c_1\sqrt{\log t}} \frac{1}{(1-i\xi)^k} e^{-c_0\left(\lambda-\frac{\xi}{\sqrt{\log t}}\right)^2} d\lambda \widehat{V\psi'}(\xi)\right\| \\ &\leq \frac{C}{(\log t)^k}\|\widehat{V\psi'}(\xi)\|\end{aligned} \tag{4.29}$$

et pour $|\xi| \leq \frac{c_1}{2}\log t$

$$\|H(\xi)\| \leq \int_{|\lambda|>c_1\sqrt{\log t}} e^{-\delta(\lambda^2+\xi^2/\log t)} d\lambda \|\widehat{V\psi'}(\xi)\| \leq Ce^{-\epsilon\log t}\|\widehat{V\psi'}(\xi)\| \tag{4.30}$$

donc, d'après (4.27), (4.28) (4.29) et (4.30), puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\widehat{V\psi'}(\xi)\|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\psi' V(s)\|^2 ds \leq C\int_0^1 |\psi'(s)|^2 ds \|U_0\|^2$$

(on rappelle que $V(s) = e^{isB}\chi_2 U_0 \Rightarrow \|V(s)\| \leq \|\chi_2 U_0\| \leq C\|U_0\|$). On a donc

$$\int_0^1 \|K(u)\|du \leq C\left(\frac{1}{(\log t)^k} + e^{-\varepsilon\log t}\right)\|U_0\|. \tag{4.31}$$

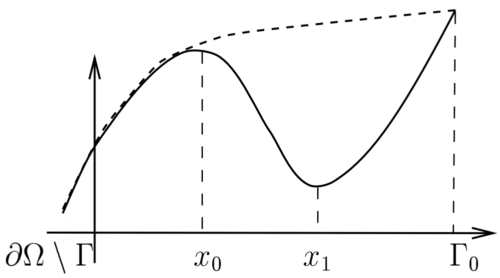
D'après les relations (4.23), (4.24) (4.25), (4.26) et (4.31), on obtient,

$$\|I_2\| \leq \frac{C}{(\log t)^k}\|U_0\|,$$

ce qui termine la démonstration du théorème 3.

A Démonstration de la proposition 3.1

L'objet de ce paragraphe est de démontrer l'existence de deux fonctions de Morse vérifiant des conditions de compatibilité (aux points critiques de l'une, l'autre lui est supérieure) et ayant des dérivées normales de signe préscrit sur le bord d'un ouvert. Soient donc Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, de classe C^∞ et $\Gamma \subset \partial\Omega$ une partie connexe (non vide) du bord de Ω (on prendra $\Gamma = C(0,R)$). Comme les fonctions de Morse sont denses (pour la topologie C^∞) dans l'ensemble des fonctions C^∞, il en existe une telle que $\partial_n f \mid_{\partial\Omega\setminus\Gamma} < 0$ et $\partial_n f \mid_\Gamma > 0$ (∂_n désigne la normale extérieure au bord de l'ouvert). On peut également la choisir sans maximum local dans Ω. L'idée de la démonstration de ce dernier point nous a été donnée par F. Laudenbach. Cette démonstration est essentiellement standard en topologie, nous nous contenterons donc de l'esquisser. On part d'une fonction de Morse, φ qui a éventuellement un maximum local. On commence par montrer qu'on peut supposer que ce maximum n'est pas global. Pour cela, on prolonge topologiquement l'ouvert Ω à travers Γ. L'ouvert ainsi prolongé est difféomorphe à Ω et son bord est la réunion de $\partial\Omega\setminus\Gamma$ et d'une partie difféomorphe à Γ, qu'on note Γ_0. On prolonge ensuite la fonction φ au nouvel ouvert de telle manière que son maximum global soit atteint sur Γ_0 et $\varphi \mid_{\Gamma_0} = C$. Soit x_0 un point où la fonction φ admet un maximum local. On considère les chemins $\gamma : [0,1] \to \overline{\Omega}$ qui relient x_0 à Γ_0 et à chaque chemin, on associe $\min_{s\in[0,1]} \varphi(\gamma(s))$. Soient γ_0 un chemin qui maximise cette quantité et $x_1 = \gamma_0(s_0)$ le point où le maximum est atteint. Une étude locale simple montre que ce point est nécessairement un col pour la fonction φ, d'indice 1 (de signature $\left(1_+, (d-1)_-\right)$). Le théorème d'élimination (voir [Mil65], paragraphe 8, théorème 8.1) permet alors d'utiliser ce point d'indice 1 pour déformer la fonction φ et éliminer le maximum local d'indice 0. Une récurence facile permet d'éliminer ainsi tous les maxima locaux. On revient ensuite par difféomorphisme à l'ouvert de départ. En dimension 1, cette stratégie revient à montrer qu'entre le maximum global et le maximum local on a un minimum local, la déformation permettant d'éliminer les deux extréma locaux est alors évidente :



