

Corrigé de l'examen partiel du 7 octobre 2025

Exercice I

Dans le plan $\mathbf{R}^2$, on considère la droite $\mathcal{D}_1$ donnée par le paramétrage

$$M_1(t) = (-3 + 2t, 2 - t)$$

pour $t \in \mathbf{R}$, et la droite $\mathcal{D}_2$ donnée par l'équation cartésienne

$$y - x + 4 = 0.$$

(1) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_1$.

On remarque que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $(-3 + 2t) + 2(2 - t) = 1$, donc $x + 2y = 1$ est une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_1$.

(2) Déterminer un paramétrage affine pour la droite $\mathcal{D}_2$.

La droite est donnée par l'équation réduite $y = x - 4$ donc on sait par le cours que l'on peut trouver un paramétrage sous la forme $x(t) = t$ et $y(t) = ut + v$ pour tout t réel. En remplaçant de l'équation de $\mathcal{D}_2$ on doit donc avoir :

$$ut + v - t + 4 = 0 \text{ pour tout réel } t.$$

On prend $v = -4$ (avec $t = 0$) et on prend ensuite $u = 1$ pour obtenir le paramétrage

$$x(t) = t ; \quad y(t) = t - 4.$$

(3) Déterminer le point d'intersection A de $\mathcal{D}_1$ et de $\mathcal{D}_2$.

Soit $t \in \mathbf{R}$. Le point $M_1(t)$ appartient à $\mathcal{D}_2$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne définissant $\mathcal{D}_2$, c'est-à-dire si $-(-3 + 2t) + (2 - t) + 4 = 0$. Après calcul, cette condition se reformule en l'égalité $-3t + 9 = 0$, qui équivaut à $t = 3$. Le point d'intersection A de $\mathcal{D}_1$ et de $\mathcal{D}_2$ est donc $A = M_1(3) = (3, -1)$.

(4) Sur une figure, représenter les axes, les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et le point A . Expliquer la méthode utilisée pour tracer les deux droites.

Une manière de construire les deux droites est d'utiliser les paramétrages. La droite $\mathcal{D}_1$ passe par les points $B := M_1(0) = (-3, 2)$ et $C := M_1(1) = (-1, 1)$. La droite $\mathcal{D}_2$ passe par les points $D := M_2(0) = (0, -4)$ et $E := M_2(1) = (1, -3)$.

Exercice II

Soit a un réel fixé. Résoudre le système d'équations suivant en discutant selon la valeur de a :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \\ -x - 2y + z = a \end{cases}$$

Avec l'algorithme du pivot de Gauss, on peut mettre sous forme échelonnée réduite la matrice augmentée associée à ce système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & a \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array} \right).$$

$$\left[\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right]$$

Si $a \neq -1$ le système n'a pas de solution ; et si $a = -1$ on voit que l'on peut choisir y et z quelconque et $x = 1 - 2y + z$.

Exercice III

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x + y + z - t = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

(1) Quelle est la matrice augmentée $\hat{A}$ associée à ce système ?

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

(2) Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice $\hat{A}$ afin d'obtenir une matrice échelonnée et réduite.

On part de $\hat{A}$ et on effectue dans cet ordre les opérations suivantes :

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 ; L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1, \text{ puis,}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 ; L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1, \text{ puis,}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$, pour arriver à une forme échelonnée que l'on réduit via les opérations,

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_3 ; L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2, \text{ puis enfin, } L_2 \leftarrow -L_2 ; L_3 \leftarrow -L_3.$$

On aboutit ainsi à la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \end{array} \right).$$

(3) En déduire l'ensemble des solutions du système.

Via les calculs précédents, les solutions sont de la forme :

$$x = 1 - t, y = -1 - 2t, z = 2 + 4t, t \text{ réel quelconque.}$$

Exercice IV

On fixe un réel a . Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, on considère alors trois plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_{2,a}$ et $\mathcal{P}_{3,a}$ donnés par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + y - z = 1\} \\ \mathcal{P}_{2,a} &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + 2y + az = 2\} \\ \mathcal{P}_{3,a} &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, 2x + ay + 2z = 3\}\end{aligned}$$

(1) Déterminer un paramétrage $M(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$ de la droite $\mathcal{D} := \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_{2,a}$.

Il s'agit de résoudre le système d'équations donné par les équations de $\mathcal{P}_1$ et de $\mathcal{P}_{2,a}$:

$$\begin{aligned}&\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1\end{aligned}$$

Le système est donc équivalent aux deux équations

$$\begin{cases} x = 1 + t - 1 + (a+1)t = (2+a)t \\ y = 1 - (a+1)t \end{cases}$$

La mise sous forme échelonnée nous permet d'exprimer x et y en fonction de z . Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on peut noter $M(t)$ l'unique solution dont la coordonnée z est t , et on obtient ainsi un paramétrage :

$$M(t) = ((2+a)t, 1 - (a+1)t, t)$$

(2) Déterminer l'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}_{3,a}$ en fonction de a . (On notera que $6 + a - a^2 = (a+2)(3-a)$ et on distinguera 3 cas selon les valeurs de a .)

Il s'agit de déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbf{R}$ le point $M(t)$ (de $\mathcal{D}$) appartient à $\mathcal{P}_{3,a}$, c'est-à-dire satisfait l'équation $2x + ay + 2z = 3$. On obtient :

$$2(2+a)t + a(1 - (a+1)t) + 2t = (6 + a - a^2)t + a$$

On doit résoudre l'équation $(6 + a - a^2)t + a = 3$. En utilisant l'indication on voit que ceci équivaut à

$$(a+2)(3-a)t = 3-a.$$

Si $a = 3$ l'équation est donc de la forme $0 = 0$ et tous les réels t sont solutions. Ainsi on obtient que l'intersection dans ce cas est D .

Si $a \neq 3$ alors on simplifie par $3-a$ pour obtenir $(a+2)t = 1$. On distingue alors selon que a vaut -2 ou non.

Si $a = -2$ alors on obtient une équation de la forme $0 = 1$ qui n'a pas de solution donc dans ce cas l'intersection est vide.

Si finalement a est différent de 3 et de -2 alors on voit que l'on obtient $t = \frac{1}{a+2}$. Ainsi l'intersection est réduite à un unique point : $M(\frac{1}{a+2}) = (1, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2})$.

(3) Quelles sont les solutions du système suivant ? (*Indication : ne pas faire de calculs.*)

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases}$$

la réponse est donnée à la question précédente.

Exercice V

Supposons un système d'équations linéaire tel que sa matrice augmentée est de la forme suivante :

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \square & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \square & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \star \end{array} \right),$$

où

le symbole $\star$ peut être remplacé par un coefficient arbitraire (qui peut être nul éventuellement).

le symbole $\square$ doit être remplacé par un coefficient non nul arbitraire.

(1) Quel est le nombre de variables dans ce système d'équations linéaires associé à $\widehat{A}$? Combien y a-t-il d'équations?

Il y a 3 équations et 4 inconnues.

(2) Peut-on dire si le système est compatible ou incompatible ? Quelle information serait nécessaire pour pouvoir trancher entre ces deux cas (compatible ou incompatible) ?

Cela dépend de la valeur du symbole $\star$ sur la dernière ligne. S'il vaut 0 alors le système est compatible, sinon il ne l'est pas.

(3) On suppose désormais que le système est compatible. Quelles sont les inconnues principales et secondaires ? Y a-t-il un nombre fini ou infini de solutions ?

x_1 et x_3 sont les variables principales alors que x_2 et x_4 sont les variables secondaires. Il y a plus d'une variable secondaire et le système est compatible donc il y a une infinité de solutions.