
INÉGALITÉS DE SOGGE BILINÉAIRES ET ÉQUATION DE SCHRÖDINGER NON LINÉAIRE

par

N. Burq, P. Gérard & N. Tzvetkov

1. Introduction

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension d . Nous nous proposons de poursuivre l'étude, commencée dans [8, 9] (voir aussi [12] pour une synthèse de résultats), de l'influence de la géométrie de M sur la dynamique des équations de Schrödinger non linéaires sur M .

Rappelons les motivations d'une telle étude : tout d'abord, compte tenu des propriétés de vitesse infinie de propagation du groupe à un paramètre associé à l'équation de Schrödinger linéaire, il est naturel d'attendre un rôle important de la géométrie, y compris en temps petit ; de plus, il paraît intéressant de quantifier ce qui reste des effets dispersifs sur l'espace euclidien (voir [21, 17, 14]) lorsqu'on travaille sur un domaine compact. Enfin, du point de vue des applications, on peut considérer de telles équations comme des modèles (si $d = 2$) de milieux non homogènes en optique non linéaire, même si un modèle plus réaliste - mais encore plus difficile à étudier - nécessiterait d'ajouter un bord et des conditions aux limites (voir [10, 11] pour des résultats dans cette direction).

Dans cet exposé, nous nous restreignons au cas d'une surface sans bord ($d = 2$). Considérons le problème de Cauchy pour l'équation cubique défocalisante,

$$(1) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u, & t \in \mathbb{R}, x \in M, \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

où Δ est l'opérateur de Laplace sur M associé à la métrique g . Compte tenu des lois de conservation,

$$(2) \quad \|u(t)\|_{L^2(M)} = \|u_0\|_{L^2(M)},$$

$$(3) \quad \|\nabla u(t)\|_{L^2(M)}^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^4(M)}^4 = E_0,$$

on montre, en utilisant les arguments de Brézis-Gallouët [7], que, pour tout $u_0 \in C^\infty(M)$, il existe une unique solution $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times M)$ de (1). On se propose d'étudier les propriétés du flot $u_0 \mapsto u(t)$ ainsi défini, relativement à la topologie de $H^s(M)$.

Définition 1. — Soit $s \in \mathbb{R}$. On dit que l'évolution définie par (1) est stable à haute fréquence dans H^s (localement en temps) si la propriété suivante est vérifiée :

(\mathcal{P}_s) Pour tout borné B de $H^s(M)$, il existe $T = T(B)$ tel que l'application

$$u_0 \in B \cap C^\infty(M) \longmapsto u \in C([-T, T], H^s(M))$$

est uniformément continue, la source étant munie de la norme H^s standard

$$\|u_0\|_{H^s(M)} = \|(1 - \Delta)^{s/2} u_0\|_{L^2(M)}$$

et le but, de la norme naturelle

$$\|u\|_{s,T} = \max_{t \in [-T, T]} \|u(t)\|_{H^s(M)}.$$

Notons d'abord que (\mathcal{P}_s) entraîne l'existence d'une application

$$u_0 \in B \mapsto u \in C([-T, T], H^s)$$

uniformément continue, qui assure que le problème (1) est bien posé dans H^s , sous réserves que la quantité nonlinéaire $|u|^2 u$ puisse être définie à ce niveau de régularité. Mais la propriété (\mathcal{P}_s) donne des renseignements supplémentaires sur cette évolution que l'on pourrait qualifier de "uniformément bien posée".

Intuitivement, (\mathcal{P}_s) signifie que, pour une suite de données bornées dans H^s mais présentant des défauts de compacité (oscillations, concentrations, ...), les défauts de compacités de la suite de solutions correspondante sur un petit intervalle de temps ne changent pas si l'on ajoute à la donnée une suite tendant vers 0 dans H^s . Le flot de Schrödinger induit donc un flot (local) sur les défauts de compacité dans $H^s(M)$.

Venons-en aux résultats connus concernant la propriété (\mathcal{P}_s) .

1. Si $d = 2$ et $s > 1 (= \frac{d}{2})$, un argument élémentaire de contraction basé sur l'injection de Sobolev $H^s \subset L^\infty$ assure que (\mathcal{P}_s) est vraie. De plus, les lois de conservations (2) et (3) combinées à l'inégalité logarithmique établie dans Brézis-Gallouët [7], montrent que le temps $T = T(B)$ peut être pris arbitraire.
2. Si $s > \frac{1}{2}$, on a montré dans [8] que (\mathcal{P}_s) était encore vraie sur toute surface M . L'argument est basé sur les inégalités de Strichartz suivantes, établies dans le même article

$$(4) \quad \|v\|_{L^p([-T,T],L^q(M))} \leq C_T \|v_0\|_{H^{\frac{1}{p}}(M)},$$

si $v(t) = e^{it\Delta}v_0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$, $p > 2$. Là encore, les termes non linéaires sont contrôlés au moyen d'une injection de Sobolev du type $W^{\sigma,q}(M) \subset L^\infty(M)$, $\sigma > \frac{2}{q}$, mais cette fois pour q très grand.

3. Dans le cas particulier du tore $M = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2$, J. Bourgain a montré dans [3, 4] que (\mathcal{P}_s) était vraie pour tout $s > 0$. Sa démonstration, qui est très spécifique au tore puisqu'elle utilise une analyse fine des séries de Fourier multiples, introduit néanmoins dans ce contexte l'outil général des espaces "conormaux" $X^{s,b}$, qui permet l'estimation des termes non linéaires sans passer par les injections de Sobolev, mais en incorporant les propriétés dispersives du groupe $e^{it\Delta}$ (cf. Ginibre [16] pour une présentation de cette méthode).
4. Enfin, on dispose de deux résultats négatifs : sur le tore \mathbb{T}^2 , (\mathcal{P}_s) est fautive pour tout $s < 0$ ([9]). Sur la sphère S^2 , (\mathcal{P}_s) est fautive pour tout $s \in [0, \frac{1}{4}[$ (voir [9] pour s proche de $\frac{1}{4}$, et le travail récent de V. Banica [1] pour le cas général). Ces deux résultats sont basés sur une représentation

de solutions de (1) correspondant à des données particulières de haute fréquence. Nous en rappelons le principe un peu plus loin.

