ESTIMÉES MULTILINÉAIRES DE PROJECTEURS SPECTRAUX ET ÉQUATIONS DE SCHRODINGER NON LINÉAIRES

par

N. Burq, P. Gérard & N. Tzvetkov

Résumé. — On étudie l'équation de Schrödinger non linéaire sur les variétés de dimension 3. On démontre l'existence globale dans H^1 pour les non linéarités sous-quintiques. Un élément essentiel de la preuve est une estimation multilinéaire du produit de plusieurs fonctions propres du laplacien sur une variété compacte.

1. Introduction

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension 3. Nous nous proposons de poursuivre l'étude, commencée dans [**2, 3, 4, 5**], de l'influence de la géométrie de M sur la dynamique des équations de Schrödinger non linéaires sur M :

$$iu_t + \Delta u = F(u), \quad u|_{t=0} = u_0\,, \tag{1}$$

où l'interaction non linéaire F vérifie $F(0) = 0$ et $F = \frac{\partial V}{\partial \bar{z}}$ avec $V \in C^\infty(\mathbb{C}\,; \mathbb{R})$ tel que

$$V(e^{i\theta} z) = V(z), \quad \theta \in \mathbb{R},\, z \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

et pour un certain $\alpha > 1$ (le degré de la non linéarité),

$$|\partial_z^{k_1} \partial_{\bar{z}}^{k_2} V(z)| \leq C_{k_1,k_2}(1 + |z|)^{1+\alpha-k_1-k_2}\,.$$

La structure Hamiltonienne de l'équation implique que les solutions (régulières) de (1) vérifient les lois de conservation :

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}, \quad E(u(t)) = E(u_0), \tag{3}$$

avec

$$E(u) = \int_M |\nabla_g u|^2 + \int_M V(u)\,. \tag{4}$$

et en particulier si le potentiel V n'est pas "trop négatif", le caractère localement bien posé dans H^1 implique l'existence globale de solutions du problème de Cauchy (1).

Les inégalités de Strichartz (avec perte de dérivées) démontrées dans [**2**] impliquent que (1) est *globalement* bien posé dans H^s, $s > 1$, pour des non linéarités cubiques ($\alpha \leq 3$). De plus nous obtenons aussi l'unicité des solutions faibles dans H^1.

D'un autre coté, Bourgain [**1**] démontre l'existence globale de solutions H^1 sur le tore $\mathbb{T}^3$ pour des non linéarités sous quintiques. Dans cet exposé on se propose de présenter les idées permettant de démontrer l'analogue du théorème de Bourgain sur la sphère S^3 et la variété produit $S^2 \times S^1$:

Théorème 1. — *Soit $M = S^3$ ou $M = S^2 \times S^1$ munies de leur métrique habituelle. On suppose que $\alpha < 5$ (non linéarité sous quintique) et $V(z) \geq -C(1+|z|)^\beta$, $\beta < 10/3$, (cas défocalisant). Alors il existe un espace $X \subset C(\mathbb{R}\,; H^1(M))$ tel que pour tout $u_0 \in H^1(M)$ il existe une unique solution $u \in X$ du problème de Cauchy (1). De plus*

1. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $u_0 \mapsto u(t)$ est Lispchitz sur les bornés de $H^1(M)$.*
2. *Si $u_0 \in H^\sigma(M)$, $\sigma \geq 1$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) \in H^\sigma(M)$.*
3. *Si $u_0 \in H^\sigma(M)$, $\sigma > 3/2$, alors l'unicité a lieu dans $C(\mathbb{R}\,; H^\sigma(M))$.*

Rappellons que le théorème 1 est aussi vrai sur $\mathbb{R}^3$ ([**6, 9**]). Il suffit en effet d'appliquer le schéma de Picard à l'expression intégrale de (1) dans l'espace $L^2_T W^{1,6}(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty_T H^1(\mathbb{R}^3)$, où T depend seulement de $\|u_0\|_{H^1}$.