Déformation en dimension 1

On notera par la suite ψ_1 une fonction de Morse n'ayant pas de maximum local sur Ω et vérifiant $\partial_n\psi_1 \mid_{\partial\Omega\setminus\Gamma} < 0$ et $\partial_n\psi_1 \mid_\Gamma > 0$. Il reste à construire ψ_2. On se place près d'un point critique de ψ_1, x_0, et on choisit sur $B(x_0,\eta)$ ($\eta > 0$ assez petit), un système de coordonnées de Morse. Dans ce système, la fonction ψ_1 s'écrit $\psi_1(x) = \psi_1(x_0) + \sum_{0<i\leq q} x_i^2 - \sum_{q+1\leq i\leq d} x_i^2$

avec $q \geq 1$ puisque x_0 n'est pas un maximum local. Soit $\psi_\varepsilon(x) = \psi_1(x_0) + \varepsilon x_1 + \varepsilon - 2\sum_{q+1\leq i\leq d} x_i^2$. Cette fonction n'a pas de point critique et si $\varepsilon > 0$ est assez petit, elle est strictement inférieure à $\psi_1 - \varepsilon$ sur $\overline{B(0,\eta)\setminus B(0,\eta/2)}$. On fait cette construction au voisinage de chaque point critique, x_j, de ψ_1 (ils sont en nombre fini) et on note encore ψ une fonction qui coïncide avec les précédentes sur des petites boules $B(x_j,\eta_j)$, qui n'a donc pas de point critique sur ces boules, qui sur le complémentaire de $\cup_j B(x_j,\eta_j/2)$ est inférieure à $\psi_1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ et dont les dérivées normales au bord ont le même signe que celles de ψ_1. Il suffit pour conclure de prendre pour ψ_2 une fonction de Morse assez proche de cette fonction ψ, puisqu'alors d'une part ses points critiques seront dans le complémentaire de $\cup_j B(x_j,\eta_j/2)$, donc dans une région où $\psi_1 > \psi_2$ et d'autre part, au voisinage des points critiques de ψ_1, on aura $\psi_2 > \psi_1$ (puisque $\psi(x_j) = \psi_1(x_j) + \varepsilon$).

Pour démontrer la proposition 3.1, on se place dans la situation où $\Omega = \Theta^c \cap B(0, R-\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ petit. On fait la construction précédente avec $\Gamma = \{r = R-\varepsilon\}$, et comme $\partial_r\psi_i > 0$ sur $r = R-\varepsilon$, on peut prolonger ψ_1 et ψ_2 sur $\Theta^c \cap B(0,R)$ de telle façon qu'elles soient radiales et coïncident au voisinage de $r = R$.

B Etude de la résolvante sortante sur l'axe réel

Dans cet appendice, nous étudions la résolvante sortante sur l'axe réel. Nous montrons d'une part qu'elle n'a pas de pôle réel et d'autre part qu'elle est bornée au voisinage de 0 dans tout secteur angulaire ne rencontrant pas l'axe imaginaire, $i\mathbb{R}_+^*$.