Le but de ce travail est de compléter l'étude de la stabilité à haute fréquence sur la sphère S^2 . Plus précisément, notre résultat est le suivant.

Théorème 1. — *Pour tout $s > \frac{1}{4}$, (\mathcal{P}_s) est vraie si $M = S^2$.*

Remarques.

1. On dispose donc de deux exemples (le tore et la sphère) faisant apparaître un seuil d'instabilité $s_c = s_c(M, g)$ pour lequel :

- $\forall s > s_c$, (\mathcal{P}_s) est vraie.
- $\forall s < s_c$, (\mathcal{P}_s) est fausse.

(Dans le cas de la sphère, il resterait néanmoins à montrer que (\mathcal{P}_s) est fausse pour tout $s < 0$...) De plus, cette propriété demeure (avec la même valeur de s_c) si l'on remplace $|u|^2 u$ par une non linéarité plus faible du type $\langle u \rangle^\alpha u$, pour $\alpha \in]0, 2[$. Nous conjecturons qu'un tel seuil d'instabilité existe sur toute surface. Tout reste à faire, bien sûr, pour relier la valeur de ce seuil à la géométrie de la surface.

2. La démonstration du théorème ci-dessus se généralise au cas de toute surface de Zoll (i.e. telle que le flot géodésique est périodique, cf. Besse [2]). En revanche, la question de l'instabilité pour $s < \frac{1}{4}$ sur une telle surface est ouverte.

Le plan de cette note est le suivant : dans la section 2, nous rappelons les arguments de [9] et [1], et établissons le lien avec les inégalités de Sogge estimant les fonctions propres du laplacien. Puis nous énonçons l'estimation clé de notre travail, qui est une version bilinéaire de ces inégalités, et nous montrons comment en déduire le théorème 1. Enfin, nous esquissons la démonstration de cette inégalité de Sogge bilinéaire.

2. Instabilité non linéaire et estimations de fonctions propres

Commençons par le cas du tore $M = \mathbb{T}^2$. Soit $s < 0$. Considérons la suite de données, bornées dans H^s ,

$$u_0^n(x_1, x_2) = \kappa n^{|s|} e^{inx_1},$$

où κ est un paramètre > 0 . Alors la suite correspondante de solutions de (1) s'écrit exactement

$$(5) \quad u^n(t, x_1, x_2) = \kappa n^{|s|} e^{ins_1} e^{-it(n^2 + \kappa^2 n^{2|s|})}.$$

En introduisant une suite (κ_n) tendant vers κ mais telle que $n^{2|s|} |\kappa_n - \kappa|$ tend vers l'infini, on constate que la nouvelle suite de solutions diffère de (5) dans H^s par un terme du type

$$\kappa \left| \sin \left(\frac{t}{2} (\kappa_n^2 - \kappa^2) n^{2|s|} \right) \right| + o(1),$$

qui ne tend vers 0 uniformément sur aucun intervalle $[-T, T]$, $T > 0$. On en déduit que (\mathcal{P}_s) est fautive.

Le cas de la sphère est basé sur le même principe, mais la preuve est nettement plus délicate à mettre en oeuvre, car il faut remplacer la formule explicite (5) par un *ansatz* convenable. On part de la suite de solutions

$$u_0^n(x) = \kappa \phi_n(x),$$

où, en posant $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$,

$$(6) \quad \phi_n(x) = n^{\frac{1}{4}-s} (x_1 + ix_2)^n.$$

Le facteur de normalisation dans (6) est choisi de telle sorte que $\|\phi_n\|_{H^s} \approx 1$, si n tend vers l'infini. Alors une propriété remarquable des fonctions ϕ_n parmi toutes les harmoniques sphériques permet d'obtenir l'approximation suivante pour la solution correspondante ([9, 1]), si $s > 0$,

$$(7) \quad u_n(t) = \kappa e^{-it(n(n+1) + \kappa^2 \omega_n)} [\phi_n + o(1)]$$

dans $C([-T, T], H^s)$ pour tout $T > 0$. Ici

$$\omega_n = \frac{\|\phi_n\|_{L^4}^4}{\|\phi_n\|_{L^2}^2} \approx n^{\frac{1}{2}-2s} \longrightarrow +\infty, \quad \text{pour } n \rightarrow \infty,$$

si $s = \frac{1}{4}$. Le cas $s = 0$ nécessite l'ajout d'un terme d'ordre inférieur dans la phase temporelle (voir [1]).

Le choix de l'harmonique sphérique ϕ_n remonte à un travail de Stanton et Weinstein [27], qui établissait que, sur la sphère L^2 de l'espace des harmoniques sphériques de degré n , la norme L^4 présente un maximum local de ϕ_n , et conjecturait que, quand n tend vers l'infini, l'ordre de grandeur $n^{\frac{1}{8}}$ de ce maximum était un majorant global de cette norme. Cette conjecture fut démontrée quelques années plus tard par C. Sogge dans [24] : en d'autres termes, ϕ_n est, parmi les harmoniques sphériques de degré n , celle qui se concentre le plus en norme L^4 . Les résultats de [24] concernent également les normes L^p pour tout $p \in]2, +\infty]$ et peuvent être résumés dans le diagramme suivant, où l'on a représenté le graphe de

$$\frac{1}{p} \in [0, \frac{1}{2}] \longmapsto s(p),$$

$s(p)$ étant le plus petit exposant s tel que, pour tout $n \geq 1$, pour toute harmonique sphérique ϕ de degré n , on ait l'estimation

$$(8) \quad \|\phi\|_{L^p} \leq Cn^s \|\phi\|_{L^2}.$$

$s(p)$
 $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}$
 $\frac{1}{6}$
 $\frac{1}{8}$

$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{p}$

FIG. 1. Le diagramme de Sogge en dimension 2

On note que $s(\infty) = \frac{1}{2}$ correspond à un gain d'une demi-dérivée par rapport à l'injection de Sobolev. Ce gain est conservé jusqu'à $p = 6$, dans l'intervalle correspondant aux "grandes puissances", puis il s'atténue dans l'intervalle $6 \geq p \geq 2$, jusqu'à s'annuler, bien sûr, en $p = 2$.