Sur une variété compacte, cette approche ne fonctionnne pas car les inégalités de Strichartz souffrent d'inévitables pertes de dérivées [**1, 2, 5**]. Pour surmonter les difficultés dues à ces pertes, les améliorations bilinéaires de telles inégalités ont prouvé leur efficacité [**1, 10, 15**]. Nous adoptons cette approche pour la preuve du théorème 1 dans le cas où $M = S^3$. Dans le cas $M = S^2 \times S^1$ la preuve est plus délicate : les inégalités de Strichartz *bilinéaires* que nous savons démontrer sont plus faibles et n'impliquent le théorème 1 que pour des non linéarités sous quartiques ($\alpha < 4$). Cependant nous obtenons des estimations *trilinéaires* qui impliquent le caractère localement bien posé dans $H^s, s > 1$ du problème de Cauchy (1) pour des non linéarités quintiques. Un argument d'interpolation (au niveau de l'analyse de

Littlewood-Paley) permet alors de conclure. Nous présenterons dans une première partie les estimations multilinéaires de projecteurs spectraux et ensuite l'analyse non linéaire dans le cadre des espaces de Bourgain qui permet d'en déduire le théorème 1.

Terminons cette introduction en mentionnant que les obstructions pour l'obtention de résultats analogues en dimensions plus grandes ne sont pas seulement de nature technique : en effet nous avons démontré que pour tout $\alpha \in]1, 2]$, le problème de Cauchy (1), sur S^6 n'a pas de solutions fortes dans H^1 au sens du théorème 1 (voir[**3**]).

2. Estimations multilinéaires

Soit (M, g) une variété riemanienne compacte (sans bord) de dimension d. On note Δ le laplacien sur les fonctions de M.

Théorème 2. — *Soient $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $\chi_\lambda = \chi(\sqrt{-\Delta} - \lambda)$ le projecteur spectral autour de λ. Il existe C tel que pour tout $\lambda, \mu \geq 1$, $f, g \in L^2(M)$,*

$$\|\chi_\lambda f \, \chi_\mu g\|_{L^2(M)} \leq C\Lambda(d, \min(\lambda, \mu))\|f\|_{L^2(M)}\|g\|_{L^2(M)} \,. \tag{5}$$

avec

$$\Lambda(d, \nu) := \begin{cases} \nu^{\frac{1}{4}} & \text{if } d = 2 \\ \nu^{\frac{d-2}{2}} \log^{1/2}(\nu) & \text{if } d = 3 \\ \nu^{\frac{d-2}{2}} & \text{if } d \geq 4 \,. \end{cases}$$

De plus pour $d = 2$ et tous $1 \leq \lambda \leq \mu \leq \nu$, $f, g, h \in L^2(M)$ on a l'estimation trilinéaire suivante :

$$\|\chi_\lambda f \, \chi_\mu g \, \chi_\nu h\|_{L^2(M)} \leq C(\lambda\mu)^{\frac{1}{4}}\|f\|_{L^2(M)}\|g\|_{L^2(M)}\|h\|_{L^2(M)}. \tag{6}$$

Remarque 2.1. — *On a évidemment la même estimation en remplaçant les projecteurs spectraux par des fonctions propres et en particulier ce résultat implique de nouvelles estimations multilinéaires sur les harmoniques sphériques*

Remarque 2.2. — *Le théorème 2 est optimal (dans le cas où $M = S^d$). Il suffit pour le vérifier de considérer si $d \leq 3$ les harmoniques sphériques de plus haut poids $e_n(x) = (x_1 + ix_2)^n$ (ici on considère $S^d \subset R^{d+1}$) qui se concentrent sur un grand cercle géodésique et pour $d \geq 3$ de considérer les harmoniques sphériques* zonales *qui se concentrent en deux points diamétralement opposés*

Remarque 2.3. — *La version* linéaire *de ce théorème ($\lambda = \mu = \nu$), sans la perte logarithmique pour $d = 3$, est due à Sogge* [**11, 12, 13**]. *Dans le cas de la dimension 2, nous avions obtenu la partie bilinéaire du théorème 2. Notre preuve dans* [**5**] *était inspirée par un travail de Hörmander* [**8**] *sur les opérateurs satisfaisant à la condition de Carleson Sjölin. Ici notre preuve est différente (même pour $d = 2$) et repose sur une bilinéarisation des arguments de* [**11, 12, 13**], *dans l'esprit de Stein* [**14**].