B.1 Absence de pôle réel

Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $u(x,\lambda)$ solution sortante de l'équation $(\Delta + \lambda^2)\, u = 0$, $u\,|_{\partial\Omega} = 0$. Nous allons montrer qu'alors u est identiquement nulle. Ce résultat est standard en dimension impaire d'espace ($d = 2k+1$), dans le cas où le Laplacien est le Laplacien standard (théorème de Rellich). L'idée de la démonstration dans le cas général nous a été donnée par C. Bardos. On suppose par exemple que $\lambda > 0$ et on choisit $a > 0$ assez grand pour que $\Theta \subset \{|x| = r < a\}$ et le Laplacien coïncide avec le Laplacien standard sur l'ensemble $r > a$. On a, pour $R \geq a$, d'après l'équation vérifiée par u et la formule de Green,

$$\int_{\Omega\cap\{r<R\}} -|\nabla u|^2 + \lambda^2|u|^2 + \int_{r=R} \partial_r u\overline{u}\,d\sigma = 0, \tag{B.1}$$

ce qui implique

$$\lim_{R\to+\infty} \operatorname{Im} \int_{\sigma\in\mathbf{S}^{d-1}} \partial_r u\overline{u}\,(R,\sigma)\, R^{d-1} d\sigma = 0. \tag{B.2}$$

On décompose, pour $R \geq a$, la fonction u en harmoniques sphériques, comme au paragraphe 2, suivant la relation (2.1) et on obtient

$$\text{(B.3)} \quad \mathrm{Im} \int_{\sigma \in \mathbf{S}^{d-1}} \partial_r u \overline{u}\,(R,\sigma)\, r^{d-1} d\sigma$$
$$= \mathrm{Im} \sum_\mu |C_\mu|^2 R \left(\left(1 - \tfrac{d}{2}\right) R^{-1} |h_\mu(\lambda R)|^2 + \lambda h'_\mu(\lambda R)\, \overline{h_\mu(\lambda R)} \right)$$
$$= \mathrm{Im} \sum_\mu |C_\mu|^2 \lambda R h'_\mu(\lambda R)\, \overline{h_\mu(\lambda R)}.$$

On rappelle que h_μ désigne la fonction de Hankel d'ordre μ, et que $\mu^2 = \nu^2 + \left(\frac{d}{2} - 1\right)^2$, où ν^2 décrit l'ensemble des valeurs propres du Laplacien sur la sphère de dimension $d-1$ donc pour $d > 2$, on a $\mu \geq 1/2$ et pour $d = 2$, le seul $\mu < 1/2$ est $\mu = 0$. D'après J. C. Nédélec [Néd92], théorèmes 2.2 et 3.3, pour $\mu \geq 1/2$, la fonction $r^{1/2}|h_\mu|$ est décroissante et $0 \leq \mathrm{Im}\frac{h'_\mu}{h_\mu} \leq 1$, ce qui implique, pour $\mu \neq 0$

$$\text{(B.4)} \qquad \left| \mathrm{Im} h'_\mu(\lambda R)\, \overline{h_\mu(\lambda R)} \right| \leq |h_\mu(\lambda R)|^2 \leq \tfrac{a}{R} |h_\mu(\lambda a)|^2.$$

Par ailleurs,

$$\text{(B.5)} \qquad \sum_\mu |C_\mu|^2 |h_\mu(\lambda a)|^2 = \tfrac{1}{a} \int_{r=a} |u|^2 d\sigma < +\infty$$

et

$$\text{(B.6)} \qquad \mathrm{Im} \left(h'_\mu(\lambda R)\, \overline{h_\mu(\lambda R)} \right) \underset{R \to +\infty}{\sim} \tfrac{2}{\lambda \pi R}.$$

On déduit de (B.2) (B.3), (B.4), (B.5) et (B.6), par convergence dominée, que

$$\text{(B.7)} \qquad \lim_{R \to +\infty} \mathrm{Im} \int_{\sigma \in \mathbf{S}^{d-1}} \partial_r u \overline{u}\,(R,\Theta)\, R^{d-1} d\theta = \tfrac{2}{\pi} \sum_\mu |C_\mu|^2 = 0,$$

donc $C_\mu = 0$ pour tout μ, ce qui implique que u est nulle sur l'ensemble $r > a$. Le théorème d'unicité pour les solutions d'une équation elliptique d'ordre 2 à symbole principal réel implique que u est nulle partout. La seule solution sortante de l'équation $(\Delta + \lambda^2)\, u = 0,\ u\,|_{\partial\Omega} = 0$ est donc la solution nulle, le réel λ n'est donc pas un pôle. Le même raisonnement si $\lambda < 0$ montre que l'ensemble des pôles ne rencontre pas $\mathbb{R}^*$.