De plus, la partie du graphe correspondant à $p \geq 6$ est rendue optimale par les harmoniques sphériques zonales (c'est-à-dire celles qui ne dépendent que de la latitude par rapport à un équateur), tandis que le morceau correspondant à $p \leq 6$, dans lequel se trouve $p = 4$, est optimisé par les fonctions ϕ_n .

On perçoit mieux sur ce diagramme la différence existant entre la résolution de (1) au moyen des inégalités de Strichartz (4), qui impose $s > \frac{1}{2}$, et le phénomène d'instabilité précédent, qui a lieu pour $s < \frac{1}{4}$. Dans le premier cas, les estimations sont réalisées au moyen de normes L^q pour q très grand, pour lesquelles les estimations de Strichartz (4) sont essentiellement optimales dans le cas des harmoniques zonales ; dans le second cas, l'instabilité apparaît à travers la norme L^4 , qui correspond à une "petite puissance", et est optimisée par les harmoniques ϕ_n . En conséquence, si l'on veut abaisser le seuil de stabilité $s = \frac{1}{2}$, il est souhaitable d'estimer les termes non linéaires uniquement au moyen de petites normes, grâce à des inégalités optimisées par les harmoniques ϕ_n . De telles inégalités se trouvent être des versions bilinéaires des estimations de Sogge précédentes. Elles vont nous permettre de démontrer le théorème sur la sphère (et plus généralement sur toute surface de Zoll) grâce à une concentration particulière du spectre du laplacien.

Avant d'aborder cette partie de la démonstration, mentionnons que les estimations (8) de Sogge se généralisent à toute surface compacte sous la forme suivante.

Théorème 2. — (voir [25]) Soit (M, g) une surface compacte. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout réel $\lambda \geq 1$, l'opérateur

$$(9) \quad \chi_\lambda = \chi(\sqrt{-\Delta} - \lambda)$$

vérifie, pour tout $p \in [2, +\infty]$, pour toute $f \in L^2(M)$,

$$(10) \quad \|\chi_\lambda f\|_{L^p(M)} \leq C \lambda^{s(p)} \|f\|_{L^2(M)},$$

où $s(p)$ est donné par le diagramme précédent, i.e.

$$(11) \quad s(p) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{2}{p} & \text{si } p \in [6, +\infty], \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2p} & \text{si } p \in [2, 6]. \end{cases}$$

De plus, l'exposant $s(p)$ est optimal.

3. Le rôle des inégalités bilinéaires dans la stabilité

L'estimation clé dans la preuve du théorème 1 est la suivante, où nous reprenons les notations du théorème 2.

Théorème 3. — Soit (M, g) une surface compacte, et soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Il existe une constante C telle que, pour tout réels $\lambda, \mu \geq 1$, pour toutes fonctions $f, g \in L^2(M)$,

$$(12) \quad \|\chi_\lambda(f)\chi_\mu(g)\|_{L^2(M)} \leq C[\min(\lambda, \mu)]^{\frac{1}{4}}\|f\|_{L^2(M)}\|g\|_{L^2(M)}.$$

En prenant pour f, g des fonctions propres, avec $\chi(0) = 1$, on en déduit notamment

Corollaire 1. — Si $-\Delta\phi = \lambda^2\phi$ et $-\Delta\psi = \mu^2\psi$ avec $\lambda, \mu \geq 1$,

$$(13) \quad \|\phi\psi\|_{L^2(M)} \leq C[\min(\lambda, \mu)]^{\frac{1}{4}}\|\phi\|_{L^2(M)}\|\psi\|_{L^2(M)}.$$

On voit tout de suite l'avantage de ces inégalités par rapport aux estimations de Sogge (10) et (8). Tandis que ces dernières fourniraient, via l'inégalité de Hölder, un contrôle de $\|\phi\psi\|_{L^2}$ par $(\lambda\mu)^{1/8}$, la version bilinéaire ci-dessus ne fait apparaître que la plus basse des fréquences. Il est d'ailleurs facile de vérifier ce phénomène dans le cas particulier où $\phi = \phi_l$ et $\psi = \phi_m$ sont données par (6), avec $M = S^2$. De plus, le même exemple montre qu'il n'est plus possible de faire disparaître la haute fréquence si l'on estime $\phi\psi$ dans L^q , $q > 2$ (alors que c'est bien sûr possible pour $q \in [1, 2[$, par interpolation de (13) avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz). A ce stade, il convient de mentionner que, pour des opérateurs à coefficients constants sur l'espace euclidien, des estimations bilinéaires analogues ont déjà été exploitées dans les travaux de Klainerman-Machedon [22], Bourgain [5, 6] et Tao [28]. Nous esquisserons la démonstration du théorème 3 au paragraphe suivant. Dans l'immédiat, indiquons comment le

corollaire entraîne le théorème 1 sur la sphere S^2 . L'idée est bien sûr de mettre en oeuvre un argument de contraction sur la formule de Duhamel associée à (1),

$$(14) \quad u(t) = S(t)u_0 - i \int_0^t S(t-t') [|u(t')|^2 u(t')] dt'$$

où l'on a noté $S(t) = e^{it\Delta}$. La démonstration étant assez technique, nous allons d'abord nous contenter d'estimer la première itération dans (14). Nous nous limiterons ensuite à quelques indications sur l'analyse complète de (14).

Proposition 3.1. — *Soit $v_j(t) = S(t)f_j$, $j = 1, 2, 3$, des solutions de l'équation de Schrödinger linéaire sur S^2 . Pour tout $s > \frac{1}{4}$, pour tout $T > 0$, on a*

$$\sup_{|t| \leq T} \left\| \int_0^t S(t-t') [v_1(t') \overline{v_2(t')} v_3(t')] dt' \right\|_{H^s} \leq C_T \prod_{j=1}^3 \|f_j\|_{H^s}$$

Démonstration. Un argument facile de dualité permet de se ramener à l'estimation suivante, où $v_0(t) = S(t)f_0$ est une quatrième solution linéaire :

$$(15) \quad \left| \int_{-T}^T \int_M (\overline{v_0} v_1 \overline{v_2} v_3) dt dx \right| \leq C_T \|f_0\|_{H^{-s}} \prod_{j=1}^3 \|f_j\|_{H^s}.$$

On estime l'intégrale dans (15) en décomposant chaque f_j suivant des intervalles dyadiques de fréquences, puis en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à chacune des intégrales obtenues. L'argument clé réside alors dans le lemme suivant.