On va donner dans cette section quelques idées de la démonstration de (5).

Si $\lambda \leq 1$ ou $\mu \leq 1$ le résultat est facile. On suppose donc $1 \leq \lambda \leq \mu$. On montre d'abord assez simplement que l'estimée (5) pour une n'importe quelle fonction particulière (non triviale) χ_0 implique (5) pour χ arbitraire.

On revient maintenant à la démonstration pour un choix particulier de fonction χ. On écrit (suivant Sogge [**13**]) une paramétrixe pour le projecteur spectral et on obtient pour une fonction χ particulière :

$$\chi_\lambda f = \lambda^{\frac{d-1}{2}} T_\lambda f + R_\lambda f, \qquad \|R_\lambda f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{L^2}$$

et dans un système de coordonnées proche de $x_0 \in M$,

$$T_\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda\varphi(x,y)} a(x, y, \lambda) f(y) dy$$

où $a(x, y, \lambda)$ est un polynôme en λ^{-1} à coefficients réguliers supportés dans l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2d};\ |x| \leq \delta \ll \frac{\varepsilon}{C} \leq |y| \leq C\varepsilon\}$$

avec $-\varphi(x, y) = d_g(x, y)$ la distance géodésique entre x et y.

En coordonnées géodésiques $y = \exp_0(r\omega)$, $r > 0$, $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ on a

$$T_\lambda f(x) = \int_0^\infty \int_{\omega\in\mathbb{S}^{d-1}} e^{i\lambda\varphi_r(x,\omega)} a_r(x, \omega, \lambda) f_r(\omega) dr d\omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty T_\lambda^r f_r(x) dr.$$

où

$$dy = \kappa(r, \omega) dr d\omega, \quad \varphi_r(x, \omega) = \varphi(x, r, \omega),$$
$$a_r(x, \omega, \lambda) = \kappa(r, \omega) a(x, r, \omega, \lambda), \quad f_r(\omega) = f(r, \omega).$$

On obtient

$$(T_\lambda f\, T_\mu g)(x) = \int_{\varepsilon/C}^{C\varepsilon} \int_{\varepsilon/C}^{C\varepsilon} T_\lambda^r f_r(x)\, T_\mu^q g_q(x) dr dq,$$

et l'inégalité de Minkovski montre qu'il suffit, pour démontrer (5) de montrer, uniformément par rapport à $1 \leq \lambda \leq \mu$:

$$\|T_\lambda^r f\, T_\mu^q g\|_{L^2} \leq C\Lambda(d, \lambda)(\lambda\mu)^{-\frac{(d-1)}{2}} \|f\|_{L^2(S^{d-1})} \|g\|_{L^2(S^{d-1})}. \tag{7}$$

Une première propriété de la phase (conséquence du lemme de Gauss) est donnée par le lemme suivant :

Lemme 2.4. — *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $r \in [\varepsilon/C, C\varepsilon]$, et tout*

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d,$$

on a

$$\nabla_x \varphi_r(0, \omega) = \omega \, .$$

Ce lemme implique la propriété cruciale de la phase que nous utilisons :

Lemme 2.5. — *Soit $x = (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ avec $t = x_1$ and $z = (x_2, \dots, x_d)$. Alors pour tout*

$$\underline{\omega} = (\underline{\omega_1}, \dots, \underline{\omega_d}) \in S^{d-1}$$

vérifiant $\underline{\omega_1} \neq 0$, il existe un voisinage $U \subset S^{d-1}$ de $\underline{\omega}$, $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour $\varepsilon/C \leq r \leq C\varepsilon$ et $|x| < \delta$:

1. *La phase $\varphi_r(t, z, w)$, ou $w \in \mathbb{R}^{d-1}$ est un système de coordonnées dans U, est uniformément non dégénérée en (z, w) :*

$$\left| \det \left(\frac{\partial^2 \varphi_r(t, z, w)}{\partial z_j \partial w_i} \right) \right| \geq c > 0. \tag{8}$$

