

Examen partiel du 21 octobre 2024 – durée : deux heures

Documents et calculatrices interdits.

Lorsque vous effectuez des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, ou sur les équations d'un système linéaire, **vous devez impérativement préciser ces opérations sur votre copie.**

Exercice I

Dans le plan $\mathbf{R}^2$, on considère la droite $\mathcal{D}_1$ donnée par le paramétrage

$$M_1(t) = (-5 + 3t, 6 - 2t)$$

pour $t \in \mathbf{R}$, et la droite $\mathcal{D}_2$ donnée par le paramétrage

$$M_2(t) = (-3 + 8t, 1 + 2t)$$

pour $t \in \mathbf{R}$.

- (1) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_2$.
- (2) Déterminer le point d'intersection A de $\mathcal{D}_1$ et de $\mathcal{D}_2$.
- (3) Sur une figure, représenter les axes, les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et le point A . Expliquer la méthode utilisée pour tracer les deux droites.

Exercice II

Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + 4z = 16 \\ 3x + 5y + 8z = 27 \end{cases}$$

Exercice III

On considère la matrice augmentée suivante

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 3 & 3 & 8 \end{array} \right)$$

- (1) Combien d'équations et combien de variables possède le système d'équations linéaires associé à $\widehat{A}$?
- (2) En notant les variables x_1, x_2 , etc, écrire le système d'équations linéaires associé à $\widehat{A}$.
- (3) Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice $\widehat{A}$ afin d'obtenir une matrice échelonnée.
- (4) Que peut-on dire de l'ensemble des solutions du système?

Exercice IV

Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, on considère trois plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ donnés par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + 5y + 2z = 3\} \\ \mathcal{P}_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, -2x - 9y + 2z = 5\} \\ \mathcal{P}_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + 3y + 5z = 11\}\end{aligned}$$

- (1) Déterminer un paramétrage $M(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$ de la droite $\mathcal{D} := \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.
- (2) Déterminer l'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}_3$.
- (3) Quelles sont les solutions du système suivant? (*Indication : ne pas faire de calculs.*)

$$\begin{cases} x + 5y + 2z = 3 \\ -2x - 9y + 2z = 5 \\ x + 3y + 5z = 11 \end{cases}$$

Exercice V

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 3 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 7x_6 = -2 \\ x_5 - 3x_6 = 8 \end{cases}$$

- (1) Quelle est la matrice augmentée de ce système? Le système est-il compatible, autrement dit admet-il au moins une solution?
- (2) Quelles sont les variables principales? Quelles sont les variables secondaires?
- (3) Résoudre ce système en exprimant les variables principales en fonction des variables secondaires.