Lemme 1. — *Soient N, L des entiers dyadiques, et soient $f, g \in C^\infty(S^2)$ telles que*

$$\begin{cases} \Pi_k(f) = 0 & \text{pour } k \notin [N, 2N], \\ \Pi_l(g) = 0 & \text{pour } l \notin [L, 2L], \end{cases}$$

où Π_n désigne le projecteur orthogonal sur les harmoniques sphériques de degré n . On pose $v(t) = S(t)f$, $w(t) = S(t)g$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C_\epsilon > 0$ indépendant de N, L, f, g tel que

$$\|vw\|_{L^2([0, 2\pi] \times S^2)} \leq C_\epsilon [\min(N, L)]^{\frac{1}{4} + \epsilon} \|f\|_{L^2(S^2)} \|g\|_{L^2(S^2)}.$$

Remarquons que, si $h \in L^2(S^2)$, on a

$$S(t)h = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-itk(k+1)} \Pi_k(h)$$

qui est 2π -périodique. Ainsi l'estimation sur $[0, 2\pi]$ du lemme entraîne une estimation sur tout intervalle $[-T, T]$. On écrit donc

$$v(t)w(t) = \sum_{N \leq k \leq 2N} \sum_{L \leq l \leq 2L} e^{-it(k(k+1)+l(l+1))} \Pi_k(f) \Pi_l(g),$$

de sorte que, en appliquant la formule de Parseval,

$$\begin{aligned} \|vw\|_{L^2([0, 2\pi] \times S^2)}^2 &= \sum_{\tau=0}^{\infty} \left\| \sum_{\tau=k(k+1)+l(l+1)} \Pi_k(f) \Pi_l(g) \right\|_{L^2(S^2)}^2 \\ &\leq \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha_{NL}(\tau) \sum_{\tau=k(k+1)+l(l+1)} \|\Pi_k(f) \Pi_l(g)\|_{L^2(S^2)}^2 \end{aligned}$$

où on a posé

$$\alpha_{NL}(\tau) = \# \{(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad N \leq k \leq 2N, \quad L \leq l \leq 2L, \quad k(k+1)+l(l+1) = \tau\}.$$

Un argument classique de théorie analytique des nombres assure que

$$\sup_{\tau} \alpha_{NL}(\tau) \leq C_{\epsilon} [\min(N, L)]^{\epsilon}$$

pour tout $\epsilon > 0$. Le lemme résulte alors de l'inégalité (13).

Revenons à la preuve de la proposition. En posant, pour tout entier dyadique N ,

$$\begin{aligned} c_j(N) &= N^s \left(\sum_{N \leq k \leq 2N} \|\Pi_k f_j\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad j = 1, 2, 3, \\ c_0(N) &= N^{-s} \left(\sum_{N \leq k \leq 2N} \|\Pi_k f_j\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

le lemme précédent conduit à l'estimation

$$(16) \quad \left| \int_{-T}^T \int_M (\bar{v}_0 v_1 \bar{v}_2 v_3) dt dx \right| \leq C_{T,\epsilon} \sum_{\mathbf{N}} Q(\mathbf{N}) \prod_{j=0}^3 c_j(N_j),$$

où $\mathbf{N} = (N_0, N_1, N_2, N_3)$ parcourt les quadruplets d'entiers dyadiques, et où

$$(17) \quad Q(\mathbf{N}) = N_0^s (N_1 N_2 N_3)^{-s} (N' N'')^{\frac{1}{4} + \epsilon} \mathbf{1}_{N_0 \leq 2(N_1 + N_2 + N_3)}$$

avec $N' = \min\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$ et $N'' = \min(\{N_0, N_1, N_2, N_3\} \setminus \{N'\})$.

Notons que la limitation $N_0 \leq 2(N_1 + N_2 + N_3)$ provient de ce que le produit de trois harmoniques sphériques de degré k_1, k_2, k_3 est orthogonal à toute harmonique sphérique de degré $> k_1 + k_2 + k_3$.

Il reste à vérifier que la forme quadrilinéaire définie par le noyau Q est bornée sur $(l^2)^4$, en choisissant $\epsilon > 0$ tel que $s > \frac{1}{4} + \epsilon$. Vérifions-le par exemple si

$$\{N', N''\} = \{N_2, N_3\}.$$

Alors

$$\sum_{N_1, N_2} Q(\mathbf{N}) \leq \sum_{N_1, N_2} \left(\frac{N_0}{N_1} \right)^s N_2^{\frac{1}{4} + \epsilon - s} \mathbf{1}_{N_0 \leq 6N_1}.$$

La sommation en N_2 est géométrique; pour la sommation en N_1 , on écrit $N_1 = 2^l \frac{N_0}{8}$, $l \geq 0$, ce qui assure que

$$\sup_{N_0, N_3} \sum_{N_1, N_2} Q(\mathbf{N}) < +\infty.$$

Un argument analogue conduit à

$$\sup_{N_1, N_2} \sum_{N_0, N_3} Q(\mathbf{N}) < +\infty.$$

La proposition résulte alors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Terminons ce paragraphe par quelques mots sur l'analyse complète de (14). Suivant Bourgain [3] et Ginibre [16], on introduit les espace conormaux suivants :