2. *Pour $w \in \mathbb{R}^{d-1}$ un système de coordonnées dans U, on pose*

$$S_{t,z} = \{ w \mapsto \nabla_{t,z} \varphi_r(t, z, w) \}$$

qui est, d'après (8), une hypersurface régulière de $\mathbb{R}^d$. Alors $S_{t,z}$ a toutes ses courbures principales non nulles : si on note $n(t, z, w)$ le vecteur unitaire normal à la surface $S_{t,z}$ au point $\nabla_{t,z} \varphi_r(t, z, w)$ alors

$$\left| \det \langle \frac{\partial^2}{\partial w_j \partial w_i} \nabla_{t,z} \varphi_r(t, z, w), n(t, z, w) \rangle \right| \geq c > 0. \tag{9}$$

Une conséquence de la non dégénérescence de la phase $\varphi_r(t, z, w)$ (t étant considéré comme un paramètre) est le résultat suivant (qui peut être vu comme un raffinement de la continuité L^2 du projecteur spectral) :

Lemme 2.6. — *Sous les hypothèses de la proposition 2.5, l'opérateur*

$$g \in L^2_w \longmapsto (T^r_\nu g)(t, z) \in L^\infty(\mathbb{R}_t; L^2(\mathbb{R}^{d-1}_z))$$

est continu et sa norme est bornée par $C\nu^{-(d-1)/2}$.

Le résultat suivant est en revanche une conséquence de la propriété de courbure (9).

Lemme 2.7. — *Sous les hypothèses de la proposition 2.5 l'opérateur*

$$g \in L^2_w \longmapsto (T^r_\nu)g(t,z) \in L^2(\mathbb{R}_t; L^\infty(\mathbb{R}^{d-1}_z))$$

est continu et sa norme bornée par $C\Lambda(d,\nu)\nu^{-(d-1)/2}$.

Pour démontrer (7), on écrit

$$(T^r_\lambda f\, T^q_\mu g)(x)$$
$$= \int_{S^{d-1}\times S^{d-1}} e^{i\lambda\varphi_r(x,\omega)+i\mu\varphi_q(x,\omega')} a_r(x,\omega,\lambda)a_q(x,\omega',\mu)f(\omega)g(\omega')d\omega d\omega'.$$

En utilisant une partition de l'unité, on peut supposer que le support de

$$a_r(x,\omega,\lambda)a_q(x,\omega',\mu),$$

(ω,ω') est proche d'un point $(\underline{\omega}^{(1)},\underline{\omega}^{(2)})$. On remarque alors qu'il existe un vecteur unitaire e tel que $e\cdot\underline{\omega}^{(1)} \neq 0$ et $e\cdot\underline{\omega}^{(2)} \neq 0$. Quitte à faire une rotation, on peut supposer que $e=(1,0,\cdots,0)$. On utilise alors le lemme 2.5 et on obtient

$$\|T^r_\lambda f\, T^q_\mu g\|_{L^2_t L^2_z} \leq \|T^r_\lambda f\|_{L^2_t L^\infty_z}\|T^q_\mu g\|_{L^\infty_t L^2_z} \leq C\Lambda(d,\lambda)(\lambda\mu)^{-\frac{d-1}{2}}\|f\|_{L^2_w}\|g\|_{L^2_w}.$$

3. Analyse non linéaire

3.1. Espaces de Bourgain. — Soient (M,g) une variété Riemanienne compacte de dimension d et $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale de $L^2(M)$ formée de fonctions propres du laplacien associées aux valeurs propres $-\lambda_k$. On note P_k le projecteur orthogonal sur e_k. L'espace de Sobolev $H^s(M)$ est muni de la norme

$$\|u\|^2_{H^s(M)} = \sum_k \langle\lambda_k\rangle^s \|P_k u\|^2_{L^2(M)},$$

où $\langle x\rangle = \sqrt{1+x^2}$. L'espace de Bourgain $X^{s,b}(\mathbb{R}\times M)$ est muni de la norme

$$\|u\|^2_{X^{s,b}(\mathbb{R}\times M)} = \sum_k \langle\lambda_k\rangle^s \|\langle\tau+\lambda_k\rangle^b \widehat{P_k u}(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_\tau\times M)} = \|e^{it\Delta}u(t,\cdot)\|^2_{H^b(\mathbb{R}_t\,;\,H^s(M))},$$

où $\widehat{P_k u}(\tau)$ est la transformée de Fourier partielle en temps de $P_k u$.