B.2 Borne sur la résolvante en 0

Nous allons montrer qu'au voisinage de 0, la résolvante $R(\lambda)$ reste bornée dans secteur angulaire contenant l'axe réel. Ce résultat a été essentiellement démontré par Morawetz dans [Mor75], lemme 16, dans le cas où $d = 2$ et où le Laplacien est le Laplacien standard. Soient $\alpha = e^{i\theta}, \theta \in [-\pi/4, 5\pi/4]$ et Γ_α le secteur angulaire d'ouverture 2π symétrique autour de α^{-1}

$$\text{(B.8)} \qquad \Gamma_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C}^*; \mathrm{Re}(\alpha\lambda) \geq |\mathrm{Im}(\alpha\lambda)|\}.$$

Soient $\lambda \in \Gamma_\alpha$ et u solution sortante dans Θ^c de $(\Delta+\lambda^2)\,u = g$ avec g à support dans l'ensemble $|x| < a$. On suppose que $a > 0$ est tel que $\Theta \subset \{|x| = r < a\}$ et le Laplacien coïncide avec le Laplacien standard sur l'ensemble $r > a$. On choisit une fonction $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ égale à 0 pour $r < a$ et à 1 pour $r > 2a$. La fonction $v = \chi(r)\,u$ est alors la solution sortante de l'équation $(\Delta+\lambda^2)\,v = [\Delta,\chi]\,u$ dans $\mathbb{R}^d$. On note F_d la solution fondamentale sortante dans $\mathbb{R}^d$ de l'opérateur $\Delta+1$ et on obtient

$$\begin{aligned}
v(x) &= \lambda^{d-2}\int_{a<|y|<2a} \left(F_d(\lambda(x-y)) - F_d(\lambda(x))\right)[\Delta,\chi]\,u(y)\,dy \\
&\qquad + \lambda^{d-2}F_d(\lambda(x))\int_{a<|y|<2a}[\Delta,\chi]\,u(y)\,dy, \\
&= v_1+v_2.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

On écrit $F_d(\lambda(x-y)) - F_d(\lambda(x)) = -\lambda y F_d'(\lambda(x-ty))$, pour un $t\in]0,1[$, ce qui permet de montrer que pour $r=|x|>3a$,

$$|v_1(x)|^2 \leq C|\lambda|^{2d-2}|F_d'(\lambda r)|^2\int_{a<r<2a}|\nabla u|^2+|u|^2. \tag{B.10}$$

On a aussi en intégrant par parties

$$\int_{\Theta^c}[\Delta,\chi]u = -\int_{\Theta^c}\chi\Delta u = \lambda^2\int_{\Theta^c}\chi u \tag{B.11}$$

ce qui permet de montrer que pour $r=|x|>3a$,

$$|v_2(x)|^2 \leq C|\lambda|^{2d}|F_d(\lambda r)|^2\int_{a<r<2a}|u|^2. \tag{B.12}$$

Pour $\lambda\in\Gamma_\alpha$ on considère

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\int_\Omega e^{-4\alpha\lambda r}\overline{u}g &= \mathrm{Re}\int_\Omega e^{-4\alpha\lambda r}\overline{u}\,(\Delta+\lambda^2)\,u \\
&= \mathrm{Re}\int_\Omega e^{-4\alpha\lambda r}\left(-|\nabla u|^2+\lambda^2|u|^2\right) + 4\alpha\lambda e^{-4\alpha\lambda r}\sum_{i,j}\partial_i r a^{i,j}\partial_j u\overline{u}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