$X^{s,b}$ est l'espace des distributions tempérées $f = f(t, x)$ sur $\mathbb{R} \times S^2$ telles que

$$\tilde{f}(t, \cdot) = S(-t)(f(t, \cdot))$$

vérifie $\tilde{f} \in H_t^b(\mathbb{R}, H^s(S^2))$. On pose

$$(18) \quad \|f\|_{X^{s,b}} = \|\tilde{f}\|_{H_t^b(H^s)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \langle \tau + k(k+1) \rangle^{2b} (1+k)^{2s} \|\widehat{\Pi_k f}(\tau, \cdot)\|_{L^2(S^2)}^2 \frac{d\tau}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$$

où $\widehat{\Pi_k f}(\tau, \cdot)$ désigne la transformée de Fourier par rapport à t . Pour $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ valant 1 près de 0 et $T > 0$ assez petit, on résout alors, par un argument de point fixe dans $X^{s,b}$, l'équation de Duhamel modifiée

$$(19) \quad u(t) = \psi(t)S(t)u_0 - i\psi\left(\frac{t}{T}\right) \int_0^t S(t-t') [|u(t')|^2 u(t')] dt' .$$

Un argument dégagé dans Ginibre [16] permet de se ramener à montrer l'estimation suivante.

Proposition 3.2. — *Pour tout $s > \frac{1}{4}$, il existe $b \in]\frac{1}{2}, 1[$, $b' \in]0, \frac{1}{2}[$ tels que $b + b' < 1$ et, pour tout triplet (u_1, u_2, u_3) de $X^{s,b}$,*

$$\|u_1 \overline{u_2} u_3\|_{X^{s,-b'}} \leq C \prod_{j=1}^3 \|u_j\|_{X^{s,b}}.$$

La proposition 3.2 se démontre suivant les mêmes lignes que la proposition 3.1, avec néanmoins quelques étapes techniques supplémentaires. Enfin, la généralisation au cas des surfaces de Zoll repose sur un résultat de Guillemin [18] et Colin de Verdière [15], assurant que le spectre de $-\Delta$ sur une telle surface est contenu dans une union d'intervalles du type

$$I_k = \left[\left(k + \frac{\alpha}{4}\right)^2 - A, \left(k + \frac{\alpha}{4}\right)^2 + A \right],$$

k décrivant \mathbb{N} , où $\alpha \in \mathbb{N}$ et $A > 0$. Il en résulte que la norme $X^{s,b}$ est équivalente au troisième membre de (18), où l'on a remplacé $k(k+1)$ par $(k + \frac{\alpha}{4})^2$ et Π_k désigne le projecteur associé à l'intervalle I_k .

4. Inégalités de Sogge bilinéaires

Le but de ce paragraphe est d'indiquer les grandes étapes de la démonstration du théorème 3.

4.1. Réduction à l'étude d'une intégrale oscillante. — Tout d'abord, on peut remplacer $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ par une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est supportée dans $[\varepsilon, 2\varepsilon]$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit. En effet, il existe de telles fonctions qui sont partout non nulles sur \mathbb{R} , de sorte qu'elles divisent tout élément de $C_0^\infty(\mathbb{R})$, avec un quotient dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Nous suivons ensuite Sogge [26] en écrivant

$$\chi_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\sqrt{-\Delta}-\lambda)} \hat{\chi}(t) dt.$$

On écrit alors la paramétrix de $e^{it\sqrt{-\Delta}}$ au moyen d'un opérateur intégral de Fourier (cf. Hörmander [19]). Un argument de phase stationnaire conduit alors à

$$(20) \quad \chi_\lambda = \tilde{\chi}_\lambda + R_\lambda,$$

où $\|R_\lambda\|_{L^2 \rightarrow L^\infty} \leq C$, et, en coordonnées locales près d'un point O de M ,

$$(21) \quad \tilde{\chi}_\lambda f(x) = \lambda^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\lambda\varphi(x,y)} a(x,y) f(y) dy,$$

où $\varphi(x,y) = -d_g(x,y)$ (distance géodésique) et où $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ est supportée dans

$$\frac{\varepsilon}{C} \leq |x-y| \leq C\varepsilon.$$

De plus, par partition de l'unité, on peut supposer que $a(x,y)$ est supportée dans

$$|x| \leq \delta \ll \varepsilon.$$

Introduisons des coordonnées géodésiques de pôle O pour y , c'est-à-dire posons

$$y = \exp_o(re^{it}), \quad \varphi_r(x,t) = \varphi(x,y), \quad f_r(t) = f(y).$$

On peut alors écrire $\tilde{\chi}_\lambda$ sous la forme

$$\tilde{\chi}_\lambda f(x) = \lambda^{\frac{1}{2}} \int_{\varepsilon/C}^{C\varepsilon} T_\lambda^r(f_r)(x) dr,$$

avec

$$T_\lambda^r(f)(x) = \int_{S^1} e^{i\lambda\varphi_r(x,t)} a_r(x,t) f(t) dt,$$

où $a_r \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times S^1)$, à support en x près de 0. Un calcul élémentaire montre que, pour x près de 0,

$$(22) \quad \det [\nabla_x \partial_t \varphi_r(x,t), \nabla_x \partial_t^2 \varphi_r(x,t)] \neq 0.$$

4.2. Une version bilinéaire du lemme de Carleson-Sjölin-Hörmander.

— L'inégalité de Sogge (8) devient évidente pour $p = \infty$ sur la décomposition (20), (21). L'inégalité (8) pour $p = 6$ (et donc pour tout p par interpolation) résulte du lemme suivant, dû à Carleson-Sjölin ; la version donnée ici est celle de Hörmander [20].

Lemme 2. — (Carleson-Sjölin [13], Hörmander [20])

Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_t, \mathbb{R})$ et soit $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_t)$, vérifiant la condition de courbure

$$(23) \quad (x,t) \in \text{supp}(a) \implies \det(\nabla_x \varphi'_t(x,t), \nabla_x \varphi''_{tt}(x,t)) \neq 0$$

Alors il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\lambda \geq 1$, l'opérateur T_λ défini par

$$(24) \quad T_\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\varphi(x,t)} a(x,t) f(t) dt.$$

vérifie l'estimation

$$(25) \quad \|T_\lambda f\|_{L^6(\mathbb{R}^2)} \leq C \lambda^{-\frac{1}{3}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Rappelons brièvement le principe de la preuve de ce lemme, telle que l'a donnée Hörmander dans [20]. Le point de départ est l'observation suivante, qui peut être vue comme une généralisation de l'inégalité de Hausdorff-Young.