On considère la formulation intégrale de notre problème

$$u(t) = e^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}F(u(\tau))d\tau\,. \tag{10}$$

Le résultat suivant (voir [**7**]) est à la base de notre analyse non linéaire :

Proposition 3.1. — *On suppose qu'il existe $(b,b')\in\mathbb{R}^2$ vérifiant*

$$0<b'<\frac{1}{2}<b,\quad b+b'<1 \tag{11}$$

et tels que pour tout $s\geq 1$ il existe C tel que pour tout $u\in X^{s,b}$,

$$\|F(u)\|_{X^{s,-b'}(\mathbb{R}\times M)}\leq C\Big(1+\|u\|^{\alpha-1}_{X^{1,b}(\mathbb{R}\times M)}\Big)\|u\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}\times M)}\,, \tag{12}$$

et pour tous $u,v\in X^{s,b}$,

$$\|F(u)-F(v)\|_{X^{s,-b'}(\mathbb{R}\times M)}\leq \\ C\Big(1+\|u\|^{\alpha-1}_{X^{s,b}(\mathbb{R}\times M)}+\|v\|^{\alpha-1}_{X^{s,b}(\mathbb{R}\times M)}\Big)\|u-v\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}\times M)}\,. \tag{13}$$

Alors pour tout borné B de $H^1(M)$ il existe $T>0$ tel que pour tout $u_0\in B$ il existe une unique solution $u\in X^{1,b}_T$ (l'espace des restrictions à $[0,T]$ des fonctions de $X^{1,b}$) de (10). De plus pour tout $t\in[-T,T]$ l'application $u_0\mapsto u(t)$ est Lipschitz de B dans $H^1(M)$ et la régularité H^s est propagée par le flot.

Dans la suite de ce texte, nous allons donner quelques idées de la démonstration de (12) dans le cas $M=S^3$.

3.2. Estimées de Strichartz bilinéaires. — Le point de départ est la version bilinéaire suivante des inégalités de Strichartz L^4 sur S^3 démontrées dans [**2**].

Proposition 3.2. — *Pour tout intervale $I\subset\mathbb{R}$, il existe C tel que pour tout $N_1,N_2\geq 1$, $f_1,f_2\in L^2(M)$,*

$$\|\prod_{j=1}^{2}e^{it\Delta}(\Delta_{N_j}f_j)\|_{L^2(I\times M)}\leq C(\min(N_1,N_2))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\prod_{j=1}^{2}\|\Delta_{N_j}f_j\|_{L^2(M)}\,.$$

où

$$\Delta_N(u):=\sum_{k\,:\,N\leq\langle\lambda_k\rangle^{\frac{1}{2}}<2N}P_ku\,.$$

On peut supposer $I=[0,T]$ et comme pour $f\in L^2(M)$ le fonction $e^{it\Delta}f$ est 2π périodique en temps, on peut aussi supposer $T=2\pi$. On écrit

$$\prod_{j=1}^{2}e^{it\Delta}(\Delta_{N_j}f_j)=\sum_{j=1}^{2}\sum_{N_j\leq\langle\lambda_{k_j}\rangle^{\frac{1}{2}}<2N_j}e^{-it(\lambda_{k_1}+\lambda_{k_2})}P_{k_1}(f_1)P_{k_2}(f_2)\,.$$

En utilisant Plancherel en temps, on obtient

$$\| \prod_{j=1}^{2} e^{it\Delta}(\Delta_{N_j} f_j)\|^2_{L^2([0,2\pi]\times M)} = \sum_{\tau\in\mathbb{Z}} \Big\| \sum_{\tau=\lambda_{k_1}+\lambda_{k_2}} P_{k_1}(f_1)P_{k_2}(f_2)\Big\|^2_{L^2(M)},$$

où on somme sur les (k_1,k_2) tels que $N_j \leq \langle\lambda_{k_j}\rangle^{\frac12} < 2N_j$, $j=1,2$. D'après l'inégalité triangulaire (appliquée à la norme $L^2(M)$), l'inégalité de Cauchy Schwartz (appliquée à la somme en (k_1,k_2)), et l'inégalité bilinéaire du théorème 2, on obtient