(d'après (B.11), (B.10) et (B.12) , $|\nabla u(r,\theta|^2 + |u(r,\theta)|^2 \leq C_\lambda e^{2\mathrm{Im}\lambda r}$, donc ces intégrales sont définies). La relation (B.13) implique

$$\int_\Omega e^{-4\mathrm{Re}(\alpha\lambda)r}|\nabla u|^2 \leq C|\lambda|^2\int_\Omega e^{-4\mathrm{Re}(\alpha\lambda)}|u|^2 + C\left|\int_\Omega e^{-4\alpha\lambda r}\overline{u}g\right| \tag{B.14}$$

et d'après (B.11) (B.10) et (B.12),

$$\begin{aligned}
&\int_{r>3a} e^{-4\mathrm{Re}(\alpha\lambda)r}|u|^2 \\
&\quad\leq C|\lambda|^{2d}\int_{r>3a} e^{-4\mathrm{Re}(\alpha\lambda)r}\left(|\lambda^{-2}|F_d'(\lambda r)|^2 + |F_d(\lambda r)|^2\right)r^{d-1}dr\int_{\Omega\cap\{r<2a\}}|\nabla u|^2+|u|^2 \\
&\quad\leq C'|\lambda|^d\int_{\rho>3a\mathrm{Re}(\alpha\lambda)} e^{-4\rho}\left(|\lambda^{-2}|F_d'\left(\frac{\lambda\rho}{\mathrm{Re}(\alpha\lambda)}\right)|^2 + |F_d\left(\frac{\lambda\rho}{\mathrm{Re}(\alpha\lambda)}\right)|^2\right)\rho^{d-1}d\rho \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\int_{\Omega\cap\{r<2a\}}|\nabla u|^2+|u|^2.
\end{aligned}$$

Or

$$|F_d(z)| \leq \begin{cases} C|z|^{2-d} \text{ si } |z| \leq 1 \text{ et } d > 2 \\ C|\log z| \text{ si } |z| \leq 1 \text{ et } d = 2 \\ Ce^{\mathrm{Im} z} \text{ si } |z| \geq 1, \end{cases}$$

et

$$|F_d'(z)| \leq \begin{cases} C|z|^{1-d} \text{ si } |z| \leq 1 \\ Ce^{\mathrm{Im} z} \text{ si } |z| \geq 1, \end{cases}$$

donc pour $|\lambda| \leq 1$

$$\text{(B.15)} \qquad \int_{r>3a} e^{-4\mathrm{Re}(\alpha\lambda)r}|u|^2 \leq \begin{cases} C \int_{\Omega\cap\{r<2a\}} |\nabla u|^2 + |u|^2 \text{ si } d > 2 \\ C|\log\lambda| \int_{\Omega\cap\{r<2a\}} |\nabla u|^2 + |u|^2 \text{ si } d = 2. \end{cases}$$

D'après (B.14) et (B.15), on obtient, pour $|\lambda| \leq 1$,

$$\text{(B.16)} \qquad \int_{\Omega\cap\{r<3a\}} |\nabla u|^2 \leq C|\lambda|^2|\log\lambda| \int_{\Omega\cap\{r<3a\}} (|\nabla u|^2 + |u|^2) + C\left|\int e^{-4\alpha\lambda r}\overline{u}g\right|.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on déduit de (B.16), puisque g est supportée dans l'ensemble $\Omega \cap \{r < a\}$, que pour $\lambda \in \Gamma_\alpha$, $|\lambda|$ assez petit,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\cap\{r<3a\}} |\nabla u|^2 &\leq C\left|\int_{\Omega\cap\{r<a\}} e^{-4\alpha\lambda r}\overline{u}g\right| \\ &\leq C\left(\int_{\Omega\cap\{r<a\}} e^{-4\mathrm{Re}(\alpha\lambda)r}|u|^2\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega\cap\{r<a\}} e^{-4\mathrm{Re}(\alpha\lambda)r}|g|^2\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

d'où, en utilisant a nouveau l'inégalité de Poincaré,

$$\int_{\Omega\cap\{r<3a\}} |\nabla u|^2 \leq C\left(\int_{\Omega\cap\{r<3a\}} |\nabla u|^2\right)^{1/2}\left(\int e^{-4\mathrm{Re}(\alpha\lambda)r}|g|^2\right)^{1/2},$$

ce qui donne bien une borne uniforme sur la norme de la résolvante de L^2_{comp} dans $H^1_{0,\mathrm{loc}}$ pour λ proche de 0 et dans le secteur Γ_α. En choisissant un nombre fini (3) de réels α_i, on recouvre un voisinage du demi-plan inférieur (dont on exclut 0) par $\cup_{i=1}^3\Gamma_{\alpha_i}$ ce qui permet de conclure. On aurait pu plus généralement traiter le cas d'un secteur angulaire quelconque, dans le revêtement simplement connexe de $\mathbb{C}^*$.