Lemme 3. — Soit $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_z^d)$ et soit $A \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_z^d)$ vérifiant

$$(26) \quad (x,z) \in \text{supp}(A) \implies \det \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}(x,z) \right] \neq 0.$$

Alors il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\mu \geq 1$, l'opérateur S_μ défini par

$$S_\mu F(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\mu\Phi(x,z)} A(x,z) F(z) dz$$

vérifie, pour tout $q \in [2, +\infty]$,

$$\|S_\mu F\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C\mu^{-\frac{d}{q}} \|F\|_{L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^d)},$$

où \bar{q} désigne l'exposant conjugué de q .

La preuve de ce lemme est très simple. Par interpolation, il suffit de traiter le cas $q = 2$. De plus on peut supposer, par partition de l'unité, que le support en z de a est petit. On calcule alors

$$\|S_\mu F\|_{L^2}^2 = \int \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} K_\mu(z, z') F(z) \overline{F(z')} dz dz'$$

avec

$$K_\mu(z, z') = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\mu[\Phi(x, z) - \Phi(x, z')]} a(x, z) \bar{a}(x, z') dx.$$

Compte tenu de l'hypothèse, on a

$$|\nabla_x(\Phi(x, z) - \Phi(x, z'))| \geq c|z - z'|,$$

et par ailleurs $|\partial_x^\alpha(\Phi(x, z) - \Phi(x, z'))| \leq C_\alpha|z - z'|$. Par des intégrations par parties en x , on en déduit

$$|K_\mu(z, z')| \leq C_N(1 + \mu|z - z'|)^{-N}$$

pour tout N , de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |K_\mu(z, z')| dz \leq C\mu^{-d}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} |K_\mu(z, z')| dz' \leq C\mu^{-d}.$$

Le lemme 3 en résulte.

Voyons maintenant comment Hörmander en déduit le lemme 2. Si $q \geq 2$, on calcule

$$\|T_\lambda f\|_{L^{2q}(\mathbb{R}^2)}^2 = \|(T_\lambda f)^2\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}$$

et on constate que

$$(T_\lambda f(x))^2 = S_\lambda(f \otimes f)(x),$$

où

$$S_\lambda F(x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\lambda\Phi(x, t, s)} a(x, t) a(x, s) F(t, s) dt ds$$

avec $\Phi(x, t, s) = \varphi(x, t) + \varphi(x, s)$.

Hélas, la phase Φ ne vérifie pas la condition de non-dégénérescence (26) du lemme 3. Plus précisément, en se ramenant par partition de l'unité au cas où le support en t de a est assez petit, on montre aisément, à l'aide de la condition (23), que

$$(27) \quad \left| \det \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial(t, s)} \right] \right| \approx |t - s|.$$

La belle idée de Hörmander consiste alors à introduire de nouvelles coordonnées (u, v) dans le plan des (t, s) , à savoir

$$u = t + s, \quad v = ts.$$

La dégénérescence de ce changement de variables sur la diagonale compense exactement l'annulation dans (27), de sorte qu'on peut appliquer le lemme 3 dans ces nouvelles variables. Il en résulte que

$$\|T_\lambda f\|_{L^q}^2 \leq C \lambda^{-\frac{2}{q}} \left[\int \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(t)|^{\bar{q}} |f(s)|^{\bar{q}}}{|t - s|^{\bar{q}-1}} dt ds \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Le choix de $q = 3$ permet de se ramener à l'inégalité de Hardy-Littlewood pour obtenir (25).

La structure de cette preuve est clairement adaptée à une version bilinéaire. Soit donc $\mu \geq \lambda \geq 1$, et soit $\tilde{a} = \tilde{a}(x, s) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ telle que (23) soit également vraie sur le support de \tilde{a} . Désignons par \tilde{T}_μ l'opérateur défini par (24) en changeant a en \tilde{a} . Pour $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, on remarque que

$$T_\lambda f(x) T_\mu g(x) = S_{\lambda\mu}(f \otimes g)(x),$$

où

$$S_{\lambda\mu}(F)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\mu\Phi_\varepsilon(x, t, s)} a(x, t) \tilde{a}(x, s) F(t, s) dt ds$$

avec

$$\Phi_\varepsilon(x, t, s) = \varphi(x, s) + \varepsilon\varphi(x, t), \quad \varepsilon = \frac{\lambda}{\mu}.$$

En supposant là encore que les supports de a et \tilde{a} sont petits et proches, on constate que

$$(28) \quad \left| \det \left[\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x \partial(t, s)} \right] \right| \approx \varepsilon |t - s|.$$

Sur chacune des zones $\{s > t\}$, $\{t > s\}$, on effectue alors le changement de variables

$$u = \frac{\varepsilon}{2}(t - s)^2, \quad v = s + \varepsilon t, \quad \tilde{\Phi}_\varepsilon(x, u, v) = \Phi_\varepsilon(x, t, s).$$

On vérifie alors que

$$(29) \quad \left| \det \left[\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_\varepsilon}{\partial x \partial(u, v)} \right] \right| \approx 1,$$

et que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$,

$$|\partial_x^\alpha \nabla_{u,v} \tilde{\Phi}_\varepsilon(x, u, v)| \leq C_\alpha.$$

Par des intégrations par parties répétées en x , on en déduit que $S_{\lambda\mu} = S_{\lambda\mu}^+ + S_{\lambda\mu}^-$, avec

$$\|S_{\lambda\mu}^\pm(F)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} K_{\lambda\mu}^\pm(t, s, t', s') F(t, s) \overline{F(t', s')} dt ds dt' ds'$$

et

$$|K_{\lambda\mu}^\pm(t, s, t', s')| \leq C_N (1 + \mu|u - u'| + \mu|v - v'|)^{-N}$$

de telle sorte que l'on ait

$$\sup_{(t,s)} \int_{\mathbb{R}^2} |K_{\lambda\mu}^\pm(t, s, t', s')| dt' ds' \leq C \lambda^{-\frac{1}{2}} \mu^{-1},$$

et une estimation analogue en changeant les rôles de (t, s) et de (t', s') . Il en résulte que

$$\|S_{\lambda\mu}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \tilde{C} \lambda^{-\frac{1}{4}} \mu^{-\frac{1}{2}}.$$

On a donc montré la version bilinéaire suivante du lemme de Carleson-Sjölin.