$$\| \prod_{j=1}^{2} e^{it\Delta}(\Delta_{N_j} f_j)\|^2_{L^2([0,2\pi]\times M)} \leq C(\min(N_1,N_2))^{\frac12} \sup_{\tau\in\mathbb{Z}} \alpha_{N_1,N_2}(\tau) \prod_{j=1}^{2} \|\Delta_{N_j} f_j\|^2_{L^2(M)}\,,$$

où

$$\alpha_{N_1,N_2}(\tau) = \#\Big\{(k_1,k_2)\in\mathbb{N}^2\,:\,\tau-2=k_1^2+k_2^2,\, N_j\leq\langle\lambda_{k_j}\rangle^{\frac12}<2N_j,\, j=1,2\Big\}.$$

On conclut en utilisant :

Lemme 3.3. — *Pour tout $\varepsilon>0$ il existe $C>0$ tels que pour tous $\tau,N\in\mathbb{N}$,*

$$\#\{(k_1,k_2)\in\mathbb{N}^2\,:\,N\leq k_1<2N,\quad k_1^2+k_2^2=\tau\}\leq CN^{\varepsilon}.$$

On obtient ainsi la proposition 3.2. On en déduit :

Proposition 3.4. — *Pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\beta<\frac12$ et $C>0$ tels que pour tous $N_1,N_2,L_1,L_2\geq 1$, et tous $u_1,u_2\in L^2(\mathbb{R}\times M)$,*

$$\| \prod_{j=1}^{2} \Delta_{N_jL_j}(u_j)\|_{L^2(\mathbb{R}\times M)} \leq C(L_1L_2)^{\beta}(\min(N_1,N_2))^{\frac12+\varepsilon} \prod_{j=1}^{2} \|\Delta_{N_jL_j}(u_j)\|_{L^2(\mathbb{R}\times M)}\,.$$

L'invariance de jauge (2) et le fait que $F(0)=0$ impliquent que

$$F(u)-(\partial F)(0)\,u-(\overline{\partial}F)(0)\,\overline{u}$$

s'annule à l'ordre au moins 3 en 0. Il suffit donc de démontrer l'estimation

$$\|F(u)\|_{X^{s,-b'}(\mathbb{R}\times M)} \leq C\Big(\|u\|^2_{X^{1,b}(\mathbb{R}\times M)} + \|u\|^{\alpha-1}_{X^{1,b}(\mathbb{R}\times M)}\Big)\|u\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}\times M)} \tag{14}$$

dans le cas où F s'annule à l'ordre au moins 3 en 0.

Pour $N\geq 1$ un entier dyadique ($N=2^n$, $n\in\mathbb{Z}$), on définit l'opérateur S_N par

$$S_N := \sum_{N_1\leq N} \Delta_{N_1}.$$

On définit aussi $S_{\frac{1}{2}}(u) := 0$. On écrit alors la série téléscopique

$$F(u) = \sum_{N_1} \left[F(S_{N_1}(u)) - F(S_{N_1/2}(u)) \right],$$

où on somme sur toutes les valeurs dyadiques de N_1. On a alors la décomposition $F(u) = F_1(u) + F_2(u)$, avec

$$F_1(u) = \sum_{N_1} \Delta_{N_1}(u)\, G_1(\Delta_{N_1}(u), S_{N_1/2}(u))\,.$$

$$F_2(u) = \sum_{N_1} \overline{\Delta_{N_1}(u)}\, G_2(\Delta_{N_1}(u), S_{N_1/2}(u))\,.$$

En réitérant ce processus, on se ramène à l'étude de termes du type

$$F_{11}(u) = \sum_{N_3 \leq N_2 \leq N_1} \Delta_{N_1}(u)\Delta_{N_2}(u)\Delta_{N_3}(u) H^{N_2,N_3}(\Delta_{N_3}(u), S_{N_3/2}(u)) \tag{15}$$

avec

$$|H^{N_2,N_3}(z_1,z_2)| \leq C(1+|z_1|+|z_2|)^{\max(\alpha-3,0)}, \quad j=1,2. \tag{16}$$

