

Examen du 17 décembre 2025 – durée : deux heures

Documents et calculatrices interdits.

Lorsque vous effectuez des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, ou sur les équations d'un système linéaire, **vous devez impérativement préciser ces opérations sur votre copie.**

Exercice I

Dire en le justifiant brièvement si les matrices suivantes sont inversibles ou non (on ne demande pas de calculer l'inverse).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(Indication : pour la matrice F , considérer les vecteurs-colonnes.)

Exercice II

On note $f : M_{2,1}(\mathbf{R}) \rightarrow M_{2,1}(\mathbf{R})$ l'application linéaire définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$$

Quelle est la matrice de f ?

Exercice III

(1) Déterminer l'inverse de la matrice $M := \begin{pmatrix} 1 & -3 & -10 \\ 1 & -4 & -14 \\ -5 & 18 & 63 \end{pmatrix}$.

(2) En déduire un vecteur-colonne $X_0 \in M_{3,1}(\mathbf{R})$ tel que $MX_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(3) Calculer MX_0 afin de vérifier que le vecteur-colonne X_0 déterminé à la question précédente satisfait bien la condition voulue. (En cas d'incohérence, revenir à la première question.)

(4) Déterminer des nombres réels a , b et c tels que

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 18 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -10 \\ -14 \\ 63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice IV

Dans cet exercice, on s'intéresse aux puissances A^n de la matrice A définie ci-dessous pour n un entier naturel, où $A^0 = I_3$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, etc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) Calculer A^2 .
- (2) Vérifier que $A^3 = -I_3$.
- (3) Dédurre de la question précédente que $A^4 = -A$ et $A^5 = -A^2$.
- (4) En utilisant que $A^6 = A^3 \cdot A^3$, montrer que A est inversible et que $A^{-1} = -A^2$.

Exercice V

Notons $V_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $V_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, et $W := \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (1) Existe-t-il des nombres réels x_1 et x_2 tels que $x_1 V_1 + x_2 V_2 = W$? Si oui, déterminer un tel couple (x_1, x_2) .
 - (2) Les vecteurs (V_1, V_2, W) forment-ils une famille libre?
 - (3) Les vecteurs (V_1, V_2, W) forment-ils une famille génératrice de $M_{3,1}(\mathbf{R})$?
- (Indication : les deux dernières questions ne nécessitent pas de calculs supplémentaires.)*

Exercice VI

Dans $\mathbf{R}^3$, on définit le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $x - 4y + 3z = 2$ et le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $2x - 3y + z = -1$. Déterminer un paramétrage de l'intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.