Lemme 4. — *Avec les notations précédentes, si les supports de a et \tilde{a} sont suffisamment petits et proches, on a l'estimation*

$$\|T_\lambda f T_\mu g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \lambda^{-\frac{1}{4}} \mu^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

si $1 \leq \lambda \leq \mu$.

4.3. Un lemme géométrique. — Voyons enfin comment le lemme précédent permet d'achever la démonstration du théorème 2. Supposons encore $1 \leq \lambda \leq \mu$. En revenant à la description de $\tilde{\chi}_\lambda$ obtenue en section 4.1, on constate que

$$(30) \quad \tilde{\chi}_\lambda(f) \tilde{\chi}_\mu(g) = (\lambda\mu)^{\frac{1}{2}} \int_{\varepsilon/C}^{C\varepsilon} \int_{\varepsilon/C}^{C\varepsilon} T_\lambda^r(f_r) \tilde{T}_\mu^q(g_q) dr dq.$$

On est alors confronté à deux difficultés si l'on veut appliquer le lemme 4.

1. D'abord, les supports en t et en s ne sont pas proches *a priori*! Comme l'estimation est bilinéaire, il faut réaliser une partition de l'unité sur le produit cartésien $S^1 \times S^1$ et étudier les interactions lorsque (t, s) n'est pas nécessairement proche de la diagonale.
2. Les phases dans les opérateurs T_λ^r et T_μ^q sont différentes, i.e. φ_r et φ_q ! En particulier, le lieu des (t, s) où l'on a

$$(31) \quad \det(\nabla_x \partial_t \varphi_r(x, t), \nabla_x \partial_s \varphi_q(x, t)) = 0$$

dépend explicitement de x , ce qui anéantit tout espoir de généraliser la procédure d'intégration par parties qui a conduit au lemme 4.

Traisons d'abord le problème 1. Un calcul élémentaire assure que si x est proche de 0, la propriété (31) impose soit que s est proche de t , soit que s est proche de $t + \pi$. On est donc ramené à étudier des opérateurs

$$T_\lambda^r(f) T_\mu^q = S_{\lambda\mu}^{rq}(f \otimes g),$$

lorsque le symbole de $S_{\lambda\mu}^{rq}$ est supporté soit près de $x = 0, t = t_0, s = t_0$, soit près de $x = 0, t = t_0, s = t_0 + \pi$.

Quant au problème 2, il est résolu au moyen de la remarque suivante. Notons, pour tout x près de 0, pour tout $r \in [\frac{\varepsilon}{C}, C\varepsilon]$,

$$\begin{aligned} \Lambda_r(x) &= \left\{ \left(t, -\frac{\partial \varphi_r}{\partial t}(x, t) \right), \quad t \sim t_0 \right\}, \\ \Lambda'_r(x) &= \left\{ \left(t, \frac{\partial \varphi_r}{\partial t}(x, t) \right), \quad t \sim t_0 + \pi \right\}. \end{aligned}$$

Lemme 5. — *Pour tous $r, q \in [\frac{\varepsilon}{C}, C\varepsilon]$, il existe des germes de transformations canoniques $\kappa_{q,r}, \kappa'_{q,r}$ de $T^*(\mathbb{R})$ tels que, pour tout x près de 0,*

$$\kappa_{q,r}(\Lambda_r(x)) = \Lambda_q(x), \quad \kappa'_{q,r}(\Lambda_r(x)) = \Lambda'_q(x).$$

Supposons ce lemme démontré, et traitons par exemple l'interaction de $T_\lambda^r(f)$ et $T_\mu^q(g)$ lorsque les supports en t et en s sont proches de t_0 . Soit $U_\mu^{q,r}$ un opérateur intégral de Fourier (localement) unitaire semi-classique associé à $\kappa_{q,r}$ (cf. par exemple Robert [23]). Alors l'opérateur $T_\mu^q \circ U_\mu^{q,r}$ est associé à une phase $\psi_{q,r}$ telle que

$$\frac{\partial \psi_{q,r}}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \varphi_r}{\partial t}(x, t)$$

donc $\psi_{q,r}(x, t) = \varphi_r(x, t) + \theta_{q,r}(x)$. Il en résulte que

$$T_\mu^q(U_\mu^{q,r}(h))(x) = e^{i\mu\theta_{q,r}(x)} \tilde{T}_\mu^r(h)(x) + R_\mu(h)(x),$$

où $\|R_\mu\|_{L^2 \rightarrow L^\infty} \lesssim \mu^{-1}$, et où \tilde{T}_μ^r est donné par (24) avec la phase φ_r , le symbole étant localisé près de $x = 0, t = t_0$. Il vient donc

$$\begin{aligned} \|T_\lambda^r(f) T_\mu^q(U_\mu^{q,r}(h))\|_{L^2} &\leq C \left(\|T_\lambda^r(f) \tilde{T}_\mu^r(h)\|_{L^2} + \frac{1}{\mu} \|f\|_{L^2} \|h\|_{L^2} \right) \\ &\leq C \lambda^{-\frac{1}{4}} \mu^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2} \|h\|_{L^2} \end{aligned}$$

d'après le lemme 4. En utilisant l'unitarité de $U_\mu^{q,r}$, on en déduit le théorème 3.