On écrit

$$\Delta_N = \sum_L \Delta_{NL}, \tag{17}$$

$$I := \sum_{\substack{L_0,L_1,L_2,L_3 \\ N_0, N_3 \leq N_2 \leq N_1}} \int_{\mathbb{R}\times M} \Delta_{N_0 L_0}(w) \prod_{j=1}^{3} \Delta_{N_j L_j}(u) H^{N_2,N_3}(\Delta_{N_3}(u), S_{N_3/2}(u)),$$

où on somme sur toutes les valeurs dyadiques de N_j, L_j, $j = 0,1,2,3$. Un argument de dualité montre que (14) est équivalent à

$$I \leq C\|w\|_{X^{-s,b'}(\mathbb{R}\times M)} \Big(\|u\|^2_{X^{1,b}(\mathbb{R}\times M)} + \|u\|^{\alpha-1}_{X^{1,b}(\mathbb{R}\times M)} \Big) \|u\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}\times M)}\,.$$

On décompose I en

$$I := I_1 + I_2,$$

où

$$I_1 = \sum_{L_0,L_1,L_2,L_3} \sum_{N_3 \leq N_2 \leq N_1} \sum_{N_0\,:\, N_0 \leq \Lambda N_1} I^{N_0,N_1,N_2,N_3}_{L_0,L_1,L_2,L_3}$$

et $\Lambda > 1$ est une grande constante. La contribution de I_2 se majore assez simplement. En effet, on peut le voir comme le produit scalaire de $\Delta_{N_0 L_0}(w)$ qui oscille en fréquences de l'ordre de N_0 avec une fonction qui est concentrée en fréquences plus petites.

Etudions I_1. D'après la proposition 3.4, et l'inégalité de Hölder on obtient que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\beta < \frac{1}{2}$ tel que,

$$I_{L_0,L_1,L_2,L_3}^{N_0,N_1,N_2,N_3} \leq C_\varepsilon (N_2N_3)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(L_0L_1L_2L_3)^\beta \|H^{N_2,N_3}(\Delta_{N_3}(u), S_{N_3/2}(u))\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times M)} \\ \|\Delta_{N_0L_0}(w)\|_{L^2(\mathbb{R}\times M)} \prod_{j=1}^3 \|\Delta_{N_jL_j}(u)\|_{L^2(\mathbb{R}\times M)}$$

D'après (16) on a

$$\|H^{N_2,N_3}(\Delta_{N_3}(u), S_{N_3/2}(u))\|_{L^\infty} \leq C\big(1 + \|\Delta_{N_3}(u)\|_{L^\infty} + \|S_{N_3/2}(u)\|_{L^\infty}\big)^{\max(\alpha-3,0)}$$

D'après (17), une injection de Sobolev dans le contexte $X^{s,b}$ et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient pour $b > 1/2$,

$$\|\Delta_{N_3}(u)\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times M)} + \|S_{N_3/2}(u)\|_{L^\infty} \leq CN_3^{\frac{1}{2}}\|u\|_{X^{1,b}}\,,$$

ce qui implique

$$\|H^{N_2,N_3}(\Delta_{N_3}(u), S_{N_3/2}(u))\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times M)} \leq 1 + C(N_3^{\frac{1}{2}}\|u\|_{X^{1,b}})^{\max(\alpha-3,0)}\,. \tag{18}$$

Pour sommer en N_0, N_1, on utilise le lemme de Schur discret suivant :

Lemme 3.5. — *Pour tous $\Lambda > 0$, $s > 0$ il existe $C > 0$ tels que si (c_{N_0}) et (d_{N_1}) sont deux suites indexées par les entiers dyadiques, alors*

$$\sum_{N_0\leq \Lambda N_1} \frac{N_0^s}{N_1^s} c_{N_0}\, d_{N_1} \leq C\Big(\sum_{N_0} c_{N_0}^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{N_1} d_{N_1}^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour estimer I_1, on somme d'abord par rapport à L_0, L_1, N_0, N_1. En utilisant le lemme 3.5 et (18), on obtient pour $b > 1/2$ et $1/2 > b' > \beta$,

$$I_1 \leq C_\varepsilon \|u\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}\times M)}\|w\|_{X^{-s,b'}(\mathbb{R}\times M)}\Big(1 + \|u\|_{X^{1,b}(\mathbb{R}\times M)}^{\max(\alpha-3,0)}\Big) \\ \sum_{L_2,L_3}\sum_{N_3\leq N_2} (N_2N_3)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(L_2L_3)^\beta N_3^{\frac{\max(\alpha-3,0)}{2}} \prod_{j=2}^3 \|\Delta_{N_jL_j}(u)\|_{L^2(\mathbb{R}\times M)}\,.$$