Remarque B.1.— *Ce résultat n'implique pas que 0 n'est pas un point d'accumulation des pôles, mais néanmoins les pôles ne peuvent pas s'accumuler en 0 en restant dans un secteur angulaire fixe. On pourra sur ce point consulter le travaux de B. Vainberg [Vai88] et G. Vodev [Vod94] qui montrent des résultats du même type.*

Table des matières

Références

[Gér88] C. Gérard. Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes. *Supplément au Bulletin de la Société Mathématique de France*, 116, 1988.

[Ika82a] M. Ikawa. Decay of solution of the wave equation in the exterior of several convex bodies. *Annales de l'Institut Fourier*, 38(2):113–146, 1982.

[Ika82b] M. Ikawa. Decay of solution of the wave equation in the exterior of two convex bodies. *Osaka Journal of Mathematics*, 19:459–509, 1982.

[Ika85] M. Ikawa. Trapping obstacles with a sequence of pôles converging to the real axis. *Osaka Journal of Mathematics*, 22:657–689, 1985.

[Ika88] M. Ikawa. On the poles of the scattering matrix for two convex obstacles. *Annales de l' Institut Fourier*, 38:113–146, 1988.

[Leb96] G. Lebeau. Equation des ondes amorties. In A. Boutet de Montvel and V. Marchenko, editors, *Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics*, pages 73–109. Kluwer Academic, The Netherlands, 1996.

[LP67] P. D. Lax and R. S. Phillips. The acoustic equation with an indefinite energy form and the schrödinger equation. *Journal of Functional Analysis*, 1:37–83, 1967.

[LP89] P. D. Lax and R. S. Phillips. *Scattering theory.* Number 26 in Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 2 edition, 1989.

[LR95a] G. Lebeau and L. Robbiano. Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Communications in Partial Differential Equation*, 20:335–356, 1995.

[LR95b] G. Lebeau and L. Robbiano. Stabilisation de l'équation des ondes par le bord. *Prépublications de l'université de Paris-Sud*, 95-40, 1995.

[Mil65] J. Milnor. *Lectures on h-cobordism.* Princeton Mathematical Notes. Princeton University Press, 1965.

[Mor61] C. S. Morawetz. The decay of solutions of the exterior initial-boundary value problem for the wave equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 14:561–568, 1961.

[Mor75] C. S. Morawetz. Decay of solutions of the exterior problem for the wave equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 28:229–264, 1975.

[MS78] R.B. Melrose and J. Sjöstrand. Singularities of boundary value problems I. *Communications in Pure Applied Mathematics*, 31:593–617, 1978.

[Néd92] J. C. Nédélec. Quelques propriétés logarithmiques des fonctions de hankel. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 314(I):507–510, 1992.

[Ral69] J. V. Ralston. Solutions of the wave equation with localized energy. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 22:807–823, 1969.

[Ral71] J. V. Ralston. Trapped rays in spherically symmetric media and poles of the scattering matrix. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, XXIV:571–582, 1971.

[RS75] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume I–IV. Academic Press, 1975.

[Vai88] B. R. Vainberg. *Asymptotic methods in equations of matheatical physics.* Gordon and Breach, New York, 1988.

[Vod94] G. Vodev. Sharp bounds on the number of scattering poles in even dimensional spaces. *Duke Math. Journal.*, 74(1):1–17, 1994.

[Wal77] H. F. Walker. Some remarks on the local energy decay of solution of the initial-boundary value problem for the wave equation in unbounded domains. *Journal of Differential Equations*, 23:459–471, 1977.

[Wat44] G. N. Watson. *Theory of Bessel functions.* Cambridge University Press, second edition edition, 1944.