Terminons en indiquant brièvement la construction de $\kappa_{q,r}$ et de $\kappa'_{q,r}$. Etant donnés r, t, τ , on remarque d'abord que l'ensemble

$$\gamma_{t,\tau} = \left\{ x \sim 0, -\frac{\partial \varphi_r}{\partial t}(x, t) = \tau \right\}$$

est une géodésique dont le prolongement passe par $y = \exp_o(re^{it})$. Cette géodésique coupe le cercle géodésique de centre O et de rayon q en deux points $z = \exp_o(qe^{is}), z' = \exp_o(qe^{is'})$, où s est proche de t_0 , et s' est proche de $t_0 + \pi$. De même, pour tout $x \in \gamma_{t,\tau}$, les quantités

$$\sigma = -\frac{\partial \varphi_q}{\partial s}(x, s), \quad \sigma' = \frac{\partial \varphi_q}{\partial s}(x, s')$$

ne dépendent pas de x . On pose alors

$$\kappa_{q,r}(t, \tau) = (s, \sigma), \quad \kappa'_{q,r}(t, \tau) = (s', \sigma'),$$

et on vérifie que $\kappa_{q,r}, \kappa'_{q,r}$, en tant que sections du flot géodésique par des sous-variétés symplectiques, sont canoniques.

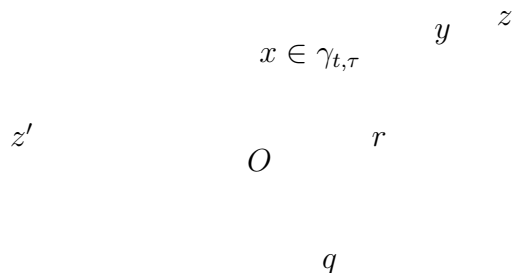


FIG. 2. Les transformations canoniques $\kappa_{q,r}$ et $\kappa'_{q,r}$

Références

- [1] V. Banica. *Thèse, Université de Paris-Sud*, en préparation.
- [2] A. Besse. *Manifolds all of whose geodesics are closed*. Springer-Verlag, 1978. Berlin-New York.
- [3] J. Bourgain. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and application to nonlinear evolution equations I. Schrödinger equations. *Geom. and Funct. Anal.*, 3 : 107–156, 1993.
- [4] J. Bourgain. Exponential sums and nonlinear Schrödinger equations. *Geom. and Funct. Anal.*, 3 :157–178, 1993.
- [5] J. Bourgain. Refinements of Strichartz' inequality and applications to 2D-NLS with critical nonlinearity *IMRN*, 253-283, 1998.

- [6] J. Bourgain. Global solutions of nonlinear Schrödinger equations. *Colloq. Publications, American Math. Soc.*, 1999.
- [7] H. Brézis, T. Gallouët. Nonlinear Schrödinger evolution equations. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 4 :677–681, 1980.
- [8] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov. Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds. *Amer. J. Math.* (à paraître).
- [9] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov. An instability property of the nonlinear Schrödinger equation on S^d . *Math. Res. Lett.*, 9 : 323-335, 2002.
- [10] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov. Two singular dynamics of the nonlinear Schrödinger equation on a plane domain, *Preprint 2002, Geom. and Funct. Anal.* (à paraître).
- [11] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov. An example of singular dynamics for the nonlinear Schrödinger equation on bounded domains. in *Proceedings of the conference on Hyperbolic PDEs and related topics*, Cortona, September 2002, F. Colombini–T. Nishitani editors, à paraître.
- [12] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov. The Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation on compact manifold. *J. Nonlinear Math. Physics*, 2002 (à paraître).
- [13] L. Carleson, P. Sjölin. Oscillatory integrals and a multiplier problem for the disc. *Studia Math.*, 44 : 287-299, 1972.
- [14] T. Cazenave, F. Weissler. The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s . *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 807–836, 1990.
- [15] Y. Colin de Verdière. Le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes périodiques. *Comment. Math. Helvetici*, 54 :508–522, 1979.
- [16] J. Ginibre. Le problème de Cauchy pour des EDP semi-linéaires périodiques en variables d’espace (d’après Bourgain). *Séminaire Bourbaki 796, Astérisque*. 237 : 163-187, 1995.
- [17] J. Ginibre, G. Velo. Smoothing properties and retarded estimates for some dispersive evolution equations. *Commun. Math. Phys.*, 144 :163–188, 1992.
- [18] V. Guillemin. Lectures on spectral theory of elliptic operators. *Duke Math. J.*, 44 :129–137, 1977.
- [19] L. Hörmander. The spectral function of an elliptic operator. *Acta Math.*, 121 :193–218, 1968.
- [20] L. Hörmander. Oscillatory integrals and multipliers on FL^p , *Ark. Mat.*, 11 : 1-11, 1973.

- [21] T. Kato. On nonlinear Schrödinger equations. *Ann. I.H.P. (Phys. Théor.)*, 46 :113–129, 1987.
- [22] S. Klainerman, M. Machedon (with appendices by J. Bourgain and D. Tataru) Remark on Strichartz-type inequalities *IMRN* 201-220, 1996.
- [23] D. Robert. *Autour de l'approximation semi-classique*, volume 68 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 1987.
- [24] C. Sogge. Oscillatory integrals and spherical harmonics. *Duke Math. Jour.*, 53 : 43–65, 1986.
- [25] C. Sogge. Concerning the L^p norm of spectral clusters for second order elliptic operators on compact manifolds. *Jour. of Funct. Anal.*, 77 :123–138, 1988.
- [26] C. Sogge. Fourier integrals in classical analysis. *Cambridge tracts in Mathematics*, 1993.
- [27] R. Stanton, A. Weinstein On the L^4 norm of spherical harmonics. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 89 :343-358, 1981.
- [28] T. Tao. Multilinear weighted convolutions of L^2 functions, and applications to non-linear dispersive equations. *Amer. J. Math.* 123 : 839-908, 2001.

N. BURQ, Université Paris Sud, Mathématiques, Bât 425, 91405 Orsay Cedex

E-mail : Nicolas.burq@math.u-psud.fr

Url : <http://www.math.u-psud.fr/~burq>

P. GÉRARD, Université Paris Sud, Mathématiques, Bât 425, 91405 Orsay Cedex

E-mail : Patrick.gerard@math.u-psud.fr

N. TZVETKOV, Université Paris Sud, Mathématiques, Bât 425, 91405 Orsay Cedex

E-mail : Nikolay.tzvetkov@math.u-psud.fr

Url : <http://www.math.u-psud.fr/~tzvetkov>