Puisque $\alpha < 5$ et $N_3 \leq N_2$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$(N_2N_3)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}N_3^{\frac{\max(\alpha-3,0)}{2}} \leq N_2N_3(N_2N_3)^{-\varepsilon}\,.$$

et donc en sommant des séries géométriques en N_2, N_3, L_2, L_3, on obtient

$$I_1 \leq C\|w\|_{X^{-s,b'}(\mathbb{R}\times M)}\Big(\|u\|_{X^{1,b}(\mathbb{R}\times M)}^2 + \|u\|_{X^{1,b}(\mathbb{R}\times M)}^{\alpha-1}\Big)\|u\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}\times M)}\,.$$

Références

[1] J. Bourgain. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and application to nonlinear evolution equations I. Schrödinger equations. *Geom. And Funct. Anal.*, 3 : 107–156, 1993.

[2] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov. Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds. *Amer. J. Math.* 126 : 569-605, 2004.

[3] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov. An instability property of the nonlinear Schrödinger equation on S^D. *Math. Res. Lett.*, 9 : 323-335, 2002.

[4] N. Burq, P. Gérard, And N. Tzvetkov. The Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation on compact manifold. *J. Nonlinear Math. Physics*, 10 : 12-27, 2003.

[5] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov. Bilinear eigenfunction estimates and the non linear Schrödinger equation on surfaces *Inventiones Mathematicae*, 2004 (à paraître).

[6] J. Ginibre And G. Velo. On a class of nonlinear Schrödinger equations. *J. of Func. Anal.*, 32 : 1-71, 1979.

[7] J. Ginibre. Le problème de Cauchy pour des EDP semi-linéaires périodiques en variables d'espace (d'après Bourgain). *Séminaire Bourbaki*, pages 163–187, 1995.

[8] L. HÖrmander. Oscillatory integrals and multipliers on FL^P, *Ark. Mat.*, 11 : 1-11, 1973.

[9] T. Kato. On nonlinear Schrödinger equations. *Ann. I.H.P. (Phys. Théor.)*, 46 :113–129, 1987.

[10] S. Klainerman, M. Machedon (with appendices by J. Bourgain and D. Tataru). Remark on Strichartz-type inequalities *IMRN* 201-220, 1996.

[11] C. Sogge. Oscillatory integrals and spherical harmonics. *Duke Math. Jour.*, 53 : 43–65, 1986.

[12] C. Sogge. Concerning the L^P norm of spectral clusters for second order elliptic operators on compact manifolds. *Jour. Of Funct. Anal.*, 77 :123–138, 1988.

[13] C. Sogge. Fourier integrals in classical analysis. *Cambridge Tracts In Mathematics*, 1993.

[14] E.M. Stein Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. *Monographs In Harmonic Analysis, III*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1993.

[15] T. Tao. Multilinear weighted convolutions Of L^2 functions, and applications to nonlinear dispersive equations. *Amer. J. Math.* 123 : 839-908, 2001.

N. Burq, Université Paris Sud, Mathématiques, Bât 425, 91405 Orsay Cedex
E-mail : `Nicolas.burq@math.u-psud.fr` • *Url :* `http://www.math.u-psud.fr/~burq`

P. Gérard, Université Paris Sud, Mathématiques, Bât 425, 91405 Orsay Cedex
E-mail : Patrick.gerard@math.u-psud.fr

N. Tzvetkov, Université Paris Sud, Mathématiques, Bât 425, 91405 Orsay Cedex
E-mail : Nikolay.tzvetkov@math.u-psud.fr
Url : http://www.math.u-psud.fr/~tzvetkov