

Corrigé de l'examen partiel du 21 octobre 2024

Exercice I

Dans le plan $\mathbf{R}^2$, on considère la droite $\mathcal{D}_1$ donnée par le paramétrage

$$M_1(t) = (-5 + 3t, 6 - 2t)$$

pour $t \in \mathbf{R}$, et la droite $\mathcal{D}_2$ donnée par le paramétrage

$$M_2(t) = (-3 + 8t, 1 + 2t)$$

pour $t \in \mathbf{R}$.

(1) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_2$.

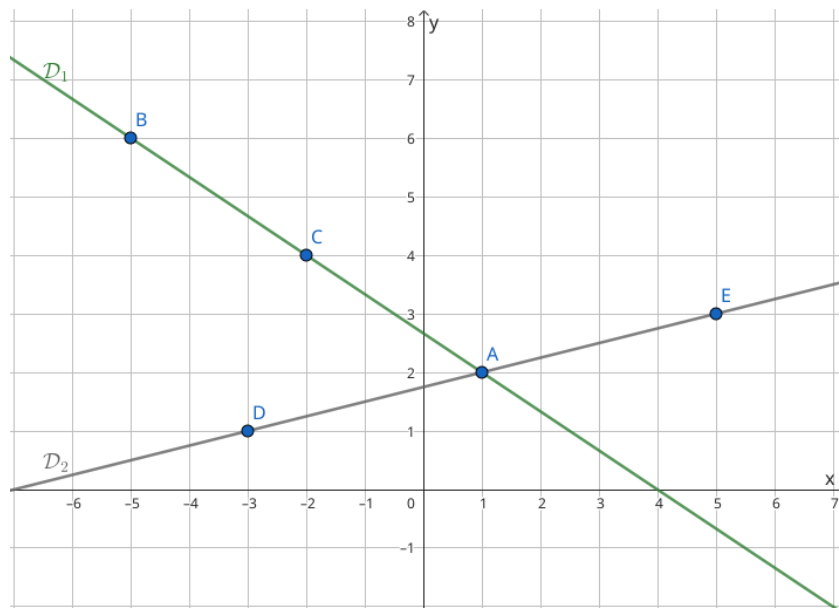
On remarque que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $(-3 + 8t) - 4(1 + 2t) = -7$, donc $x - 4y = -7$ est une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_2$.

(2) Déterminer le point d'intersection A de $\mathcal{D}_1$ et de $\mathcal{D}_2$.

Soit $t \in \mathbf{R}$. Le point $M_1(t)$ appartient à $\mathcal{D}_2$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne déterminée à la question précédente, c'est-à-dire si $(-5 + 3t) - 4(6 - 2t) = -7$. Après calcul, cette condition se reformule en l'égalité $11t - 29 = -7$, qui équivaut à $11t = 22$ ou encore à $t = 2$. Le point d'intersection A de $\mathcal{D}_1$ et de $\mathcal{D}_2$ est donc $A = M_1(2) = (1, 2)$.

(3) Sur une figure, représenter les axes, les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et le point A . Expliquer la méthode utilisée pour tracer les deux droites.

Une manière de construire les deux droites est d'utiliser les paramétrages. La droite $\mathcal{D}_1$ passe par les points $B := M_1(0) = (-5, 6)$ et $C := M_1(1) = (-2, 4)$. La droite $\mathcal{D}_2$ passe par les points $D := M_2(0) = (-3, 1)$ et $E := M_2(1) = (5, 3)$. (Dans le cas de $\mathcal{D}_2$, comme on dispose déjà d'une équation cartésienne, il serait également possible d'en déduire une équation cartésienne réduite pour tracer la droite.)



Exercice II

Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + 4z = 16 \\ 3x + 5y + 8z = 27 \end{cases}$$

Avec l'algorithme du pivot de Gauss, on peut mettre sous forme échelonnée réduite la matrice augmentée associée à ce système :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 16 \\ 3 & 5 & 8 & 27 \end{array} \right) \\ & \sim \left[\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \right] \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{array} \right) \\ & \sim \left[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \right] \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ & \sim \left[\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} \right] \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ & \sim \left[L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \right] \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

L'unique solution du système est donc $(3, 2, 1)$.

Exercice III

On considère la matrice augmentée suivante

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 3 & 3 & 8 \end{array} \right)$$

(1) Combien d'équations et combien de variables possède le système d'équations linéaires associé à $\widehat{A}$?

| Le système possède trois équations et cinq variables.

(2) En notant les variables x_1, x_2 , etc, écrire le système d'équations linéaires associé à $\widehat{A}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 4 \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 8 \end{array} \right.$$

(3) Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice $\hat{A}$ afin d'obtenir une matrice échelonnée.

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 3 & 3 & 8 \end{array} \right) \\
 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 9 & -1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \\
 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2
 \end{array}$$

(4) Que peut-on dire de l'ensemble des solutions du système ?

La dernière ligne de la matrice obtenue s'interprète comme l'équation « $0 = 1$ » qui est bien sûr toujours fausse, donc le système ne possède pas de solutions, autrement dit l'ensemble des solutions est vide.

Exercice IV

Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, on considère trois plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ donnés par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + 5y + 2z = 3\} \\ \mathcal{P}_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, -2x - 9y + 2z = 5\} \\ \mathcal{P}_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + 3y + 5z = 11\}\end{aligned}$$

(1) Déterminer un paramétrage $M(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$ de la droite $\mathcal{D} := \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

Il s'agit de résoudre le système d'équations donné par les équations de $\mathcal{P}_1$ et de $\mathcal{P}_2$:

$$\begin{aligned}&\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & -9 & 2 & 5 \end{array}\right) \\&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 & 11 \end{array}\right) & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -28 & -52 \\ 0 & -1 & 6 & 11 \end{array}\right) & L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2 \\&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -28 & -52 \\ 0 & 1 & -6 & 11 \end{array}\right)\end{aligned}$$

Le système est donc équivalent aux deux équations

$$\begin{cases} x = -52 + 28z \\ y = 11 - 6z \end{cases}$$

La mise sous forme échelonnée nous a permis d'exprimer x et y en fonction de z . Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on peut noter $M(t)$ l'unique solution dont la coordonnée z est t , et on obtient ainsi un paramétrage :

$$M(t) = (-52 + 28t, 11 - 6t, t)$$

(2) Déterminer l'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}_3$.

Il s'agit de déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbf{R}$ le point $M(t)$ (de $\mathcal{D}$) appartient à $\mathcal{P}_3$, c'est-à-dire satisfait l'équation $x + 3y + 5z = 11$. On obtient :

$$(-52 + 28t) + 3(11 - 6t) + 5t = 15t - 19$$

On doit résoudre l'équation $15t - 19 = 11$, dont $t = 2$ est l'unique solution. Le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}_3$ est donc $M(2) = (4, -1, 2)$.

(3) Quelles sont les solutions du système suivant ? (*Indication : ne pas faire de calculs.*)

$$\begin{cases} x + 5y + 2z = 3 \\ -2x - 9y + 2z = 5 \\ x + 3y + 5z = 11 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions s'interprète comme l'intersection des trois plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$, qui est aussi égale à $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}_3$ qui a été déterminé à la question précédente. L'unique solution est donc $(4, -1, 2)$.

Exercice V

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 3 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 7x_6 = -2 \\ x_5 - 3x_6 = 8 \end{cases}$$

(1) Quelle est la matrice augmentée de ce système ? Le système est-il compatible, autrement dit admet-il au moins une solution ?

La matrice augmentée est :

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 5 & 2 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 8 \end{array} \right)$$

Le système considéré étant déjà échelonné (la matrice à gauche de la barre verticale est échelonnée), il suffit d'observer qu'il n'y a pas de ligne s'interprétant comme une équation $0 = a$ avec $a \neq 0$ pour pouvoir conclure que le système est compatible.

(2) Quelles sont les variables principales ? Quelles sont les variables secondaires ?

Les variables principales (correspondant aux colonnes où se trouvent les pivots) sont x_1, x_3 et x_5 . Les variables secondaires sont x_2, x_4 et x_6 .

(3) Résoudre ce système en exprimant les variables principales en fonction des variables secondaires.

Mettons la matrice sous forme échelonnée réduite :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 5 & 2 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 8 \end{array} \right) \\ & \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 5 & 2 & -4 & 0 & 7 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 16 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 8 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array} \right] \\ \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \end{array} \\ & \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 5 & 0 & -8 & 0 & -25 & 39 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 16 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 8 \end{array} \right) \end{aligned}$$

On peut alors exprimer les solutions :

$$\begin{cases} x_1 = 39 - 5x_2 + 8x_4 + 25x_6 \\ x_3 = -26 - 2x_4 - 16x_6 \\ x_5 = 8 + 3x_6 \end{cases}$$

(Les variables secondaires x_2, x_4 et x_6 peuvent prendre des valeurs arbitraires.)